Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME
ISSN: 1665-2436
ISSN: 2007-6819
relime@clame.org.mx
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Organismo Internacional

Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad

Alvarado, Hugo; Estrella, Soledad; Retamal, Lidia; Galindo, Maritza
Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, vol. 21, núm. 2, 2018
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Organismo Internacional
Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33555954002
DOI: https://doi.org/10.12802/relime.18.2121

Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad

Probabilistic intuitions in engineering students: implications for the teaching of probability

Hugo Alvarado
Universidad Católica de la Santísima Concepción , Chile
alavaradomartinez@ucsc.cl

DOI: https://doi.org/10.12802/relime.18.2121
Redalyc: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33555954002

Soledad Estrella
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
soledad.estrella@pucv.cl
http://orcid.org/0000-0002-4567-2914

Lidia Retamal
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile
lretamal@ucsc.cl

Maritza Galindo
Universidad San Sebastián, Chile
Maritza.Galindo@uss.cl

Recepción: 19 Marzo 2018
Aprobación: 12 Julio 2018

Resumen:

Se evalúan las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en 257 estudiantes de ingeniería mediante un cuestionario de ocho ítems cerrados, y se analizan las argumentaciones de 148 de ellos en un ítem abierto. Los resultados indican una alta variación en la asignación cualitativa de la intuición probabilística en situaciones de incertidumbre y la existencia de intuiciones correctas e incorrectas de los estudiantes. Proponemos una enseñanza de la probabilidad que relacione la comprensión teórica y práctica de los significados de la probabilidad, que va del intuitivo al axiomático, a través de la estimación cualitativa de las intuiciones probabilísticas como grado de creencia personal, y la confrontación explícita de las diversas heurísticas con el conocimiento formal de la probabilidad.

Palabras clave: Significados de la probabilidad, incertidumbre, intuición, heurísticas, educación en ingeniería.

Abstract:

The intuitions and heuristics on the probability are evaluated in 257 engineering students through a questionnaire of eight closed items, and they analyze the arguments of 148 of them in an open item. The results indicate a high variation in the qualitative assignment of the probabilistic intuition in situations of uncertainty and the existence of correct and incorrect intuitions of the students. We propose a teaching of probability that relates theoretical and practical understanding of meanings of probability, from the intuitive to the axiomatic, through the qualitative estimation of probabilistic intuitions as a degree of personal belief, and the explicit confrontation of diverse heuristics with formal knowledge of probability.

Keywords: Meanings of probability, uncertainty, intuition, heuristics, education in engineering.

Resumo:

As intuições e heurísticas sobre a probabilidade são avaliadas em 257 estudantes de engenharia através de um questionário de oito itens fechados e analisam os argumentos de 148 deles em um item aberto. Os resultados indicam uma alta variação na atribuição qualitativa da intuição probabilística em situações de incerteza e a existência de intuições corretas e incorretas dos alunos. Proponemos um ensinamento de probabilidade que relaciona a compreensão teórica e prática dos significados de probabilidade, variando do intuitivo ao axiomático, através da estimativa qualitativa de intuições probabilísticas como um grau de crença pessoal e o confronto explícito das diversas heurísticas com conhecimento formal de probabilidade.

Palavras-chave: significados de probabilidade, incerteza, intuição, heurística, educação em engenharia.

Résumé:

Dans cette article nous étudions les evaluations sur les intuitions et les heuristiques sur la probabilité dans une populations de 257 étudiants en formation pour devenir ingenieur à travers d'un questionnaire de huit items fermés, et nous analysont les arguments de 148 d'entre eux dans un item ouvert. Les résultats indiquent une grande variation dans l'attribution qualitative de l'intuition probabiliste dans les situations d'incertitude et l'existence d'intuitions correctes et incorrectes des étudiants. Nous proposons un enseignement de probabilité qui relie la compréhension théorique et pratique des significations de probabilité, allant de l'intuitif à l'axiomatique, à travers l'estimation qualitative des intuitions probabilistes comme un degré de croyance personnelle, et la confrontation explicite des divers heuristiques avec une connaissance formelle de la probabilité.

Mots clés: Signification de probabilité, incertitude, intuition, heuristique, éducation en ingénierie.

1. INTRODUCCIÓN

Aunque utilizamos nociones probabilísticas informales a diario para tomar decisiones, la investigación sobre probabilidad se ha centrado principalmente en los significados clásico y frecuentista, siendo casi inexistente la investigación sobre el significado intuitivo de la probabilidad. Concordamos con Sharma (2014) que los entornos sociales y la cultura común pueden influir en las ideas informales de probabilidad, y en la necesidad de confrontar las creencias cotidianas intuitivas con los conceptos probabilísticos, para aclarar los objetivos, el propósito y las limitaciones de la enseñanza de la probabilidad.

La literatura sobre la epistemología de la Probabilidad, la complejidad cognitiva, errores y dificultades en el razonamiento probabilístico, sostiene que jóvenes y adultos poseen ideas informales y prejuicios en situaciones probabilísticas, en las cuales interviene el azar (Ben-Zvi y Garfield, 2004; Brousseau, 2009; Fischbein y Schnarch, 1997; Kahneman, Slovic y Tversky, 1982). En este sentido, ya en la década de los ochenta, Kahneman y Tversky (1982) mostraban que la percepción del riesgo está influenciada por factores psicológicos y que las personas en situaciones ganadoras son reacias al riesgo mientras que en situaciones perdedoras, lo buscan. Así, la percepción del riesgo de un sujeto está dominada por el impacto personal (de pérdida o ganancia), de modo que incluso un juicio minucioso de las probabilidades asociadas estaría sesgado por dicho impacto (Borovcnik, 2015).

Aun cuando se reconoce que la intuición se basa en las propias creencias epistemológicas, las cuales disponen a los estudiantes a aceptar o no la incertidumbre (Fulmer, 2014), escasa es la atención del papel de las intuiciones en la comprensión de la probabilidad en estudiantes de educación universitaria. Esta falta de atención contradice el papel potencialmente influyente del significado intuitivo de la probabilidad en la construcción del conocimiento probabilístico.

Lo anterior, tiene su incidencia en la institución superior. En asignaturas de Estadística dirigidas a estudiantes de Ingeniería los logros y avances académicos son bajos, lo que implica que la estadística es un tópico difícil para los estudiantes, en particular, las aplicaciones de la probabilidad y las distribuciones de probabilidades (Alvarado y Batanero, 2007). En general, la educación secundaria no se caracteriza por una enseñanza en profundidad de los conceptos de Probabilidad, ni por realizar experimentaciones concretas o simuladas en ambientes de incertidumbre, principalmente porque la Probabilidad es difícil de enseñar debido a la existente disparidad entre la intuición y el desarrollo conceptual, incluso en conceptos aparentemente elementales (Batanero, Biehler, Maxara, Engel, y Vogel, 2005). Es así que, muchos estudiantes llegan a la universidad sin haber tenido la oportunidad de desarrollar habilidades, análisis crítico y actitudes hacia el azar y las probabilidades que les permitan fortalecer su formación como ciudadanos con sentido probabilístico.

Un área de indagación en Didáctica de la Probabilidad es el análisis de las dificultades de comprensión en el razonamiento probabilístico ante una tarea que involucra incertidumbre, pues las intuiciones erróneas que se adquieren tempranamente son difíciles de cambiar y pueden causar dificultades en el aprendizaje de la probabilidad, Fischbein (1975). En la actualidad profesores y estudiantes de nivel universitario se enfrentan cotidianamente con información sobre situaciones en que hay incertidumbre en los medios de comunicación o en situaciones en que deben tomar una decisión de carácter objetivo. Sin embargo, los profesores tienen dificultades en adquirir un razonamiento probabilístico que les permita reconocer y modelar situaciones de azar (Ortiz, Batanero y Contreras, 2012), analizar las contradicciones entre sus creencias y concepciones con la probabilidad formal, para enfrentar las ideas informales y creencias que tienen sobre las probabilidades y progresar con comprensión en la axiomática de la probabilidad.

El reconocido carácter multifacético de la probabilidad, tanto desde una perspectiva matemática como filosófica, (Batanero, 2005; Batanero, Henry, y Parzysz, 2005; Borovčnik, 2012; Borovčnik, 2015; Borovčnik y Kapadia, 2014; Hacking, 1990; Kapadia y Borovčnik, 1991; entre otros), ha llevado a que algunos investigadores aconsejen que para el aprendizaje de este tema, los sujetos deben tener la oportunidad de variadas experiencias de situaciones probabilísticas asociadas a los diversos significados de la probabilidad, a saber, intuitivo, frecuencial, clásico, subjetivo y axiomático (Batanero, Henry, y Parzysz, 2005).

Este trabajo evalúa las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en estudiantes de ingeniería mediante un cuestionario de ocho ítems cerrados, antes de un curso de estadística; y se analizan los argumentos y sesgos de razonamiento por medio de un ítem abierto, después de desarrollar la unidad de probabilidad del curso de estadística universitario. Las preguntas que guían esta investigación son, ¿Cómo los estudiantes de ingeniería asignan valores a situaciones de incertidumbre desde sus intuiciones probabilísticas previo a un curso de estadística? y ¿Qué argumentos utilizan los estudiantes de ingeniería respecto a sus intuiciones y heurísticas sobre probabilidad después de un curso de estadística?

2. FUNDAMENTACIÓN Y MARCO CONCEPTUAL

2.1. Probabilidad y estadística en la ingeniería

Distintas instituciones de educación superior están presentando nuevos modelos educativos basados en resultados de aprendizaje y competencias (Alvarado y Retamal, 2012). En particular, la tendencia en las Escuelas de Ingeniería es implementar un currículo menos técnico y cada vez más práctico, siendo un referente el modelo CDIO que propone que la ingeniería es concebir, diseñar, implementar y operar (Muñoz, Martínez, Cárdenas, y Cepeda, 2013), cuya red en el mundo se compone de al menos 120 universidades. Esto ha originado un interés por mejorar la enseñanza en este campo, por ejemplo en las Conferencias Internacionales sobre Enseñanza de la Estadística (ICOTS) se han organizado sesiones especiales sobre la formación estadística de los ingenieros (Martín, 2006; Romeu, 2006).

En ciencias de la ingeniería son importantes las aplicaciones de la probabilidad y los alcances del riesgo y toma de decisiones en contexto, tales como el estudio de caudales de ríos para la construcción de puentes, estudio de olas para el diseño de un puerto marítimo y el análisis del procesamiento de grandes volúmenes de datos en constante crecimiento. En la educación superior se intenta introducir el razonamiento con modelos estadísticos y mostrar su utilidad en situaciones reales en un enfoque más axiomático. Sin embargo, no está contemplado el desarrollo de las ideas informales y creencias sobre probabilidades y el alcance que pueden tener las intuiciones correctas e incorrectas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

2.2. Razonamiento probabilístico

Fischbein (1987) señala que una de las tareas fundamentales de la Educación Matemática es el desarrollo en los estudiantes de la capacidad para distinguir las creencias intuitivas de las convicciones con sustento. El autor considera como un serio error no considerar la confianza que tienen los estudiantes en sus intuiciones, sugiriendo que hay que tomar conciencia en que se poseen intuiciones correctas y útiles, y que se deben manejar las intuiciones de forma de lograr comprender (asimilar) de manera adecuada las estructuras formales propias del razonamiento lógico. Fischbein y Schnarch (1997) sugerían que en el aprendizaje de la probabilidad los estudiantes debían crear nuevas intuiciones, y la enseñanza debía proveer de experiencias en que los estudiantes confrontasen sus esquemas intuitivos primarios y las causas de los conflictos y errores en los tipos de razonamiento específicos a las situaciones probabilísticas.

Nisbett y Ross (1980) señalan que es posible adquirir un correcto razonamiento estadístico intuitivo sobre conceptos abstractos, tales como la Ley de los grandes números y aplicarlo para resolver problemas cotidianos, siempre que reconozcamos la situación como aleatoria. Kahneman, Slovic y Tversky (1982) afirman que las heurísticas y sesgos son resistentes a la enseñanza e incluso se observan en sujetos con alta preparación matemática. Estos autores describen los sesgos de razonamiento que ocurren como resultado de un proceso cognitivo, como la heurística, que lleva a una solución inmediata del problema pero no garantiza que la solución sea correcta, bien por usar un modelo inapropiado de la situación o por falta de estructuras cognitivas específicas. Una heurística puede entenderse como la estrategia utilizada por las personas al emitir un juicio, realizar una estimación, tomar una decisión, entre otras acciones, para descomplejizar un problema pero basándose en información limitada. Así, a través de heurísticas, las personas reducen la complejidad de calcular probabilidades y predecir valores, pero al no contar con toda la información requerida se producen sesgos de razonamiento en el juicio o decisión que se adopta.

En las investigaciones sobre razonamientos probabilísticos, Tversky y Kahneman (1980) clasifican tres tipos de heurísticas: representatividad, disponibilidad, y ajuste-anclaje.

La heurística de la representatividad, como regla intuitiva e informal, permite a partir de lo que ya se conoce, inferir sobre un suceso. Realmente la heurística de la representatividad incluye dos heurísticas diferentes: una para construir modelos (de acuerdo a la heurística de la representatividad, el modelo que subyace podría relacionarse cercanamente a las características estructurales de los datos observados) y uno para juzgar la posibilidad de los resultados (un resultado es más probable si su estructura es más similar al de la asumida por el modelo subyacente). Kahneman y Tversky (1982) señalan que si un suceso es altamente representativo de cierta categoría, se juzga como alta la probabilidad de que el suceso tenga su origen en esa categoría. Aunque aplicar esta heurística lleva en muchas ocasiones a realizar inferencias razonables, puede aumentar la probabilidad de cometer sesgos, pues el hecho de que algo sea más representativo, no lo hace más probable. Por ejemplo, los productos de alta calidad suelen ser caros, y por tanto, si un producto es caro tendemos a pensar que es de alta calidad. Además, las heurísticas, como la representatividad, pueden bloquear la aplicación de una regla lógica obvia (Kahneman, 2012).

Los autores señalan que una persona emplea la heurística de la disponibilidad si estima la frecuencia o probabilidad por la facilidad con las asociaciones que trae a la mente y no por acontecimientos objetivos. Como todo mecanismo de naturaleza más intuitiva que racional, esta heurística provoca sesgos, llevando a la creencia que los sucesos más frecuentes o las emociones más recientes, confirman las suposiciones en todos los casos o que se pueden aplicar a cualquier situación.

2.3. Significados de la probabilidad

En el surgimiento de la probabilidad se distinguen dos perspectivas, una asociada a las leyes estocásticas de los procesos aleatorios, y otra relacionada a la perspectiva epistemológica, en tanto estimación de grados razonables de creencia en proposiciones carentes de un trasfondo estadístico (Hacking, 1975).

Algunos autores han realizado caracterizaciones de los diferentes significados de la probabilidad. Borovčnik y Kapadia (2014) señalaban tres perspectivas para la enseñanza de la probabilidad, cada una con sus propias restricciones: (1) teoría a priori, en que la probabilidad se identifica por probabilidades iguales en un espacio de probabilidad finita (Teoría de Laplace); (2) teoría frecuentista, en que la probabilidad está determinada por el límite de la frecuencias relativas; y (3) la teoría subjetivista, en que la probabilidad es el grado de creencia personal de una persona en una situación de incertidumbre. Los autores señalan que estas perspectivas se enfrentan a que, no hay situaciones con probabilidades iguales, no hay un límite de las frecuencias relativas en la serie finita de experimentos en el mundo real, y la "obtención de probabilidades" es demasiado subjetiva para muchas personas.

Batanero (2005) analizaba los elementos de campos de problemas, procedimientos, lenguaje, propiedades y conceptos relacionados a cinco significados de la probabilidad, a saber, significado de la probabilidad intuitivo, Laplaciano, frecuencial, subjetivo y axiomático. En nuestro estudio tendremos en cuenta el significado intuitivo, aunque reconocemos que la enseñanza universitaria se dirige hacia la aprehensión del significado axiomático, ambos se especifican a continuación.

Significado intuitivo de la probabilidad. Las ideas intuitivas de probabilidad, como grados de creencia personal, se encuentran comúnmente en los juegos de azar y también difundidas en los medios de comunicación. Batanero (2005) indica que las ideas intuitivas sobre el azar aparecen tanto en niños como en adultos que no han tenido estudios de probabilidades, quienes usan frases y expresiones como posible, previsible, presumible, para medir cuantitativamente los sucesos inciertos y expresar el grado de creencia en ellos. En el significado intuitivo estas expresiones permiten comparar y ordenar según valor otorgado, y no hay formalismo matemático.

Significado axiomático de la probabilidad. Kolmogorov contribuyó al desarrollo formal de la probabilidad, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática que ha sido aceptada independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad. Así, la probabilidad es un modelo matemático que podemos usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios, y ha mostrado su utilidad en casi todos los campos de la actividad humana (Batanero, 2005). La probabilidad puede ser considerada, en el currículo de ingeniería, una etapa de transición entre los conocimientos de matemática y de las ciencias de la ingeniería (Alvarado, Galindo, y Retamal, 2013; Retamal, Alvarado, y Rebolledo, 2007).

Por lo anterior, y considerando que la probabilidad es una de las ideas estadísticas fundamentales de la alfabetización estadística, es necesario explorar papel de las intuiciones en educación universitaria. Pretendemos analizar las intuiciones probabilísticas y sesgos de razonamiento en estudiantes de ingeniería.

3. METODOLOGÍA

3.1. Participantes

La muestra estuvo constituida por 257 estudiantes universitarios de ingeniería, de distintas especialidades (ver Tabla I) y provenientes de establecimientos educacionales públicos y particulares. La mayoría de los estudiantes provienen de establecimientos particulares 173 (67,3%), el mayor número de participantes según especialidad fueron los de ingeniería civil industrial y civil. De los 257 estudiantes 169 (65,8%) eran mujeres.

TABLA I
Número de estudiantes de ingeniería según especialidad y establecimiento de procedencia

				Ingeniería				
Procedencia	Civil	Comercial	Eléctrica	Geología	Industrial	Informática	Otro	Total
Municipal	16	14	6	12	20	14	2	84 (32,7%)
Particular Subvencionado	32	18	8	23	43	15	4	143 (55,6%)
Particular Pagado	4	13		2	7	3	1	30 11,7%
Total	52 (20,2%)	45 (17,5%)	14 (5,5%)	37 (14,4%)	70 (27,2%)	32 (12,5%)	7 (2,7%)	257

De acuerdo al plan de estudios, el 58,7% de los estudiantes de ingeniería estaba cursando segundo o tercer año académico (ver Tabla II), y les correspondía iniciar el curso semestral de Probabilidades de su malla. El programa de actividad curricular comprendía a la semana tres horas de cátedra, una hora de práctica y una hora de laboratorio de computación enfatizando la simulación vía Excel y programa R. El curso lo componían cuatro profesores de cátedra, quienes tienen más de una década de experiencia en el diseño de enseñanza de la Probabilidad y Estadística en el nivel universitario, y conforman la Comunidad Docente de Educación Estadística certificada por la institución universitaria. Además, las actividades prácticas de aprendizaje fueron apoyadas por otros cuatro profesores con formación estadística en las sesiones de ayudantía y laboratorio de computación.

La secuencia de aprendizaje incluía las unidades de probabilidad de sucesos y las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas, la que se realizó durante cinco semanas, integrando los significados de la probabilidad. En las primeras sesiones los estudiantes estimaban en forma escrita situaciones de incertidumbre bajo condiciones y de variabilidad del muestreo, para reconocer y comunicar la propia intuición, y luego comparar el razonamiento probabilístico con sus ideas intuitivas. Las sesiones abarcaban actividades de resolución de problemas de la vida cotidiana y de la ingeniería, abordando en lo posible los significados de la probabilidad (intuitiva, laplaciana, frecuentista, y axiomática), y las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias. La planificación consideró situaciones cotidianas y manipulación de generadores aleatorios típicos, uso de simulación con recursos tecnológicos, cociente de casos favorables y posibles en espacios muestrales equiprobables, teoría de conjuntos y teoría de la medida.

TABLA I
Número de estudiantes de ingeniería según años de estudios

Segundo Año	Tercer Año	Cuarto Año	Quinto Año	Total
71 (27,6%)	80 (31,1%)	57 (22,2%)	49 (19,1%)	257

3.2. Instrumento

Se construyó un cuestionario con nueve ítems, ocho de ellos cerrados y uno abierto. Los ítems evaluaban intuiciones, heurísticas y conocimientos sobre probabilidad en estudiantes de ingeniería. En los primeros ocho ítems del cuestionario se les propuso a los participantes evaluar en escala ordinal de 10 en 10 para estimar su grado de creencia sobre probabilidades, dentro de un rango del 0 al 100. Los ítems 1, 2 y 6 fueron elaborados por los autores a partir del contexto nacional. Los ítems 3 y 4 presentan relaciones de causalidad y diagnóstico (Pollatsek, et al., 1987; Tversky y Kahneman, 1974), ítem 5 la heurística de la disponibilidad (Kahneman y Tversky, 1972). El ítem 7 es una adaptación del problema de los dos hijos de Gardner (1959) y hace mención a la confusión de probabilidades del producto y condicional. El ítem 8 presenta la heurística de representatividad y es una adaptación del ítem propuesto por Kahneman y Tversky (1972).

El ítem 9 es equivalente al 8, es un ítem abierto que solicita resolución y argumentación; cuyo objetivo es indagar en la heurística de la representatividad (efecto del tamaño muestral) y en el modelo de probabilidad binomial. Este ítem es adaptado de la investigación de Alvarado y Batanero (2007).

El cuestionario de nueve ítems fue evaluado por cuatro especialistas, dos de Didáctica de la Estadística y dos de Estadística, y posteriormente modificado y piloteado.

A continuación se detallan los nueve ítems del cuestionario aplicado y su objetivo de evaluación:

Ítem	Objetivo de evaluación
1. Que los estudiantes de último año de tu colegio de egreso obtengan sobre 500 puntos en la Prueba de ingreso a la Universidad de Matemática.	Autopercepción del contexto
2. Llegar a los 80 años de edad en Chile.	Autopercepción del contexto
3. Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero.	Relación de causalidad
4. Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules.	Relación diagnóstico
5. Un profesor con 10 estudiantes dice que obtendría más grupos distintos formado de 2 estudiantes en vez de 8 estudiantes.	Heurística de disponibilidad (Razonamiento combinatorio)
6. Dominio de los principales contenidos de la probabilidad.	Autopercepción de manejo de los contenidos de probabilidad
7. Un matrimonio se proyecta tener tres hijos. ¿Qué tan probable es que los dos primeros sean hombres y el tercero sea mujer?	Confusión entre la regla del producto y probabilidad condicional
8. En un primer curso de matemática para ingenieros la probabilidad de que repruebe la asignatura un estudiante es de un 50%. ¿Cuál de estos casos te parece más probable? a) Que de 10 alumnos seleccionados 5 reprueben. b) Que de 100 alumnos seleccionados 50 reprueben. c) Los dos casos anteriores son igual de probables.	Heurística de la representatividad (efecto del tamaño muestral)
9. Resuelva. En un primer curso de matemática para ingenieros la probabilidad de que repruebe la asignatura un estudiante es de un 50%. ¿Cuál de estos casos te parece más probable? a) Que de 10 alumnos seleccionados 5 reprueben. b) Que de 100 alumnos seleccionados 50 reprueben. c) Los dos casos anteriores son igual de probables.	Heurística de la representatividad (efecto del tamaño muestral) Modelo de probabilidad binomial

3.3. Respuestas esperadas a los ítems cerrados

Los primeros ocho ítems presentan situaciones referidas a la estimación de probabilidad de orden cualitativo, que permiten estimar la probabilidad intuitiva en escala ordinal con apreciación de 0 a 100.

Los ítems 1, 2 y 6 ofrecen la oportunidad de vivenciar la intuición como grado de creencia personal en el propio contexto cotidiano, permitiendo confrontar el razonamiento probabilístico con las ideas intuitivas. Específicamente, el ítem 1 pretende indagar la percepción que tienen estos estudiantes de ingeniería respecto del puntaje que obtendría la promoción de egresados de su establecimiento educacional en una prueba de matemática nacional (en Chile, los puntajes promedio en esta prueba fueron de 500,2; DEMRE (2016)), y se espera una asignación baja de a lo más 50 (debido a los bajos puntajes nacionales, DEMRE (2015)). El ítem 2 da cuenta de la autopercepción de la longevidad en Chile (con una esperanza de vida media 80,5 años; OMS (2016)) y se espera una asignación alta de a lo menos 70 debido a que el contexto de edad está asociado a los valores de la escala. El ítem 6 indaga en la autopercepción que tiene sobre el conocimiento de los contenidos de probabilidad de nivel escolar, y se espera una asignación baja de a lo más 50, pues los estudiantes de ingeniería en su mayoría no han tenido una educación de calidad respecto a las probabilidades.

El ítem 3 está relacionado con estudios sobre el razonamiento causal de Pollatsek y colaboradores (1987) y Tversky y Kahneman (1974). Si consideramos el suceso A que el joven sea ingeniero (efecto) y el suceso B que el padre sea ingeniero (causa), estamos en presencia de una relación causal que en términos simbólicos podemos expresar P (A| B) al cuantificar la probabilidad de que ocurra el suceso A dado que ha ocurrido el suceso B. En este caso se espera que los estudiantes utilicen un razonamiento causal, estimando que en Chile es muy valorada la profesión de ingeniero se espera una asignación alta sobre el valor de escala 75 (valor consensuado desde un estudio sobre el grado de prestigio atribuido a diferentes disciplinas en Chile, en que se valora la profesión de ingeniero con un 79%; (CONICYT, 2016)).

El ítem 4 busca determinar si enfrentados a sucesos condicionales se razona por medio de condiciones o de causalidad. Si consideramos el suceso A que la madre tenga los ojos azules (causa) y el suceso B que la niña tenga los ojos azules (efecto), tenemos P (A| B), que es una relación diagnóstica, al estimar la causa dado el conocimiento del efecto; se espera una asignación cercana al valor 50, según los estudios de Tversky y Kahneman (1982).

El ítem 5 evalúa la heurística de la disponibilidad a través de un razonamiento combinatorio dada la situación que un profesor con 10 estudiantes dice obtener más grupos distintos de 2 estudiantes que de 8 estudiantes. Se espera una asignación baja, de valor a lo más 10, en correspondencia con los resultados de Tversky y Kahneman (1974) y Salcedo y Mosquera (2008). En efecto, de 10 estudiantes se obtiene la misma cantidad de grupos, sean de dos o de ocho estudiantes, es decir, $\binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = 45 \, y \, \binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)!8!} = 45.$.

La solución del ítem 7 evoca la independencia de sucesos que se define mediante la regla de la multiplicación, también denominada regla del producto. Este ítem puede relacionarse con el experimento aleatorio de lanzar tres monedas y calcular la probabilidad que sea cara la primera moneda, cara la segunda y sello la tercera moneda. Al definir los sucesos Ai: el hijo i-ésimo es hombre, con i = 1, 2, 3 se determina la probabilidad que en un matrimonio con tres hijos los dos primeros sean varones y el tercero mujer, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A^c{}_3) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2) \times \mathrm{P}(A^c{}_3) = ½ \times ½ \times ½ = 1/8,$ esto es, 0,125. Para este ítem se espera una asignación de a lo más 20.

El ítem 8 corresponde a una adaptación en un contexto educacional al problema de Tversky y Kahneman (1974), sobre la heurística de la representatividad, que prescinde del tamaño de la muestra y de la variabilidad del muestreo. La respuesta correcta, opción (a), asume que el grupo de 10 estudiantes tiene más probabilidad de tener un 50% de estudiantes reprobados, debido a la variabilidad en muestras pequeñas. La opción (b) da evidencia de la heurística de representatividad, en cuanto hay mayor proporción en muestras más grandes y la opción (c) no considera el efecto del tamaño de las muestras.

3.4. Respuestas esperadas al ítem abierto

El ítem 9 permite justificar la opción elegida en el ítem 8. Si bien, puede argumentar por la variabilidad en pequeñas muestras, este ítem permite la modelización probabilística identificando la variable aleatoria discreta con distribución binomial de parámetros n=10 y p=1/2 para el caso (a) y de parámetros n=100, p=1/2 en el caso (b); y luego comparar los valores del cálculo de la probabilidad binomial.

La solución algebraica y que puede apoyarse con calculadora se presenta a continuación: Consideremos la variable aleatoria X como el número de alumnos que reprueban una asignatura de un grupo de n estudiantes. La variable X se distribuye binomial de parámetros n y probabilidad de éxito $p = \frac{1}{2}$ y fracaso . Así, bajo el modelo binomial $P(X = x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ para x = 0, 1, 2,..., n, las opciones se pueden presentar algebraicamente como:

$$\text{(a) } P(X=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0{,}2461; \quad \text{(b) } P(X=50) = \binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 0{,}07958;$$
$$\text{(c) } P(X=5) = P(X=50)$$

Siendo la opción (a) la correcta, ya que P (X=5)>P (X=50).

3.5. Procedimiento

Del cuestionario de nueve ítems, los ocho primeros fueron aplicados vía online a 257 estudiantes de siete especialidades de la ingeniería al inicio del semestre académico. El ítem 9 fue aplicado vía lápiz y papel a 148 de ellos después de finalizar el curso de Probabilidad y Estadística de nivel universitario. El ítem 8 y 9 aunque idénticos en su presentación, difieren en que uno es cerrado (con tres opciones de respuestas) y el otro ítem es abierto (con solicitud de argumentación en la resolución).

4. RESULTADOS

4.1. Resultados de los ítems cerrados 1 al 7 según variabilidad

Se presenta la distribución de las respuestas de los primeros siete ítems cerrados dada por los 257 estudiantes de ingeniería, acerca de su grado de creencias en situaciones de contexto cotidiano (ítem 1 y 2), de sus razonamientos de causalidad y diagnóstico (ítems 3 y 4), de su razonamiento combinatorio (ítem 5), de su creencia de dominio de los principales contenidos de probabilidad (ítem 6), y de la probabilidad del producto (ítem 7), ver Figura 1.

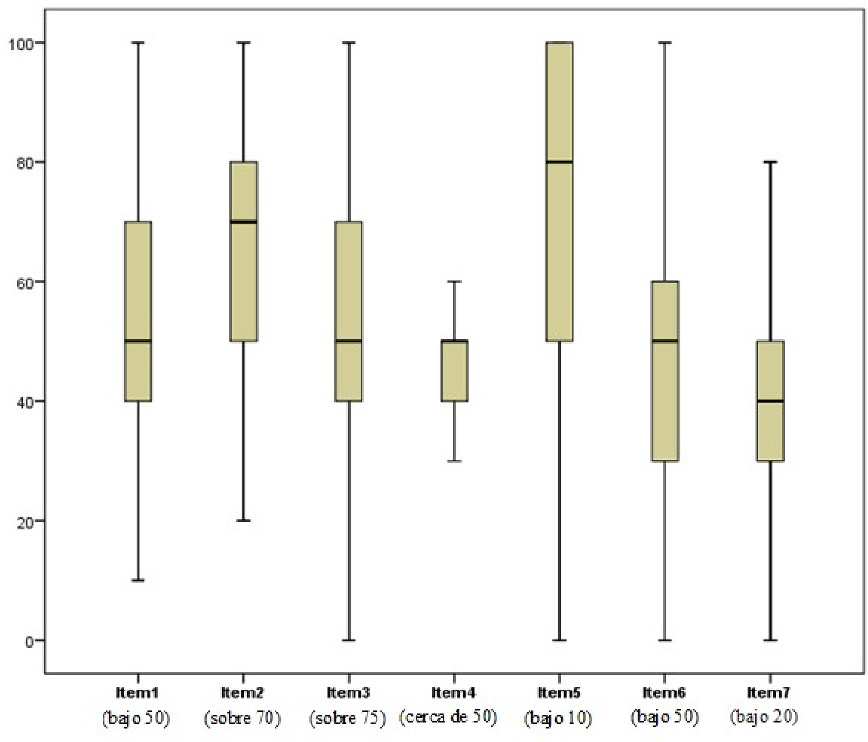

FIGURA 1
Distribución de respuestas a 7 ítems (respuesta esperada) según escala de apreciación, n=257

El gráfico de cajas de la Figura 1 permite comparar la distribución de cada ítem, presentando una alta y variada dispersión en las asignaciones de probabilidades a los ítems, siendo el ítem 5 el de mayor variabilidad en relación al centro de los datos, con un rango intercuartil de 50 de las respuestas de los estudiantes. El ítem 5 muestra que las tres cuartas partes de los estudiantes tienen una concepción errada, pues asignan un valor entre 50 y 100 de obtener más grupos mientras menor es la selección de subgrupos del conjunto (ver Tabla III).

TABLA III
Estadísticos de las respuestas a los ítems 1 al 7

(respuesta esperada)	Item1 (bajo 50)	Item2 (sobre 70)	Item3 (sobre 75)	Item4 (cerca de 50)	Item5 (bajo 10)	Item6 (bajo 50)	Item7 (bajo 20)
Media	54,1	65,3	52,9	48,0	70,5	48,3	37,2
Cuartil 1	40	50	40	40	50	30	30
Mediana	50	70	50	50	80	50	40
Cuartil 3	70	80	70	50	100	60	50
Rango intercuartil	30	30	30	10	50	30	20

También, se observa que el ítem 4 en que se estima la causa dado el conocimiento del efecto, presenta la menor variabilidad, con un rango intercuartil de 10 de las respuestas de los estudiantes. Las respuestas promedios de los estudiantes de ingeniería, con valores de media 48 y mediana 50 concuerdan con la investigación de Tversky y Kahneman (1982), ver Tabla III.

Respecto al ítem 3 en que se estima el efecto (joven ingeniero) dado el conocimiento de la causa (padre ingeniero), las respuestas indican que solo una cuarta parte de los estudiantes han valorado la profesión de ingeniero asignando valores de escala sobre 70 a la condición de causalidad, y la mitad de los estudiantes asignaron valores sobre 50. Estos resultados coinciden con los estudios de Tversky y Kahneman (1980), al obtener mayor probabilidad a los sucesos de razonamiento causal (ítem 3) que los sucesos de relación diagnóstica (ítem 4).

Las respuestas del ítem 7 relacionado al concepto de independencia y la aplicación de la regla del producto muestran que las tres cuartas partes de los 257 estudiantes de ingeniería asignaron valores de escala superiores a 30, respuestas alejadas de la solución correcta, ver Tabla III.

En los ítems 1, 2 y 6 asociados a autopercepción de los estudiantes respecto a contextos cotidianos encontramos los siguientes comportamientos de los datos. Las respuestas del ítem 1 muestran que la mitad de los estudiantes asignaron valores inferiores a 50 con un rango de 90, esto da cuenta que la mayoría de los estudiantes (88,3%) proviene de establecimientos educacionales con bajo puntaje en pruebas de matemática nacionales. En el caso de las respuestas del ítem 2, la mitad de los estudiantes asignaron valores de escala sobre 70, y de ellos una cuarta parte asignaron valores sobre 80 que un ciudadano chileno llegue a los 80 años de edad. En el ítem 6 la distribución de las respuestas muestra que uno de cuatro estudiantes manifiesta que tienen un dominio muy bajo de la probabilidad, asignando valores de escala inferiores 30, y tan sólo una cuarta parte de los 257 estudiantes de ingeniería asignaron valores sobre 60.

4.2. Resultados de los ítems cerrados 3, 5 y 7 según asignaciones de la apreciación intuitiva de la probabilidad

En lo que sigue, se realiza un análisis descriptivo de los ítems que involucran razonamiento causal (ítem 3), razonamiento combinatorio (ítem 5) y conocimiento de probabilidad del producto (ítem 7), respondidos por 257 estudiantes de ingeniería. Se han elegido estos tres ítems debido a que sus respuestas están más distantes de las respuestas esperadas (ver Tabla III).

Ítem 3. Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero

La Figura 2 muestra que sólo 12,8% de los estudiantes asignaron valores al menos de 80 de la ocurrencia de este suceso, exhibiendo un razonamiento causal. Sin embargo, el 31% (79 de 257) de los estudiantes asignaron un valor de 50 de posibilidad que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero, y aún más, un

26,4% (68 de 257) del grupo asignó valores bajo 50. Esto indica que los estudiantes de ingeniería no utilizan un razonamiento causal al estimar la probabilidad bajo la condición que el padre es ingeniero.

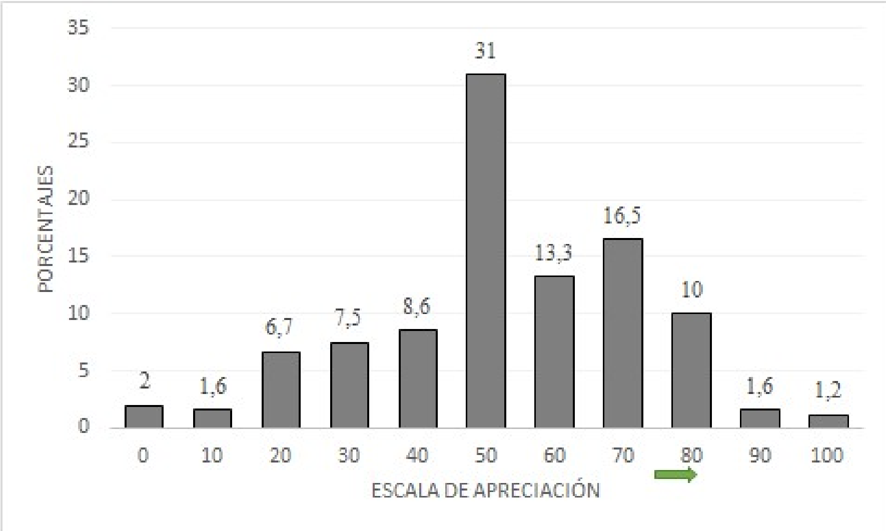

FIGURA 2
Porcentaje de respuestas al ítem 3 según escala de apreciación (respuesta esperada sobre 75), *n*=257

Ítem 5. Un profesor con 10 estudiantes dice que obtendría más grupos distintos formado de 2 estudiantes en vez de 8 estudiantes

En este ítem los estudiantes asignaron valores de forma diversa. Un 7% de los estudiantes asignaron un valor menor o igual a 10, ver Figura 3, lo cual es cercano a la solución correcta que involucra la misma cantidad de subgrupos tomados de dos que de ocho estudiantes, y la definición de combinación para determinar el total de maneras de elegir *k* elementos de *n* elementos, sin importar el orden, es decir, $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$

La igualdad numérica de los dos grupos no fue comprendida intuitivamente. La heurística de disponibilidad emerge al considerar que es más fácil producir varias combinaciones de dos elementos (disponibilidad) que combinaciones de ocho elementos; esto es, grupos de pocos estudiantes (dos), están más disponibles -por la facilidad con que se nos ocurren- que grupos de muchos estudiantes (ocho).

También, un 7,8% de los estudiantes asignaron un valor de 50 en la escala de apreciación, lo que podría explicarse al considerar erróneamente la obtención de distinta cantidad de subgrupos tomados de dos y ocho estudiantes. Un 55,2% de los estudiantes asignaron erróneamente valores altos entre 80 y 100, lo que no corresponde con el valor cero de la solución correcta. En términos generales encontramos que al menos el 90% de los estudiantes de esta investigación responden erróneamente. Fischbein y Schnarch (1997) muestran que el 72% de los estudiantes presentaron la heurística de disponibilidad frente a este ítem, resultado similar al encontrado por Salcedo y Mosquera (2008) de un 61,5% en esta heurística.

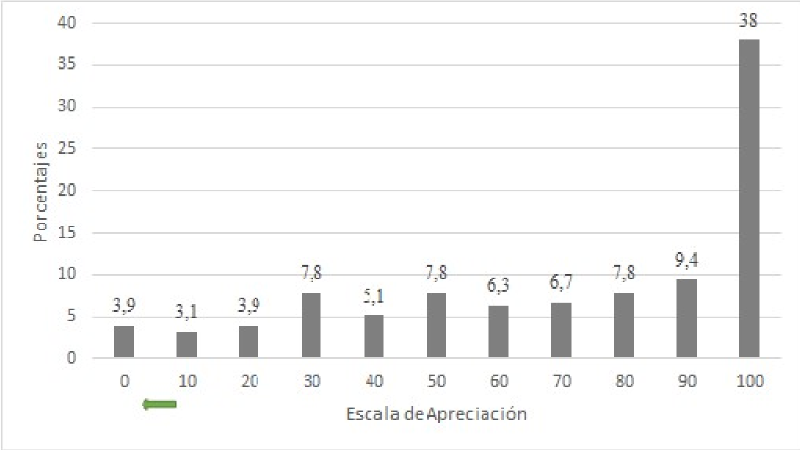

FIGURA 3
Porcentaje de respuestas al ítem 5 según escala de apreciación (respuesta esperada bajo 10), *n*=257

Ítem 7. Un matrimonio se proyecta tener tres hijos. ¿Qué tan probable es que los dos primeros sean hombres y el tercero sea mujer?

La respuesta correcta es de 1/8 equivalente a 0,125 al considerar la probabilidad del producto y la independencia de sucesos. Se observa en la Figura 4 que sólo un 20,4% de los estudiantes asignan valores entre 10 y 20. En cambio, un 28,2% de los estudiantes asignan erróneamente un valor de 50 a la probabilidad de ocurrencia de que el tercer hijo sea mujer. Esta respuesta errónea puede explicarse atendiendo a que la primera respuesta intuitiva que viene a la mente es equivalente a 1/2 emergiendo el sesgo de la equiprobabilidad, y calculando la probabilidad sólo del tercer suceso “ser mujer”, obviando la información dada de los dos primeros hijos. Más aún, el 9,5% de los estudiantes asignan un valor de 60 o más.

Hacemos notar la importancia en la expresión del enunciado, los estudiantes podrían dar una solución incorrecta al relacionar este ítem con la paradoja del Sr. Smith (Gardner, 1959) asignando un valor mediante la probabilidad condicional de que el tercer hijo sea mujer dado que los dos primeros son hombres, obteniendo así una probabilidad de 1/3. La Figura 4 presenta que un 40% de los estudiantes asignaron valores entre 30 y 40. Al parecer persiste la confusión entre probabilidad condicional y probabilidad del producto (Contreras, Batanero, Arteaga, y Cañadas, 2014; Pollatsek et al., 1987).

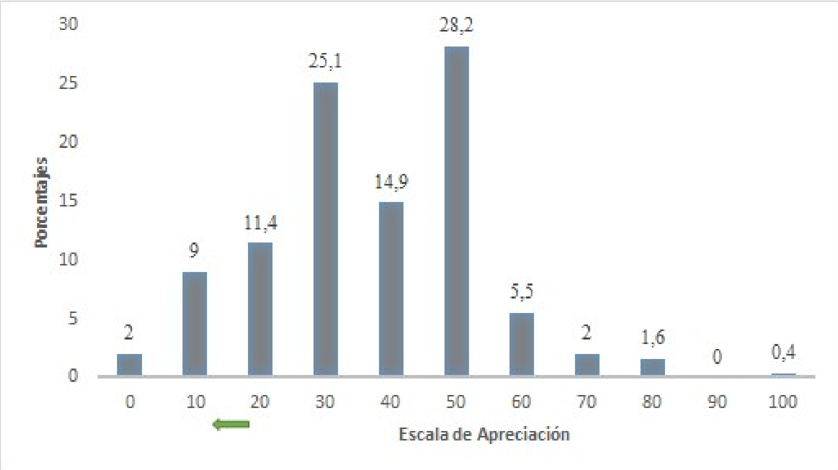

FIGURA 4
Porcentaje de respuestas al ítem 7 según escala de apreciación (respuesta esperada bajo 20), *n*=257

4.3. Resultados del ítem 8 de opción múltiple

Ítem 8. En un primer curso de matemática para ingenieros la probabilidad de que repruebe la asignatura un estudiante es de un 50%. ¿Cuál de estos casos te parece más probable?

a) *Que de 10 alumnos seleccionados 5 reprueben*
b) *Que de 100 alumnos seleccionados 50 reprueben.*
c) *Los dos casos anteriores son igual de probables.*

Se presentan los resultados del ítem 8 respondidos por 257 estudiantes sobre heurística de la representatividad. La Tabla IV muestra un gran número de errores en este ítem, en que sólo un 7,0% contestó correctamente al considerar más probable el caso de muestras pequeñas; resultado similar al encontrado por Alvarado y Batanero (2007) con un 9,7% de aciertos.

Un 9,3% de los estudiantes supuso incorrectamente más probable que a mayor tamaño de muestra mayor probabilidad de ocurrencia. Así, se presenta la heurística de la representatividad en un 83,7% de los estudiantes de ingeniería, quienes supondrían que ambas muestras son igual de representativa de la población, no teniendo en cuenta el efecto del tamaño muestral al analizar la convergencia de la frecuencia a la probabilidad. Alvarado y Batanero (2007) consideraban en su investigación que esta heurística era difícil de suprimir incluso tras estudios formales de probabilidades con simulación.

TABLA IV
Respuestas al ítem 8 (de opción múltiple) de estudiantes de ingeniería, *n* = 257

	Frecuencia	%
a. Que de 10 alumnos seleccionados 5 reprueben	18	7,0
b. Que de 100 alumnos seleccionados 50 reprueben	24	9,3
c. Los dos casos anteriores son igual de probables	215	83,7

4.4. Análisis de los argumentos a las respuestas al ítem 9

A finales del semestre se propuso a los estudiantes resolver el ítem anterior y entregar argumentos. El ítem 9 fue contestado por 148 estudiantes dentro de una evaluación final.

Se observa en la Tabla V que un 68,2% de los estudiantes respondieron correctamente, utilizando argumentos referidos al tamaño muestral y a la aplicación del modelo de probabilidad binomial, como los que se ejemplifican en las Figuras 5 y 6.

TABLA V
Respuestas al ítem 9 (abierto) de estudiantes de ingeniería, n = 148

	Frecuencia	%
a. Que de 10 alumnos seleccionados 5 reprueben	101	68,2
b. Que de 100 alumnos seleccionados 50 reprueben	16	10,8
c. Los dos casos anteriores son igual de probables	31	21,0

4.4.1 Argumentaciones correctas.

Caso estudiante 01.

A mayor tamaño de la muestra de estudiantes disminuye la probabilidad de ocurrencia de reprobados (Ver Figura 5).

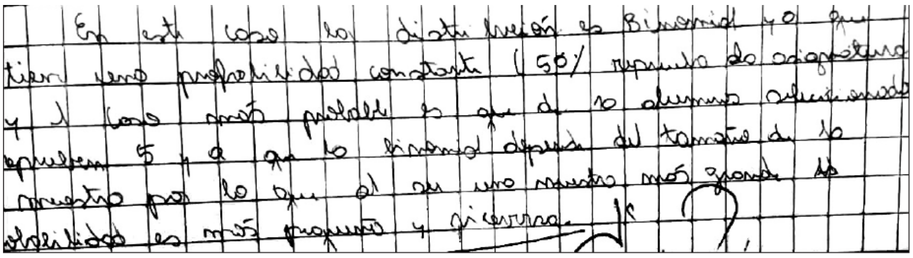

FIGURA 5
Argumentación correcta según tamaño muestral del estudiante 01

Caso estudiante 02.

Aplica el modelo binomial considerando que a menor tamaño de la muestra de estudiantes aumenta la probabilidad de ocurrencia de reprobados (Ver Figura 6). Entre los estudiantes que calcularon la probabilidad binomial para las dos muestras, el estudiante 02 de la Figura 6 aplica la distribución binomial, reconociendo la variable aleatoria discreta, la distribución Binomial y sus parámetros, comparando numéricamente sus probabilidades y usando un apropiado lenguaje de probabilidad.

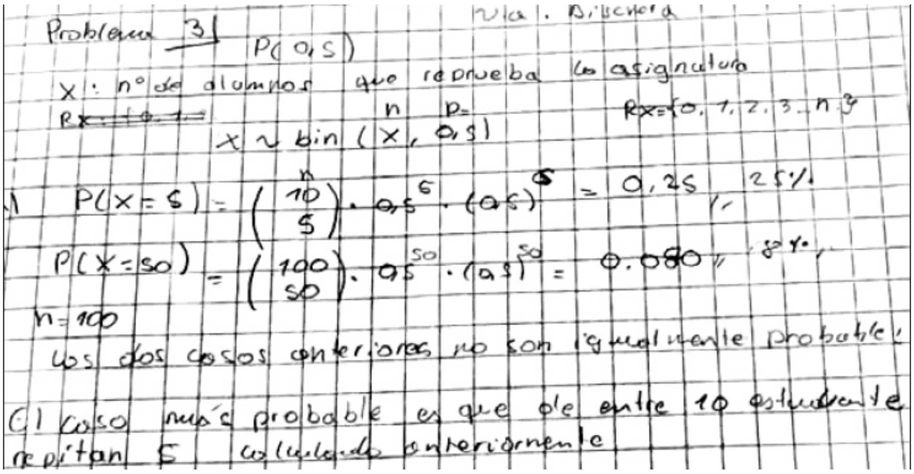

FIGURA 6
Argumentación correcta según modelo binomial del estudiante 02

4.4.2 Argumentaciones incorrectas.

Los estudiantes tuvieron dificultades en la definición de la variable aleatoria, en el reconocimiento del modelo binomial y sus parámetros, y en la emergencia de la heurística de la representatividad.

Desde la Tabla V se observa que un 10,8% de los 148 estudiantes atribuyen incorrectamente una mayor probabilidad a un mayor número de estudiantes (opción b); resultado similar al 12,1% encontrado por Alvarado y Batanero (2007) con estudiantes de ingeniería.

Asimismo, se observa que sólo un 21% de los estudiantes consideran que ambas muestras son igual de representativas de la población (opción c). Este menor porcentaje de heurística de la representatividad es opuesto a lo evidenciado en varias investigaciones (Alvarado y Batanero, 2007; Tversky y Kahneman, 1974).

Caso estudiante 03: heurística de la representatividad

Los estudiantes presentaron insensibilidad al efecto del tamaño muestral, calculando para n=10 y n=100 un mismo porcentaje de estudiantes que reprueban la asignatura. El estudiante 03 responde mediante la proporcionalidad directa al considerar las razones 5 es a 10 y 50 es a 100 (ver Figura 7). Al considerar ambos casos como igualmente representativos están emitiendo un juicio independiente del tamaño de la muestra.

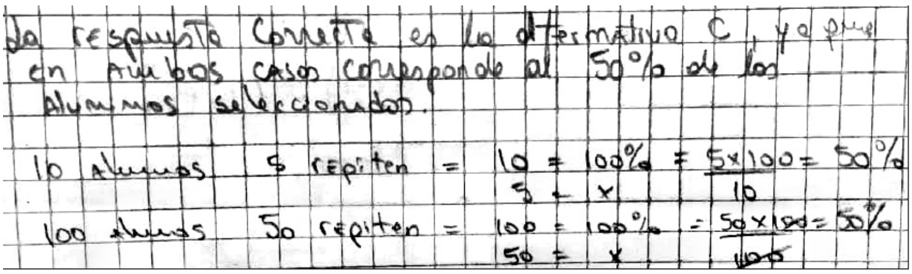

FIGURA 7
Argumento incorrecto usando proporcionalidad directa del estudiante 03

Al parecer, además, los estudiantes no reconocen una situación binomial y por consiguiente no la pueden modelar y aplicar. Ello puede deberse a que aún no consideran los supuestos que requiere este modelo de probabilidad y falta de razonamiento combinatorio.

Caso estudiante 04: confusión con elementos del modelo binomial

Los estudiantes calcularon la esperanza matemática del modelo binomial para los dos tamaños muestrales, y la corresponden con el mismo número de alumnos reprobados 5 y 50 respectivamente. El estudiante 04 responde que ambos casos son igual de probables al pensar que calculando ambas esperanzas matemáticas obtenemos respectivamente los mismos valores de alumnos reprobados y por tanto son ambas igual de probables (ver Figura 8). En este caso hay confusión entre el valor específico del recorrido de la variable aleatoria binomial y la esperanza matemática, emitiendo un juicio de correspondencia entre el resultado obtenido (esperanza matemática de valor 5) y el dato inicial (obtener 5 alumnos reprobados en la muestra de 10 alumnos), y lo mismo para la esperanza matemática de valor 50.

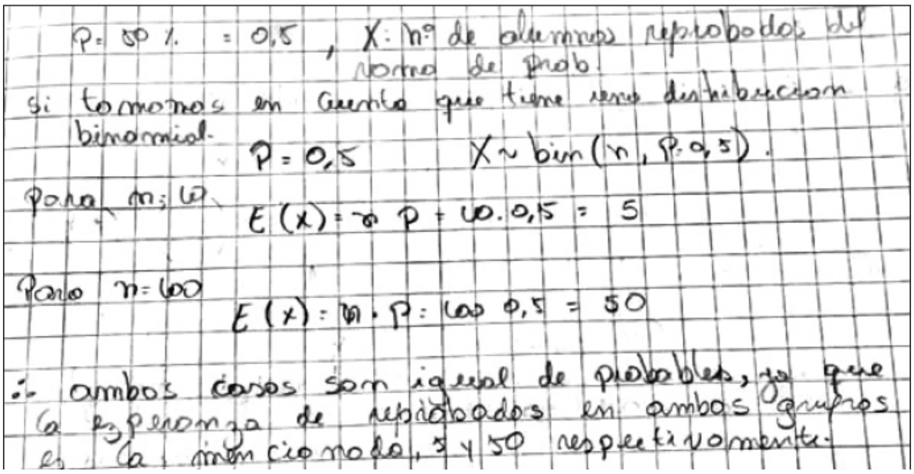

FIGURA 8
Argumento incorrecto usando la esperanza matemática del estudiante 04

5. CONCLUSIONES

Este estudio atiende al papel potencialmente influyente de la intuición en la construcción del conocimiento probabilístico. Para ello, hemos evaluado las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad que atribuyen los estudiantes de ingeniería en situaciones de incertidumbre, analizando las respuestas entregadas a un cuestionario de ocho ítems antes de desarrollar la unidad de probabilidad del curso de estadística; y analizando las resoluciones y argumentaciones de un ítem, después de desarrollar la unidad de probabilidad.

Los resultados del cuestionario muestran que los ítems 1, 2 y 6 relativos a situaciones de contexto cotidiano y el ítem 4, poseen valores medianos equivalentes a las respuestas esperadas de cada ítem. En particular, el ítem 6 pregunta acerca del dominio de los principales contenidos de la probabilidad (esperándose un valor bajo 50), y las respuestas revelan la baja autopercepción de los estudiantes en el manejo de dichos contenidos (con una mediana de 50). Sin embargo, estos resultados, aunque semejantes en sus respuestas esperadas, indican una alta variación en la asignación de la intuición probabilística, desde el análisis gráfico de cada ítem es posible visualizar el comportamiento asimétrico de las distribuciones de los datos, especialmente aquella sobre conocimientos de razonamiento combinatorio (ítem 5).

Hace más de cuatro décadas, Fischbein (1975) sostenía que aunque los sujetos no tienen un pensamiento formal sobre el azar pueden desarrollar intuiciones relacionadas al azar, lo que favorecería la comprensión de los conceptos probabilísticos. Estas intuiciones, como procesos cognitivos, intervienen en la práctica y se adquieren principalmente de la experiencia cotidiana, pudiendo convertirse en bloqueos a la aplicación de reglas lógicas.

Al comenzar la unidad de probabilidad los estudiantes de ingeniería manifestaron una autopercepción baja respecto de su dominio de la probabilidad (ítem 6), uno de cuatro estudiantes declara que tiene un dominio muy bajo acerca de los principales contenidos de probabilidad. Cuestión que se reflejó en la alta asignación incorrecta dada a situaciones de razonamiento combinatorio (ítem 5) y regla del producto (ítem 7). Posiblemente en la escuela no se aprovechan los problemas combinatorios para mostrar el uso de técnicas generales de resolución de problemas ni tampoco de estrategias aritméticas específicas para este tipo de problemas, en el sentido de Roa, Batanero y Godino (2003).

Al inicio del curso sólo un 7% de los estudiantes de ingeniería respondió correctamente al ítem asociado a la heurística de la representatividad (ítem 8). Tras finalizar dicho curso y aplicar el ítem con resolución, hubo un 68,2% de respuestas correctas. Lo anterior, se contrapone a las respuestas incorrectas al ítem 8 dada por el 83,7% de estudiantes al inicio del curso, aunque es un valor similar a los reportados en investigaciones anteriores de esta heurística, como las de Tversky y Kahneman (1974) que encontraron para este ítem un 55,8% y un 74,7% reportado por Alvarado y Batanero (2007).

Una posible respuesta al cambio en la comprensión de la situación de la heurística de la representatividad fue considerar en el diseño del proceso de estudio los significados de la probabilidad. La unidad de probabilidad del curso de estadística para los estudiantes de ingeniería consideró en la planificación de su enseñanza el significado intuitivo (a través de situaciones cotidianas y la manipulación de generadores aleatorios), el significado frecuentista (con el uso de simulación con tecnología), el significado clásico (con situaciones concretas equiprobables) y el significado axiomático (mediante la modelación de experimentos aleatorios abstractos y la medida de la incertidumbre); además de confrontar sus intuiciones con el conocimiento formal de la probabilidad.

Este hallazgo esta en concordancia con nuestra pregunta de investigación sobre qué argumentos utilizan los estudiantes de ingeniería respecto a sus intuiciones y heurísticas sobre probabilidad después de un curso de estadística. Como se ha señalado, el diseño pretendido de la enseñanza integró la comprensión teórica y práctica de los significados de la probabilidad, de la intuición a la axiomática, a través de la estimación de las intuiciones probabilísticas como grado de creencia personal, y la confrontación a diversas heurísticas con el conocimiento de la probabilidad, pues una mejor comprensión de las heurísticas podría mejorar juicios y decisiones en situaciones de incertidumbre.

El positivo cambio en el aprendizaje de la probabilidad en este estudio requiere más investigaciones sobre su enseñanza, en las cuales se aumente y diversifique la muestra de estudiantes de educación universitaria y/ o utilicen técnicas de estadística inferencial.

6. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

En general, los estudiantes de ingeniería no han sido confrontados a una enseñanza de la Probabilidad que valore e integre creativamente las intuiciones probabilísticas. Como señalan Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014), la educación matemática ha sido reducida a un conocimiento fragmentado y fuera de contexto, que ha limitado la acción docente a la transmisión de técnicas y procedimientos. Así, la falta de articulación de la matemática y su didáctica entre la educación secundaria y la universitaria, hereda tal fragmentación de saberes y cierta rigidez en las prácticas matemáticas de los estudiantes al llegar a la universidad. Un hallazgo de los resultados del cuestionario de este estudio muestra que algunos ítems poseen valores medianos equivalentes a las respuestas esperadas, ello puede tener repercusiones didácticas en tanto informa cómo están llegando los estudiantes de ingeniería a la universidad.

En concordancia con Fischbein (1975), sostenemos que el uso sistemático y didáctico de las intuiciones y heurísticas en las prácticas de enseñanza de la probabilidad, redundaría en ricas experiencias de aprendizaje que ayudarían a conformar un razonamiento probabilístico en los sujetos.

La experiencia presentada en este estudio de iniciación de intuiciones sobre probabilidades, podría permitir al docente universitario o de secundaria reflexionar sobre una enseñanza de la Probabilidad que releva las intuiciones probabilísticas que atribuye el estudiante con la probabilidad axiomática pretendida por el profesor.

El desarrollo de competencias probabilísticas requiere de prácticas que vinculen lo intuitivo y lo formal en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad de la escuela a la universidad. En base a nuestros hallazgos, es conveniente incluir en la enseñanza los distintos significados de la probabilidad y confrontar algunas de las heurísticas para promover gradual y progresivamente el razonamiento intuitivo hacia el razonamiento axiomático con comprensión, y desarrollar un pensamiento probabilístico útil al ciudadano.

Agradecimientos

Centro de Investigación en Educación y Desarrollo, CIEDE-UCSC; y Proyecto Basal FB0003 del Programa de Investigación Asociativa de CONICYT.

Referencias

Alvarado, H., y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números, 67*, 1-7. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/3476/1/Alvarado2007DificultadesNumeros67.pdf

Alvarado, H., y Retamal, L. (2012). Dificultades de comprensión del teorema central del límite en estudiantes universitarios. *Educación Matemática, 24* (3), 119-130. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262012000300007

Alvarado, H., Galindo, M., y Retamal, L. (2013). Comprensión de la distribución muestral mediante configuraciones didácticas y su implicación en la inferencia estadística. *Enseñanza de las Ciencias, 31* (2), 1-17. Obtenido de http://ensciencias.uab.es/article/view/v31-n2-alvarado-galindo-retamal/803-pdf-es

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8* (3), 247-264. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2096616.pdf

Batanero, C., Biehler, R., Maxara, C., Engel, J., y Vogel, M. (2005). Using simulation to bridge teachers content and pedagogical knowledge in probability. En *15th ICMI Study Conference: The Professional education and development of teachers of mathematics*. Obtenido de http://www.academia.edu/download/46646518/Using_simulation_to_bridge_teachers_cont20160620-5848-1ihb527.pdf

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Boston, MA: Springer.

Ben-Zvi, D., y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge and developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3-15). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Borovčnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 5-27. Obtenido de http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/32/5

Borovčnik, M. (2015). Risk and decision making: the" logic" of probability. *The Mathematics Enthusiast, 12* (1), 113-139. Obtenido de https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1339&context=tme

Borovčnik, M., y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. J Chernoff, y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Brousseau, G. (2009). Alternatives en didactique de la statistique. En *41èmes Journées de Statistique*. Bordeaux: SFdS

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7* (3), 91-116. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/2740/274032530006.pdf

Contreras, J.M., Batanero, C., Arteaga, P., y Cañadas, G. (2014). La paradoja del niño o niña: aplicaciones para la clase de probabilidad. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 14* (1), 1-13. Obtenido de https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V14_N1_2013/RevistaDigital_Batanero_V14_n1_2013/RevistaDigital_Batanero_V14_n1_2013.pdf

CONICYT (2016). *Resumen ejecutivo encuesta nacional de percepción social de la ciencia y tecnología en Chile 2016*. Obtenido de http://www.conicyt.cl/wp-content/uploads/2014/07/resumen-ejecutivo-encuesta-nacional-de-percepcion-social_web.pdf

DEMRE (2015). *Modelos de resolución de pruebas*. Obtenido de: http://psu.demre.cl/publicaciones/listado-2015

DEMRE (2016). *Compendio estadístico proceso admisión 2016, archivo II*. Obtenido de http://www.psu.demre.cl/estadisticas/documentos-2016-compendio-p2016

Fischbein, E. (1975). *The intuitive source of probability thinking in children*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E., y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 1, 96–105.

Fulmer, G. W. (2014). Undergraduates' attitudes toward science and their epistemological beliefs: positive effects of certainty and authority beliefs. *Journal of Science Education and Technology, 23* (1), 198-206. Obtenido de https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/16597/1/JSET-23-1-198.pdf

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American, 219*, 180–182.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Hacking, I. (1990). *The taming of chance*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Kahneman, D. (2012). *Pensar rápido, pensar despacio*. España: Debate.

Kahneman, D., y Tversky, A. (1972). Subjective probability: a judgment of representativeness. *Cognitive Psychology, 3*, 430-454. Obtenido de http://datacolada.org/wp-content/uploads/2014/08/Kahneman-Tversky-1972.pdf

Kahneman, D., y Tversky, A. (1982). Variants of uncertainty. *Cognition, 11*, 143-157.

Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). J*udgment under uncertainty: heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Kapadia, R., y Borovcnik, M. (1991). *Chance encounters: probability in education*. Dordrecht, Kluwer Academic Publications: Springer.

Martín, P. (2006). Achieving success in industrial training. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CDROM. Obtenido de: http://iase-web.org/documents/papers/icots7/4A2_MART.pdf

Muñoz, M., Martínez, C., Cárdenas, C., y Cepeda, M. (2013). Active learning in first-year engineering courses at Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile. *Australasian Journal of Engineering Education, 19* (1), 27-38. Obtenido de https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.7158/22054952.2013.11464080

Nisbett, R., y Ross, L. (1980). *Human inference: strategies and shortcomings of social judgments*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

OMS (2016). *La esperanza de vida ha aumentado en 5 años desde el año 2000, pero persisten las desigualdades sanitarias*. [Comunicado de prensa]. Obtenido de: http://www.who.int/mediacentre/news/releases/2016/health-inequalities-persist/es/

Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Investigación de Matemática Educativa, 15* (1), 63-91. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362012000100004

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., Hardiman, P., y Cobb, G. (1987). Understanding conditional probabilities. O*rganizational Behavior and Human Decision Processes, 40*, 255-269.

Retamal, L., Alvarado, H., y Rebolledo, R. (2007). Understanding of sample distributions for a course on statistics for engineers. *Ingeniare, 15*, 6-17. Obtenido de https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-33052007000100002

Roa, R., Batanero, C., y Godino, J. D. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática, 15* (2), 5-25. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/405/40515201.pdf

Romeu, J. (2006). Teaching engineering statistics to practicing engineers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS-7.* Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education, CDROM. Obtenido de http://iase-web.org/documents/papers/icots7/4A1_ROME.pdf

Salcedo, A., y Mosquera, J. (2008). Sesgo de la disponibilidad en estudiantes universitarios. *Investigación y Postgrado, 23* (2). Obtenido de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-00872008000200015

Sharma, S. (2014). Teaching probability: a socio-constructivist perspective. *Teaching Statistics*, 78-84. Obtenido de https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/test.12075

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainty: heuristics and biases. *Science, 185*, 1124-1131. Obtenido de http://psiexp.ss.uci.edu/research/teaching/Tversky_Kahneman_1974.pdf

Tversky, A., y Kahneman, D. (1980). Causal schemas in judgments under uncertainty. En E. Fishbein (Ed.), *Progress in Social Psychology*, (pp.49-72). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic, y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases* (pp.84-100). Cambridge, UK: Cambridge University Press.