Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
ISSN: 1665-2436
ISSN: 2007-6819
relime@clame.org.mx
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Organismo Internacional

Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático

Ramírez-Uclés, Rafael; Flores Martínez, Pablo; Ramírez-Uclés, Isabel

Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 21, núm. 1, 2018
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Organismo Internacional
Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33554987003
DOI: https://doi.org/10.12802/relime.18.2112

Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático

ANALYSIS OF MISTAKES IN GEOGRAPHIC TASKS OF VISUAL ARGUMENTATION BY STUDENTS WITH MATHEMATICAL GIFT

DOI: https://doi.org/10.12802/relime.18.2112
Redalyc: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33554987003

Rafael Ramírez-Uclés
Universidad Nacional de Educación a Distancia (uned), España
rramirez@ugr.es

Pablo Flores Martínez
Universidad Nacional de Educación a Distancia (uned), España
pflores@ugr.es

Isabel Ramírez-Uclés
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España
iramirez@psi.uned.es

Recepción: 05 Diciembre 2016
Aprobación: 11 Marzo 2018

Resumen:

En este trabajo se analizan los errores cometidos por un grupo de veinticinco estudiantes de entre 13 y 16 años, que participan en un proyecto de estimulación del talento matemático, al resolver tareas geométricas durante tres sesiones de enriquecimiento curricular focalizado en técnicas de argumentación. Se identifican errores específicos de la argumentación visual (establecer falsas analogías entre plano y espacio, no discutir todos los casos posibles y razonar a partir de ejemplos concretos limitados) y derivados del uso incorrecto de los elementos de razonamiento, contenidos y procedimientos matemáticos. El estudio de correlaciones muestra que, en su mayoría, los errores son independientes, tanto entre sí como con las puntuaciones en tres test que miden su capacidad visual e intelectual. Los resultados del ANOVA de medidas repetidas indican que a lo largo de las tres sesiones disminuye significativamente la frecuencia con la que manifiestan los errores específicos de la argumentación visual.

Palabras clave: Argumentación visual, Errores, Talento matemático, Test pma, Test dat, Test de Raven.

Abstract:

In this work, we analyze the mistakes made by a group of twenty-five students, aged between 13 and 16 years, when involved in the resolution of geometrical tasks while participating in a project for stimulation of the mathematical gift, during three curricular enrichment sessions focused on reasoning techniques. Specific visual argumentation mistakes are identified (namely making false analogies between plane and space, not discussing all the possible cases, and reasoning from concrete limited examples), as well as those derived from the incorrect use of reasoning elements, contents, and mathematical procedures. From the study of correlations, it is apparent that most of the mistakes are independent, both amongst each other and with respect to the scores obtained in three visual and intellectual capability tests. The ANOVA results from repeated measurements show that the frequency of appearance of specific visual argumentation mistakes decreases throughout the three sessions.

Keywords: Visual argumentation, Mistakes, Mathematical gift, test, test, Raven test.

Résumé:

Le présent article analyse les erreurs commis par vingt-cinq élèves, âgés entre 13 et 16 ans, participants dans un Project formatif qui a pour but de stimuler le talent mathématique des étudiants, lorsqu'ils ressoudent des problèmes géométriques dans trois séances de cours d'enrichissement curriculaire s'occupant de l'argumentation visuelle. On a identifié trois erreurs spécifiques de l'argumentation visuelle : Réaliser de fausses analogies plan-espace, ne pas considérer toutes les cas possibles, et établir des raisonnements partielles sur des exemples concrèts et limités ; et d'autres dérivées de l'emploi incorrect des éléments, des concepts et des processus mathématiques. L'étude des corrélations met en évidence que la plupart des erreurs n'ont pas de rapport ni entre eux ni avec les ponctuations obtenues par les élèves en trois tests qui mesurent leurs capacités, aussi visuelles qu'intellectuelles. Les résultats d'un ANOVA des mesures répétés indiquent qu'au long des trois séances de cours la fréquence d'apparition des erreurs spécifiques d'argumentation visuelle diminue significativement. MOTS CLÉS : Argumentation visuelle. Erreurs. Talent mathématique. Test pma. Test dat. Test de Raven.

Mots clés: Argumentation visuelle, Erreurs, Talent mathématique, Test pma, Test dat, Test de Raven.

Resumo:

Neste trabalho analizam-se os erros cometidos por um grupo de vinte e cinco estudantes de idades compreendidas entre os 13 e 16 anos, que participaram num projeto de estimulaçao do talento matemático, ao resolver determinadas tarefas geométricas durante tres sessoes de enriquecimento curricular focalizadas em técnicas de argumentaçao. Os erros específicos identificam-se da argumentaçao visual (estabelecer falsas analogías entre plano e espaço, na discussao de todos os casos posiveis e pensar a partir de exemplos concretos e limitados) e derivados do uso incorreto dos elementos do raciocinio, conteúdos e procedimientos matemáticos. O estudo de correlaçao mostra que na sua maioria, os erros sao independentes, tanto entre si como com a pontuaçao nos tres testes que medem a capacidade visual e intelectual. Os resultados de ANOVA de medidas repetidas indica que durante as tres sessoes reduzem significativamente a frequencia com a que se manifestam os erros especificos da argumentaçao visual.

Palavras-chave: Argumentaçao visual, Erros, Talento matemático, Teste pma, Teste dat, Teste de Raven.

1. Introducción y antecedentes

En educación matemática se ha subrayado la necesidad de incrementar el uso de elementos visuales como parte de la enseñanza y el interés por diseñar técnicas de enseñanza apropiadas para favorecer el uso de la visualización (Arcavi, 2003; Bishop, 1980; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, 1990). Los instrumentos visuales tienen valor para la enseñanza de las matemáticas y como heurísticos para los descubrimientos matemáticos; se reconoce la importancia de la visualización en el quehacer matemático como un componente clave del razonamiento, la resolución de problemas y las demostraciones. Los alumnos con alta capacidad espacial destacan por su habilidad para entender y recordar las relaciones espaciales entre objetos; facilidad para manipular imágenes en el espacio; capacidad para visualizar cómo separar y relacionar partes de un complejo sistema físico en el espacio; gran capacidad para percibir, modificar y transformar imágenes; grandes capacidades espaciales combinadas con una excelente visualización para aprender (Ferrándiz, Prieto, Fernández, Soto, Ferrando y Badía, 2010). Al ser nuestra percepción prioritariamente visual, lo visual está presente en las tareas de matematización (De Guzmán, 1996). La visualización aparece de modo natural en el pensamiento matemático, favorece el descubrimiento de nuevas relaciones entre objetos matemáticos y establece conexiones entre diversas formas de representar la situación matemática (Guillén, 2010; Treffers, 1987).

Sin embargo, a pesar de la obvia importancia de las imágenes visuales en las actividades cognitivas humanas, se reconoce el papel secundario que la representación visual parece desempeñar en la teoría y práctica de los matemáticos (Arcavi, 2003; Presmeg, 2006). En una completa revisión de los trabajos presentados en los congresos de pme (The International Group for the Psychology of Mathematics Education) relativos a visualización, Presmeg (2006) afirma que quizás el asunto más apremiante de investigación en este periodo es encontrar una enseñanza eficaz para aumentar el uso y poder de la visualización en la educación matemática. La vigencia de este interés en la visualización como objeto de estudio en la investigación en educación matemática queda recogida en textos monográficos y revisiones (Battista, 2007; Rivera, 2011; Rivera, Steinbring & Arcavi, 2014) y líneas de trabajo en los encuentros internacionales como icme12, cerme8 y pme38 (Kinach & Coulson, 2014). Las distintas perspectivas adoptadas por los investigadores en educación matemática manifiestan la falta de consenso sobre el papel de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Nardi, 2014).

Una posible explicación de estas aparentes contradicciones sobre la importancia y el escaso uso de la visualización en la enseñanza se apoya en las dificultades del uso de la visualización en las tareas matemáticas

(Eisenberg & Dreyfus, 1991; Hanna y Sidoli, 2007; Presmeg, 1991). Además de dificultades culturales o sociológicas, las dificultades cognitivas se deben a que la demanda en el uso de la visualización es alta (Arcavi, 2003) y requiere coordinar diversos procesos cognitivos de visualización y razonamiento (Torregrosa y Quesada, 2007; Prior y Torregrosa, 2013).

En este sentido, la investigación del uso de la visualización en alumnos con talento matemático adquiere un interesante matiz. Estos alumnos afrontan con mayor éxito la realización de tareas matemáticas y presentan mayor riqueza en el manejo de los conceptos matemáticos implicados, las técnicas de argumentación, estrategias de resolución y otras características de un nivel superior de competencia matemática (Greenes, 1981; Miller, 1990; Freiman, 2006). Diversos estudios han relacionado positivamente este mayor rendimiento en la resolución de tareas matemáticas con la visualización (Gruessing, 2011; Rabab´h & Veloo, 2015; Rivera, 2011, Van Garderen, 2006; Van Garderen & Montague, 2003). En cambio, numerosas investigaciones han mostrado que los alumnos con talento matemático manifiestan poca disposición a utilizar métodos visuales y presentan dificultades en el uso de la visualización (Krutetskii, 1976; Lee, Ko & Song, 2007; Neria & Amit; 2010; Presmeg, 1986; Ryu, Chong & Song, 2007).

Aportar información sobre los aspectos pedagógicos que evidencien las dificultades en el uso de la visualización es una de las líneas que Presmeg (2006) marcó como retos en su completa revisión de trabajos sobre visualización, y es una problemática que sigue considerándose de interés para la investigación (David & Tomaz, 2012; Presmeg, 2014). En este trabajo se pretende avanzar en la comprensión de estas dificultades en el caso particular de los alumnos con talento matemático en quienes las limitaciones en la resolución de tareas que requieran visualización no debieran derivarse de un déficit en la comprensión y el manejo de contenidos matemáticos. La identificación, organización y comprensión de los errores cometidos por estos estudiantes proporciona al profesor una base cognitiva para tomar decisiones e intervenir en el aula (Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas, 2016; Battista & Clements, 1996; Rico, 1993).

Diversas investigaciones consideran que la instrucción puede tener un efecto positivo en el uso de la visualización en la resolución de tareas matemáticas (Gruessing, 2011; Kliapis & Tzekaki, 2011; Mann, 2006; Tzekaki & Ikonomou, 2009). Particularmente las tareas que requieren realizar deducciones a partir de imágenes (argumentación visual) presentan un interesante potencial para detectar las dificultades en el uso de la visualización (Battista, 2007; Biza, Nardi & Zachariades, 2009; Gal & Linchevski, 2010; Hanna & Sidoli, 2007; Pittalis & Christou, 2011). De Guzmán (1996) distingue varios niveles en la forma de introducir la visualización en las argumentaciones: incorporar representaciones visuales como complementos de la justificación, introducirlas como partes esenciales de la prueba y, finalmente, hacer demostraciones visuales en sí mismas.

La dificultad en la argumentación visual está fuertemente condicionada por la complejidad intrínseca de la argumentación matemática. La revisión bibliográfica de los errores detectados al visualizar permite organizarlos en dos grupos: errores específicos de la argumentación visual y errores relativos a contenidos y elementos de razonamiento matemático.

Respecto a la argumentación visual, en investigaciones realizadas con alumnos con talento matemático se han detectado errores al establecer falsas analogías entre las propiedades del plano y del espacio, como aplicar a un tetraedro propiedades similares a la suma de los ángulos de un triángulo (Lee, Kim, Na, Han & Song, 2007) o de relleno del plano (Ramírez-Uclés, Flores y Castro, 2010) [E1]. Los errores visuales que predominan son los relativos a la generalización. Argumentar limitándose a ejemplos concretos puede convertirse en un obstáculo para que el alumno razone sobre el caso general (Bishop, 1989; Presmeg, 1999; Wheatley, 1998), llevarlo a una resolución incorrecta por usar una imagen prototípica (Zodik & Zaslavsky, 2007) o a concluir intuiciones falsas a partir de un caso particular (Lee et al., 2007; Sheffet & Bassan-Cincinatus, 2009) [E3]. En la consideración de todos los casos posibles para abstraer propiedades generales se detectan errores al relacionar los casos particulares y la organización de los mismos (Stacey, 1989) y se llega a desestimar la necesidad de verificación por el poder persuasivo de una imagen (Biza et al., 2009) [E2].

Diversas investigaciones han detectado errores propios de contenidos y procedimientos matemáticos. En el ámbito de la resolución de problemas, los alumnos con talento cometen errores como conmutar los datos, cambiar de estructura, invertir la operación, omitir una operación, cambiar el significado de una relación y emplear incorrectamente una estimación (Benavides, 2008). En relación con los conceptos geométricos y relaciones espaciales, se han localizado errores en la comprensión de conceptos (Dickson, Brown & Gibson, 1991; Lee & Pang, 2007), el reconocimiento de propiedades de las figuras (Cohen, 2003; Ryu et al., 2007) y en los procedimientos de resolución de tareas (Jaime y Gutiérrez, 1996) [E5]. Los errores derivados de los elementos de razonamiento matemático van asociados con el conocimiento que tiene el estudiante sobre técnicas de argumentación matemática: conflictos entre teorema y contraejemplo (Seo, 2007; Yim, Song & Kim, 2008), conformarse con conjeturar a partir de aspectos visuales (Meavilla, 2005; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010) y la concepción que tienen sobre prueba matemática (Kageyama, 2009; Kwon y Song, 2007; Park, Ko, Lee & Lee, 2011) [E4].

En actuales revisiones de investigaciones recientes sobre enseñanza de la geometría se ha señalado como un tema de considerable interés en educación matemática aportar información sobre la integración de procesos visuales en la argumentación geométrica (Jones & Tzekaki, 2016). Estas tareas presentan una complejidad cognitiva incluso para los estudiantes con talento matemático, sin haber un consenso en las investigaciones que relacionan su mayor competencia matemática con el uso de la visualización. Este trabajo pretende contribuir al campo de la educación matemática al aportar información sobre las dificultades que manifiestan estos estudiantes en la resolución de tareas que necesitan argumentación visual. La identificación de estas dificultades, además de indagar en la relación entre talento matemático y visualización, permite establecer pautas para diseñar tareas que favorezcan un uso eficaz de la visualización en la educación matemática (Presmeg, 2006).

El objetivo de este trabajo es analizar los errores cometidos por un grupo de estudiantes con talento matemático en tres sesiones de enriquecimiento curricular focalizadas en la argumentación visual en tareas geométricas. Tras la revisión de antecedentes, podemos plantearnos cuestiones como: ¿cometen menos errores en tareas visuales los estudiantes con puntuación mayor en test visuales?, ¿qué errores comenten?, ¿son independientes?, ¿cómo influye el tipo de instrucción recibida en los errores que cometen? Para aportar información a estas preguntas, haremos lo siguiente: *a*) identificar los errores cometidos en el uso de la visualización; *b*) estudiar las relaciones entre los errores y la capacidad visual e intelectual de los estudiantes registrada mediante test psicométricos, y *c*) estudiar la evolución de los errores a lo largo de las tres sesiones de enriquecimiento curricular.

2. Marco teórico

Estructuraremos el marco teórico presentando los diferentes matices de la definición de visualización desde las matemáticas, la psicología y la educación matemática. Contextualizada la investigación en el ámbito geométrico se presenta el marco teórico elegido (Gutiérrez, 2006) y se describen las habilidades de visualización como principales elementos de la visualización a considerar en este trabajo. Finalmente se describe la categorización de errores organizados a partir de los antecedentes del apartado anterior.

Para el diccionario de la Real Academia, visualizar tiene tres acepciones: representar mediante imágenes ópticas fenómenos de otro carácter; formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto, e imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista. Desde el punto de vista psicológico, la visualización envuelve pensamiento figurativo (patrones estáticos y figuras) y operacional (patrones en movimiento de objetos y manipulación de objetos visuales). Desde el punto de vista matemático, la visualización supone la habilidad para interpretar y comprender la información proveniente de figuras usadas, principalmente en el trabajo geométrico, y la habilidad para contextualizar y trasladar las relaciones abstractas y la información no figural en términos visuales (Ben-Chaim & Lappan, 1989; Bishop, 1983).

En educación matemática, Arcavi (2003) define:

> Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión (p. 217).

La geometría es el contenido matemático en el que tiene más razón de ser la visualización en matemáticas (Guillén, 2010; Gutiérrez, 1998). En este ámbito geométrico, el marco teórico presentado por Gutiérrez en la conferencia plenaria del pme 19 (Gutiérrez, 1996) es uno de los más reconocidos entre los investigadores, pues unifica muchos de los desarrollos teóricos elaborados hasta el momento (Presmeg, 2006). En este marco, se considera la visualización en educación geométrica integrada por cuatro elementos principales (Gutiérrez, 1996):

- Imagen mental: tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos visuales o espaciales.
- Representación externa: cualquier tipo de representación gráfica o verbal de conceptos o propiedades que incluye dibujos, esbozos, diagramas, etc., que ayudan a crear o transformar imágenes mentales y hacer razonamiento visual.
- Procesos de visualización: acciones mentales o físicas en que están involucradas las imágenes.
- Habilidades de visualización para realizar los procesos necesarios con imágenes mentales específicas para un problema dado.

Gutiérrez (1996) sintetiza que la visualización es el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos, modelos y conceptos geométricos. En este trabajo nos centraremos en el análisis de las habilidades de visualización que adquieren un papel relevante en la resolución de tareas geométricas e intervienen en los procesos de creación y manipulación de las imágenes y en la relación con las representaciones externas (Bishop, 1980; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, 1990). Del Grande (1987, 1990) recopila a partir de varios autores siete habilidades psicológicas de visualización que considera relevantes en el proceso formativo del estudiante (Tabla I).

TABLA I
Descripción habilidades de visualización (Del Grande, 1990)

Habilidad	Descripción
Percepción figura-contexto	Reconocer una figura aislándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos.
Conservación de la percepción	Reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, textura…) aunque cambie de posición y deje de verse por completo.
Percepción de la posición en el espacio	Relacionar un objeto en el espacio y respecto a uno mismo; identificar figuras congruentes bajo traslaciones, giros y volteos.
Percepción de las relaciones espaciales	Identificar correctamente las relaciones entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.).
Discriminación visual	Identificar las semejanzas y diferencias entre varios objetos independientemente de su posición.
Memoria visual (mv)	Recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.
Coordinación ojo-motor	Coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.

La coordinación ojo-motor y la memoria visual no han sido consideradas en este trabajo puesto que iban asociadas con aspectos psicomotrices de dibujo y técnicas de recuerdo que no consideramos relevantes en las tareas planteadas en este estudio.

Del Grande (1990) asocia estrechamente la utilización de estas habilidades con tareas específicas que favorecen su desarrollo. Como la intención del trabajo es localizar los errores cometidos, a partir de la revisión bibliográfica mostrada anteriormente, determinamos *a priori* cinco categorías de errores en el uso de las habilidades de visualización, las tres primeras relacionadas con la visualización y las dos últimas que atañen al uso erróneo de contenidos y elementos de razonamiento matemático. Mostramos ejemplos de errores de cada una de las categorías localizadas en las respuestas de los estudiantes de esta investigación:

E1 o Error al establecer una falsa analogía entre plano y espacio. Los estudiantes aplican propiedades de las figuras en el plano a las correspondientes en el espacio o viceversa. Se detectan en expresiones del tipo "*si los triángulos rellenan el plano, los tetraedros rellenan el espacio*".

E2 o Error al extraer conclusiones al examinar sólo algunos casos de todos los posibles. El estudiante se conforma con algunas apreciaciones obtenidas para sacar conclusiones sobre el caso general y deja de lado situaciones que no ha considerado, como cuando señala "*como en la sección de un cubo por un plano únicamente se obtienen triángulos y cuadriláteros, podemos deducir que siempre se obtienen menos de cinco lados…*".

E3 o Error al razonar a partir de ejemplos concretos limitados. Apoya las argumentaciones en características de una solución particular que el alumno ha obtenido en la actividad sin preocuparse por si son representativas del caso general. "*Se ve en el dibujo que las alturas de un triángulo siempre son menores que todos sus lados*".

E4 o Error al utilizar los elementos matemáticos implicados en el razonamiento. El estudiante usa técnicas de argumentación falaces como implicaciones inversas, procesos inductivos incompletos o deductivos poco justificados, usa conjeturas que toma como verdaderas, o contraejemplos que no lo son, etc. "*Si dos rectas son paralelas, están contenidas en dos planos que son paralelos. Por lo tanto si no son paralelas, no puede haber dos planos paralelos que las contengan*".

E5 o Error en el manejo de contenidos y procedimientos matemáticos. Cometen algún error relativo a los contenidos, la terminología o a las propiedades matemáticas que están utilizando. Por ejemplo, emplear o no identificar la terminología adecuada, utilizar un lenguaje impreciso, cometer errores de cálculo o de medida, etc. "*Las caras del tetraedro regular son triángulos isósceles, podemos hallar la longitud de uno de sus lados a partir de los otros dos usando Pitágoras*".

Estos errores no son mutuamente excluyentes. Los tres primeros son específicos de la argumentación visual. En E1 se establecen conexiones incorrectas entre propiedades del plano y el espacio. Tanto E2 como E3 son errores cometidos al generalizar propiedades a partir de imágenes concretas. En E2 el estudiante afirma propiedades generales a partir de varios ejemplos particulares sin ser exhaustivo en la organización de los mismos. En cambio, en E3 el estudiante se limita a inducir propiedades generales únicamente a partir de un ejemplo concreto. Los dos últimos errores, E4 y E5, son propios de los contenidos matemáticos y de la estructura lógica de los argumentos utilizados.

Para identificar los errores descritos en un proceso de enseñanza, compararlos con las puntuaciones obtenidas en test visuales y de inteligencia general y poder analizar la evolución a lo largo de tres sesiones, es necesario describir el proceso formativo.

3. Metodología

3.1. Participantes

Los sujetos fueron 25 estudiantes con talento matemático (20 niños y 5 niñas) del segundo curso del proyecto ESTALMAT (programa de Estímulo del Talento Matemático) en Andalucía Oriental (España) con una edad media de 14.52 años y desviación típica .71 (rango 13-16). Para acceder a ESTALMAT superaron una prueba a la que se presentaron 341 estudiantes (158 niñas y 183 niños) inscritos en las provincias de Granada, Málaga, Jaén y Almería. La prueba consiste en cinco problemas no rutinarios, en los que prevalece la utilización de estrategias originales más que los conocimientos matemáticos, y una entrevista con los profesores del proyecto (Ramírez, 2012).

3.2. Instrumentos y variables de estudio

Para registrar las capacidades visuales y la intelectual se seleccionaron los siguientes instrumentos:

- Factor espacial (E) del Test de Aptitudes Primarias (PMA) (Thurstone y Thurstone, 1976). La batería global PMA permite la evaluación de los factores básicos de la inteligencia: Espacial (E), Razonamiento (R), Numérico (N) y Fluidez Verbal (F). La versión original pertenece a Thurstone y Thurstone (1941) y la adaptación española es llevada a cabo por la Sección de Estudio de Test de TEA Ediciones en 1987. Para el trabajo se seleccionó la prueba correspondiente al Factor E de concepción espacial definido como la "aptitud para interpretar y reconocer objetos que cambian de posición en el espacio, manteniendo su estructura interna". Se ha obtenido un índice de fiabilidad de .93 para el factor espacial (Secadas, 1961).
- Factor relaciones espaciales (SR) de la Batería de Aptitudes diferencias (DAT-5) (Bennett, Seashore & Wesman, 2000). La 5º versión del dat incluye test que evalúan ocho aptitudes: razonamiento verbal, razonamiento numérico, razonamiento abstracto, rapidez y exactitud perceptiva, razonamiento mecánico, relaciones espaciales, ortografía y uso del lenguaje. La adaptación española de la versión original se lleva a cabo por el Departamento I+D de TEA en el año 2000. En nuestro estudio se seleccionó el Nivel 1 de la escala de aptitud espacial (SR) que mide la habilidad para visualizar un

objeto en tres dimensiones a partir de un modelo bidimensional e imaginar cómo aparecería este objeto si sufriera una rotación espacial. Los índices de fiabilidad para los diferentes grupos que incluye el Nivel 1 en la escala sr oscilan entre .86 y .93.

- Matrices progresivas de Raven (Raven, Court & Raven, 1993). El test proporciona una medida de la capacidad de deducción de relaciones, uno de los componentes principales de la inteligencia general y del factor "G". En el estudio se ha utilizado la versión adaptada por TEA en el año 2003. Considerando las características de la muestra del estudio, se les administró versión avanzada de la escala (APM). Los ítems de la prueba consisten en completar un dibujo al que le falta un trozo con una de las ocho piezas que aparecen como alternativas. La Escala Superior ofrece índices test-retest de fiabilidad de distinta magnitud, que alcanzan el valor de .91, y de consistencia interna "dos mitades", con valores entre .83 y .87.

La recogida de datos se lleva a cabo en tres sesiones del proyecto ESTALMAT impartidas los sábados por la mañana y con una duración de tres horas cada una. El enriquecimiento curricular se focaliza en la argumentación visual y propone tareas que promueven la puesta en juego de destrezas visualizadoras, profundizan en contenidos que los estudiantes no han tratado en el currículo y abordan los conceptos matemáticos y la visualización desde una perspectiva funcional (Ramírez, 2012). El enriquecimiento afecta tanto a los contenidos como a las estrategias de argumentación. Se profundiza en los contenidos matemáticos relativos a movimientos y plantea tareas extracurriculares para descubrir las propiedades de las figuras con curvatura constante o el modelo de relleno del espacio con pirámides y tetraedros. Se abordan los movimientos en el plano de manera funcional, ya que los estudiantes descubren las propiedades de las isometrías para clasificar las soluciones de un problema (Tabla II). Para enriquecer estrategias, se plantean tareas para que los estudiantes localicen sus errores, analicen el papel y la estructura de sus argumentaciones, formulen las funciones de las mismas (explicación, descubrimiento, convicción o verificación, reto intelectual, sistematización, comunicación) y ellos mismos progresen en su habilidad para hacer demostraciones (Gutiérrez, 2006).

La consideración de los errores detectados en la revisión bibliográfica es un elemento importante para la planificación de un proceso de enseñanza (Rico et al., 1997). Inicialmente se seleccionan tareas que permitan detectar los errores localizados en la revisión bibliográfica y proponen estrategias de enseñanza para que el alumno sea consciente de los errores y conozca pautas para corregirlos. La relación entre los errores y la instrucción relativa a los contenidos matemáticos y de argumentación previstos en cada sesión aparece resumida en la Tabla II.

TABLA II

Errores previstos asociados con los contenidos y elementos de argumentación de cada una de las sesiones

Sesión	Contenido matemático	Argumentación matemática	Argumentación visual
1	Movimientos en el plano (E5)	Definición Deducción / Inducción Contraejemplos (E4)	Razonar sobre la solución particular (E3) Exhaustividad en la distinción de casos (E2)
2	Relleno del espacio (E5)	Propiedades Condiciones necesarias y suficientes (E4)	Relación de propiedades triángulo-tetraedro (E1)
3	Curvatura constante Concepto de dimensión (E5)	Condiciones necesarias y suficientes. Resolución (E4)	Relación desarrollo plano-objeto 3D (E1)

Cada sesión se planifica para contribuir a desarrollar habilidades de visualización, teniendo en cuenta los errores cometidos por los estudiantes en la anterior. En la primera sesión se plantea una tarea para obtener una estructura mínima mediante unas fichas, tratando de que aparezcan los movimientos como instrumentos para simplificar la tarea y procurando que expliquen las definiciones y sistematicen los procesos de resolución que proponen, además de distinguir entre procesos inductivos y deductivos. Se plantean tareas para que barran sistemáticamente todos los casos posibles y procesos en los que aumenta progresivamente el número de casos y se aprecien propiedades de la solución final a partir de las particulares. Al apreciarse errores relativos a la generalización a partir de casos particulares, en la segunda sesión se plantean tareas para que deduzcan propiedades del relleno del espacio a partir de casos conocidos. Los procesos de razonamiento se focalizan en la verificación de condiciones necesarias y suficientes de relleno del espacio, abstrayendo propiedades generales a partir de soluciones particulares. En esta sesión se aprecian errores al establecer falsas analogías plano-espacio, por lo que en la tercera sesión se plantean principalmente tareas tridimensionales de explicación para que analicen qué propiedades del plano se verifican en el espacio y viceversa (Ramírez, 2012).

Describimos, a modo de ejemplo, alguna de las tareas de la primera sesión. Se focalizan los objetivos de enseñanza en que los alumnos argumenten visualmente y utilizan los movimientos en el plano de un modo funcional. Para ello se presentan tareas en las que tienen que definir cuándo dos estructuras son iguales al determinar el criterio de equivalencia. A partir de casos sencillos, deben enunciar y demostrar teoremas a la vez que diferencian entre la deducción y la inducción. La utilización de contraejemplos se presenta como una estrategia para comprobar que una propiedad no es cierta.

En la argumentación de la validez de los teoremas se incide en la exhaustividad para considerar todas las construcciones posibles y la necesidad de contrastar las propiedades de los casos particulares frente a la solución general.

Tarea de la sesión 1: Las siguientes fichas están formadas por tres círculos y por dos segmentos (Figura 1):

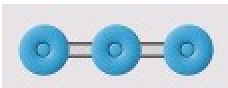

FIGURA 1
Ficha para las actividades de la sesión 1.

Se forman estructuras al colocar las fichas en un geoplano cuadrado 12 x 12, en el que se puedan solapar únicamente círculos de fichas diferentes. No pueden solaparse los segmentos (Figura 2).

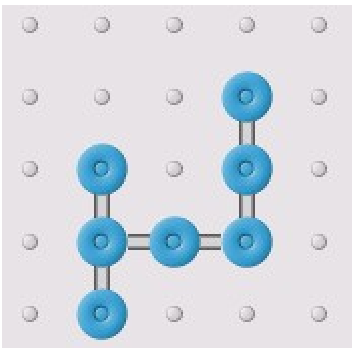

FIGURA 2
Ejemplo de estructura formada por tres fichas en un fragmento del tablero cuadrado

a) Construye todas las estructuras posibles formadas por tres fichas
b) Determina un criterio para considerar dos estructuras iguales. Define la igualdad entre estructuras.

c) Una estructura es mínima cuando tiene el menor número posible de círculos visibles. Enuncia y demuestra el siguiente teorema: para estructuras de tres fichas, en el tablero cuadrado, el número de círculos visibles de las estructuras mínimas es ___. Además hay _____ estructuras mínimas diferentes
d) Enuncia y demuestra el teorema anterior para el tablero isométrico
e) Enuncia y demuestra el teorema anterior para seis fichas en ambos tableros.

Para un número pequeño de fichas, el estudio de todos los casos posibles es una estrategia que permite resolver el problema, si bien el uso de la visualización es imprescindible para discriminar estructuras iguales salvo movimientos en el plano. Al aumentar el número de fichas se requieren otros argumentos más complejos ya que no es posible inducir la solución para el caso $n+1$ a partir del caso n. De especial interés es el caso con seis fichas para el que existe una única solución (muy intuitiva) pero cuya justificación requiere un elevado grado de exhaustividad en la consideración de casos y abstracción de propiedades generales a partir de la solución intuitiva.

Los estudiantes resuelven la tarea individualmente, luego ponen en común sus respuestas en un pequeño grupo y finalmente se debate en un gran grupo sobre las soluciones propuestas. Las sesiones son impartidas por dos de los investigadores que moderan la puesta en común y aportan información para salvar las dificultades encontradas, especialmente haciendo hincapié en las estrategias de argumentación correctas.

Para el análisis de los datos se dispone de los siguientes registros: respuestas de los alumnos entregadas en las actividades escritas de las sesiones de enriquecimiento, grabaciones de audio de cada sesión y sus transcripciones. Para operativizar la identificación de los errores se realiza un análisis de contenido (Krippendorf, 1990) de los registros escritos de cada estudiante correspondientes a las actividades escritas y a la transcripción de sus intervenciones en las tres sesiones. Como unidades de análisis se utilizan los fragmentos de los textos en los que se alude a alguna de las habilidades de visualización. Como ejemplo, presentamos la fragmentación del texto de una intervención de un alumno correspondiente a una respuesta escrita. Aparecen subrayadas las dos unidades de análisis correspondientes a las manifestaciones de las habilidades de Percepción de las relaciones espaciales (posición relativa entre dos objetos) y Percepción de la figura-contexto (identificación de elementos dentro de una estructura mayor). En esta intervención manifiesta el error E3 al argumentar sobre las propiedades de la solución para la estructura con seis fichas y alude únicamente a la solución particular que él ha encontrado.

Estudiante: “No se puede con un número menor de fichas porque no la podemos poner en diagonal, y no podemos ocupar dos puntos con la última ficha de la figura, el máximo de puntos que podemos ocupar de la figura anterior sería uno”.

Para cada unidad de análisis se registran en una tabla los errores cometidos por el estudiante cuando no manifestaba correctamente las correspondientes habilidades de visualización, no obstante se podían contabilizar varios errores en la misma unidad de análisis.

En una primera organización de los errores observados, se describen y se asocian a tareas concretas. Por ejemplo, el error E2 en la tarea de la sesión 1 descrita anteriormente queda reflejado cuando el estudiante sólo considera algunos casos en la construcción de las posibles estructuras del juego, no manifiesta criterios suficientes para estar seguro de abarcar todos los casos posibles, se limita a examinar sólo algunos movimientos para definir la igualdad entre estructuras o no tiene en cuenta todas las soluciones del caso n para razonar sobre el $n+1$.

A partir de esta recopilación, en el análisis retrospectivo de los datos, se establecen categorías *a posteriori* de los errores a partir de las repuestas (Ramírez, 2012), y se obtiene que todos los errores observados pertenecen a alguna de las categorías delimitadas *a priori*. Mostramos en la Tabla III las categorías correspondientes a los errores en las tres sesiones:

TABLA III
Categorías a posteriori de la manifestación de errores

	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3
E1	No esperables (tareas únicamente en el plano).	Analogías incorrectas entre relleno del plano y del espacio. Analogías incorrectas entre propiedades del triángulo y del tetraedro.	Analogías incorrectas entre polígonos y prismas. Analogías incorrectas entre rectas en el plano y en el espacio.
E2	Faltan estructuras al argumentar sobre el caso general. Faltan movimientos al argumentar sobre el caso general. Concluir afirmaciones generales sin considerar todos los casos.	Faltan transformaciones al argumentar sobre el caso general. Concluir afirmaciones generales sin considerar todos los casos.	No distinguir todas las posibilidades de construcción. Concluir afirmaciones generales sin considerar todos los casos.
E3	Inducir propiedades particulares para el caso general. Razonar sobre un caso particular limitado.		
E4	Usar incorrectamente las implicaciones. Usar incorrectamente la inducción. Usar incorrectamente los procesos deductivos.	Usar incorrectamente las implicaciones. Usar incorrectamente los procesos deductivos.	Usar incorrectamente los procesos deductivos.
E5	Utilizar incorrectamente conceptos, terminología, propiedades y procedimientos de cálculo y/o de medida.		

Utilizando este procedimiento se elabora una ficha que recoge la cantidad de errores cometidos por cada alumno en cada una de sus intervenciones. Se consideran intervenciones las respuestas a las preguntas escritas y las intervenciones orales, entre las que se contabilizan 272 intervenciones en la primera sesión; 432 en la segunda, y 707 en la tercera. Para normalizar que un estudiante haya cometido más errores por tener más intervenciones, se divide el número de errores cometido entre el número de intervenciones del estudiante, y se obtiene así un indicador en porcentaje que aporta información sobre la frecuencia con la que un estudiante manifiesta cada error (Tabla IV).

TABLA IV
Ejemplo de registro de errores (porcentaje) para un alumno

Alumno	Intervenciones	E1	E2	E3	E4	E5
Sesión 1	10	0	.30	.20	.10	0
Sesión 2	22	0	.09	.05	0	.18
Sesión 3	25	0	0	.04	.08	.24

Es decir, este alumno cometió el error E2 en 30% de las intervenciones recogidas en la primera sesión, 9% en la segunda y en ninguna de la tercera. Con esta cuantificación se dispone, para cada alumno, de un vector de 15 coordenadas con valores entre 0 y 1 que aportan información sobre la frecuencia con la que ha cometido cada error. Para los test PMA, DAT 5 y Raven se dispone de un vector de tres coordenadas correspondientes a las puntuaciones normalizadas que considera los valores de media y la desviación típica incluidos en los correspondientes baremos de los distintos cuestionarios. En una investigación más general de la que forma parte este estudio, hemos analizado los resultados de los test y apreciado que los estudiantes con talento obtienen puntuaciones más altas que los estudiantes de un grupo control tanto en su capacidad intelectual como visual (Ramírez-Uclés, Ramírez-Uclés, Flores y Castro, 2013).

4. Resultados

Describimos los resultados obtenidos en cuanto a la identificación, relación y evolución de los errores.

4.1. Identificación de errores cometidos en el uso de la visualización

El procedimiento de cómputo anterior nos aporta información sobre la frecuencia con la que cada error ha sido cometido en las intervenciones de los estudiantes (Tabla V), así como el porcentaje de alumnos que han cometido dicho error (Tabla VI).

Tabla V

	E1	E2	E3	E4	E5
Sesión 1	0	.23	.169	.081	.07
Sesión 2	.028	.06	.037	.012	.252
Sesión 3	.016	.011	.011	.08	.161

Frecuencia de manifestación de cada error en las tres sesiones

TABLA VI
Porcentaje de estudiantes que cometen cada error en las tres sesiones

	E1	E2	E3	E4	E5
Sesión 1	0	.96	.96	.83	.54
Sesión 2	.48	.86	.67	.14	1
Sesión 3	.42	.29	.33	1	1

De las tablas anteriores resaltamos dos resultados relacionados con la planificación de las sesiones y los errores esperados. En la primera sesión, la mayoría de los estudiantes (salvo uno) manifiestan los errores previstos E2 y E3 en los que estaba focalizada esta sesión, siendo las frecuencias de estos errores (23% y 16.9% respectivamente) superiores al resto de los cometidos en dicha sesión. Sin embargo, para E1, el porcentaje de estudiantes que lo manifiestan en las dos últimas sesiones es inferior a 50%, y su frecuencia es inferior a la de otros errores.

4.2. Relación entre los errores y la capacidad visual e intelectual de los estudiantes registrada mediante test psicométricos

Para determinar las posibles relaciones entre los tipos de errores cometidos y las puntuaciones obtenidas en los distintos test, así como la relación entre los diferentes tipos de errores evaluados a través de las sesiones se ha efectuado análisis de correlación mediante el coeficiente de correlación de Pearson. En el primer caso, los resultados indican que únicamente resultan significativas las siguientes correlaciones: en la Sesión 2 una correlación negativa entre el E5 y las puntuaciones obtenidas en el DAT5 (r = -.436, p = .025) y las obtenidas en el Raven (r = -.426, p = .034), y en la Sesión 3, correlaciones negativas entre el E1 y las puntuaciones obtenidas en el DAT5 (r = -.452, p = .023) y E2 y las puntuaciones obtenidas en el pma (r = -.618, p = .001). Por otro lado, los análisis muestran que las únicas correlaciones significativas entre pares de errores tienen lugar en la Sesión 2, concretamente una correlación negativa entre el E1 y E3 (r = -.510, p = .009) y positiva entre el E2 y E5 (r = .407, p = .044).

4.3. Evolución de los errores a lo largo de las tres sesiones

Para analizar la evolución de los diferentes errores a lo largo de las tres sesiones se han efectuado cinco ANOVAS de medidas repetidas independientes. La posible violación del supuesto de homogeneidad de varianzas error se pone a prueba mediante el test W de Mauchly y, en caso de violación de dicho supuesto, se aplican las correcciones oportunas mediante la corrección en los grados de libertad de Greenhouse-Geisser (factor de corrección *épsilon*, ε). También se incluyen los tamaños de los efectos calculados mediante el coeficiente *eta cuadrado parcial* ($\eta^2{}_p$) que permite calcular el tamaño de los efectos o valorar la magnitud de las diferencias halladas.

Los resultados de los ANOVAS de medidas repetidas indican que en todos los casos existe una evolución significativa de los errores a través de las diferentes sesiones: E1 [F (1.41, 34.02) = 10.70, p = .001, $\eta^2{}_p$ = .31], E2 [F (1.19, 28.60) = 86.13, p = .000, $\eta^2{}_p$ = .78], E3 [F (1.31, 31.45) = 100.48, p = .000, $\eta^2{}_p$ = .81], E4 [F (2, 48) = 35.94, p = .000, $\eta^2{}_p$ = .60] y E5 [F (2, 48) = 49.65, p = .000, $\eta^2{}_p$ = .67].

Los análisis de tendencias posteriores indican que en todos los casos resultan significativos los componentes lineal y cuadrático: E1, lineal [F (1, 24) = 16.00, p = .001, $\eta^2{}_p$ = .40], cuadrático [F (1, 24) = 9.28, p= .006, $\eta^2{}_p$ = .30]; E2, lineal [F (1, 24)= 110.73, p = .000, $\eta^2{}_p$ = .82], cuadrático [F (1, 24) = 27.76, p = .000, $\eta^2{}_p$ = .54]; E3, lineal [F (1, 24) = 132.60, p = .000, $\eta^2{}_p$ = .85], cuadrático [F (1, 24) = 38.41, p = .000, $\eta^2{}_p$ = .62]; E5, lineal [F (1, 24) = 26.66, p = .000, $\eta^2{}_p$ = .53], cuadrático [F (1, 24) = 67.31, p = .000, $\eta^2{}_p$ = .74], excepto en el E4 que únicamente resulta significativo el componente cuadrático [F (1, 24) = 88.91, p= .000, $\eta^2{}_p$ =.79]. La figura 3 muestra la evolución de los errores a través de las diferentes sesiones.

En todos los casos, para el análisis estadístico de los datos se utiliza el paquete Statistical Package for Social Sciences (SPSS) versión 22.0.

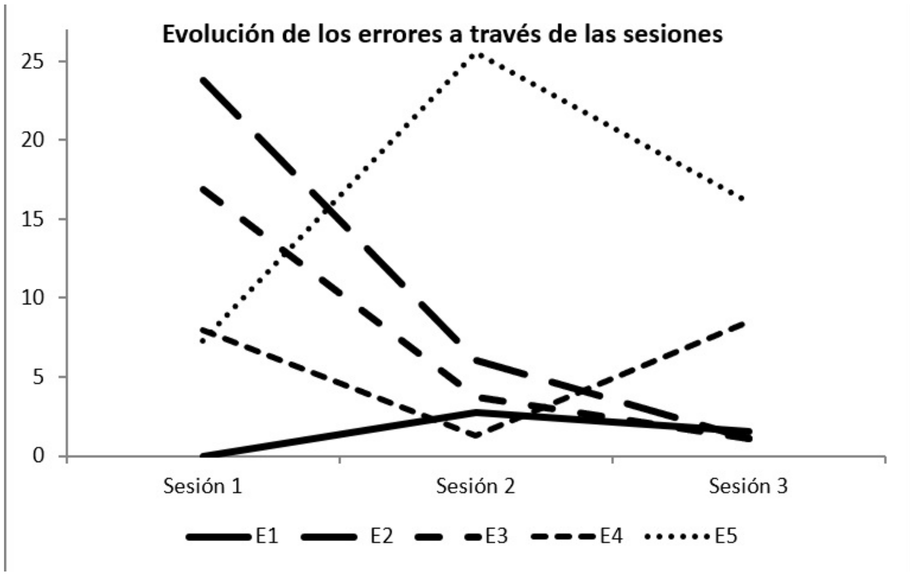

FIGURA 3
Evolución de los errores a través de las sesiones.

De esta evolución se destaca:

E1: En la sesión 1, centrada en situaciones en el plano, no aparece. Disminuye de la sesión 2 a la 3 tanto en número de alumnos que lo cometen como en la frecuencia con la que se comete.

E2 y *E3*: Disminuyen progresivamente a lo largo de las tres sesiones tanto en el número de alumnos como en la frecuencia con la que se comete.

E4: Disminuye de la sesión 1 a la sesión 2 y aumenta de la sesión 2 a la 3, tanto en el número de alumnos como en la frecuencia con la que se comete.

E5: Aumenta de la sesión 1 a la sesión 2 tanto en el número de alumnos como en la frecuencia con la que se comete. De la sesión 2 a la 3 se mantiene el porcentaje de alumnos que lo cometen (todos) y disminuye la frecuencia con la que se comete.

Para interpretar la evolución de los errores tenemos que diferenciar los dos tipos de errores. Para los específicos del uso de la argumentación visual (E1, E2 y E3), como el diseño de cada una de las sesiones se realiza a partir de los errores (Tabla II) cometidos en la previa, que dichos errores disminuyan progresivamente en las sesiones podría ser consecuencia del tipo de instrucción recibida, puesto que en las sesiones los estudiantes localizaban sus errores y se hacían puestas en común para apreciarlos. En cambio, los errores E4 y E5 van asociados con la complejidad de los contenidos matemáticos y de argumentación matemática trabajados en cada sesión, por lo que la evolución puede estar condicionada por la cantidad de procesos que los involucran en cada una de ellas. El contenido matemático del relleno del espacio fue el que motivó más errores asociados con procedimientos matemáticos (E5). En la sesión inicial, la instrucción recibida en relación con el uso de contraejemplos y procesos deductivos hace que disminuya E4 en la sesión 2. En la tercera sesión los estudiantes cometen menos errores relativos a la comprensión de las condiciones necesarias y suficientes, aunque E4 aumenta en esta sesión lo que puede asociarse con las argumentaciones matemáticas utilizadas en la resolución de las tareas relativas a curvatura constante.

5. Conclusiones

Los resultados descritos en este trabajo aportan información sobre la problemática planteada por Presmeg (2006) en relación con los aspectos pedagógicos que evidencien las dificultades en el uso de la visualización. Las tareas que requieren argumentación visual han resultado de utilidad para evidenciar los errores cometidos por los estudiantes (Battista, 2007; Gal & Linchevski, 2010; Pittalis & Christou, 2011, entre otros). Las tareas propuestas en este trabajo han puesto de manifiesto que los estudiantes analizados comenten errores en el uso de las habilidades de visualización, pese a tener talento matemático y obtener puntuaciones superiores al estándar en los test de capacidad visual e intelectual (Ramírez-Uclés et al., 2013).

En relación con los objetivos propuestos de identificación y evolución, los errores descritos en la revisión bibliográfica del marco teórico han sido localizados y clasificados en cinco tipos, de lo que resultó esta organización operativa para analizar los errores que de manera empírica han cometido los estudiantes. Para interpretar la evolución de los errores, consideramos necesario diferenciar entre los dos tipos. Por un lado, los errores relativos a la argumentación visual (E1, E2 y E3) han sido más sensibles al proceso de instrucción, especialmente a las discusiones en grupo en las que se detectaban y se establecían técnicas para salvarlos. Este hecho se ha reflejado en la disminución de la frecuencia de estos errores a lo largo de las tres sesiones pese a la mayor complejidad de las tareas propuestas. Sin embargo, la presencia de errores derivados del uso incorrecto de elementos de razonamiento, contenidos y procedimientos matemáticos ha estado más relacionada por la actividad matemática requerida en las tareas propuestas y se ha visto influenciada por la propia naturaleza, complejidad y novedad de los contenidos matemáticos presentados. Esta evolución desigual queda reflejada al considerar cada uno de los errores atendiendo a la influencia del proceso instructivo y de la actividad matemática:

- En relación con el establecimiento de falsas analogías entre plano y espacio (E1), los estudiantes han cometido errores al trasladar incorrectamente propiedades del teselado del plano al relleno del espacio, de los triángulos a los tetraedros, de los polígonos a los prismas y de las rectas en el plano al espacio. Este error no procedía en la primera sesión. En la segunda sesión se manifiesta principalmente en tareas relativas al comparar la teselación del plano con el relleno del espacio (especialmente entre triángulos y tetraedros). Hacerlos conscientes de estas diferencias al enfrentarlos a problemas tridimensionales que admiten versiones planas ha favorecido que disminuya la frecuencia de este error en la tercera sesión donde se presentaban tareas para deducir propiedades de un poliedro a partir de su desarrollo plano.
- El error que ha aparecido con más frecuencia en las argumentaciones visuales ha sido el de no discutir todos los casos posibles (E2) para concluir afirmaciones generales, bien por no ser exhaustivos en las condiciones de los objetos de estudio, en las transformaciones entre ellos o en las distintas posibilidades de construcción. Las discusiones en grupo dirigidas a sistematizar la distinción de todos los casos y comprobar la exhaustividad para identificar estructuras equivalentes salvo isometrías en el plano han favorecido que la frecuencia de aparición de este error disminuya significativamente en las tareas de las siguientes sesiones. Pese a que distinguir todas las transformaciones en los poliedros que rellenaban el espacio en la segunda sesión y las diferentes posibilidades de construcción de desarrollos planos en la tercera representó una mayor complejidad, presentarles secuencialmente problemas en

los que aumenta de manera progresiva el número de casos a considerar, les ha permitido reconocer si era adecuado el procedimiento que utilizaban para obtener todos los casos posibles.

- Los estudiantes han cometido errores derivados de la generalización a partir de un caso concreto (E3) al razonar sobre una situación particular limitada o por inducir incorrectamente propiedades particulares para el caso general. Las tareas de discusión de la primera sesión donde se detectaron errores relativos al abstraer propiedades generales a partir de soluciones particulares, les hizo conscientes de la necesidad de validar la generalidad de la respuesta encontrada. Pese a la diversidad de contenido matemático del resto de sesiones, esta dinámica se consolidó, lo que ayudó a que disminuyera significativamente la frecuencia de este error. Contrastar propiedades de la solución general desconocida a partir de las soluciones particulares obtenidas por los estudiantes ha favorecido el reconocimiento de sus errores y ha enriquecido el proceso de abstracción para consolidar el concepto figural de los objetos (Fischbein, 1993) a partir de situaciones particulares.
- Pese al nivel superior de competencia matemática de los estudiantes con talento matemático, los errores en la argumentación visual también han venidos acompañados de una utilización incorrecta de las técnicas de argumentación (E4) y del manejo de contenidos y procedimientos matemáticos (E5). La diferente evolución de estos errores a lo largo de las sesiones va acompañada de la complejidad y el carácter novedoso de las tareas planteadas en donde destaca que todos los estudiantes manifestan ambos errores en la última sesión. Los alumnos no estaban familiarizados con el uso de contraejemplos, dobles implicaciones y el empleo del rigor en los procesos deductivos e inductivos. Si bien el proceso instructivo mejoró el uso de contraejemplos y la utilización de condiciones necesarias y suficientes, E4 aumentó cuando se incorporaron procesos deductivos en la resolución de tareas complejas. Los estudiantes cometieron errores en el manejo de contenidos y procedimientos matemáticos al plantearle conceptos novedosos como los relativos a la curvatura constante y el relleno del espacio. Especialmente las tareas de relleno del espacio con tetraedros y octaedros fueron las que más favorecieron el error E5.

En cuanto al objetivo propuesto sobre estudio de relaciones, estos errores han resultado ser independientes entre sí y destaca que las correlaciones encontradas son puntuales en una determinada sesión sin mantenerse en las restantes. Que no exista correlación de manera estable en las tres sesiones, tanto en los específicos de la argumentación visual (E1, E2 y E3) como en los relativos a la argumentación y contenidos matemáticos (E4 y E5), nos lleva a proponer planificar procesos de enseñanza específicos para salvar las dificultades encontradas en cada uno de ellos.

Esta ausencia de correlación también se ha manifestado entre los errores y las puntuaciones en los test, lo que nos lleva a concluir que las dificultades manifestadas en el proceso de argumentación visual no pueden ser explicadas únicamente a partir de la capacidad visual e intelectual. Otros factores como el proceso de instrucción en técnicas de argumentación matemática y la complejidad de las tareas propuestas han influido en la frecuencia de los errores cometidos por los estudiantes. Aun en el caso de estudiantes con talento, el razonamiento visual ha resultado ser un proceso complejo para el alumno (Arcavi, 2003; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Presmeg, 1986), no sólo por la ausencia de rutinas seguras (como las que encuentran en las resoluciones formales simbólicas) sino por la dificultad tanto en la comunicación de las ideas como del proceso de razonamiento al usar las habilidades de visualización (Ryu et al., 2007).

Somos conscientes de que los resultados obtenidos vienen limitados por el tamaño de la muestra y las tareas específicas utilizadas, pero coinciden con las investigaciones que señalan mejoras en el razonamiento visual de los estudiantes tras determinados procesos de instrucción (Assouline & Lupkowski-Shoplik, 2003; Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989; Lee, 2005; Tzekaki & Ikonomou, 2009, entre otros), concluimos que el proceso de enseñanza basado en el enriquecimiento curricular de técnicas específicas de argumentación visual y tareas diseñadas que considera los errores cometidos, ha favorecido que los estudiantes analizados mejoren algunos aspectos del uso de la visualización. Los estudiantes están poco familiarizados con los procesos de generalización a partir de casos particulares, las técnicas para ser exhaustivos en la distinción de todos los casos posibles y con el reconocimiento de diferencias entre propiedades análogas en el plano y el espacio. Como se ha observado a partir de los errores localizados, incluso los estudiantes con talento matemático tienen dificultades cuando aplican a tareas complejas los elementos de razonamiento (Kim, Lee, Ko, Park & Park, 2009; Seo, 2007; Yim et al., 2008).

Estos resultados, además de aportar información sobre el conocimiento de las habilidades de los estudiantes con talento matemático que se manifiestan en tareas de argumentación visual, establecen pautas para el diseño de procesos de enseñanza. Lo estudiantes con talento matemático, pese a su mayor competencia matemática, han manifestado dificultades en tareas de argumentación visual. Los errores cometidos han sido independientes de la capacidad visual registrada por test psicométricos, lo que resalta el papel de la instrucción para que estos estudiantes hagan un uso efectivo de la visualización al resolver tareas geométricas (Presmeg, 2006). Los errores detectados en técnicas de argumentación y su persistencia en las diferentes sesiones evidencian que las tareas de argumentación en contextos visuales resultan complejas para estudiantes con talento matemático, incluso en aquellos casos que además iban acompañados de una alta capacidad visual registrada por los test. En cambio, el proceso instructivo ha favorecido la disminución de los errores específicos de la argumentación visual, por lo que consideramos que el enriquecimiento de técnicas de argumentación, tanto generales como específicas de la visualización (búsqueda de todos los casos posibles, diferenciación entre un caso particular y general, distinción de implicaciones y condiciones necesarias y suficientes, uso de conjeturas y contraejemplos, entre otros), puede hacer progresar la formación matemática de estos alumnos (Battista, 2007; Gutiérrez, 2006; Sriraman, 2004) y por tanto contribuir al desarrollo de su talento matemático.

Agradecimientos

La investigación presentada es parte de las actividades de los proyectos de investigación Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y eso en contextos de realización de actividades matemáticas ricas (edu2012-37259, mineco), Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas: análisis multidimensional (edu2015-69731-R, mineco/feder) y Competencia didáctica del profesor y aprendizaje de conceptos matemáticos escolares (edu2015-70565-P, mineco/feder).

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52* (3), 215-241. doi: 10.1023/A:1024312321077

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19* (1), 15-40. doi: 10.12802/relime.13.1911

Assouline, S. G. & Lupkowski-Shoplik, A. E. (2003). *Developing mathematical talent: A guide for challenging and educating gifted students*. Waco, TX: Prufrock Press.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *2nd Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 2 (pp. 843-908). Charlotte, NC: NCTM/Information Age Publishing.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (3), 258-292. doi: 10.2307/749365

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* (tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.

Ben-Chaim, D. & Lappan, G. (1989). The Role of Visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11* (1), 49-60.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R. T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and affecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 20* (2), 121-146. doi: 10.1007/BF00579459

Bennett, G. K., Seashore, H. G. & Wesman, A. G. (2000). *Test de Aptitudes Diferenciales (dat-5). Manual*. Madrid: TEA Ediciones.

Bishop, A. J. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education: A Review. *Educational Studies in Mathematics, 11* (3), 257-269. doi: 10.1007/BF00697739

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of Research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11* (1), 7-16.

Biza, I., Nardi. E. & Zachariades, T. (2009). Do images disprove but do not prove? Teachers' beliefs about visualization. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 59-64). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Cohen, N. (2003). Preference of directions in 3-D space. *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 3)*. Bellaria, Italy.

David, M. M. & Tomaz, V. S. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics, 80* (3), 413-431. doi: 10.1007/s10649-011-9358-6

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Pirámide.

Del Grande, J. J. (1987). Spatial Perception and Primary Geometry. In M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 127-135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher, 37* (6), 14-20.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Labor, S.A. Centro de Publicaciones del MEC.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-38). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ferrándiz, C., Prieto, M., Fernández, M., Soto, G., Ferrando, M. y Badía, M. (2010). Modelo de identificación de alumnos con altas habilidades de Educación Secundaria. *REIFOP, 13* (1), 63-74.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A Challenging Situations Approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3* (1), 51-75.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24* (2), 139–162.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics, 74* (2), 163-183. doi: 10.1007/s10649-010-9232-y

Greenes, C. (1981). Identifying the Gifted Student in Mathematics. *Arithmetic Teacher, 28* (8), 14-17.

Gruessing, M. (2011). Spatial abilities and mathematics achievement among elementary school children. In B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 306). Ankara, Turkey: pme.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: seiem.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A. (1998). *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización*. Texto de la ponencia invitada en el Encuentro de Investigación en Educación Matemática, tiem98. Centre de Recerca Matemática, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, España.

Gutiérrez. A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. de la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y saem Thales.

Hanna, G. & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical Perspectives. *ZDM Mathematics Education, 39* (1-2), 73-78. doi: 10.1007/s11858-006-0005-0

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, G. B.: Cambridge U. P.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the Teaching and Learning of Geometry. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense Publishers.

Kageyama, K. (2009). Justification identified in mathematics classroom. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 401.9). Greece: PME.

Kim, J., Lee, K., Ko, E., Park, M., & Park, M. (2009). Are gifted students aware of unjustified assumsions in geometric constructions? En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 337-344). Thessaloniki, Greece: PME.

Kinach, B., & Coulson, A. (2014). Visualization as learning tool: what should prospective teachers know and teacher educators teach? In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 245). Vancouver, Canada: pme.

Kliapis, P. & Tzekaki, M. (2011). Strategies in early spatial reasoning. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 408). Ankara, Turkey: pme.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona, España: Paidós Comunicación.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Kwon, S. & Song, S. (2007). Views on mathematical proof of able students in the 3rd to 7th grades. En J. H. Woo, H.C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 249). Seoul: pme.

Lee, K. H. (2005). Mathematically gifted student´s geometrical reasoning and informal proof. In Chick, H. L. y Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 241-248). Melbourne: pme.

Lee K., Kim M., Na, G., Han, D. & Song, S. (2007). Induction, analogy, an imagery in geometric reasoning. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Seoul: pme.

Lee K., Ko, E. & Song, S. (2007). The analysis of activity that gifted students construct definition of regular polyhedra. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 153-160). Seoul: pme.

Lee, S. & Pang, J. (2007). A survey on the uderstanding of spatial sense of elementary school students. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 255). Seoul: pme.

Mann, R. (2006). Effective Teaching Strategies for Gifted/Learning Disabled Students with Spatial Strengths. *The Journal of Secondary Gifted Education, 17* (2), 112-121.

Meavilla, V. (2005). Razonamiento visual y matemáticas. *Sigma, 27*, 109-116.

Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. ERIC Digest E482. Washington, D.C.: Office of Educational Research and Improvement.

Nardi, E. (2014). Reflections on visualization in mathematics and in mathematics education. In M. Fried (Ed.), *Mathematics and mathematics education: Searching for common ground* (pp. 193-220). New York: Springer.

Neria, D. & Amit, M. (2010). Talented middle school students' strategies and reasoning in solving analytic reasoning problems. En M. M. Pinto, F. Pinto y T. F. Kawasaki. *Proceedigns of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 321-328). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Park, M., Ko, E., Lee, D. & Lee, K. (2011). Mathematical gifted students' analogy in statistics. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 345-352). Ankara, Turkey: pme.

Pittalis, M. & Christou, C. (2011). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics, 75* (2), 191-212. doi: 10.1007/s10649-010-9251-8

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17* (3), 297-311. doi: 10.1007/BF00305075

Presmeg, N. (1991). Classroom aspects with influence use of visual imagery in high school mathematics. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th pme International Conference* (Vol. 3 pp.191-198). Assisi, Italy: pme.

Presmeg, N. (1999). Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos. *SUMA, 32*, 17-22.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205-235). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. (2014). Contemplating visualization as an epistemological learning tool in mathematics. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 46* (1), 151-157. doi: 10.1007/s11858-013-0561-z

Prior, J., y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16* (3), 339-368. doi: 10.12802/relime.13.1633

Rabab'h, B., & Veloo, A. (2015). Spatial Visualization as Mediating between Mathematics Learning Strategy and Mathematics Achievement among 8th Grade Students. *International Education Studies, 8* (5), 1-11.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.

Ramírez-Uclés, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lleida: SEIEM.

Ramírez-Uclés, R., Ramírez-Uclés, I., Flores, P., y Castro, E. (2013). Análisis de las capacidades de visualización espacial e intelectual en los alumnos con talento matemático. *Revista Mexicana de Psicología, 30* (1), 24-31.

Raven, J. C., Court, J. H. y Raven, J. (1993). *Test de Matrices Progresivas. Escalas Coloreadas, General y Avanzadas*. Buenos Aires: Paidós.

Rico, L. (1993). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 60-108). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L. et al. (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Editorial Horsori e I.C.E. Universitat Barcelona.

Rivera, F. (2011). *Towards a Visually-Oriented School Mathematics Curriculum*. New York: Springer Science+Business Media. doi: 10.1007/978-94-007-0014-7.

Rivera, F., Steinbring, H. & Arcavi, A. (2014). Visualization as an epistemological learning tool: an introduction. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 46* (1), 1-2.

Ryu, H. Chong, Y. & Song, S. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 137-144). Seoul: PME.

Secadas, F. (1961). E*l test AMPE. Test de inteligencia. Manual del examinador*. Madrid: CSIC, Instituto San José de Calasanz.

Seo, D. (2007). Generalization by comprehension and by apprehension of the Korena 5th grade gifted students. In J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 280). Seoul: PME.

Sheffet, M. & Bassan-Cincinatus, R. (2009). Hiding shapes. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 465). Thessaloniki, Greece: PME.

Sriraman, B. (2004). Gifted ninth graders' notions of proof: Investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27* (4), 267-292. doi:10.4219/jeg-2004-317.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20* (2), 147-164. doi: 10.1007/BF00579460

Thurstone, L. L. y Thurstone, T. G. (1941). *Factorial studies of intelligence*. Chicago: University of Chicago Press.

Thurstone, L. L. y Thurstone, T. G. (1976). *P.M.A.: Aptitudes Mentales Primarias*. Madrid: TEA.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10* (2), 275-300.

Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias, 28* (3), 327-340. doi:10.5565/rev/ec/v28n3.187

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project*. Dordrecht: D. Reidel.

Tzekaki, M. & Ikonomou, A. (2009). Investigating spatial representations in early childhood. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 241-248). Thessaloniki, Greece: PME.

Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities, 39* (6), 496-506.

Van Garderen, D. & Montague, M. (2003). Visual-Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 18* (4), 246-254. doi: 10.1111/1540-5826.00079

Wheatley, G. H. (1998). Imagery and Mathematics learning. *Focus on Learning problems in Mathematics, 20* (2 y 3), 65-77.

Yim, J., Song, S. & Kim, J. (2008). The mathematically gifted elementary students' revisiting of Euler's polyhedron theorem. *The Montana Mathematics Enthusiast, 5* (1), 125-142.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2007). Is a visual example in geometry always helpful? En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 265-272). Seoul: PME.