Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
ISSN: 1665-2436
ISSN: 2007-6819
relime@clame.org.mx
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Organismo Internacional

Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional

Carrión Miranda, Vicente; Pluvinage, François
Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 17, 4-2, 2014
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Organismo Internacional
Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33554784003
DOI: https://doi.org/10.12802/relime.13.17413

Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional

Registers and strata in MWS to the service of functional thinking

Vicente Carrión Miranda
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México

DOI: https://doi.org/10.12802/relime.13.17413
Redalyc: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33554784003

François Pluvinage
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México

Recepción: 20 Febrero 2013
Aprobación: 15 Diciembre 2013

Resumen:

En este artículo nos interesamos en el tema de funciones reales de variable real, desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). En la primera parte señalamos observaciones hechas con varios públicos que dan crédito a la hipótesis de que el saber álgebra no es suficiente para los tratamientos que ponen en juego las funciones. Se necesita un pensamiento que calificamos como funcional que precisamos en una segunda parte. En la última parte presentamos los resultados de un taller exploratorio dirigido a profesores del nivel medio superior, organizado con el propósito de profundizar nuestra hipótesis. La especificidad del estudio propuesto fue que los participantes trabajaron en grupos, considerando para todos la misma situación matemática pero cada grupo utilizaría una herramienta diferente. Los grupos, caracterizados por las herramientas que utilizaron, fueron los siguientes: "A pie" (papel - lápiz), hoja de cálculo, calculadora, software de cálculo formal y software de geometría dinámica. Los participantes se dieron cuenta de cómo el uso de herramientas tecnológicas ejerce influencia en el proceso de resolución y en el manejo de conceptos.

Palabras clave: Actividad matemática, Pensamiento funcional, Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), Espacio de Trabajo Matemático (ETM).

Abstract:

In this article we are interested on real functions of a real variable, from the perspective of Mathematical Working Spaces (MWS). In a first part of the study, we point out observations made at various levels of teaching, which may give credit to the hypothesis that knowing algebra is not sufficient for treatments which bring the functions into play. It needs a so called functional thought, that we precise in a second part. In a third part, we present the results of an exploratory workshop aimed for high school mathematics teachers, with the purpose of go deeply into our hypothesis. The specificity of the proposed study was that participants worked in groups, all of them considering the same mathematical situation, but each group using its own tool. Groups, characterized by the tools they used, were the following: "On foot" (paper - pencil), Spreadsheet, Calculator, Symbolic Calculus software, Dynamic Geometry software. Participants realized how the use of technological tools exerts influence on the resolution processes and the management of concepts.

Keywords: Mathematical activity, Functional thinking, Information and communications technology (ICT), Mathematical Working Space (MWS).

Resumo:

Neste artigo estamos interessados em estudar funções reais duma variável real, no quadro teórico dos espaços de trabalho matemáticos (ETM). Na primeira parte do artigo, apresentamos observações feitas a diferentes níveis de ensino, o que pode dar crédito à hipótese de que o conhecimento da álgebra não é suficiente para tratamentos envolvendo funções, mas que há necessidade de um pensamento – a que chamamos funcional –, e que é especificado na segunda parte. Na terceira parte, apresentamos um workshop exploratório destinado a professores do ensino secundário, organizado com o objectivo de aprofundar a nossa hipótese. Neste estudo, os participantes trabalharam em grupos, estudando todos a mesma situação matemática, cada grupo usando uma ferramenta própria. Os grupos, caracterizados pelas ferramentas que usaram, foram: "de caminhada" (papel e lápis), planilha, calculadora, software de cálculo formal, software de geometria. Os participantes aperceberam-se da influência do uso das ferramentas tecnológicas nos processos de resolução e na gestão dos conceitos.

Palavras-chave: Actividade matemática, Pensamento funcional, Tecnologias de informação e comunicação (TIC), Espaço de Trabalho Matemático (ETM).

Résumé:

Dans cet article, nous nous intéressons à la question des fonctions réelles d'une variable réelle, du point de vue des espaces de travail mathématiques (ETM). Dans une première partie de l'étude, nous présentons les observations faites à différents niveaux d'enseignement, pouvant donner crédit à l'hypothèse que la connaissance de l'algèbre n'est pas suffisante pour les traitements qui mettent en jeu des fonctions, mais qu'il y a besoin d'une pensée que nous qualifions de fonctionnelle et que nous précisons dans une deuxième partie. Dans une troisième partie, nous présentons un atelier exploratoire organisé pour des enseignants de mathématiques du secondaire, avec l'objectif d'approfondir notre hypothèse. La spécificité de l'étude proposée était que les participants travaillaient en groupes, tous étudiant la même situation mathématique, mais chaque groupe à l'aide de son propre outil. Les groupes, caractérisés par les outils qu'ils ont utilisés, étaient les suivants. «A pied» (papier - crayon), tableur, calculatrice, logiciel de calcul symbolique, logiciel de géométrie. Les participants ont réalisé comment l'utilisation d'outils technologiques influe sur les processus de résolution et la gestion des concepts.

Mots clés: Activité mathématique, Raisonnement fonctionnel, Technologies de l'information et de la communication (TIC), Espace de Travail Mathématique (ETM).

1. Deficiencias observadas en el trabajo con funciones

Houdement y Kuzniak (2006) introducen el concepto de Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) considerándolo como un entorno en el que se articulan tres componentes: un conjunto de objetos, un conjunto de artefactos y un marco referencial. En un artículo más reciente, Kuzniak (2011) se interesa en la trasposición del mismo concepto a otros campos de la matemática. En particular, subraya la necesidad de introducir un componente semiótico. En este documento nos interesa el tema de funciones reales de variable real. En la modelación son frecuentes las situaciones geométricas que dan lugar a funciones. En el ejemplo de cajas que sigue se presentan dos ejercicios de este tipo. Se aplicaron a estudiantes de varios niveles, desde el último año de preparatoria hasta la maestría, a profesores en formación inicial y en talleres de actualización. Un primer análisis de resultados de ambos ejercicios se encuentra en Moreno Guzmán, S. y Cuevas Vallejo, C. A. *Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial* (2004).

Ejercicio 1

En las esquinas de una hoja cuadrada de longitud 13 centímetros se recortan cuadrados de lado x para construir una cajita. Determinar la función *volumen*, $V(x)$, su dominio y su imagen.

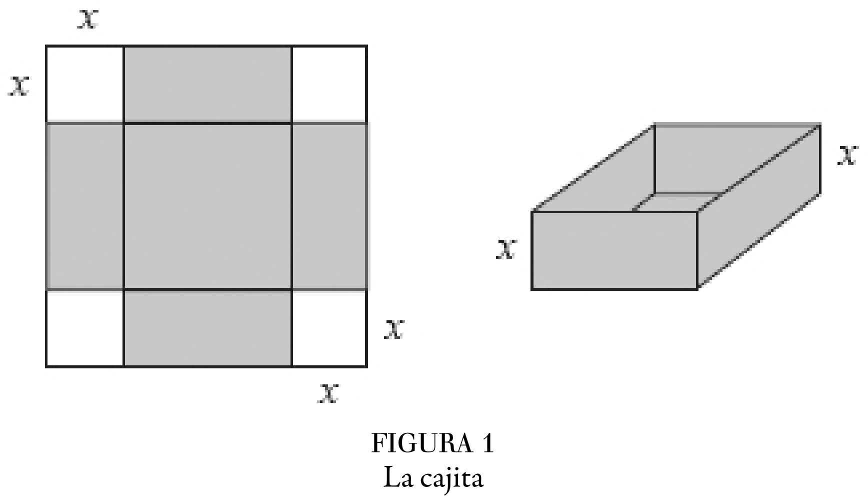


FIGURA 1
La cajita

La pregunta sobre el dominio de la función es elemental; sin embargo, no da lugar a un éxito general. El problema no se sitúa en la fórmula, todos obtienen $V(x) = x\,(13-2x)^2$. Aproximadamente uno de cada cinco encuestados declara que el dominio es el intervalo [0, 13], en lugar de [0, 13/2]. Esto significa que en el análisis de la situación no incursionan en el modo de pensamiento que llamamos *funcional*. Por otra parte, la obtención de la imagen de la función es un tema propio de Cálculo; para obtenerlo, hace falta determinar el máximo local de la cúbica representada por $V(x)$.

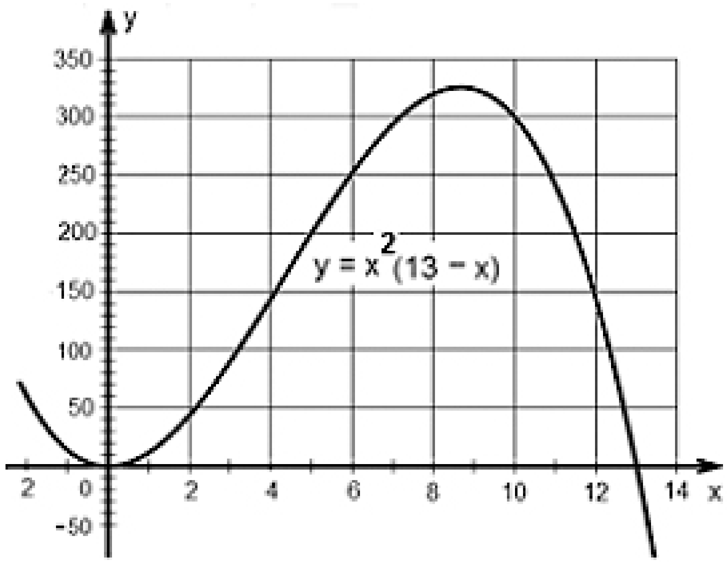


FIGURA 2
Cúbica de la función volumen de la cajita

Ejercicio 2

Determinar el volumen máximo que puede tener una cajita sin tapa, de base cuadrada, construida con una lámina cuadrada de 13 centímetros de lado; la base se forma con una esquina de la lámina (Figura 3).

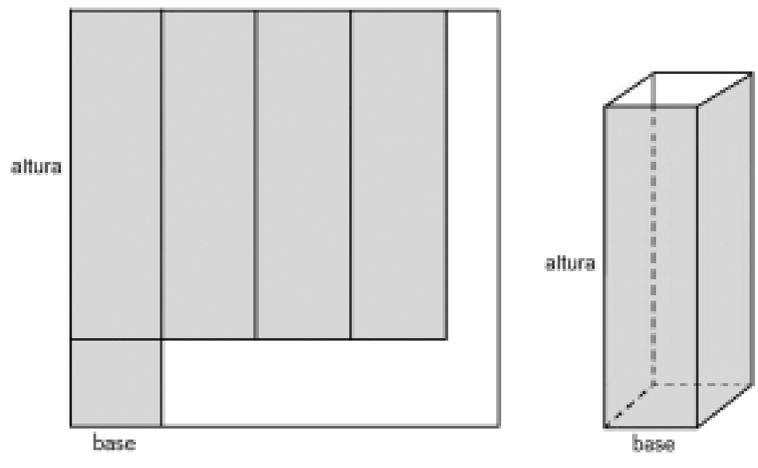


FIGURA 3
Plantilla de una caja de base cuadrada

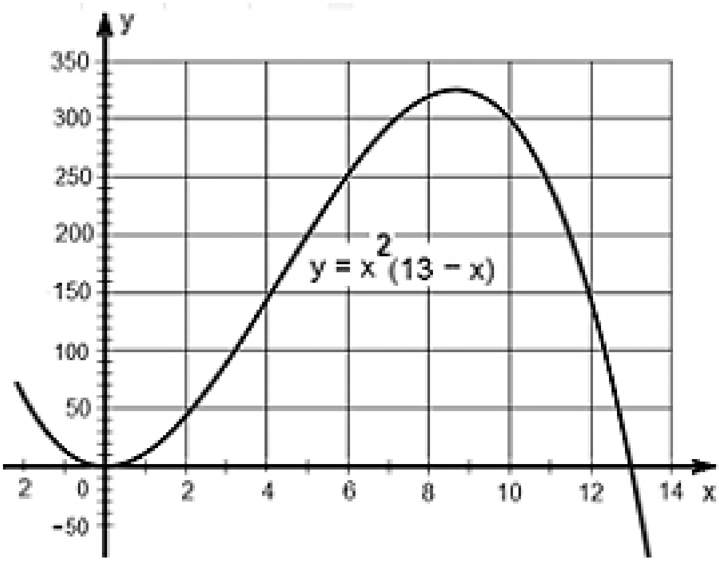


FIGURA 4
Cúbica de la función volumen

Todos los encuestados, a partir del lado x de la base, determinaron el volumen V $(x) = x^2(13-x)$, tal como lo hicieron en el *Ejercicio 1*. Los profesores y la mayor parte de estudiantes, los que sabían derivar, obtuvieron el máximo local en el punto de abscisa 26/3, como se ilustra en la cúbica de la Figura 4.

Observación. Para encontrar los máximos de una curva en México rige como un "rito" el llamado *criterio de la segunda derivada*: un máximo es un punto en el que la derivada es nula y la segunda derivada es negativa. En Francia el "rito" es la llamada *tabla de variaciones*: los cambios de signo de la derivada permiten distinguir los mínimos y los máximos sin necesidad de derivar una segunda vez, a partir de una fila que contiene información sobre la función en estudio colocada debajo de otra fila que contiene su derivada.

TABLA I
Variaciones de la función f (x) = 13x2–x3

x	$-\infty$		0		26/3		13	∞
$y' = 26x - 3x^2$		−	0	+	0	−		
$y = 13x^2 - x^3$	∞	⟶	0	⟶	8788/27	⟶	0	⟶ $-\infty$

Dentro del marco de un simposio sobre Espacios de Trabajo Matemático, nos parece importante señalar la diferencia de naturaleza semiótica entre modos de estudio en dos países; sin embargo, no hemos aplicado en Francia el mismo ejercicio ni analizado las respuestas de estudiantes franceses. En el caso de México las observaciones arrojan que la mayoría de los estudiantes no se dieron cuenta que el dominio de la función del *Ejercicio 2* es [0, 13/4], ni que el máximo del polinomio se sitúa fuera de ese intervalo. ¡Pensamiento funcional limitado! Algunos de los que se percataron que el máximo local de la cúbica se encuentra fuera del dominio de la función concluyeron que el problema *no tiene solución*. ¿Podría el uso de la tabla de variaciones hacer desaparecer esta conclusión errónea?

Los ejercicios anteriores no introducen parámetros con papel preponderante en la resolución. Nos parece que para profundizar estas observaciones es conveniente introducir una situación que depende de un parámetro. Con estudiantes de la Maestría en Ciencias, Especialidad de Matemática Educativa, en el Cinvestav - IPN, hemos experimentado la siguiente situación:

Problema

Sobre los lados sucesivos *AB*, *BC*, *CD* y *DA* del rectángulo *ABCD* se trazan los puntos *P*, *Q*, *R* y *S*, tales que *AP* = *BQ* = *CR* = *DS* (Figura 5).

1. ¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero *PQRS*?
2. ¿Qué valor de x produce el cuadrilátero *PQRS* de área mínima?

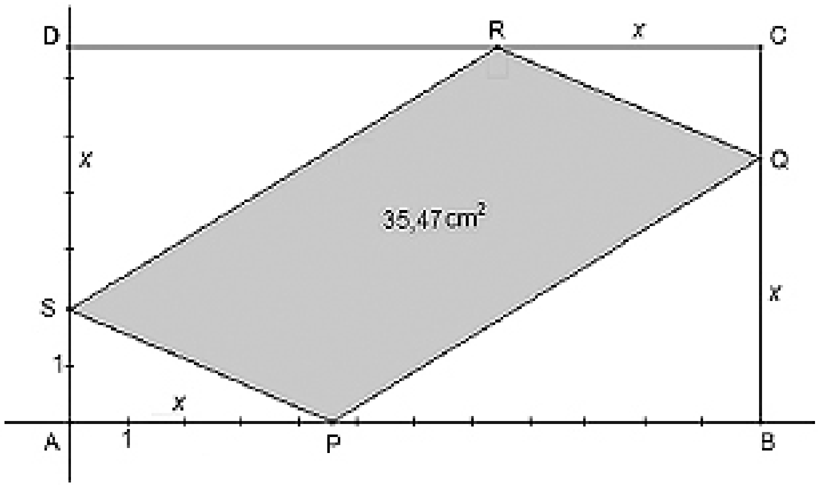


FIGURA 5
Un cuadrilátero en un rectángulo

El problema se planteó en el contexto de un diseño de escenario didáctico apoyándose en *software* de geometría dinámica. Por eso no registramos datos sobre su resolución matemática; sin embargo, podemos decir que son pocos los alumnos de maestría que señalaron que la solución depende de la razón *BC*/*AB*. Vemos que si el máximo no se encuentra en uno de los extremos del dominio entonces la solución corresponde a un cero de la derivada, siendo el caso si se cumple la relación $1/3 \leq BC/AB \leq 3$. El ejemplo es semejante al de la caja anterior. La situación matemática general es la siguiente: Una función continua sobre un intervalo cerrado tiene, necesariamente, un máximo en un punto del intervalo. Puede ser que el máximo se presente en uno de los extremos del intervalo si la función es derivable y si todos los valores de la derivada son diferentes de cero en ese intervalo. Un resultado semejante es válido para mínimos.

Si denotamos con a la longitud del lado *AB* del rectángulo y con b la longitud del lado *BC* y si del área del rectángulo se resta la suma de las áreas de los triángulos de las esquinas obtenemos

Área ($PQRS$) = $A(x) = ab - x(a - x) - x(b - x) = 2x^2 - (a + b)x + ab$.

La derivada A#(x) = $4x - (a + b)$ es nula en $x = \frac{a+b}{4}$. Puesto que los lados a y b desempeñan un mismo rol se pueden simplificar las escrituras al suponer que $b \leq a$. En tal situación, el dominio de la función es el intervalo $[0, b]$, porque x no puede ser mayor que la longitud del menor de los lados del rectángulo.

La condición $(a + b)/4 \leq b$ es equivalente a la desigualdad $a+b \leq 4b$; o sea, $a \leq 3b$; o también $b/a \geq 1/3$. Si el rectángulo no cumple esta condición entonces el mínimo del área se obtiene en $x=b$ (Figura 6, con valores $a=10$ y $b=3$).

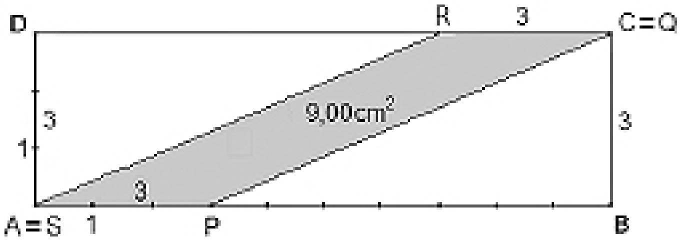


FIGURA 6
Cuadrilátero de área mínima en el rectángulo 10×3

A partir de los ejercicios propuestos en las encuestas, o de las evaluaciones, se concluye que los participantes manifestaron tendencias a conductas algorítmicas. Por ejemplo, al repetir la aplicación de los ejercicios 1 y 2 anteriores quedó asentado lo siguiente: “estos resultados comprobaron que los estudiantes de esta experiencia tenían una concepción de función limitada a una regla de correspondencia” (Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005, p. 188). Hoy, a la luz de investigaciones sobre los ETM, podemos afirmar que las conductas de los estudiantes se interpretan como la apropiación de un ETM personal, siendo el espacio de trabajo más algebraico que funcional. Tal orientación se puede relacionar con la separación del estudio de funciones de la siguiente manera:

Un primer tipo de estudios, bajo el título “Cálculo”, a veces complementado con términos como Infinitesimal, Diferencial e Integral, correspondiente a una colección de reglas algorítmicas; por ejemplo, de derivación.

Otra parte que toma en cuenta aspectos topológicos bajo el nombre de “Análisis Funcional”. Para precisar una hipótesis de esta naturaleza, que incluya ETM, es menester considerar aspectos semióticos tales que su papel es importante en las situaciones estudiadas.

Tales estudios se consideran en el siguiente apartado.

2. Estrato funcional y registros de expresión para representar las funciones

En la historia de su desarrollo, desde Leibniz que introdujo la palabra latina *functio*, el objeto función se presenta a través de diversos registros de expresión: lengua usual (utilizada, por ejemplo, en la descripción de movimientos o de evoluciones), representaciones gráficas, tablas de valores o fórmulas algebraicas. Es probable que, de los objetos matemáticos, el objeto función es el que tiene mayor número de representantes. Como lo supone Raymond Duval (1993), la comprensión integrativa de un contenido conceptual se sustenta, al menos, en la coordinación de dos registros de representación. Sin embargo, parece que muchos estudiantes consideran que tal objeto es la escritura de una fórmula, aun cuando saben con exactitud, lo que es ostensivo en esa fórmula, como ocurre con la expresión algebraica $y=ln(x)$. Para ellos, la escritura $y=ln(x)$ significa *más* una función que la escritura

$$y = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Además, esta escritura como integral definida para la función logaritmo neperiano no es práctica para calcular sus valores numéricos sino se cuenta con recursos tecnológicos. En tiempos pasados, la obtención de estos valores para realizar cálculos surgía de las famosas *tablas de logaritmos*.

Lo que acabamos de ver no representa una situación general puesto que muchas fórmulas tienen la característica de mostrar el objeto función al mismo tiempo que expresan un programa de cálculo, numérico o formal. De aquí surge

Además, esta escritura como integral definida para la función logaritmo neperiano no es práctica para calcular sus valores numéricos sino se cuenta con recursos tecnológicos. En tiempos pasados, la obtención de estos valores para realizar cálculos surgía de las famosas tablas de logaritmos.

Lo que acabamos de ver no representa una situación general puesto que muchas fórmulas tienen la característica de mostrar el objeto función al mismo tiempo que expresan un programa de cálculo, numérico o formal. De aquí surge la expresión *procept* que combina *proceso* y *objeto*, introducida por Gray y Tall (1994). Su centro de interés es la adquisición de los conocimientos conceptuales y procedimentales necesarios para la práctica del cálculo. No cabe duda que la noción de *procept* tiene un lugar imprescindible en estudios de cálculo y análisis funcional; sin embargo, otros complementos son necesarios en estudios educativos. Un enfoque que requiere atención se relaciona con la resolución de problemas y, correlativamente, con los espacios de trabajo matemáticos idóneos. El manejo de representaciones semióticas es una parte importante en el tipo de actividades que se consideran en el presente trabajo.

En forma particular, las operaciones relacionadas con el cambio de variable o la composición de funciones, $g_0 f(x) = g(f(x))$, tienen un papel importante en la resolución de problemas relacionados con funciones. Su manejo adecuado y correcto corresponde al dominio de una competencia que abarca, a la vez, la adquisición del procept de función y habilidades en tratamientos algebraicos y uso de registros de expresión. Consideramos aquí la noción de *competencia* en matemáticas como se precisa en Adjiage y Pluvinage (2008), con base en fundamentos empíricos (observaciones de aula y resultados surgidos de encuestas locales así como de las encuestas internacionales PISA) y cognitivos (en particular, las necesidades de adquisiciones sintácticas). No tiene el carácter global de la "matematice alliteracy" como equivalente a la competencia lingüística general, presentada en Niss (2003); tampoco puede referirse al conocimiento de elementos separados, o tratamientos aislados. Para que sea completa, autónoma y estable, una competencia debe tener como característica el dominio de una técnica de expresión.

Proponemos un ejemplo sencillo de resolución podrá facilitar la comprensión de estas consideraciones.

Enunciado: Obtener una función f que para todo valor real de x satisfaga la relación

(I) $2f(x)+f(1-x)=3x^2$.

Solución: El cambio de variable $x \to 1 - x$ transforma la relación (I) en

(2) $2\,f(1-x)+f(x)=3(1-x)^2$,

puesto que $1 - (1-x) = x$.

De la combinación $2 \times (1) - (2)$ resulta $3f(x) = 6x^2 - 3(1-x)^2$. De aquí se obtiene la respuesta siguiente: $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

Este tipo de enunciado, donde se relacionan valores de una función desconocida f dependiente de x y de $c-x$, donde c es un número real dado, lo hemos propuesto a diversos públicos de estudiantes universitarios que han estudiado Cálculo. En su mayoría no lo resuelven y declaran que no saben qué tratamiento aplicar. No es fácil para ellos encontrar la idea clave que proviene de la consideración de la transformación $\mathcal{T}$ de la recta real definida por $\mathcal{T} : x \to 1-x$.

La resolución pasa así por una coordinación del registro algebraico con imaginación figural. Se debe visualizar como una transformación de la recta numérica la relación entre los valores x y $1-x$, presentes en el enunciado. Se trata de una simetría respecto al punto de abscisa 1⁄2, el punto fijo de la transformación $x \to 1-x$. Esta transformación es involutiva, es decir, si se aplica a una imagen se obtiene la original; en otras palabras, si dada la transformación $\mathcal{T} : x \to 1-x$ entonces se tiene $\mathcal{T} : 1-x \to x$. La idea del cambio de variable que intercambia $f(x)$ y $f(1-x)$ permite formar un sistema en $f(x)$ y $f(1-x)$ únicamente a partir de la ecuación (1).

Este juego de marcos en el sentido de Régine Douady (1986) refiere a un proceso de visualización, presente en el esquema que está en la introducción de este volumen (*Espaces de travail mathématique. Point de vues et* *perspectives*, Figura 3). El recurso de consideraciones geométricas no es aparente en el enunciado precedente (por eso es un problema poco exitoso); sin embargo, se introduce en forma explícita en situaciones típicas presentes en la enseñanza del Cálculo. El uso correcto de escrituras numéricas en estudios de geometría corresponde a la adquisición de una nueva técnica de expresión. Por ejemplo, al aplicar el *Ejercicio 2* de la caja al grupo (Apartado 1) nos tocó observar un éxito casi total en el cálculo algebraico y un fracaso general en la consideración del dominio de la función, lo que apoya la hipótesis de un cambio de estratos de competencia al pasar del álgebra a los tratamientos funcionales. Respecto a los individuos capaces de utilizar en forma correcta estos tratamientos podemos declarar que han logrado entrar al llamado *Estrato de Competencia Funcional* (Adjiage & Pluvinage, 2012). A la vez, corresponde a rupturas en el modo de pensamiento y en los medios de expresión relacionados con los tratamientos algebraicos. Estas rupturas son manifiestas en la situación que presentamos a continuación, una parte del estudio empírico expuesto en el apartado 4.

En una fórmula como $y = x + \sqrt{x^2 - 4ax}$, sin más precisiones, todos vemos una función real de variable x, donde y depende del parámetro a. El programa de cálculo que la describe, expresado en forma lingüística, es el siguiente: Se hace el cálculo de $x^2 – 4ax$. Si se llega a un resultado positivo se obtiene su raíz cuadrada y se le suma x; por el contrario, si se llega a un resultado negativo se declara que x está situada fuera del dominio de la función. Los estudiantes acostumbrados al diseño de tablas de variaciones pueden tener tanto valores positivos como negativos para el parámetro a. Para obtener el signo de *y#* en la tabla II sólo hace falta observar la igualdad

$$\left(\frac{x-2a}{\sqrt{x(x-4a)}}\right)^2 = \frac{x^2-4ax+4a^2}{x^2-4ax} = 1 + \frac{4a^2}{x^2-4ax}.$$

La derivada *y#* no puede ser igual a la unidad si $a \neq 0$; esto significa que la derivada no se anula.

TABLA II
Variaciones de $y=x+\sqrt{x}\,^{2}-4ax$

$a>0$	x	$-\infty$		0		$4a$		∞
	$y'=\frac{x-2a}{\sqrt{x(x-4a)}}+1$		$-$	$\Vert$	no definida	$\Vert$	$+$	
	$y=x+\sqrt{x^2-4ax}$		$\searrow$	0	no definida	$4a$	$\nearrow$	∞
$a<0$	x	$-\infty$		$4a$		0		∞
	$y'=\frac{x-2a}{\sqrt{x(x-4a)}}+1$		$-$	$\Vert$	no definida	$\Vert$	$+$	
	$y=x+\sqrt{x^2-4ax}$	$-a$	$\searrow$	$4a$	no definida	0	$\nearrow$	∞

El caso a=0 conduce a la igualdad $y= x+|x|$ que puede parecer evidente; sin embargo, sorprende que muchos estudiantes y profesores tienen dificultades para obtenerla porque desconocen la fórmula $\sqrt{x^2} = |x|$. Además, observamos algo que ocurre con un cambio de registro y extraña a casi todos los públicos. Podemos darnos cuenta que al pasar del registro gráfico al geométrico, si $a \neq 0$ la curva obtenida es un *trozo de hipérbola*. El fenómeno subyacente es que el cambio de registro está acompañado de un cambio de marco teórico. El cálculo algebraico formal que conduce a cambiar tanto de registro como de marco, en el sentido de Régine Douady (1986), consiste en aislar la raíz cuadrada y, después, elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad, como sigue:

$$(1)\ y = x + \sqrt{x^2 - 4ax}$$

$$(2)\ y - x = \sqrt{x^2 - 4ax}$$

$$(3)\ (y - x)^2 = x^2 - 4ax$$

$$(4)\ y^2 - 2xy + 4ax = 0.$$

La dificultad que introduce este cálculo formal es que al elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad no obtenemos otra que sea equivalente. La igualdad (2) implica la (3); sin embargo, la recíproca es falsa. Es por eso que la hipérbola de ecuación $y^2 -2xy-4x= 0$, Figura 7, contiene una parte, en trazo discontinuo, que no pertenece a la gráfica de la función estudiada.

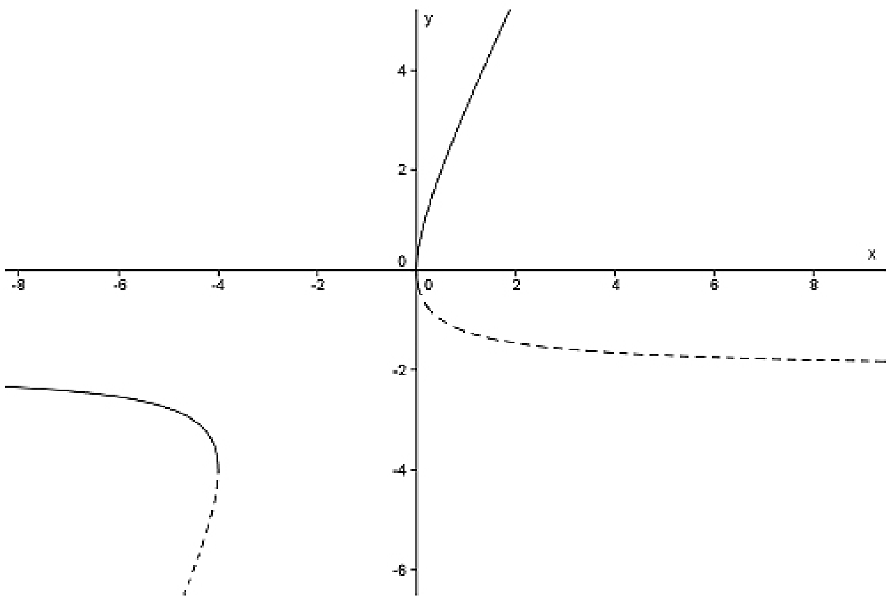


FIGURA 7
Gráfica de la función si a = −1 (trazo continuo) e hipérbola completa.

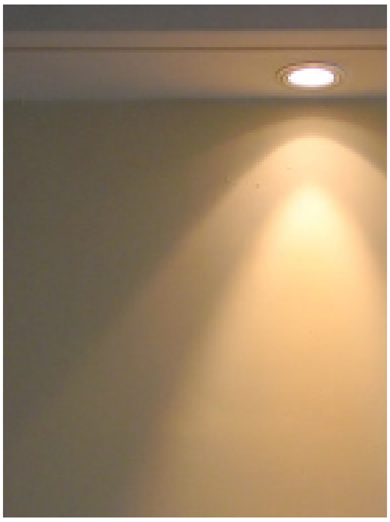


FIGURA 8
Imagen de hipérbolas en Wikipedia inglés, artículo Hyperbola.

Podemos analizar la Figura 7 apoyándonos en dos marcos referenciales, el plano cartesiano para representar gráficas de funciones y el plano de la geometría euclidiana. El segundo marco se relaciona con la representación de fenómenos de nuestro medio ambiente (Figura 8). En la historia de la matemática la geometría euclidiana se estudió varios siglos antes del surgimiento del plano cartesiano.

Al finalizar este apartado, con relación a los espacios de trabajo matemático, planteamos las preguntas siguientes:

- ¿En el estudio de funciones reales de una variable real la diferencia entre Cálculo Infinitesimal y Análisis Funcional corresponde a un cambio de ETM?

- ¿Cuál puede ser el papel de los artefactos en el trabajo sobre funciones reales de una variable real, en particular, las herramientas proporcionadas por las tecnologías informáticas?

Respecto a la primera pregunta nuestra hipótesis es que en un proceso de enseñanza es conveniente y necesario presentar el paso del Cálculo Diferencial e Integral al Análisis Funcional como la génesis de un nuevo ETM. El segundo, el Análisis Funcional, se apoya en elementos de topología, poco presentes en el primero. Y en nuestra opinión, la presencia de consideraciones topológicas en el Cálculo resulta incómoda a los estudiantes, según lo muestran, por ejemplo, las conocidas dificultades generadas por tópicos como límites de sucesiones.

Respecto a la segunda pregunta, necesitamos más observaciones de campo. Precisamente, el presente artículo pretende contribuir a exhibir reflexiones de los estudiantes; son reflexiones que acompañan al recurso de determinado artefacto.

3. Escenarios didácticos para profesores

Con el fin de profundizar las preguntas planteadas y, en particular, proponer elementos posibles de respuesta nos interesó elaborar escenarios didácticos para la formación continua de docentes. Los escenarios que aplicamos en esta formación continua de profesores se apoyan en la selección de una colección de problemas que conducen al estudio de la magnitud de un fenómeno, la variación de la magnitud del fenómeno y la rapidez con que cambia la variación de la magnitud del fenómeno. Se eligen problemas que pueden traducirse en funciones incluidas en los programas escolares. Las principales fases de estudio de los problemas presentes en nuestros escenarios didácticos son las siguientes:

- Presentación geométrica de la situación donde se trabaja el problema en forma concreta. También se simula mediante una sucesión de diagramas que ilustran los cambios de los elementos geométricos que representan las variables independiente y dependiente. Además, en el plano se usa una representación gráfica de la covariación de los datos surgidos de las mediciones de aspectos de la realidad, o de su simulación.
- Introducción de tablas que representan al fenómeno, a la rapidez con que varía el fenómeno y a la rapidez con que cambia la variación del fenómeno. Se emplea una Hoja Electrónica de Cálculo para el procesamiento de la información.
- Resolución del problema en forma algebraica. Se analiza el comportamiento de la función en puntos o intervalos que reflejan características, o relaciones entre los elementos de la función y los del problema, en el dominio de definición de la función. Así puede considerarse el paso entre el estrato algebraico y el estrato funcional.
- Profundización y generalización de la situación; por ejemplo, al remplazar datos numéricos por parámetros que extienden el estudio de una función a familias de funciones.

La aplicación de este tipo de escenarios didácticos en la formación continua de docentes nos proporcionó una experiencia amplia; sin embargo, en este texto, nos limitamos a presentar un taller que planificamos, específicamente, a la luz de las consideraciones sobre los ETM presentados en los apartados anteriores. Por esta razón, la organización del taller no sigue el orden de las fases presentadas, a pesar de tener todos los elementos señalados; por ejemplo, un estudio geométrico sólo se tiene en la etapa 4. Después de la presentación del escenario del taller, donde los tiempos indicados son vinculantes, reportamos algunas observaciones procedentes a su aplicación a profesores de matemáticas del nivel medio superior.

Escenario de taller de actualización dirigido a profesores de nivel medio superior

Enunciado presentado a los participantes:

En el campo de los números reales, $\mathbb{R}$, se considera la siguiente ecuación, dependiente del parámetro a:

$$x+\sqrt{x^2-4ax}=3a.$$

En la Tabla que sigue, escribe cruces (×) en las celdas, según convenga, de manera que se obtengan relaciones correctas entre filas y columnas.

	$a<0$	$a=0$	$a>0$
La ecuación no tiene soluciones.			
La ecuación tiene exactamente una solución.			
La ecuación tiene exactamente dos soluciones.			
La ecuación tiene una infinidad de soluciones que no cubren $\mathbb{R}$.			
La ecuación tiene todo elemento de $\mathbb{R}$ como solución.			

Desarrollo del taller previsto (los tiempos dados como indicativos, no imperativos) y aplicado

Primera etapa (40 minutos). Se ha previsto que los asistentes se dividen en grupos de tres participantes y cada grupo estudia el enunciado sólo en uno de los siguientes entornos:

- Con papel y lápiz ("A pie")
- Con calculadora graficadora (posible: Tipo *Voyage 200*)
- Con *software* de cálculo formal (posibles: *Derive o Maple*).
- Con hoja de cálculo (*Excel*).
- Con *software* algebraico - geométrico (posibles: *GeoGebra*, *Sketchpad* o Cabri).

En el taller contamos con treinta participantes, dos grupos trabajaron con papel y lápiz, dos con calculadora, dos con *Derive*, dos con *Excel* y dos con *Sketchpad*. Es importante señalar que los profesores de cada grupo usaron la tecnología con base en sus experiencias en las técnicas utilizadas. Esto significa, por ejemplo, que los profesores que formaron el grupo *Excel* ya tenían experiencia en el uso de la *Hoja de Cálculo*. Sin embargo, su experiencia era personal y no procedía del uso del recurso en sus clases. Un parámetro de interés para precisar en un experimento posterior es considerar el uso de *Excel* en clases conducidas por profesores.

Segunda etapa (30 minutos). Cada grupo escribió un breve reporte de su estudio enfatizando los métodos usados. En conclusión, dicen si el enunciado les parece adecuado para estudiantes del nivel medio superior o si prefieren presentar la misma situación con otro enunciado, o si inician con un estudio introductorio (¿cuál?) antes de considerar la situación en estudio.

Tercera etapa (1 hora). Síntesis general en el grupo completo.

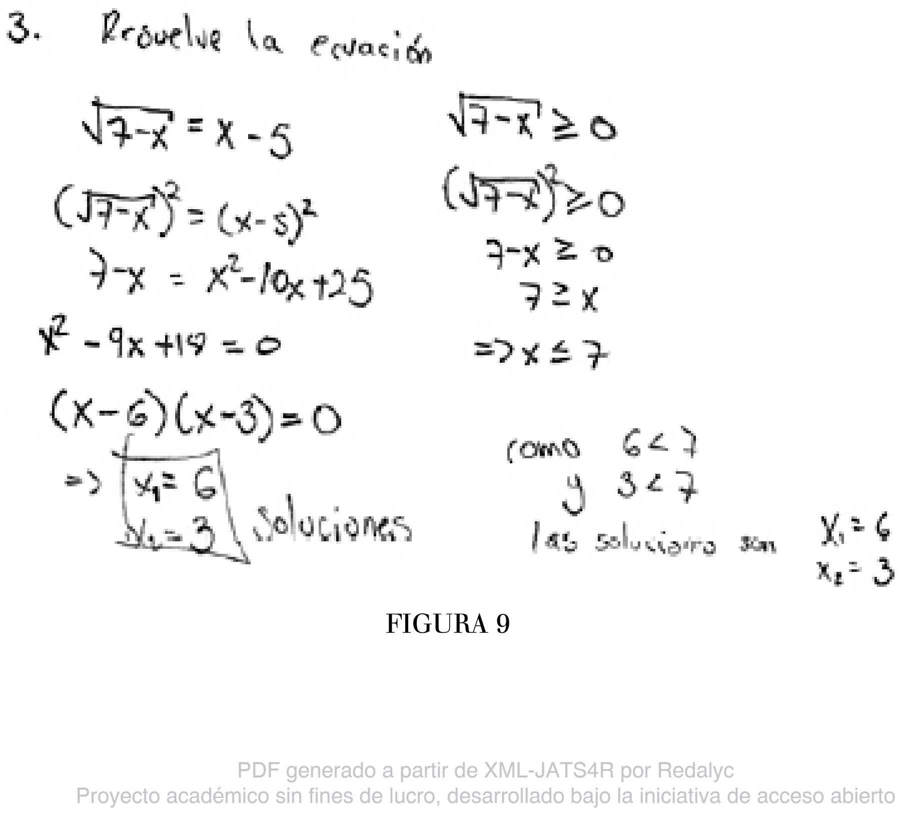
Cuarta etapa (individual 20 minutos). En el plano euclidiano, estudios de la función

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4a} - 3a$$

Y de la curva de ecuación

$$y^2 - 2xy - 6ax + 6ay + 9a^2 + 4a = 0.$$

Quinta etapa (Individual, 45 minutos). Comentar el siguiente procedimiento de resolución de una ecuación presentado por un alumno, citado en Pluvinage y Marmolejo (2012).


3. Resuelve la ecuación

$\sqrt{7-x} = x - 5$

$(\sqrt{7-x})^2 = (x-5)^2$

$7 - x = x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$(x-6)(x-3) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = 6 \\ x_2 = 3 \end{matrix}}$ Soluciones

$\sqrt{7-x} \geq 0$

$(\sqrt{7-x})^2 \geq 0$

$7 - x \geq 0$

$7 \geq x$

$\Rightarrow x \leq 7$

como $6 < 7$

y $3 < 7$

las soluciones son $x_1 = 6$

$x_2 = 3$

FIGURA 9

Luego, en el grupo completo, durante una hora, se propuso el diseño de una secuencia didáctica para el aprendizaje de la resolución de ecuaciones que presentan radicales y/o fracciones.

4. Apuntes sobre la aplicación del taller presentado y los tratamientos observados

El taller se aplicó los días 24 y 25 de mayo de 2012, en Tlanchinol, Hidalgo, a unos 270 kilómetros de la Ciudad de México, a un grupo de profesores del norte del Estado. No podemos pretender que, en términos de conocimientos de conceptos y métodos, lo observado tenga carácter representativo de la población docente, sino en cuanto a las formas de organizarse y de usar las herramientas de cálculo numérico, formal o de trazo. Primero reportamos las tendencias principales que se observaron. Luego nos interesamos en las producciones de ciertos grupos. Una tendencia fuerte en el estudio de la ecuación propuesta fue apoyarse en una representación gráfica, a pesar de la dificultad limitada de la resolución algebraica que presentamos a continuación

$$(1)\ x+\sqrt{x^2-4ax}=3a$$
$$(2)\ \sqrt{x^2-4ax}=3a-x$$
$$(3)\ x^2-4ax=9a^2-6ax+x^2$$
$$(4)\ 2ax=9a^2.$$

Existe equivalencia entre las igualdades (1) y (2) y entre las igualdades (3) y (4); sin embargo, no la existe entre las ecuaciones (2) y (3), sólo hay implicación en el sentido de (2) a (3). No obstante, para la mayoría de los participantes esto parece ser el *nudo gordiano* del problema. Por otra parte, cuando se llega a (4) es necesario distinguir la situación $a = 0$, valor con que la igualdad siempre es válida. Los demás casos conducen al único valor posible $x = 9a/2$.

Queda por comprobar el signo de $3a - x$, porque una solución de (3) no es, necesariamente, solución de (2). Se debe cumplir la condición $3a - x \geq 0$. Sustituyendo $9a/2$ en $3a - x$ se obtiene $-3a/2$. Entonces, el valor $9a/2$ es solución simultánea de (3) y (2) sólo si a es negativo.

El análisis meramente algebraico que necesita el estudio constituyó un obstáculo que bloqueó a los participantes. En la Figura 10 presentamos un intento inconcluso de resolución algebraica de uno de los grupos “A pie”. El cálculo formal se encuentra tachado a pesar de ser correcto.

Observación: Al lado de la parte tachada se ve un cálculo numérico y un estudio algebraico en $a = 0$ que se suspende al llegar a la escritura $x+\sqrt{x^2}$. Más adelante comentamos las dificultades de la raíz cuadrada de un cuadrado y en la Figura 11 se ve un tratamiento erróneo de este objeto.

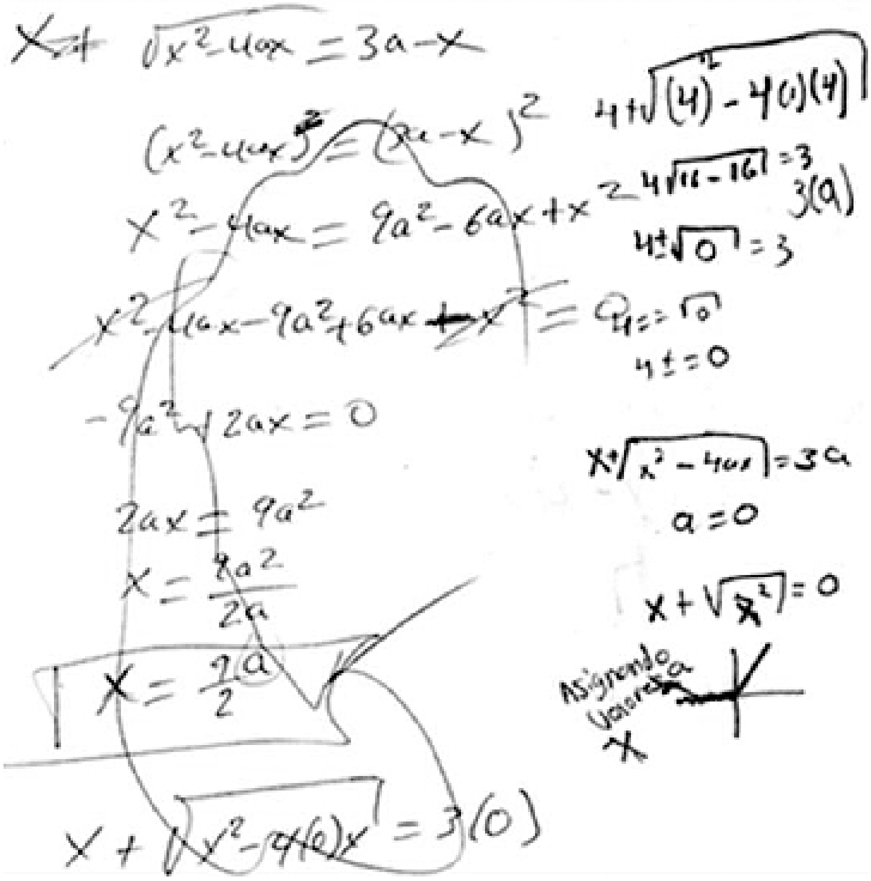


FIGURA 10
Un intento inconcluso de resolución algebraica

Los únicos grupos participantes que iniciaron su estudio con un tratamiento meramente algebraico fueron los del *software* de cálculo formal Derive. Los demás trazaron una o varias curvas representativas de la función $y = x + \sqrt{x^2 - 4ax}$ o de $y = x + \sqrt{x^2 - 4ax - 3a}$, asignando uno o varios valores numéricos al parámetro a (por ejemplo, −1 y 1). Sin embargo, no existe orientación que proporcione algún enunciado que conduzca a un rumbo con una técnica particular.

Nuestra hipótesis sobre la eliminación del método meramente algebraico de sólo cuatro pasos, descrito anteriormente, es el estatuto incierto del paso de $y - x = \sqrt{x^2 - 4ax}$ a $(y - x)^2 = x^2 - 4ax$; o sea de (2) a (3), relacionado con el reducido espacio que se dedica al símbolo de la raíz cuadrada en los programas curriculares. Una observación que apoya a esta sentencia en las actividades de los participantes del taller es la *ausencia completa del símbolo del valor absoluto*. Su escritura no está presente en los reportes de trabajo de los grupos de trabajo.

A partir de la perspectiva de los ETM proponemos la hipótesis más general siguiente: En la enseñanza tradicional se hace poco énfasis en técnicas que, directamente, no se apoyan en un sustento teórico. Un ejemplo es el número negativo. Realmente, es un objeto matemático generado a partir de la visión teórica de la recta numérica. En la enseñanza predomina la insistencia en escrituras de números negativos con el símbolo "−" como en el ejemplo "−1"; sin embargo, *el valor absoluto de un número no es el mismo número sin signo, es el mayor entre el número dado y su opuesto*. Por ejemplo, el valor absoluto de −1 es − (−1), esto es el opuesto de −1. En espacios de trabajos personales de estudiantes, y en la perspectiva de sus desarrollos, podrían reforzarse actividades en las que esté presente la identidad. Además, es posible suponer que actividades de este tipo propician y contribuyen a la desaparición de la expresión incorrecta "√x2 = x", error clásico presente en varios reportes de actividades del taller. Nos sorprendió su presencia en actividades de profesores, como lo ilustra la Figura 11.

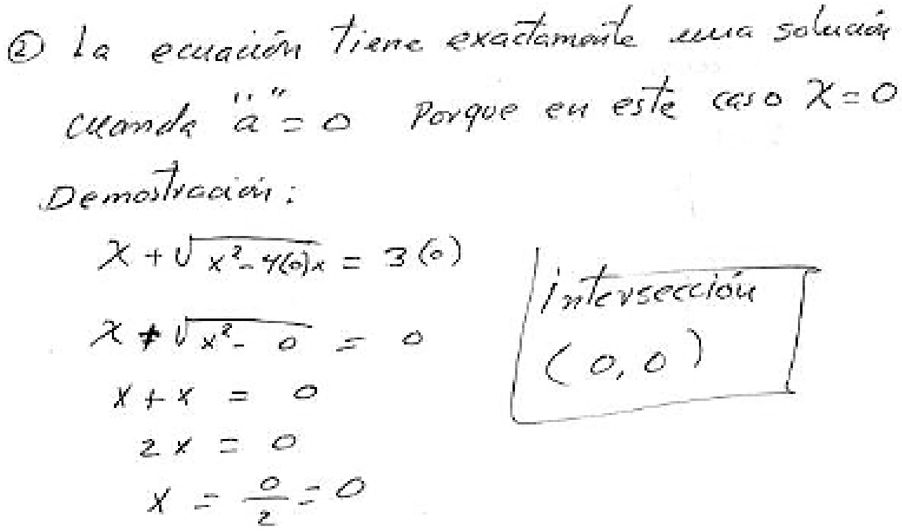


FIGURA 11
Respuesta de un profesor

Los grupos "A pie" fueron los de producción más diversificada en sus múltiples intentos: trazo de curvas, tablas de valores numéricos, estudio algebraico (Figura 10). Llegaron a la respuesta correcta sólo si a<0.

Los grupos Excel se apoyaron en la introducción de nada más una fila de valores en correspondencia. Por ejemplo, en la Tabla III se exhibe el valor que toma con a = −1 y x = 5. Con esa información obtuvieron resultados correctos. En particular, encontraron que la curva tiene una asíntota paralela al eje *x#x* y que no es posible la intersección entre la curva y el eje *x#x*, para ciertos valores del parámetro a. Este resultado asintótico no fue encontrado ni comentado por los otros equipos.

TABLA III
Estudio en Excel con introducción en C2 de "= B2 + RAIZ (B2*B2−4*A2*B2) − 3*A2"

	A	B	C
1	a	x	$x+\sqrt{(x_*x-4_*a_*x)}-3_*a$
2	−1	5	14.70820393

Los grupos *Calculadora Graficadora* comentaron la necesidad de un buen conocimiento de las funciones y de un buen manejo de esta herramienta. Un grupo tuvo dificultad para visualizar la representación gráfica cuando el parámetro es igual a cero porque una sección queda en la parte negativa del eje *x#x* y no es posible verla. Sin embargo, llegaron a resultados correctos después de unos ensayos. En otro ejemplo mostraron que cuando se introduce el valor x = −3 la ecuación resultante es y = 0, si el valor de a es cero.

Los grupos *Derive* fueron los que mostraron más reservas con la herramienta puesta a su disposición. No pudieron resolver la ecuación con el *software*. Hubo que transformarla. Primero deben elevarse al cuadrado ambos miembros. Se dieron cuenta que se incorporaban soluciones extrañas. Concluyeron que el *Derive* no está hecho para resolver este tipo de ecuaciones. En el proceso cometieron algunos errores; por ejemplo, la falsa linealidad de la raíz cuadrada: "la raíz cuadrada de la suma de dos números es la suma de las raíces cuadradas de esos números". Sin embargo, al final llegaron a soluciones correctas. Por eso, nuestra opinión es diferente a la de los participantes, el *software Derive* es, posiblemente, más exigente que otras herramientas; sin embargo, es muy potente si se usa, no para obtener procesos con soluciones acabadas, más bien, para explorar perspectivas de carácter funcional, más amplias que la mera algebraica (con *Maple* sucedería algo semejante).

Los grupos de Geometría Analítica Dinámica, al contrario de los anteriores, expresaron la máxima satisfacción en cuanto a la forma utilizada para trabajar. Llegaron a resultados correctos y hasta propusieron la resolución algebraica (con la solución $x = 9a / 2$, si $a < 0$).

Finalizamos este apartado con las dos conclusiones siguientes, expresadas por participantes del taller y relacionadas con la labor del docente:

- La experiencia del taller generó en nosotros una toma de conciencia en la necesidad de utilizar como profesores en la tarea escolar el *software* y las calculadoras.
- Al variar en la fórmula un parámetro nos queda claro lo que significa la variación porque lo que cambia es todo el objeto función. Cuando la fórmula no contiene parámetros la variación se restringe al cambio de un punto sobre una curva fija. Estudiando sólo esto último la visión de variación funcional queda más restringida en el sujeto.

5. Perspectivas abiertas después del taller exploratorio

Después de nuestro estudio exploratorio percibimos, por un lado, pistas de posibles investigaciones y, por otro, pistas para la enseñanza.

Pistas de investigación. Según quedó asentado en el taller, propusimos un estudio de ecuación que necesita consideraciones funcionales. Su desarrollo mostró que la introducción al tema, vía un trabajo funcional, es más placentera y más accesible que la algebraica. De aquí surge la idea de comprobar si se generaliza el fenómeno correspondiente a la consideración de aspectos cualitativos y descriptivos antes de consideraciones algorítmicas, numéricas o algebraicas. Otro fenómeno posible de profundizar es el uso de *software* con diversas orientaciones; por ejemplo, el mismo sistema *GeoGebra* proporciona la posibilidad de trazar figuras geométricas, trabajar con una Hoja de Cálculo y graficar funciones. Si a un grupo se le da un impulso hacia una de estas técnicas para emprender un estudio, ¿cómo influye esto en su trabajo matemático?

Pistas para la enseñanza. Al expresarnos en términos de la teoría antropológica de lo didáctico (la conocida sucesión: tarea, técnica, tecnología, teoría) pudimos constatar un fenómeno de casi rechazo en la enseñanza, distinto al fenómeno de los *nichos ecológicos* de objetos matemáticos, señalado en varias investigaciones de matemática educativa. Tal fenómeno es que en la enseñanza tienen un sitio muy reducido las técnicas que no se apoyan en sustentos teóricos presentados en un mismo tiempo a los estudiantes. Casos que corresponden a tratamientos útiles son un verdadero defecto de enseñanza; en particular, pensemos en el valor absoluto comentado antes o, más generalmente, en las funciones definidas a trozos, objetos presentes en la computación, sin papel alguno en la teoría antes de un nivel avanzado, por ejemplo en las teorías de integración de Riemann o Lebesgue. Tenemos la idea de que la pista del desarrollo de *espacios de trabajo matemático personales* a *espacios de trabajo matemático idóneos* podría reforzar la presencia de objetos matemáticos en la enseñanza, útiles en la práctica aun cuando, en el aprendizaje en curso, no sea muy importante su función en la teoría presente.

Referencias

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2008). A Numerical Landscape. En Calvin L. Petroselli (Ed.), Science Education Issues and Developments (pp. 5-57). New - York: Nova Publishers.

Adjiage R. & Pluvinage, F. (2012), Strates de compétence en mathématiques. Repères IREM, 88, 43-72.

Cuevas Vallejo, C. A., Moreno Guzmán, S. & Pluvinage, F. (2005). Una experiencia de enseñanza del objeto función. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10, 177-208.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil - objet. Recherche en Didactique des Mathématiques, 7 (2), 5-31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65.

Gray, E. & Tall, D. (1994) Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25 (2), 115-141.

Houdement, C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11, 175-193.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. Annales de didactique et de sciences cognitives, 16 (1), 9-24.

Moreno Guzmán, S. & Cuevas Vallejo, C. A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. Educación Matemática, 16 (2), 93-104.

Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. En A. Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education - Athens, Hellas 3-4-5 January 2003. (pp. 116-124). Atenas, Grecia: Hellenic Mathematical Society.

Pluvinage, F. & Marmolejo Rivas, E. (2012). Une recherche didactique recourant à la modélisation et au travail collaboratif: un cas d'étude de paramètres. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), Formation à la recherche en didactique des mathématiques (pp. 11–24). Montréal, Canada: Loze - Dion éditeur Inc.