Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME
ISSN: 1665-2436
ISSN: 2007-6819
relime@clame.org.mx
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Organismo Internacional

Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI

Espinoza Ramírez, Lianggi; Vergara Gómez, Andrea; Valenzuela Zúñiga, David
Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, vol. 21, núm. 3, 2018
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Organismo Internacional
Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33557150004
DOI: https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI

Geometry in everyday practice: the measurement of inaccessible distances in a text of the XVI century

Lianggi Espinoza Ramírez
Universidad de Valparaíso , Chile
lianggi.espinoza@uv.cl

DOI: https://doi.org/10.12802/relime.18.2131
Redalyc: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33557150004

Andrea Vergara Gómez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso , Chile
andrea.vergara.gomez@gmail.com

David Valenzuela Zúñiga
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
david.valenzuela.z@gmail.com
http://orcid.org/0000-0003-1169-9198

Recepción: 05 Noviembre 2017
Aprobación: 19 Noviembre 2018

Resumen:

El estudio del saber matemático en distintos contextos adquiere relevancia debido al interés actual en que los estudiantes puedan usar las matemáticas en la resolución de problemas reales. Por esto, el propósito de esta investigación es caracterizar al conocimiento puesto en uso, en la medición de distancias inaccesibles, en la obra *Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii* de Johann Stöffler, publicada en 1513. El modelo teórico utilizado considera el estudio de la constitución del saber a través del análisis de su génesis, desarrollo y transversalidad. Los resultados revelan, en la obra analizada, una *episteme* de la medición de distancias inaccesibles que incluye tanto la búsqueda de una razón conveniente para realizar la medición, como el análisis dinámico del comportamiento de las sombras o los rayos visuales en la estimación de inclinaciones. Esta *episteme* es determinante para la comprensión de estos conocimientos matemáticos en la resolución de problemas.

Palabras clave: Razón matemática, Proporcionalidad, Uso del conocimiento, Gnomon, Astrolabio, Historización del conocimiento matemático.

Abstract:

The study of mathematical knowledge in different contexts has acquired relevance due to the current interest in students' ability to use mathematics in solving real life problems. Thus, the purpose of this research is to characterize the knowledge in use in the measurement of inaccessible distances in Johann Stöffler's *Elucidatio Fabricoe Ususque Astrolabii*, published in 1513. The theoretical model used considers the study of the constitution of knowledge through the analysis of its genesis, development and transversality. The results reveal in the analyzed work an episteme of the measurement of inaccessible distances that includes both the search for a suitable reason to carry out the measurement and the dynamic analysis of the behavior of the shadows or the visual rays in the estimation of inclinations. This episteme is critical for the understanding of this mathematical knowledge in problem solving.

Keywords: Mathematical ratio, Proportionality, Use of knowledge, Gnomon, Astrolabe, History of mathematical knowledge.

Resumo:

O estudo do conhecimento matemático em diferentes contextos torna-se importante por causa do interesse atual em que os alunos possam usar a matemática na resolução de problemas reais. Portanto, o propósito desta pesquisa é caracterizar o conhecimento colocado em uso na medição de distâncias inacessíveis na obra *Elucidatio Fabricoe Ususque Astrolabii* de Johann Stöffler, publicado em 1513. O modelo teórico utilizado considera o estudo da constituição do saber por meio da análise de sua gênese, desenvolvimento e transversalidade. Os resultados revelam uma episteme da medição de distâncias inacessíveis na obra analisada, que inclui tanto uma busca de -uma razão adequada para realizar a medição, quanto a análise dinâmica do comportamento das sombras ou os raios visuais na estimativa de inclinações. Esta episteme é decisiva para a compreensão desses conhecimentos matemáticos na resolução de problemas.

Palavras-chave: Razão matemática, Proporcionalidade, Uso de conhecimento, Gnomon, Astrolábio, Historicização do conhecimento matemático.

Résumé:

L'étude du savoir mathématique concernant différents contextes est de plus en plus important, en raison de l'intérêt actuel que les étudiants peuvent trouver à utiliser les mathématiques dans la résolution de problèmes de la vie réelle. Pour cela, le but de cette recherche est de caractériser les connaissances mises en œuvre, dans la mesure de distances inaccessibles, dans le travail d'*Elucidatio Fabricoe Ususque Astrolabi* de Johann Stöffler publié en 1513. Le modèle théorique utilisé considère l'étude de la constitution du savoir à partir de l'analyse de sa genèse, de son développement et de sa transversalité. Les résultats montrent dans le travail analysé l´existence d´un épistème de la mesure de distances inaccessibles, qui comprennent tant la recherche d'un rapport souhaitable pour réaliser la mesure, comme l'analyse dynamique du comportement des ombres ou des rayons visuelles dans l'estimation de ces comportements. Cet épistème est déterminant pour comprendre les connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution de problèmes
Mots clés: Raison mathématique, Proportionnalité, Connaissances mises en œuvre, Gnomon, Astrolabe, Historicisation des connaissances mathématiques.

1. Introducción

Las reformas educativas contemporáneas han enfatizado en la necesidad de que los estudiantes puedan formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, usarlas para describir, explicar y predecir fenómenos, y reconocer el papel que desempeñan en el mundo (OECD, 2016). En otras palabras, se requiere propiciar que los aprendices vinculen las matemáticas que aprenden en la escuela con el mundo en el que viven. Sin embargo, en el ámbito de la geometría escolar, y a pesar de que los libros escolares actuales incluyen referencias a problemas reales, no se logran vínculos significativos con los contextos de uso del conocimiento. En efecto, estas actividades contextualizadas tienden a forzar la realidad para adaptarla a la matemática escolar, o bien, presentan situaciones que se distancian de los contenidos escolares (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017).

En la unidad de geometría, la medición de distancias inaccesibles es uno de los contenidos curriculares de secundaria en los que se hace explícito el uso de la matemática para la resolución de problemas reales. Acerca de la importancia de la medición como una competencia para la vida cotidiana, existen investigaciones que estudian el tema desde su implementación curricular a nivel escolar (Peng Yee, 2014; Tan-Sisman y Aksu, 2012), desde su rol en la formación técnica para el trabajo (Bakker, Wijers, Jonker y Akkerman, 2011) y a partir de las argumentaciones y representaciones geométricas que surgen en los estudiantes al observar fenómenos físicos, como el comportamiento de las sombras producidas por el Sol (Boero, 2012; Douek, 1999). Por otra parte, el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la medición ha sido abordado considerando distintas perspectivas teóricas, tales como el desarrollo cognitivo con foco en la primera infancia (Clements, 1999; Drake, 2014) y la construcción social e histórica-epistemológica del conocimiento matemático (Montiel y Jácome, 2014; Reyes-Gasperini, 2016).

Boero (2012) evidencia que, al enfrentar una situación ligada a la observación de las longitudes de las sombras, los estudiantes identificaron que el fenómeno posee propiedades que difieren de los conceptos propios de la geometría escolar. A su vez, Montiel y Jácome (2014) señalan que los problemas de medición de distancias inaccesibles propuestos en los textos escolares reducen la actividad de medición a la sustitución de datos sobre una fórmula preestablecida, en la cual no hay necesidad real de medir. También, plantean que estos problemas utilizan frecuentemente medidas que no son reales. Es decir, la matemática escolar evoca situaciones realistas, pero sin un vínculo significativo con la vida cotidiana (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). Además, Montiel y Jácome (2014) evidenciaron que profesores fueron capaces de responder correctamente a problemas de medición de distancias inaccesibles en un contexto real, pero sin entender la naturaleza no proporcional implícita en la relación ángulo-distancia. Por consiguiente, se requiere comprender en mayor profundidad la epistemología intrínseca del conocimiento puesto en uso en la medición de distancias inaccesibles en contextos reales, así como analizar su posible incorporación al aula de matemáticas.

En esta investigación se propone hacer lo primero en un escenario histórico, en efecto, el análisis histórico-epistemológico de obras antiguas es un medio propicio para estudiar el uso del conocimiento (Cantoral, 2013). En relación con esto, cabe señalar que la medición de distancias inaccesibles ha sido importante para el quehacer práctico del ser humano en el estudio del tiempo, la calibración de relojes, la estimación de tamaños y distancias de los cuerpos celestes, el estudio del tamaño de la Tierra, la elaboración de mapas, la estimación del punto de impacto de una bala de cañón, la construcción, la siembra y la división de terrenos, entre otras prácticas (Covián, 2013; Scriba y Schreiber, 2015; Vicente, 1993).

En relación con el estudio de obras antiguas que tratan la medición de distancias inaccesibles, Vicente (1993) señala que durante el siglo XVI se imprimieron numerosos tratados relativos al tema. Camacho, Sánchez, Blanco y Cuevas (2011), estudiando significados matemáticos asociados a la topografía, analizaron en textos antiguos el uso de instrumentos de medición como la dioptra o el grafómetro en la segunda parte del siglo XVI y durante el siglo XVII. A su vez, Meavilla (2012) analiza las técnicas de medición presentes en la obra titulada *El Perfecto Capitán, instruido en la disciplina militar*, publicada por Diego de Álava y Viamont en 1590. De un modo similar, Covián (2013), estudiando el desarrollo histórico de la topografía, analiza algunas proposiciones del *Tratado de Geometría Práctica y Speculativa*, publicado por Pérez de Moya en 1573. Todas las obras reseñadas tratan la medición con una alta especificidad técnica y con un léxico accesible a un público especializado.

En esta investigación se estudia la obra *Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii* [1], publicada en 1513 por el matemático, astrónomo y clérigo alemán Johann Stöffler. A diferencia de las obras descritas en el párrafo anterior, este fue uno de los primeros libros impresos acerca de la medición de distancias inaccesibles. Por tanto, es posible inferir de él aquellas ideas sobre medición que circulaban en Europa a principio del siglo XVI. Además, su autor escribió esta obra evitando la especificidad técnica, para así llegar a un público amplio, motivo por el cual encontramos en esta una estructura y organización de los conocimientos permeada por una intencionalidad de difusión masiva. Estos argumentos convierten a la obra de Stöffler (1513) en un referente interesante para explorar al saber matemático en la medición de alturas, longitudes y profundidades inaccesibles. En consecuencia, el objetivo de esta investigación es caracterizar al conocimiento puesto en uso en las proposiciones que tratan la medición de distancias inaccesibles en Stöffler (1513). A continuación, presentamos el marco teórico de esta investigación.

2. Marco teórico

En el marco de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), se estudia la naturaleza práctica del saber matemático al considerarlo como conocimiento puesto en uso. En este sentido, Cantoral (2013) señala que “el conocimiento es la información sin uso, mientras el saber es la acción deliberada para hacer del conocimiento un objeto útil frente a una situación problemática” (p.52). No se entiende al saber como un conocimiento separado e independiente de toda experiencia, más bien, se le concibe “lleno de” y “en” experiencia (Espinoza, 2014). También, se asume la legitimidad de toda forma de saber, sea este culto, técnico o popular (Cantoral, 2013). Es decir, no se asume al saber técnico o popular como una mera “aplicación” del saber culto, sino que en los tres se reconocen diversas significaciones del conocimiento matemático. A su vez, se sostiene que el conocimiento matemático, incluso aquel que se considera avanzado, tiene un origen y una función social vinculados a un conjunto de actividades prácticas socialmente establecidas, que lo anteceden y que acompañan su desarrollo (Cantoral, 2013). Sin embargo, en la escuela, puesto que suele enfatizarse el aprendizaje basado en la memorización de algoritmos y conceptos, se dejan fuera significados, procedimientos y argumentos que son constitutivos del saber matemático. De aquí que se soslayen aspectos sociales, contextuales y culturales de la construcción del conocimiento (Soto y Cantoral, 2014).

Por consiguiente, surge el interés de estudiar aquellos significados que han antecedido y acompañado la constitución del saber matemático, y que actualmente se encuentran perdidos, simplificados o invisibilizados en la matemática escolar, y analizar su posible incorporación al aula. Cantoral (2013) señala que esto se puede hacer problematizando al saber a través del análisis de su historización y dialectización. En el proceso de historizar, se ubica al saber en tiempo y espacio, se explora desde la óptica de quien lo inventa, lo aprende o lo usa, teniendo en cuenta una perspectiva histórica, cultural e institucional. Esta historización debe superar la construcción de una cronología factual, abordando una historia crítica en la que se estudie una epistemología situada del desarrollo conceptual (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). A su vez, al dialectizar, se contrastan los significados de la matemática escolar con los de otros escenarios, entre ellos, los provistos por la historización. El presente estudio desarrolla la historización de la medición de distancias inaccesibles en Stöffler (1513). La dialectización de los resultados de esta investigación queda propuesta para futuras investigaciones.

En esta investigación, se propone un modelo teórico para estudiar el proceso de *constitución del saber matemático*, el cual involucra a la humanidad en su devenir histórico, social y cultural. Para comenzar, se concibe al saber como el resultado de la interacción entre un mundo cognoscible e individuos cognoscentes, a los cuales este mundo les causa asombro y les interpela a la explicación. Asimismo, se destacan las cualidades creativa, explicativa y comunicativa manifestadas por el ser humano, a causa de las cuales este está en constante creación, genera sistemas de explicaciones y busca la difusión de sus ideas. También, siguiendo a Espinoza (2014), se consideran las siguientes tesis relativas a la construcción social del conocimiento: 1) el saber es dinámico, aglutinante y está en constante desarrollo; 2) la construcción social y difusión institucional son procesos simultáneos, imbricados y vivos; y 3) existen constantes tránsitos entre saber y conocimiento.

Así como el Big Bang explica la constitución del universo, el presente modelo explica la constitución del saber (Figura 1). El saber es representado con una flecha curva, la cual, expresa que este no está fragmentado y que se desarrolla de manera transversal a diversos ámbitos de la experiencia humana (Espinoza, 2014). En cambio, el conocimiento es representado con una flecha recta, pues, al transitar a conocimiento, el saber se cristaliza y se vuelve estable (Chevallard, 1991). De esta manera, en su difusión, la naturaleza, organización y estructura del saber se transforman al transitar hacia conocimientos, es decir, hacia objetos susceptibles de ser aprendidos y difundidos (Espinoza, 2014). A su vez, cuando el conocimiento se aprende, es decir, cuando se pone en uso a través de la experiencia, este se vuelve saber (Cantoral, 2013).

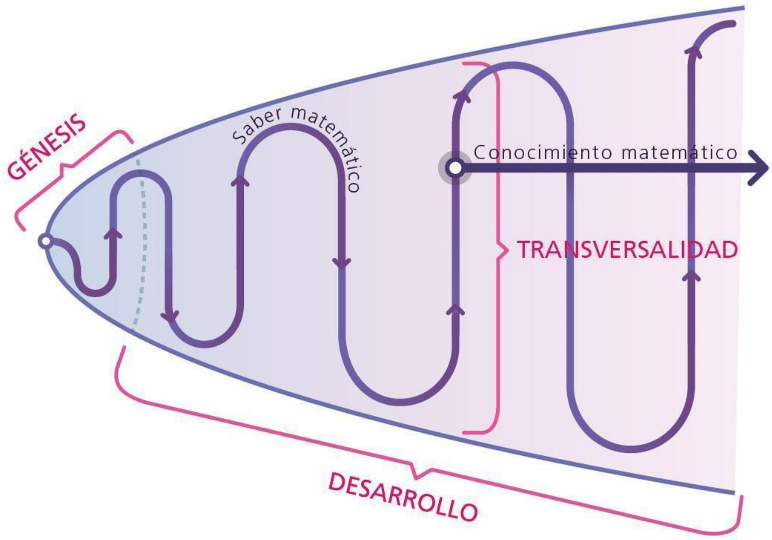

FIGURA 1
Esquema del modelo teórico para el estudio de la constitución del saber

En el proceso de constitución del saber, identificamos su *génesis*, su *desarrollo y su transversalidad*. Así como en la teoría del Big Bang, las condiciones de origen determinan significativamente las configuraciones actuales de lo material, en el proceso de *constitución del saber* se considera fundamental explorar los momentos de *génesis* del saber matemático. En efecto, considerando que la naturaleza epistemológica del conocimiento está anclada a sus contextos de producción (Espinoza, 2009), estos momentos germinales determinan significativamente tanto la forma como las cualidades intrínsecas del saber. A su vez, en estos momentos germinales el saber no está fragmentado. Estos momentos actúan como una singularidad, pues son un ámbito para explorar tanto la producción y naturaleza del saber como aspectos relativos a su devenir en el tiempo.

De modo similar, se reconoce el *desarrollo* del saber, en el cual, en su devenir histórico y a través de procesos de disciplinarización y escolarización, el saber se "cristaliza" en discursos científicos y escolares (Soto y Cantoral, 2014), producto de lo cual tiende a la especialización y su consecutiva fragmentación (Espinoza, 2014). Como resultado, se construyen conocimientos disciplinares (Cantoral, 2013) y operan sus respectivos procesos de transposición didáctica, en los que se producen conocimientos escolares (Chevallard, 1991). Por último, se identifica la transversalidad del saber, la cual expresa que el saber va constituyéndose en su uso, en el que atraviesa transversalmente diversos ámbitos de acción inmersos en prácticas humanas (Cantoral, 2013). Al respecto, se considera que la actividad humana se articula, principalmente, a través de prácticas fundamentales, las cuales son ancestrales, permanecen en el tiempo y se expresan en distintos ámbitos culturales.

En suma, se propone el estudio de la constitución del saber a través del análisis de su génesis, desarrollo y transversalidad:

- *Su génesis*: Explora la pregunta ¿cómo el saber llega a ser? Aborda aspectos relativos a su producción y naturaleza, situándose en contextos, intencionalidades y prácticas específicas.
- *Su desarrollo*: Explora la pregunta ¿cómo el saber es difundido? Aborda aspectos sobre su devenir histórico y sus tránsitos hacia y entre discursos disciplinares y escolares.
- *Su transversalidad*: Explora la pregunta ¿cómo este saber vive en diversas prácticas? Aborda el uso y desarrollo en prácticas científicas, técnicas, artísticas y cotidianas.

Al ser un modelo sistémico, la *génesis*, el *desarrollo* y la *transversalidad* no deben ser concebidas como independientes o secuenciadas, sino que requieren ser entendidas de manera articulada. En definitiva, este modelo permite desarrollar comprensiones amplias acerca del saber matemático y su devenir histórico, social y cultural. Particularmente, en el estudio de obras antiguas, al contemplar el examen de la producción, el devenir y los usos del saber, propicia la construcción de una mirada amplia en torno a constitución del saber matemático presente en estas obras. En efecto, en este modelo se considera al saber matemático como una expresión de la sabiduría humana (Cantoral, 2013). De esta manera, así como el conocimiento está ligado con el ejercicio intelectual, la sabiduría, dando un paso más allá, está ligada con el conocimiento "en" experiencia (Espinoza, 2014). Por consiguiente, se entiende que es en la experiencia humana, considerando esta no acotada a la experiencia social del aprendiz, sino involucrando además la de los seres humanos como colectivos, sociedades y la humanidad en general, donde se constituye el saber matemático (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

3. Consideraciones metodológicas

Con respecto al diseño metodológico, se realizó un análisis temático de la obra de Stöffler (1513). Con relación a la selección de la obra, se escogió el siglo XVI debido a que en este se publicaron numerosos libros acerca de la medición de distancias inaccesibles (Vicente, 1993). Entre estos, se eligió el libro de Stöffler (1513) dado que: 1) fue publicado a comienzos del siglo, 2) se escribió con la intencionalidad de llegar a un público amplio, y 3) influenció significativamente en los libros relativos al tema, escritos a lo largo del siglo (Morrison, 2007). Estudiamos la obra desde su traducción al francés, realizada por Jean-Pierre de Mesmes en 1560, en conjunto con la versión original escrita en latín y publicada en 1513. En la traducción, se incluye el tratado de Stöffler (1513) en conjunto con breves comentarios del traductor. También, las imágenes de la versión original de 1513, a diferencia de las imágenes de la traducción de 1560, están proporcionadas a escala. Estudiamos en la traducción de 1560 el texto original de Stöffler, sin considerar los comentarios del traductor, y lo analizamos usando las imágenes de la publicación original.

En Stöffler (1513), la medición de distancias inaccesibles se trata entre las proposiciones 60 y 67, como un anexo de un libro que trata acerca de la construcción y el uso astronómico del astrolabio. De estas ocho proposiciones, en esta investigación se estudiaron las primeras cuatro, considerando que en estas se desarrollan las técnicas de medición de alturas inaccesibles tal cual se presentan en los textos escolares de nivel medio y superior. Siguiendo el método de análisis temático (Maguire y Delahunt, 2017), se realizó la indagación de la siguiente manera: 1) las proposiciones fueron segmentadas siguiendo el orden de los temas que el autor desarrolló en su obra; 2) se realizó una codificación mediante unidades semánticas, considerando como eje el cómo se pone en uso la medición de distancias inaccesibles; 3) estos códigos fueron analizados y agrupados en temas preliminares; 4) se volvió a analizar el texto, buscando corroborar y legitimar estos temas preliminares. Finalmente, estos temas refinados constituyen las categorías obtenidas del análisis.

Después del análisis temático, se analizó el proceso de constitución del saber matemático presente en las proposiciones estudiadas de Stöffler (1513). Para hacer esto, se siguió la propuesta metodológica de Espinoza (2009), en la cual, se propone el estudio de obras matemáticas antiguas considerando el contexto específico en el que fueron producidas, las prácticas a las que están vinculadas y el escenario sociocultural en el que fueron gestadas. Las obras son consideradas como una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una producción intelectual más global. En la presente investigación, estos elementos son operacionalizados de la siguiente manera:

1. *Producción con historia*: Exploramos la época en la que el texto fue escrito, la cual fue singular, tanto por la invención de la imprenta en Occidente como por el arribo de los europeos a América.

2. *Objeto de difusión*: Analizamos la naturaleza de difusión de la obra, considerando el público al que se dirige el texto y la intencionalidad didáctica que el autor plasmó en la misma.
3. *Parte de una expresión intelectual más global*: Examinamos la obra en conjunto con otros 5 libros que tratan la misma temática y que fueron escritos en el siglo XVI.

De esta manera, estudiamos este proceso de *constitución del saber matemático* indagando su *génesis* en textos escritos antes del siglo XVI en los que están presentes los conocimientos puestos en uso en las proposiciones estudiadas. Analizamos las proposiciones 18, 19, 20 y 21 de la *Óptica de Euclides*, datada en el siglo III antes de Cristo, y el capítulo 4 de la obra *De Arte Mesurandi*, escrita por Johannes de Muris en la primera mitad del siglo XIV. Para el análisis del *desarrollo* y de la *transversalidad* del saber, recurrimos a estudios de tratados acerca de la medición de distancias inaccesibles publicados entre los siglos XI y XVI. Consideramos la *Histoire de l´astronomie du moyen age* de Delambre (1819) y la *Altimetría y longimetría en textos renacentistas: estudio comparado* de Vicente (1993), en conjunto con otras investigaciones que estudian el contexto de producción de la obra de Stöffler (1513) (Morrison, 2007, Hayton, 2017). Además, analizamos la presencia de las categorías obtenidas del análisis temático de Stöffler (1513) en cinco obras escritas en el siglo XVI, que tratan la medición de distancias inaccesibles, a saber: 1) la Nova Scienctia de Nicolo Fontana (1537/1998), 2) El tratado *L'usage de l'anneau astronomique* de Gema Frisius (1544), 3) al C*ommentariorum in Astrolabium quod planisphaerium vocant* de Juan de Rojas y Sarmiento (1551), 4) a la *Geometría Práctica y Speculativa* de Pérez de Moya (1573), y 5) *El Perfecto Capitán, instruido en la disciplina militar* de Álava y Viamont (1590). De esta manera, buscamos indagar si estas categorías son representativas en las obras escritas durante el siglo XVI.

En definitiva, el primer análisis permitió develar las categorías que caracterizan al conocimiento matemático puesto en uso en la obra de Stöffler (1513), mientras que el segundo posibilitó examinar estas categorías considerando la constitución del saber matemático en su devenir histórico, social y cultural. A continuación, presentamos los resultados de la investigación.

4. Análisis temático de la medición de distancias inaccesibles en la obra de Stöffler de 1513

En la proposición 60 de su *Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii*, Stöffler comienza señalando la utilidad y beneficio que la Geometría tiene para el ser humano en diversas prácticas. Después de explicitar las unidades de medida a utilizar, el autor señala que la medición de una distancia inaccesible se basa en el siguiente principio: considerar la magnitud a medir como el lado de un triángulo , rectángulo en (Figura 2). A su vez, el lado representa la longitud entre esta magnitud y el observador, y la hipotenusa , la “línea visual” trazada desde el ojo hasta un extremo de la magnitud a medir. Considerando esta configuración geométrica, el autor desarrolla un método de medición en el que se usa la inclinación de la línea visual, así como la distancia entre el observador y la magnitud a medir.

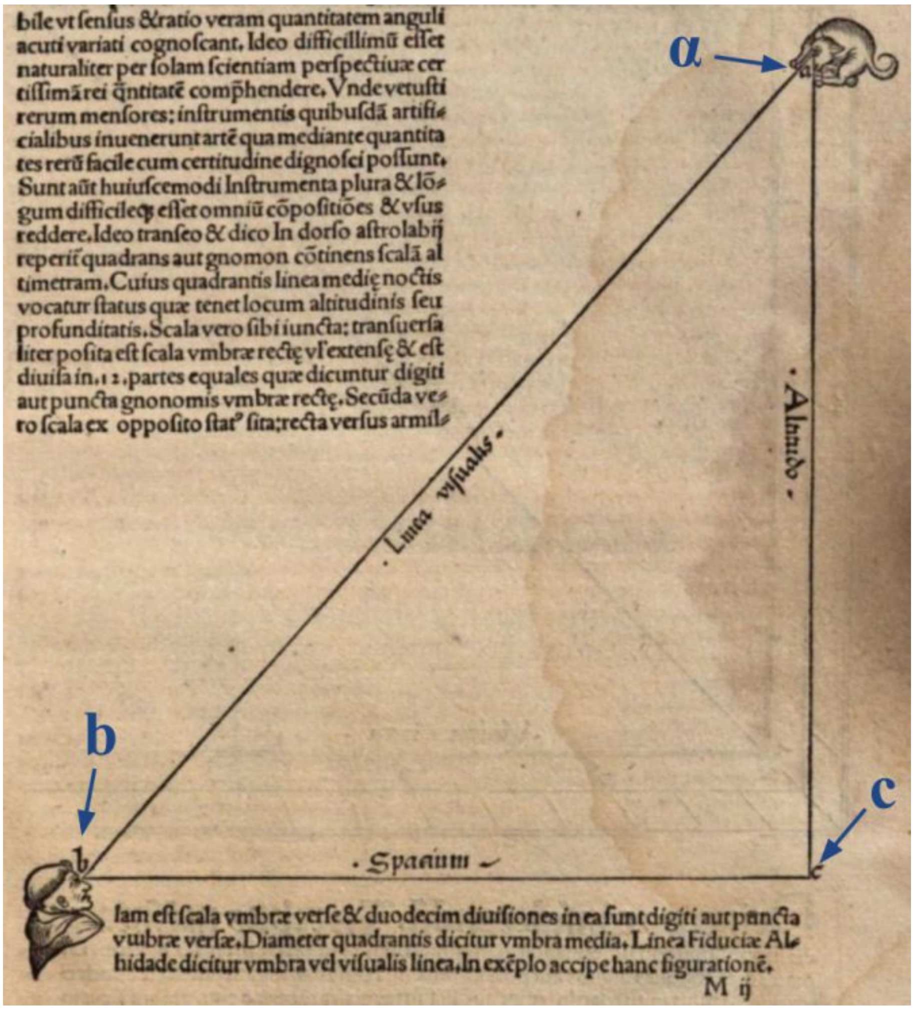
bile vt sensus & ratio veram quantitatem anguli
acuti variati cognoscant. Ideo difficillimũ esset
naturaliter per solam scientiam perspectiuæ cer
tissimã rei q̃ntitatẽ cõphendere. Vnde vetusti
rerum mensores: instrumentis quibusdã artifi-
cialibus inuenerunt artẽ qua mediante quantita
tes rerũ facile cum certitudine dignosci possunt.
Sunt aũt huiuscemodi Instrumenta plura & lõ-
gum difficileq; esset omniũ cõpositiões & vsus
reddere. Ideo transeo & dico In dorso astrolabij
reperit quadrans aut gnomon cõtinens scalã al
timetram. Cuius quadrantis linea mediæ noctis
vocatur status quæ tenet locum altitudinis seu
profunditatis. Scala vero sibi iuncta: transuersa
liter posita est scala vmbræ rectę vł extensę & est
diuisa in. 12. partes equales quæ dicuntur digiti
aut puncta gnonomis vmbræ rectę. Secũda ve-
ro scala ex opposito stat' sita: recta versus armil-
lam est scala vmbræ versę & duodecim diuisiones in ea sunt digiti aut pancta
vmbræ versæ. Diameter quadrantis dicitur vmbra media. Linea Fiduciæ Al-
hidade dicitur vmbra vel visualis linea. In exẽplo accipe hanc figurationẽ.
M ij

FIGURA 2

Imagen que muestra la configuración geométrica de la medición, tomada de "*Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii*", por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXXI [descripciones añadidas]

A continuación, Stöffler (1513) plantea que su intención es proponer un método de medición que permita llegar a un público amplio mediante la simplificación de los cálculos. Por este motivo, escogió para su obra el uso del instrumento llamado "gnomon" o "cuadrado". Como se puede apreciar en la Figura 3, el gnomon en la época de Stöffler era un cuadrado que tenía dos lados divididos en doce partes iguales, los cuales eran conocidos como escalas aritméticas. El lado inferior era llamado "Sombra Recta" (*Umbra Recta*) y el lado vertical "Sombra Lateral" (*Umbra Versa*). La diagonal del cuadrado era conocida como "Línea de Sombra Media" (*Linea Medle Umbre*), y tenía un ángulo de inclinación de 45 grados por sobre la Sombra Recta. Además, el autor señala que es necesario considerar que la magnitud a medir puede ser dividida en doce partes iguales.

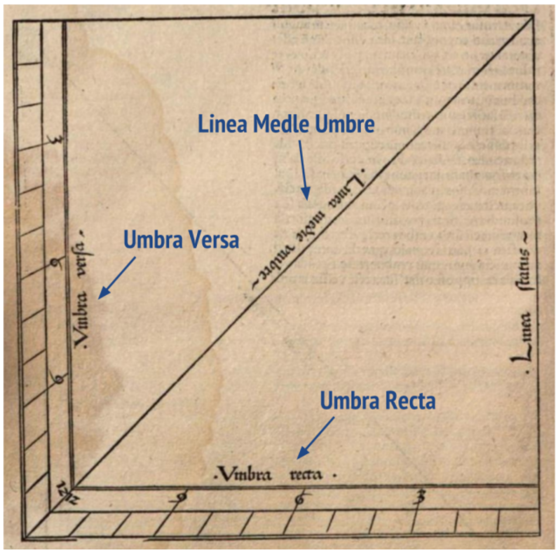

FIGURA 3
Imagen del gnomon usado por Stöffler para realizar las mediciones, tomada de "*Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii*", por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXIX [descripciones añadidas]

Como puede apreciarse en la Figura 4, el gnomon usado por Stöffler estaba ubicado en la parte trasera de los astrolabios de su época. Estos astrolabios tenían una argolla, la cual, al sujetarse con la mano, aseguraba que el instrumento estuviera nivelado. En su centro giraba una barra de metal, llamada "*Alidada*", usada para determinar visualmente inclinaciones y declinaciones. En los extremos de esta *Alidada* había dos pequeñas láminas metálicas, llamadas "*pínulas*", que tenían cada uno un pequeño orificio circular usado para ajustar la mirada. Estas servían para asegurar la precisión y exactitud de la estimación de la inclinación o declinación.

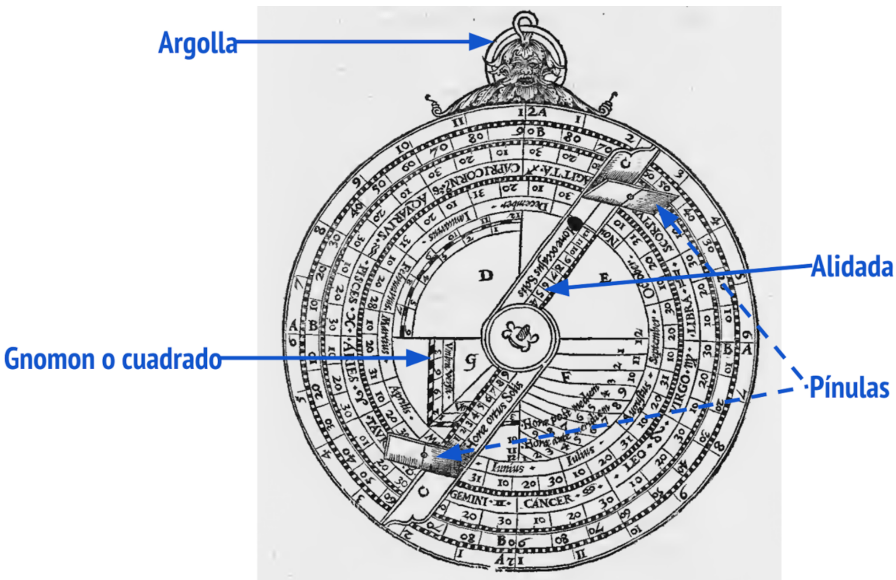

FIGURA 4
Parte trasera de astrolabio (Rojas, 1551, p.7) [descripciones añadidas]

En la proposición 61, Stöffler (1513) presenta la técnica de medición de una altura inaccesible utilizando la sombra generada por la luz del Sol o de la Luna. Considera una altura perpendicular al piso y cuya sombra esté proyectada sobre una superficie plana. En su explicación, el autor sostiene que para medir esta altura hay que esperar que el cuerpo celeste (Sol o Luna) se mueva hasta que la línea visual (entre el ojo y el cuerpo celeste) calce con la Línea de Sombra Media (diagonal) del gnomon (Figura 5). En este caso, la altitud del Sol o Luna será de 45 grados, por tanto, la medida de la sombra será igual a la medida de la altura buscada. De esta manera, midiendo la sombra se tendrá la medida de la altura buscada.

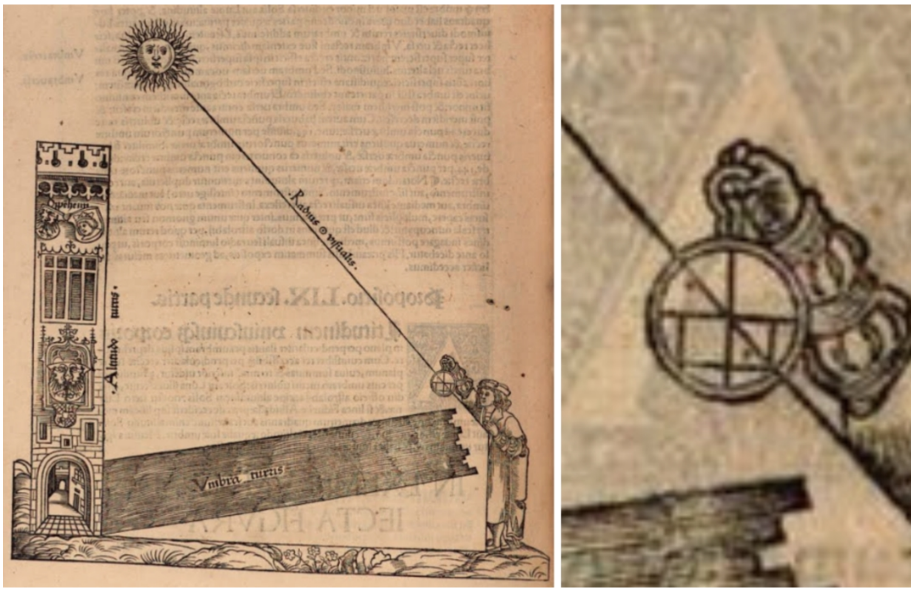

FIGURA 5
Imagen de la técnica de medición cuando la elevación del Sol es 45°, tomada de "*Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii*", por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXX

A continuación, el autor explica la misma técnica de medición considerando el caso en el que la altitud del Sol o la Luna es superior a los 45 grados, caso en que la altura será más grande que su sombra. La razón entre la altura y su sombra será de doce entre el número de puntos obtenidos en la medición de la inclinación del Sol o la Luna en la Sombra Recta del gnomon. Stöffler presenta dos ejemplos, uno en el que el rayo visual toca en cuatro puntos la Sombra Recta, y otro en el que la toca en seis. En estos, la altura será consecutivamente tres y dos veces más grande que su sombra. Por tanto, multiplicando la magnitud de la sombra por 3 o 2 se obtiene la magnitud de la altura inaccesible. Stöffler (1513) termina señalando que la sombra será el doble de la altura cuando el Sol o la Luna estén elevados aproximadamente sesenta grados y treinta o cuarenta minutos sobre el horizonte.

Para finalizar, el autor desarrolla el caso en el que la altura es más pequeña que su sombra, es decir, cuando la inclinación del Sol o la Luna es menor a 45 grados (Figura 6). La magnitud de la altura será igual al valor de la medida de su sombra, multiplicada por el punto en el que la altitud del Sol o Luna toque sobre la Sombra Lateral del gnomon, y dividida por doce. Concluye enfatizando que, cuando la sombra toque seis puntos del gnomon, la sombra será el doble de la altura, lo cual ocurrirá cuando el Sol o la Luna estén elevados sobre el horizonte aproximadamente veintiséis grados y treinta minutos.

FIGURA 6
Imagen de la técnica de medición cuando la elevación del Sol es menor a 45º, tomada de "*Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii*", por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXXI

En la proposición 62, el autor describe la técnica para encontrar una altura inaccesible cuando esta se encuentra perpendicular al piso sin usar su sombra. Es el caso en el que el medidor está sobre una superficie plana y tiene acceso a la base de la altura. El medidor debe poner la *Alidada* alineada con la sombra media del gnomon, es decir, midiendo una altitud de cuarenta y cinco grados. Después, debe ubicarse bajo la torre y moverse hacia atrás o adelante de la magnitud a medir hasta que la línea visual, pasando por las *pínulas*, se cruce con la parte más alta de la altura a medir. En este caso, se tendrá que la inclinación de la línea de visión es de 45 grados. Por tanto, la magnitud de la altura inaccesible será igual a la distancia del medidor a la base de esta, más la longitud del medidor (Figura 7).

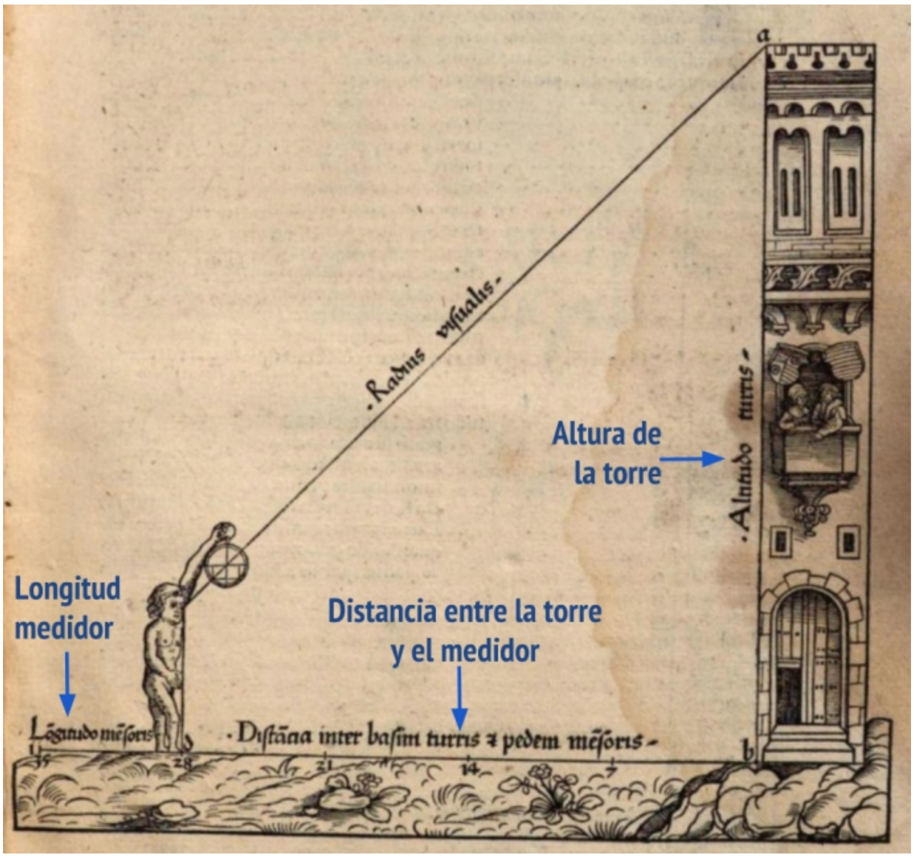

FIGURA 7
Imagen de la técnica de medición cuando la línea visual está elevada 45º, tomada de "*Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii*", por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXXI [descripciones añadidas]

En la proposición 63 se explica cómo medir una altura inaccesible, usando la línea visual, pero sin que cambie el lugar del medidor. El autor divide esta proposición en dos casos: cuando el ángulo que genera la línea visual sobre el gnomon es mayor o menor a 45 grados. Aquí se procede con técnicas similares a las que se usan cuando se consideran la sombra que produce el Sol o la Luna. En el primer caso, la línea visual tocará a la Sombra Recta del gnomon, mientras que en el segundo tocará a la Sombra Lateral. En el primero, debe multiplicarse por 12 la distancia desde el medidor a la base de la altura, dividirse por el número obtenido en el gnomon, y sumarse la altura del observador. En el segundo, se procede de manera similar, pero multiplicando por el número del gnomon y dividiendo por 12 (Figura 8). A su vez, Stöffler (1513) da ejemplos prácticos de medición para esta proposición, así como en las dos proposiciones anteriores. En todos estos ejemplos, el autor señala que para medir la distancia accesible se requiere usar alguna unidad de medida.

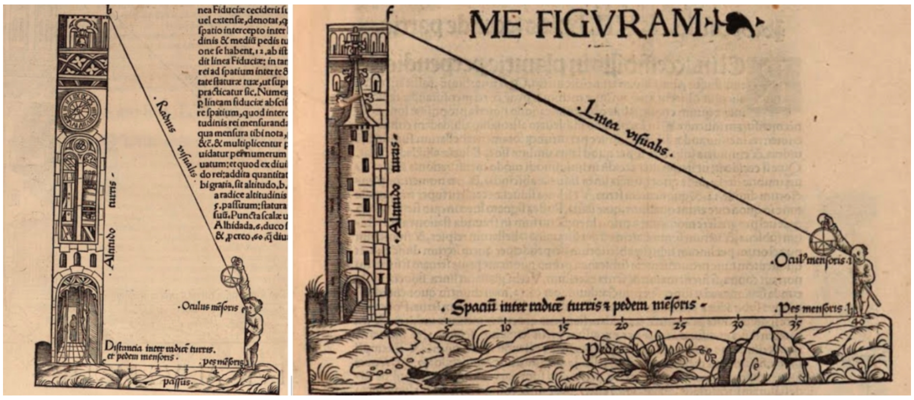

FIGURA 8
Imagen de la técnica de medición cuando la línea visual está elevada más y menos de 45º respectivamente, tomada de "*Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii*", por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXXI

4.1. La búsqueda de una razón conveniente para realizar la medición

Las técnicas descritas en Stöffler (1513) comienzan analizando la posibilidad de encontrar ciertas razones en el gnomon que permitan simplificar el procedimiento de medición y los cálculos. A esto le hemos denominado la *búsqueda de una razón conveniente*. El autor inicia la descripción de la técnica de la proposición 61 buscando la razón 1:1 entre la altura y su sombra. También, en la proposición 62, al explicar las técnicas en las que se usa la línea visual, el primer caso presentado es la búsqueda de la razón 1:1 entre las magnitudes involucradas. Esta búsqueda de una razón conveniente para realizar la medición se hace explícita en la proposición 61, donde el autor señala lo siguiente:

> L´utilité de cette partie est fort grande. Car s´il aduient quelquefois, que l´altitude du Soleil, ou de la Lune, ne soit justement de Quarante cinq degres: attendez un peu, jusques â ce, que vous ayes ceste altitude en vostre Astrolabe. Et lors par tout l ´unbre ferá egale â la hauteur des choses (Stöffler, 1513/1560, pp. 199-200) [2] .

A su vez, en esta misma proposición, en los ejemplos para los casos donde la altura es mayor o menor a 45 grados, propone mediciones que involucran las razones 2:1, 3:1 y 1:2 entre la altura y su sombra, señalando además los ángulos de inclinación del Sol o la Luna para tener la razón 2:1 y 1:2. Y de manera general, al medir con la técnica descrita por Stöffler (1513), siempre se tendrá como razón una fracción de la forma $\frac{a}{12}$ o $\frac{12}{a}$, siendo *a* un número entero entre 1 y 12. Es decir, el gnomon se dividió con la intención de encontrar razones convenientes. En efecto, el número 12, al ser el menor número natural que tiene entre sus divisores al 1, 3, 4 y 6, es a la vez el menor entero que permite formar simultáneamente las razones 1:1, 1:2, 2:1, 1:3, 3:1, 1:4 y 4:1 con respecto a sus divisores. Estas son las razones más convenientes que permiten realizar los cálculos de manera más simple. En definitiva, la búsqueda de razones convenientes es una característica de la medición de distancias inaccesibles en las proposiciones analizadas del libro de Stöffler (1513).

4.2. El uso del dinamismo del fenómeno involucrado

La búsqueda de una razón conveniente es posible gracias al dinamismo inherente a las técnicas de medición utilizadas. Por ejemplo, en la técnica en la que se usa la línea visual, el dinamismo está dado por la posibilidad de desplazamiento del medidor. A su vez, en el caso de la técnica en la que se usan las sombras, el dinamismo está dado por el movimiento del Sol y la Luna. Este caso es particularmente interesante, pues hay periodos del año en los que, en Europa, no se tendrá la razón 1:1 entre alturas y sombras (Bedaque y Bretones, 2016). Con respecto a esto, en la proposición 61, el autor señala lo siguiente:

> En nostre septiesme climat, quand le Soleil chemine par les lignes Meridionaux, jamais l´umbre n´est esgal à la chose que la faict: car le Soleil, en temps de Midy, n´est jamais elevé sur nostre Horizon, de quarante cinq degrez [...] Mais quand le Soleil chemine par les lignes Septentrionaux, depuis le neusiesme degré du Belier jusques au vingt & vneisme de la Vierge: touts les iuors, si le Soleil luyt, l`umbre móstre la hauteur du corps, duquel elle est l´umbre, à tout le moins, una fois le jour (Stöffler, 1513/1560, p. 200) [3] .

En esta cita, Stöffler (1513) señala que no se tendrá la razón 1:1 cuando el Sol recorre entre el noveno y décimo grado de Aries, y el vigésimo y vigésimo primer grado de Virgo. En el siglo XVI, se usaron nociones astronómicas antiguas, en la que la eclíptica era dividida en doce partes iguales, obteniendo los signos zodiacales. Cada zodiaco equivalía a 30 grados de arco de circunferencia, de manera que los doce zodiacos completan los 360 grados. Asimismo, los astrolabios usados en la primera parte de este siglo XVI relacionaban las divisiones zodiacales con los meses y días del año. Por ejemplo, el astrolabio descrito en la obra de Frisius (1544) tenía una circunferencia exterior dividida por los doce signos zodiacales, subdivididos respectivamente en 30 grados cada uno, y una circunferencia interior dividida en los meses y días del año. Para este astrolabio, el noveno grado de Aries equivale al 19 de marzo y el veintiún grado de Virgo equivale al 5 de septiembre (Figura 9).

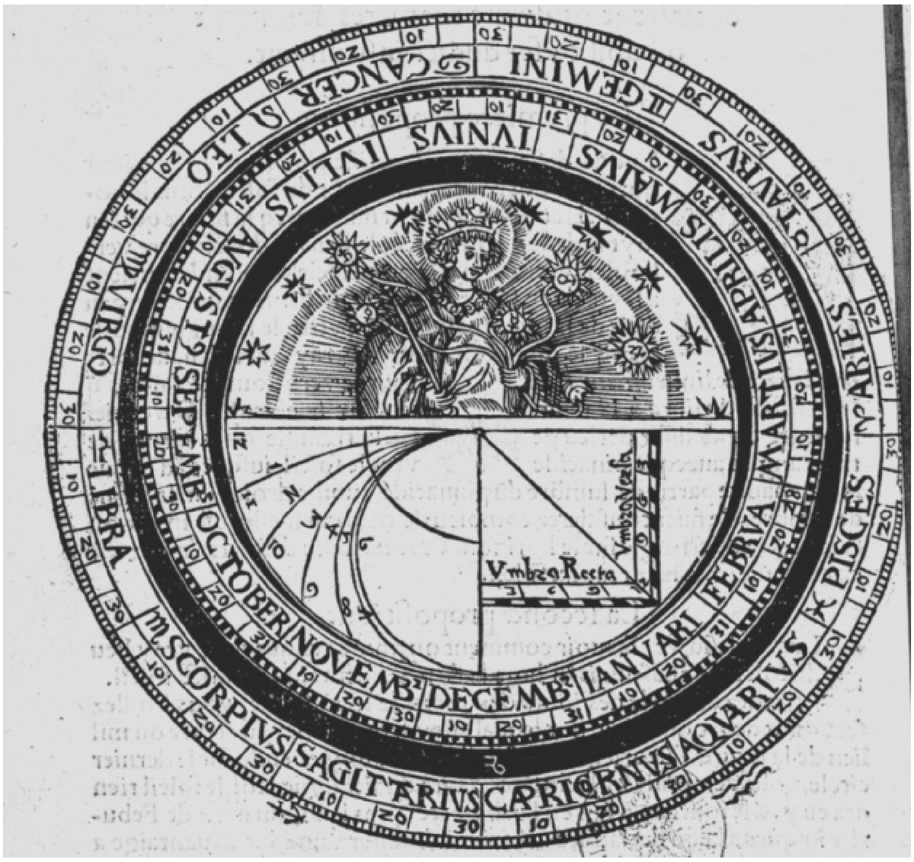

FIGURA 9
Imagen de un astrolabio en la obra de Frisius (1544, p. Fo.XII)

Por tanto, el planteamiento de Stöffler considera que, en su latitud, entre el 5 de septiembre y el 19 de marzo no se tendrá la razón 1:1. En cambio, entre el 19 de marzo y el 5 de septiembre esta razón se obtendrá dos veces al día, una antes del mediodía y otra después del mediodía. Y exactamente el 19 de marzo y 5 de septiembre esta razón se tendrá una vez al medio día. Más aún, el autor señala que usando el astrolabio pueden determinarse de manera precisa los horarios exactos en los que sucederá esto para cualquier latitud y fecha. Usando el astrolabio, los medidores podían predecir los horarios en los que se tendrían razones convenientes. Además, la búsqueda de estas razones estaba directamente relacionada a entender la posición de los astros y la bóveda celeste en función de la posición del observador. Cabe señalar que esta problematización del comportamiento de las sombras se realizó en el contexto de la naturaleza astronómica del libro de Stöffler (1513). En síntesis, tanto el movimiento del observador como el del Sol y la Luna permiten y condicionan la búsqueda de razones convenientes para realizar la medición.

4.3. La elección de una unidad de medida adecuada

En la proposición 60 de su obra, Stöffler (1513), define la medición de la siguiente manera:

> Mesurer aucune quantité, c´est trouver combien de fois quelque mesure commune, & quasi par tout cogneuë, est trouvée en la quantité: au quelle partie ceste quantité est de ladite commune quantité, ou combien de parties d´icelles elle contient (Stöffler, 1513/1560, p. 194) [4] .

Estas medidas comunes o famosas, señala el autor, son aquellas que son comunes en todos los países, o bien, las usadas y acostumbradas por muchos. Stöffler (1513) presenta diversas unidades de medida, las cuales, son patrones que tienen como referencia partes del cuerpo humano. Tales patrones consideraban las siguientes equivalencias y unidades: el dedo, la palma (4 dedos), el pie (4 palmas), el paso (5 pies), la *perche* (10 pies), el estadio (125 pasos), la milla (8 estadios) y la legua (un millar y medio), entre otras. Estas unidades de medida eran necesarias dado que, para conocer una distancia inaccesible, se requería, además de cierta razón, la medición de una distancia accesible como la medida de cierta sombra, la distancia entre el observador y la base de la altura o la altura del medidor.

En las cuatro proposiciones analizadas se explicita la necesidad de elegir una unidad de medida. Por ejemplo, en una técnica de medición en la que se usan las sombras, el autor señala que el medidor debe "mesurez doncques l´umbre de la chose, par quelque mesure que cognoisiez" (Stöffler, 1513/1560, p. 201) [5] . También, al explicar la técnica de medición en la que se usa la línea visual, Stöffler señala que es necesario "mesurez l´espace, qui est compris entre la racine de l´altitude de la chose, qui est à mesurer, & vostre pied, par quelque mesure commune, a vous cogneuë, comme par pieds, ou par pas u autre" (Stöffler, 1513/1560, pp. 205-206) [6] . En definitiva, para Stöffler (1513) medir implica elegir una unidad de medida y compararla con la magnitud que se desea medir.

TABLA I
Presencia de las categorías en las proposiciones analizadas

Proposiciones analizadas de Stöffler (1513):		Categorías emergentes:		
		Búsqueda de una razón conveniente	Uso del dinamismo del fenómeno involucrado	Elección de una unidad de medida
Proposición 60	Definiciones			X
	Descripción de las unidades de medida			X
	Explicación del uso del Gnomon	X	X	
Proposición 61	inclinación de 45°	X	X	
	inclinación mayor a 45°	X	X	X
	inclinación menor a 45°	X	X	X
Proposición 62	inclinación de 45°	X	X	X
Proposición 63	inclinación mayor a 45°	X	X	X
	inclinación menor a 45°	X	X	X

A modo de síntesis, en la Tabla 1 se presenta la presencia de las tres categorías emergentes de la medición de distancias inaccesibles en los diferentes fragmentos de las proposiciones analizadas.

5. La obra de Stöffler y el proceso de constitución del saber

En esta sección, analizaremos el proceso de la constitución del saber presente en las proposiciones analizadas. Con relación a su génesis, el saber puesto en juego en Stöffler (1513) tiene antecedentes que datan alrededor del siglo III antes de Cristo. En efecto, en la *Óptica de Euclides*, tratado geométrico antiguo en el que se estudia el fenómeno de la percepción visual, hay cuatro proposiciones que tratan acerca de la medición de alturas, profundidades y longitudes inaccesibles (Figura 10). A su vez, la medición de distancias inaccesibles también se encuentra en textos antiguos de carácter astronómico, como es el caso del tratado *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna* de Aristarco de Samos (Scriba y Schreiber, 2015). Por otra parte, las unidades de medidas citadas en Stöffler (1513) se remontan a la antigüedad (Robinson, 2007).

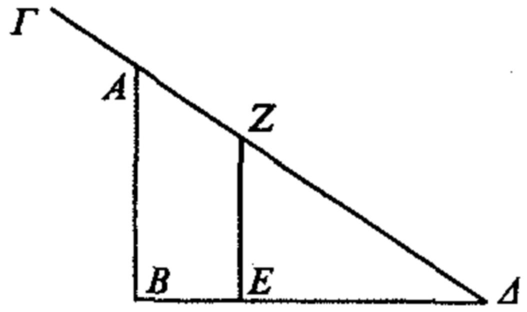

FIGURA 10
Imagen de la proposición 18 de la *Óptica de Euclides*, en la que se explica cómo encontrar el tamaño de una altitud AB usando su sombra (Euclides, 2000, p. 151)

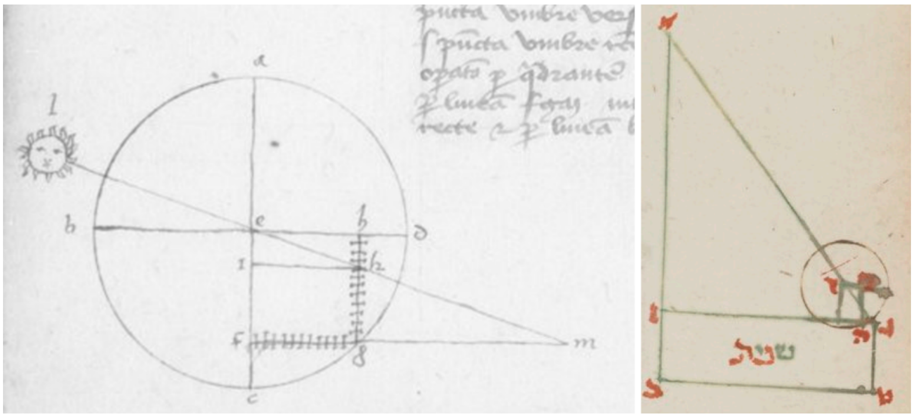

FIGURA 11
Imágenes que evidencian el uso del gnomon en el astrolabio en de Muris (1301-1400, p. 31) y Recueil d´Astronomie (1501-1600, p. 68)

Acerca del uso del astrolabio para realizar estas mediciones, encontramos el uso del gnomon en un tratado antiguo, escrito en hebreo y titulado *Recueil d´Astronomie*. También, en la obra *De Arte Mesurandi*, escrita por Johannes de Muris en la primera mitad del siglo XIV, existe una detallada descripción del uso del gnomon dentro del astrolabio. Como se puede apreciar en la figura 11, el gnomon de Muris también está construido con doce divisiones, las cuales, como ya se señaló, son útiles para encontrar razones convenientes. Específicamente, el autor ejemplifica en la imagen el caso de 4/12, donde la magnitud de la altura es un tercio de la magnitud de su sombra. Además, al representar el movimiento del Sol, se hace patente el dinamismo del fenómeno involucrado.

Con relación al *desarrollo* del saber, los antecedentes del uso del astrolabio tienen al menos dos mil años de antigüedad (Delambre, 1819). El primer tratado conocido fue escrito alrededor del 375 d.C. Después, los astrónomos islámicos incorporaron a los tratados una base teórica más sólida. Más tarde, estos se transmitieron a Europa por medio de la traducción al latín en monasterios cristianos (Morrison, 2007). Contractus escribió un tratado en 1050, al igual que Athélard en 1130, en conjunto con una traducción del árabe al latín de *Elementos* de Euclides. En el siglo XIV se escribieron otros tratados, algunos de los cuales fueron reimpresos a comienzos del siglo XVI, como el de Nicéforo Grégoras (1295-1359), reimpreso en 1498, y el de Pietro d`Abano (1250-1318), reimpreso en 1502 (Delambre, 1819). Cabe señalar que no todos los tratados tenían en sus versiones originales una sección de técnicas para la medición de distancias inaccesibles. Por ejemplo, en el caso del *A Treatise on the Astrolabe de Chaucer* de 1391, es probable que la sección de medición de distancias inaccesibles no haya sido incluida en su versión original, sino que haya sido anexada después (Eisner, 2002).

El tratado de Stöffler (1513) fue, en su temática, el más influyente del Renacimiento (Morrison, 2007). Si bien, como señala Hayton (2017), Stöffler (1513) no solo cita a varios de los tratados más antiguos, sino que también extiende algunas proposiciones para casos más generales, de manera global su tratado no hace aportaciones significativas a la ciencia del astrolabio (Delambre, 1819). Más bien, se reconoce que la gran aportación de su escrito está en su carácter divulgativo. De hecho, el mismo autor dedica su libro a amateurs de buenas letras y estudiantes de artes liberales. A su vez, señala su intencionalidad de llegar a un público amplio mediante la simplificación de los cálculos. Morrison (2007) plantea que el libro de Stöffler se destaca por ser claro, conciso y completo para su época, además de requerir solamente modestos conocimientos previos para entenderlo. Más aún, al ser un libro impreso, tuvo una amplia difusión y era asequible a un precio razonable. Además, se publicó en un momento donde la popularidad del astrolabio llegaba a su punto máximo en Europa, particularmente por su uso en la astrología. Como puede apreciarse, el astrolabio tuvo gran importancia en el desarrollo del Renacimiento europeo (Hayton, 2017).

El libro de Stöffler (1513) fue ampliamente difundido en el siglo XVI; fue editado dieciséis veces, en distintos países e idiomas, y prácticamente todos los tratados escritos posteriormente que tratan los mismos temas lo citan (Morrison, 2007). Durante el siglo XVI se escribieron varios libros que desarrollaron el tema de la medición de distancias inaccesibles, como es el caso de las populares obras de Fontana (1537/1998), Frisius (1544), Rojas (1551), Pérez de Moya (1573) y Álava y Viamont (1590). Cabe señalar que los contenidos tratados por Stöffler (1513) también están tratados en estas cinco obras citadas. A su vez, las tres categorías emergentes que surgieron del análisis de Stöffler (1513) también están presentes en estas obras (Tabla II).

TABLA II
Presencia de las categorías obtenidas en el análisis de Stöffler (1513) en otras obras escritas en el siglo XVI

Categorías emergentes surgidas del análisis temático de Stöffler (1513)		Fontana (1537/ 1998)	Frisius (1544)	Rojas (1551)	Pérez de Moya (1573)	Álava y Viamont (1590)
1. Búsqueda de una razón conveniente		X	X	X	X	X
2. Uso del dinamismo del fenómeno involucrado	Movimiento de las sombras		X	X	X	
	Movimientos del medidor	X	X	X	X	X
3. Elección de una unidad de medida		X	X		X	X

La *búsqueda de una razón conveniente* para realizar la medición está presente en estos cinco tratados. En comparación con Stöffler (1513), algunos de estos tratados contienen descripciones técnicas más detalladas. Rojas (1551), por ejemplo, buscando mayor precisión en las mediciones, divide cada doceava división del gnomon en cuatro subdivisiones. También, Fontana (1537/1998) realiza doce subdivisiones para cada división. En su libro, escrito para ser usado en la balística, Fontana explicó que pequeños errores de observación generan grandes imprecisiones en la medición. A pesar de estas diferencias, estas obras siguen el mismo principio de comenzar con las proposiciones en las que se busca la razón 1:1 (Figura 12).

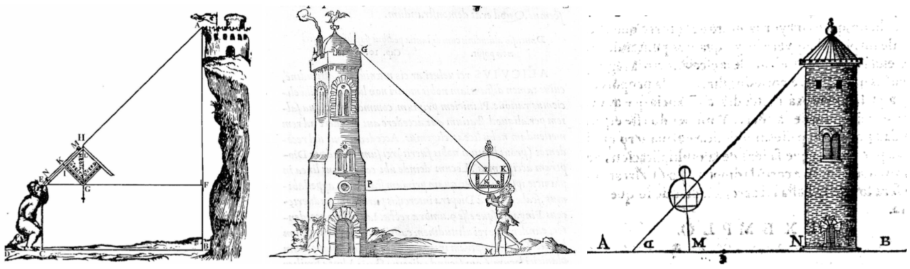

FIGURA 12
Imágenes de la búsqueda de la razón 1:1 en las técnicas de medición en Fontana (1537/1998, p. 129), Rojas (1551, p. 168), y Álava y Viamont (1590, p. 210), respectivamente

También, en estas obras se encuentra el uso del *dinamismo del fenómeno involucrado* en la medición. Por ejemplo, el uso del dinamismo del sol y la luna en la medición se encuentra en los tratados de Frisius (1544), Rojas (1551) y Pérez de Moya (1573) (Figura 13).

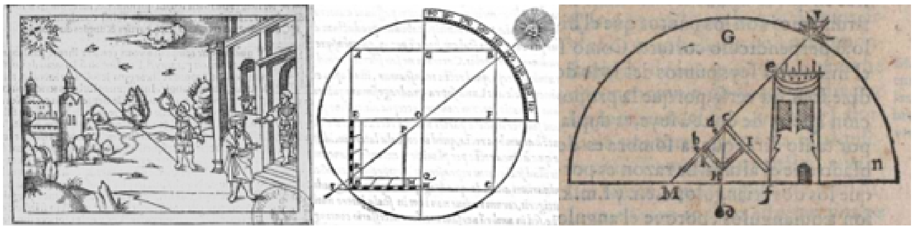

FIGURA 13
El movimiento del Sol y su uso para la medición en Frisius (1544, p. Fo.LXIII), Rojas (1551, p. 148) y Pérez de Moya (1573, p. 123), respectivamente

Además, la *elección de la unidad de medida* también está presente en estos tratados. A modo de ejemplo, Fontana, al explicar una de las técnicas de medición en su obra, señala que "se multiplica por 12 el número de pasos (o de cualquier otra medida) que existe entre mis pies y el punto B" (Fontana, 1537/1998, p. 132). Asimismo, las obras de Frisius (1544), Pérez de Moya (1573) y Álava y Viamont (1590), al igual que Stöffler (1513), tienen una sección en la que explican las unidades de medida utilizadas en cada obra. Cabe señalar que, en estas mediciones, la unidad de medida escogida podía variar si la magnitud a medir era la profundidad de un pozo, la altura de una torre o la distancia entre dos ciudades.

Finalmente, en relación con la *transversalidad* del saber, las cuatro proporciones analizadas se desarrollan al final del libro de Stöffler, el cual trata acerca de la construcción del astrolabio y su uso para calcular la inclinación del Sol y las estrellas en varias posiciones de sus órbitas, así como el cálculo de latitudes y longitudes de ciudades. De esta misma naturaleza es el tratado de Rojas (1551). A su vez, el tratado de Fontana (1537/1998) es de Balística, el de Álava y Viamont (1590) de Ciencia Militar y Artillería, el de Frisius (1544) es de Cosmografía y Geografía, y el de Pérez de Moya (1573) de Geometría Práctica. Vicente (1993) sostiene que las técnicas de medición de distancias inaccesibles, presentes en las obras del siglo XVI, fueron de gran utilidad para astrónomos, cosmógrafos, geógrafos, mecánicos, militares, arquitectos y agrimensores. El interés por estas labores se vio incrementado en el siglo XVI, entre otros motivos, por el arribo de los europeos a América, donde estas técnicas se usaron particularmente para la construcción, la fabricación de mapas y la Balística. En estas obras, también se explicaron otras técnicas de medición de distancias inaccesibles "utilizando varas, espejos o piedras como los más elementales y al alcance de cualquier técnico" (Vicente, 1993, p. 295). Es decir, en su mayoría, las obras en las que se estudió la medición de distancias inaccesibles fueron de carácter técnico. En definitiva, el carácter técnico de la obra de Stöffler debe ser considerado para su interpretación, pues la búsqueda de la economía en la técnica incide en la naturaleza epistemológica que el autor impregna en ella, particularmente, en el uso del dinamismo de los fenómenos para encontrar razones convenientes y así realizar la medición.

6. Caracterización de la medición de distancias inaccesibles desde el análisis de la obra de Stöffler

Para Stöffler (1513), medir involucra comparar cierta unidad de medida o patrón de referencia con una magnitud que desea conocerse. La diferencia entre la medición de distancias accesibles e inaccesibles en Stöffler (1513) radica en cómo se realiza la comparación entre la magnitud y la unidad de medida. En la primera, esta se realiza de manera directa, mientras que, en la segunda, ante la imposibilidad de hacerlo de aquel modo, se requiere usar una proporción.

Con relación a los significados asociados a la medición de distancias inaccesibles, Vicente (1993) señala que los tratados que abordan este tema, escritos en el siglo XVI, operan bajo el mismo principio: el uso de triángulos semejantes. Si bien, concordamos con el autor, puntualizamos que este principio pertenece más al ámbito de la justificación matemática de las técnicas de medición que al de su uso práctico. Por tanto, en otros ámbitos del saber, como por ejemplo el saber técnico, existen otras significaciones del conocimiento matemático.

En el caso de la obra de Stöffler (1513), no se hace alusión explícita al uso de triángulos semejantes. Más bien, lo que se hace es *identificar la razón entre una distancia inaccesible y otra distancia accesible, a través de una construcción a escala de esta razón, la cual, se establece por medio de la determinación de cierta inclinación*. Por ejemplo, en el caso de la medición de una altura usando su sombra, se determina la razón entre estas magnitudes en el gnomon (Umbra Versa/Umbra Recta), la cual, está establecida por la inclinación del Sol o la Luna. En las otras técnicas de medición, esta razón en el gnomon se establece por la inclinación o declinación de los rayos visuales.

De esta manera, para medir distancias inaccesibles se requiere de una razón y una distancia accesible. La razón se establece considerando el dinamismo propio del fenómeno involucrado, de manera tal de tener en cuenta la posibilidad de establecer una razón conveniente. Una vez establecida la razón, se mide la distancia accesible involucrada, para lo cual se requiere escoger una unidad de medida adecuada. Finalmente, la distancia accesible es proporcionada con la razón para así determinar la distancia inaccesible. Aquí, entendemos por proporcionar al acto de dilatar o contraer cierta magnitud con un determinado parámetro. En síntesis, con base en el análisis de la obra de Stöffler (1513), sostenemos que la medición de una distancia inaccesible requiere de:

1. Identificar y comprender la naturaleza, propiedades y comportamiento de cierto fenómeno que permita establecer una proporción.
2. Reconocer una distancia accesible pertinente que permita establecer la relación proporcional.
3. Incorporar un instrumento de medición adecuado, en función de la precisión buscada.
4. Representar geométricamente el fenómeno, incluyendo un triángulo en el que estén presentes las distancias accesible e inaccesible.
5. Encontrar una razón conveniente para medir usando el dinamismo inherente al fenómeno involucrado. Si esto no es posible, identificar una razón cualquiera que permita construir una proporción.
6. Elegir una unidad de medida apropiada y medir la distancia accesible.
7. Proporcionar la distancia accesible usando la razón encontrada para obtener la distancia inaccesible buscada.

Considerando que Stöffler (1513) es, principalmente, un sistematizador de saberes desarrollados a lo largo de siglos se tiene que tanto esta estructura de su libro como las explicaciones contenidas en las proposiciones están influenciadas por la búsqueda de una economía en los procedimientos empleados, aspecto propio de una disciplina técnica, y por la intencionalidad del autor de difundir sus ideas a un público amplio. A su vez, se tiene que las tres categorías que caracterizan la medición de distancias inaccesibles en Stöffler (1513) también están presentes en libros más antiguos y en tratados publicados a lo largo del siglo XVI. De esta manera, a pesar de estar situadas al carácter técnico y astronómico del texto de Stöffler (1513), estas categorías trascienden a esta obra, estando presentes en un periodo histórico que abarca, a lo menos, los siglos XIV al XVI. En definitiva, y teniendo en cuenta la evidencia estudiada, consideramos a estas categorías como referentes significativos para caracterizar al conocimiento puesto en uso en la medición de magnitudes inaccesibles.

7. Conclusiones

En esta investigación, nos propusimos caracterizar al conocimiento puesto en uso en las proposiciones que tratan la medición de distancias inaccesibles en el libro de Stöffler (1513). En esta obra, se ha develado una *episteme* en la que se explicitan aspectos esenciales de las técnicas de medición de distancias inaccesibles. En primer lugar, en esta *episteme* está presente lo que hemos denominado la *búsqueda de una razón conveniente* para realizar la medición, la cual está presente, además de en la obra de Stöffler (1513), en otros tratados escritos antes y a lo largo del siglo XVI. Estas razones convenientes tienen una carga epistémica relevante en este contexto de uso del conocimiento, el cual se manifiesta en la búsqueda de economía de los procedimientos algorítmicos empleados, algo propio de las prácticas técnicas. Al respecto, resaltamos que los casos particulares (1:1, 1:2, 2:1, etc.) anteceden y significan a las técnicas generales. Por tanto, se tiene una generalidad que no absorbe la particularidad, sino que le da un sentido protagónico. Con base en esto, consideramos que, si se invisibilizan, subestiman o trivializan estos casos particulares, puede generarse una pérdida de sentido y significado de las relaciones proporcionales involucradas en la medición de distancias inaccesibles.

En segundo lugar, la búsqueda de una razón conveniente es posible gracias al entorno dinámico en el que está inmersa la medición, sea este el movimiento del Sol y las sombras, o bien, el del medidor y los rayos visuales. *El uso del dinamismo del fenómeno involucrado* en la medición, presente en Stöffler (1513), también está presente en tratados escritos antes y a lo largo del siglo XVI. Este uso dinámico llevó al autor a usar su conocimiento en relación con el comportamiento de las sombras, y a utilizar este conocimiento para establecer relaciones entre inclinaciones y razones convenientes. En efecto, es gracias al dinamismo del fenómeno que se pueden identificar aspectos invariantes en el comportamiento de las sombras. De esta manera, medir conllevó el desarrollo de sistemas explicativos de un fenómeno natural. Por otra parte, cabe señalar que el carácter dinámico inherente en las técnicas de medición de Stöffler (1513) se contrapone a la naturaleza estática, característica de la geometría escolar (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017). Esta es una causa por la cual, consideramos que, en los problemas escolares, la medición se reduce al cálculo aritmético de valores prefijados en fórmulas preestablecidas, de manera tal que la naturaleza proporcional intrínseca queda evocada más no problematizada (Montiel y Jácome, 2014).

En tercer lugar, en Stöffler (1513) se explicita que medir consiste en elegir una unidad de medida y compararla con la magnitud que desea medirse. Esta idea concuerda con lo planteado por Reyes-Gasperini (2016) quién, al estudiar la construcción social de la proporcionalidad, plantea que la medición implica el ejercicio de las acciones de elegir y comparar. De manera similar, Peng Yee (2014) sostiene que medir demanda identificar un atributo, seleccionar una unidad y utilizarla de forma repetida. Esta manera de concebir la medición como razón es característica de la medición en general, y se hace presente particularmente en el caso de las distancias inaccesibles. Es importante señalar que, en el siglo XVI, si bien existían sistemas de medidas de uso común, no había uno masivamente estandarizado como lo tenemos en la actualidad; el sistema métrico decimal. La no existencia de un sistema estandarizado de medidas, consideramos, propició que las acciones de elegir y comparar, propia de la medición, hayan sido explicitadas.

De este modo, no bastó con decir "mida", sino que también era necesario señalar "elija una unidad de medida adecuada".

Por último, destacamos que la medición de distancias inaccesibles fue usada en la Cartografía, la Navegación, la Arquitectura, la Astronomía, la Agrimensura y la Balística, entre otras prácticas (Scriba y Schreiber, 2015; Vicente, 1993). En cambio, en los textos escolares, la medición de distancias inaccesibles suele ser reducida al cálculo de la altura de un edificio o de un árbol (Montiel y Jácome, 2014). Esto, sostenemos, impide apreciar el amplio uso que tuvo este conocimiento en diversos tiempos históricos y entornos culturales. Por tanto, explicitar estos aspectos en el aula, sostenemos, podría ayudar a los estudiantes a comprender la medición de distancias inaccesibles y, de manera general, a la Geometría, en su amplia dimensión práctica en la historia de la humanidad. Para finalizar, la dialectización de los resultados de esta investigación con la matemática escolar queda propuesta para futuras investigaciones.

Agradecimientos

Agradecemos el financiamiento de esta investigación por parte de CONICYT + PAI / Concurso nacional apoyo al retorno de investigadores/as desde el extranjero, convocatoria 2014 + FOLIO 82140031, Gobierno de Chile.

Referencias

Álava y Viamont, D. (1590). *El perfecto capitán, instruido en la disciplina militar, y nueva ciencia de la Artillería*. Recuperado de http://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.cmd?id=399489

Bakker, A., Wijers, M., Jonker, V., y Akkerman, S. (2011). The use, nature and purposes of measurement in intermediate-level occupations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 43*(5), 737-746. https://doi.org10.1007/s11858-011-0328-3

Bedaque, P., y Bretones, P. (2016). Variação da posição de nascimento do Sol em função da latitude. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 38*(3), e3307. https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0023.

Boero, P. (2012). From analysis and representation of space situations, to theoretical thinking in Geometry: A grade 3-grade 9 pathway. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 32*, 37-52. Recuperado de http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0121-38142012000200004&script=sci_arttext&tlng=pt

Camacho, A., Sánchez, B., Blanco, R., y Cuevas, J. (2011). Geometrización de una porción del espacio real. *Educación Matemática, 23*(3), 123-145. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262011000300006

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(1), 5-17. https://doi.org/10.12802/relime.13.1810

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique Grupo Editor.

Clements, D. H. (1999). Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics, 99*(1), 5-11. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17440.x

Covián, O. (2013). *La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción* (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Delambre, J. (1819). *Histoire de L' Astronomie Du Moyen Age*. Paris: Imprimeur-Libraire pour les Sciences. Recuperado de https://archive.org/details/bub_gb_Gz9SqRVfqREC

De Muris, J. (1301-1400). *Tractatus de mensurandi ratione*. Recuperado de: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b9077971k.r=muris?rk=214593;2

Douek, N. (1999). Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 89-110. https://doi.org/10.1023/A:1003800814251

Drake, M. (2014). Learning to measure length: The problem with the school ruler. *Australian primary mathematics classroom, 19*(3), 27-32. Recuperado de https://search.informit.com.au/documentSummary;dn=662654173461232;res=IELHSS

Eisner, S. (2002). Introduction. En Eisner, S. (Ed.), *A Variorum Edition of the Works of Geoffrey Chaucer, Vol. VI: The Prose Treatises, Part One: A Treatise on the Astrolabe* (pp. 3-96). EE.UU.: University of Oklahoma Press.

Espinoza (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses* (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México

Espinoza (2009). *Una visión de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio Socioepistemológico* (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017). La geometría escolar en crisis: una confrontación con la olvidada "Óptica de Euclides". *Premisa, 19*(74), 22-34. Recuperado de https://docplayer.es/95758030-La-geometria-escolar-en-crisis-una-confrontacion-con-la-olvidada-optica-de-euclides.html

Euclides (2000). La Óptica de Euclides. (Trad. Ortiz, P.). En Curbera, J. (Ed), *Aristóteles: Sobre las líneas indivisibles. Mecánica. Euclides: Óptica. Catóptrica. Fenómenos* (pp.117-197). Madrid: Editorial Gredos SA.

Fontana, N. (1998). *La nueva ciencia*. (Trad. J. Martínez y J. César). México D.F: UNAM. (Trabajo original publicado en 1537).

Frisius, G. (1544). L´ Usage de L´ anneau astronomicque. En G. Bonte y E. De Basle (Eds.), *La cosmographie de Pierre Apian*. (pp. Fo. LVII - Fo. LXV). Recuperado de: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6335840k/f11.item.r=cosmographie+de+Pierre+Apian

Hayton, D. (2017). Traditions of Byzantine astrolabes in Renaissance Europe. En W. Caferro (Eds.), *The Routledge History of the Renaissance* (pp. 183-191). New York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315226217-12

Maguire, M., y Delahunt, B. (2017). Doing a thematic analysis: A practical, step-by-step guide for learning and teaching scholars. *AISHE-J: The All Ireland Journal of Teaching and Learning in Higher Education, 9*(3). Recuperado de: http://ojs.aishe.org/index.php/aishe-j/article/view/335

Meavilla, V. (2012). *Eso no estaba en mi libro de matemáticas*. Barcelona: Editorial Almuzara.

Montiel, G., y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1193-1216. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10

Morrison, J. E. (2007). Stoeffler's Elucidatio: The Construction and Use of the Astrolabe [Review of Grunella and Lamprey Eds. and Trans.]. *Aestimatio, 4*(1), 155-161. Recuperado de: http://www.ircps.org/aestimatio/4/155-161

OECD (2016), *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Paris: OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264266490-en

Peng Yee, L. (2014). *La enseñanza de la matemática en educación básica: Un libro de recursos*. Santiago: Academia Chilena de Ciencias.

Pérez de Moya, J. (1573). *Tratado de Geometría práctica y Speculativa* (Vol. 2). Alcalá de Henares: Ivan Gracian. Recuperado de http://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.cmd?id=406912

Recueil d´Astronomie (1501-1600). En Hébreu 1030. Recuperado de http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b105393023/f5.item.r=hebreu%201030

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y socioepistemología, un estudio sobre la transformación educativa en matemáticas*. Barcelona: Gedisa.

Robinson, A. (2007). *The story of measurement*. London: Thames & Hudson.

Rojas, J. (1551). *Commentariorum in astrolabium quod planisphaerium vocant: libri sex nunc primum in lucem editi*. Recuperado de http://fondosdigitales.us.es/fondos/libros/927/7/illustris-viri-d-ioannis-de-roias-commentariorum-in-astrolabium-quod-planisphaerium-vocant-libri-sex/

Scriba, C., y Schreiber, P. (2015). *5000 Years of Geometry: Mathematics in History and Culture*. Berlín: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0898-9

Stöffler, J. (1513). *Elucidatio fabricae ususque astrolabii*. Recuperado de https://archive.org/stream/bub_gb_0INILVEV32cC#page/n3/mode/2up

Stöffler, J. (1560). *Traite de la composition et fabrique de l´Aftrolabe, & de fonvfage: auec les preceptes des mefures Geometriques* (Trad. Jean Pierre de Mesmes). Recuperado de https://archive.org/stream/bub_gb_0INILVEV32cC#page/n3/mode/2up (Trabajo original publicado en 1513).

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1525-1544. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25.

Tan-Sisman, G., y Aksu, M. (2012). The length measurement in the turkish mathematics curriculum: its potential to contribute to students' learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(2), 363-385. https://doi.org/10.1007/s10763-011-9304-1

Vicente, M. (1993). Altimetría y Longimetría en textos renacentistas: Estudio comparado. En Navarro, V., Salavert, V., Corell, M., Moreno, E., y Rosselló, V. (Eds.), *Actes de les II trobades d´història de la ciència i de la tècnica* (pp. 293-302). Peniscola: Societat catalana d´història de la ciència i de la tècnica.

Notas

1 Traducción libre: "Acerca de la fabricación y los usos del astrolabio".
2 Traducción libre: "La utilidad de esta parte es muy grande. Ya que, si sucede a veces que la altitud del Sol, o de la Luna, no sea justamente de cuarenta y cinco grados: esperar un poco, hasta que se tenga esta altitud en vuestro Astrolabio. Entonces todas las sombras serán iguales a la altura de las cosas".
3 Traducción libre: "En nuestro clima séptimo, cuando el Sol camina por las líneas meridionales, jamás la sombra será igual a las cosas que uno mide: como el Sol, en tiempos de mediodía, jamás se eleva sobre nuestro horizonte, de cuarenta y cinco grados [...] Pero cuando el Sol camina por las líneas Septentrionales, después del noveno grado de Aries hasta el vigésimo primero de Virgo: todos los días, si el Sol resplandece, la sombra muestra la altura del cuerpo, de la cual ella es la sombra, al menos, una vez al día".
4 Traducción libre: "Medir alguna cantidad, es encontrar cuántas veces alguna medida común y casi por todos conocida, se encuentran en la cantidad: o cuál parte de esta cantidad es de dicha cantidad común, o cuántas partes de ella contiene".
5 Traducción libre: "Medir entonces la sombra de la cosa, por alguna medida que conozca".
6 Traducción libre: "Medir el espacio, que está entre la base de la altura de la cosa que se va a medir y vuestro pie, por alguna medida común, por usted conocida, como el pie, el paso u otra".

Financiamiento

Fuente: CONICYT + PAI / Concurso nacional apoyo al retorno de investigadores/as desde el extranjero, convocatoria 2014
Nº de contrato: 82140031