Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa
ISSN: 1665-2436
ISSN: 2007-6819
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Huerta, M. Pedro

Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: retos para su enseñanza y en la formación de profesores

Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, vol. 23, núm. 1, 2020, pp. 79-102
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

DOI: https://doi.org/10.14482/INDES.30.1.303.661

M. Pedro Huerta

HIPÓTESIS Y CONJETURAS EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESTOCÁSTICO: RETOS PARA SU ENSEÑANZA Y EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Hypothesis and conjectures in the development of stochastic thinking: challenges for its teaching and teachers training

RESUMEN

En este artículo se reflexiona alrededor de la importancia que puede tener la dialéctica hipótesis-conjeturas no solo para el desarrollo del razonamiento demostrativo, sino que también para el desarrollo del pensamiento estocástico en los estudiantes. Se argumenta para ello razones de tipo curricular, de un enfoque de la enseñanza basado en la resolución de problemas, de una manera de resolver los problemas que considera la simulación como método de resolución con contenido heurístico y, finalmente, en nuevas propuestas sobre las matemáticas que requerirá el ciudadano del siglo XXI y que incluye el análisis de datos en contextos de incertidumbre. En consecuencia, se presenta una propuesta de formación inicial del profesorado que les permita abordar tales retos.

PALABRAS CLAVE:

- *Hipótesis*
- *Conjeturas*
- *Pensamiento estocástico*
- *Resolución de problemas de probabilidad*
- *Simulación*
- *Formación del profesorado*

ABSTRACT

This paper reflects on the importance that the dialectic of hypothesis-conjectures can have, not only for the development of demonstrative thinking in students, but also for the development of stochastic thinking. It argues for curricular reasons, for an approach to teaching based on problem solving, for a way of solving problems that considers simulation as a method of resolution with heuristic content and, finally, for new proposals on mathematics that the citizen of the XXI century will require and that includes the analysis of data in contexts of uncertainty. Consequently, a proposal is presented for the training of pre-service teachers to enable them to deal with such challenges.

KEYWORDS:

- *Hypothesis*
- *Conjectures*
- *Stochastic thinking*
- *Probability problem solving*
- *Simulation*
- *Preparing teachers*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2020) *23* (1): 79-102.
Recepción: Noviembre 21, 2018 / Aceptación: Noviembre 16, 2019. DOI: 10.12802/relime.20.2313

RESUMO

Neste artigo ele reflete sobre a importância que pode ter a formulação de hipóteses e conjecturas, não só para o desenvolvimento do raciocínio demonstrativo, mas também para o desenvolvimento do pensamento estocástico de estudantes. Defende este currículo de razões, uma abordagem de ensino baseada na resolução de problemas, uma forma de resolver os problemas que considera a simulação como um método de resolução de conteúdo heurística e, finalmente, no novo as propostas em que o cidadão do século XXI exigirá e matemática, que inclui a análise de dados em contextos de incerteza. Uma proposta de formação inicial de professores permite-lhes para endereço tais desafios, portanto, é apresentado.

PALAVRAS CHAVE:

- *Hipóteses*
- *Conjecturas*
- *Raciocinio estocástico*
- *Resolução de problemas de probabilidade*
- *Simulação*
- *Formação de professores*

RÉSUMÉ

Dans cet article, il réfléchit sur l'importance que peut avoir la formulation d'hypothèses et conjectures non seulement pour le développement du raisonnement démonstratif, mais aussi pour le développement de la pensée stochastique des étudiants. Cette position est basée sur des raisons de type curriculaire, sur une approche de l'enseignement basée en la résolution de problèmes, sur un moyen de résoudre les problèmes qui considère la simulation comme une méthode de résolution avec un contenu heuristique et, enfin, sur des nouveaux suggestions sur les mathématiques qui nécessitera le citoyen du XXIe siècle et qui comprend l'analyse des données dans des contextes d'incertitude. Par conséquent, une proposition de formation initiale des enseignants est présentée pour leur permettre de relever de tels défis.

MOTS CLÉS:

- *Hypothèses*
- *Conjectures*
- *Pensée stochastique*
- *Résolution des problèmes de probabilité*
- *Simulation*
- *Formation des enseignants*

1. Introducción

Internacionalmente, cada vez más, la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático van adquiriendo una mayor presencia en los currículos de matemáticas. En particular, el pensamiento analítico se relaciona con la formulación e investigación de conjeturas matemáticas y el desarrollo y evaluación de argumentos matemáticos y demostraciones como una forma particular de expresar el razonamiento y la justificación (NCTM, 2018). El currículum español, por ejemplo, tampoco es ajeno a esta pujanza pues dispone que, en la educación primaria y secundaria, los estudiantes han de ser capaces de formular hipótesis y conjeturas y razonar con ellas. En particular, se prescribe para el área de matemáticas, particularmente, en “procesos, métodos y actitudes” y en “probabilidad y estadística” (MEC, 2014a; MEC, 2014b).

Sugerente, interesante, e incluso retador, puede resultar para el profesorado y la investigación interesada tanto en la resolución de problemas como en la educación estocástica[1] el análisis, cuidadoso e intencionado, de lo que se prescribe en esos documentos oficiales en relación con las citadas nociones. En particular, por ejemplo, el criterio con el que se evalúa la competencia de los estudiantes de educación primaria en relación con la “capacidad de formular estimaciones (conjeturas) en situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar (en términos de probabilidades) dicho resultado”, mediante el estándar “realizar conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería, …)”, junto con este otro: “resuelve(r) problemas que impliquen el dominio de los contenidos propios de estadística y probabilidad, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento, creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización”, estándares que se repiten para los estudiantes de educación primaria (MEC, 2014a p. 19393) y secundaria (MEC 20148b pp. 398 y 413).

El profesorado puede preguntarse: ¿cómo puede hacerse esto si los manuales escolares no parece que lo faciliten? Una primera respuesta puede buscarse en los trabajos de Lakatos (1976) y Polya (1966) con los llamados problemas de encontrar-probar, a los que Fiallo y Gutiérrez (2017) llaman de conjeturar-demostrar, pero con la diferencia notable de que los problemas de naturaleza estocástica se pueden considerar de conjeturar-argumentar para convencer de la bondad de una conjetura y no para demostrar su verdad, formalmente hablando, como es el caso de aquellos problemas.

El nivel de exigencia que estas prescripciones curriculares representan para los docentes, su escasa preparación en este sentido (Huerta, 2018), tanto inicial como continua, la falta de recursos en los que apoyarse, incluidos los libros de texto actuales que no ayudan al profesorado a lograr que sus alumnos alcances dichas competencias, la resolución de problemas rutinarios, el modelo de enseñanza mecanicista con el que se suele enfocar la enseñanza de la probabilidad y la estadística, nos anima a reflexionar sobre qué formación inicial y continuada deberían tener los futuros profesores para que se implicaran en otra forma de enseñanza de la probabilidad en la escuela obligatoria. Otra forma en la que,

1 Usaremos el término estocástico para referirnos a una forma de pensar que combina ideas estadísticas y probabilísticas que permita tomar decisiones y asumir riesgos, de una manera razonable, en situaciones de incertidumbre (Schupp, 1989).

basada en la resolución de problemas, se favoreciera el uso y la formulación de hipótesis, la activación del razonamiento plausible (Polya, 1966) para la elaboración de conjeturas razonables y el diseño de procedimientos que permitan argumentar sobre la bondad de la conjetura formulada. Otra forma de enseñar probabilidad ligada, en fin, a lo que es propio de la actividad matemática. En este trabajo, reflexionamos sobre todo ello y describimos una forma de llevar a cabo una propuesta de enseñanza en el sentido indicado en los párrafos anteriores. Dicha propuesta se refiere a la formación del profesorado, pero, de ella, se puede inferir cuál seria en la educación obligatoria.

2. Hipótesis y conjeturas en la literatura

En la literatura sobre Educación Matemática, hasta donde sabemos, hay muy pocos trabajos en los que se preste atención, explícitamente, a la dialéctica hipótesis-conjetura en investigaciones que no sean sobre la demostración en matemáticas. En este sentido, Furinghetti, Olivero y Paola (2010) llevan a cabo un experimento de enseñanza en el que los autores reflexionan sobre las dificultades que encuentran tanto profesores como estudiantes para el acceso a la demostración en la resolución de problemas abiertos sobre conjetura-demostración. En un sentido parecido, Fiallo y Gutiérrez (2017) examinan qué aspectos cognitivos ponen en juego los estudiantes en problemas del mismo tipo: primero, durante la elaboración de una conjetura y, segundo, demostrando que la conjetura es cierta, matemáticamente cierta, lo que exige la elaboración de una demostración formal. De Villiers y Heideman (2014) muestran lo alejada que está la actividad matemática de la actividad escolar con las matemáticas, señalando que, por ejemplo, aquella no siempre elabora conjeturas ciertas, sino que, a menudo, son falsas, por lo que tan importante es que se descarte una conjetura por falsa como que se acepte porque se demuestra que es cierta. Pero, se lamentan de que la enseñanza no favorezca este aspecto del quehacer matemático, mostrando, generalmente, el producto final, matemáticamente pulido, sin mostrar su evolución, ni tampoco favorezca la formulación de conjeturas refutables como forma de cultivar el pensamiento crítico. Muestran, no obstante, la esperanza de que, tanto en la educación obligatoria como en niveles superiores, a los estudiantes se les dé la oportunidad de formular sus propias conjeturas y después probarlas o refutarlas. En la misma línea se sitúa Lampert (1990), para quien la elaboración de una conjetura consciente (en el sentido de Lakatos, 1976) supone asumir un riesgo, requiere admitir que las hipótesis consideradas por la persona que elabora la conjetura están sujetas a revisión, que lo percibido puede ser algo limitado y que las conclusiones pueden haber sido inapropiadas. En esta línea se sitúa este trabajo, en el que la resolución de problema de probabilidad, que hemos llamado de conjeturar - argumentar para su credibilidad o fiabilidad, proporcionan una buena oportunidad para que los estudiantes elaboren sus propias conjeturas con cierto riesgo, pero controlado por la propia resolución del problema.

Todavía mayor es la escasa presencia de la dialéctica hipótesis - conjetura en la literatura sobre educación estocástica, en las distintas formas en las que se expresen una o la otra. La presencia de estos términos suele ir ligada a la actividad matemática en el que se desarrolla. Así, en procesos de modelización aparecen bajo el significado de hipótesis de trabajo, como en Chaput, Girard & Henry (2011). En procesos de simulación bajo el significado de conjetura, como en Shaughnessy (1983), Benson y Jones (1999) o Zimmerman (2002), por ejemplo. Huerta (2018) señala la necesidad de introducir esta dialéctica para los procesos de resolución de problemas de probabilidad, en oposición al escaso papel que en las investigaciones anteriores le otorgan a esta dialéctica y que, siguiendo a De Villiers y Heideman (2014), consideramos que debería tener en la construcción del pensamiento estocástico y matemático. En efecto, en el juego hipótesis - conjetura, y la consiguiente argumentación en favor o detrimento de ésta, creemos que cobra sentido el proceso de modelización o de simulación que tiene por fin justificar la bondad de la conjetura, y cuánta bondad muestra en términos de probabilidades. Poca investigación hay en este sentido y pocos enfoques para la enseñanza basados en este juego, a pesar de que autores como Pratt (2011) y Pfannkuch (2018) sugieran cambios hacia una idea de probabilidad revisada y un currículum para el siglo XXI.

En efecto, Pratt (2011), tomando en consideración la idea de “ansiedad epistemológica”, es decir, una metáfora para expresar la ansiedad que le crea a los estudiantes el aprendizaje de un concepto, el de probabilidad, con más de un significado: clásico o teórico, frecuentista o empírico y subjetivo, sostiene que las propuestas curriculares actuales no son capaces de aliviarla sino que la empeoran. Esas propuestas se basan, casi exclusivamente, en la resolución de problemas rutinarios con monedas, dados, ruletas o bolas en sacos opacos. La relación entre los distintos significados de la probabilidad se reduce a experimentar/simular con esos materiales con el objetivo de encontrar el límite de las frecuencias relativas, como si éste existiera. La probabilidad subjetiva no suele tener presencia en esas propuestas. Dicha ansiedad también puede extenderse al profesorado encargado de su enseñanza, preso de dichas propuestas, con obvias consecuencias en la ansiedad de los estudiantes. Pratt (2011) propone considerar la probabilidad como una herramienta para la modelización de fenómenos inciertos, y que en su enseñanza se tengan en cuenta las propuestas actuales en educación estadística como, por ejemplo, el análisis exploratorio de datos y el razonamiento inferencial informal

(Makar y Rubin, 2014), que permite ampliar su acceso al razonamiento estocástico ya desde edades muy tempranas (Martínez y Huerta, 2015), y la simulación como herramienta para el estudio del comportamiento de fenómenos inciertos.

Por otra parte, Pfannkuch (2018), en la línea de Pratt (2011), imagina un enfoque nuevo del currículum de estadística que permitiera una formación adecuada del ciudadano del siglo XXI. A los estudiantes se les debería proporcionar experiencias estadísticas esenciales, aquellas que tienen que ver con: a) el ciclo completo de investigación estadística que va desde el problema original a la conclusión, b) la exploración del modelo de probabilidad en construcción sujeto a las hipótesis formuladas y c) la evaluación de los argumentos sobre la fiabilidad / credibilidad de una conjetura mediante un razonamiento inferencial, formal o informal. Para el acceso a dichas experiencias, la simulación se considera un elemento fundamental en los procesos de modelización de la probabilidad. Pfannkuch (2018) recomienda que la modelización de la probabilidad sea considerada un aspecto importante del nuevo curriculum que imagina y para la investigación en educación estocástica. La propuesta que presentamos en este trabajo va en la línea sugerida por estos autores.

3. Fundamentación teórica de la propuesta

3.1. *Sobre las nociones de hipótesis y conjetura en el razonamiento probabilístico*

En opinión de algunos autores, por ejemplo, Borovcnik y Kapadia (2018), se asegura que tanto la investigación como el profesorado no disponen todavía de un modelo convincente que permita observar y analizar el razonamiento probabilístico de los estudiantes. Es un modelo que está en construcción, dicen, por lo que su consideración es, todavía, un problema abierto de investigación. En Batanero et al. (2016) se describe un conjunto de categorías que constituyen un modelo incipiente con el que caracterizar dicho razonamiento en términos de capacidades. Entre esas categorías hay una que incluye el análisis previo de las condiciones —de una situación aleatoria dada— que permite derivar las hipótesis[2] necesarias para su modelización. Justo es en esta categoría en la que este trabajo pretende hacer aportaciones, resaltando la importancia de la formulación

2 En lengua inglesa se usa la expresión *assumptions*, que hemos traducido aquí por hipótesis y no por conjetura como se sugiere en los traductores habituales. En su definición enciclopédica aparece hipótesis y conjetura como palabras sinónimas. El sentido en el que parece que se considera en el modelo de Batanero et al. (2016) es el mismo que el de hipótesis de trabajo en Chaput et al. (2011).

de hipótesis y conjeturas para un mejor desarrollo del razonamiento probabilístico y estocástico.

Resultados de investigación sugieren que una de las causas que podrían explicar una asignación poco fiable de la probabilidad de ocurrencia de un suceso, o un valor esperado de una variable aleatoria, es la presencia en el razonamiento del llamado sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992; Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 1998; Cardeñoso, Moreno, García - González y Jiménez - Montana, 2017; Begué, Batanero y Gea, 2018), es decir, considerar la hipótesis, seguramente arbitraria en el sentido de Poincaré (1992), o incluso estrafalaria para cualquier otro observador, de que todos los sucesos elementales del espacio muestral son igualmente posibles y basándose en ésta elaborar una conjetura sobre una probabilidad o un valor esperado poco esperable, poco razonable o poco o nada creíble para el observador, aunque sí lo sea para quien elabora dicha conjetura.

En la visión clásica de la probabilidad, bajo la hipótesis de la equiprobabilidad[3], la Regla de Laplace proporciona una metáfora (Spiegelhalter y Gage, 2014) para expresar la conjetura de que todos los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, usando para ello la razón del número de casos favorables en relación con el número de casos posibles. La hipótesis se formula contando con el principio de indiferencia o de la razón insuficiente para avalarla. Así que, desde el punto de vista del razonamiento probabilístico, los sujetos, aún actuando bajo del sesgo de la equiprobabilidad, actúan dentro de la lógica impuesta por la regla de Laplace y por el razonamiento subyacente, sólo que es discutible o poco razonable el uso que éstos hacen del principio de indiferencia. En consecuencia, desde el punto de vista didáctico, el sesgo de la equiprobabilidad puede ofrecer una buena oportunidad de aprendizaje del proceso y del significado de asignar la probabilidad a un suceso, si se entiende ésta como una forma de medir la credibilidad de la mejor conjetura que se puede elaborar sobre la ocurrencia del suceso, conjetura que se elabora sujeta a determinadas hipótesis previas y a las reglas del razonamiento plausible (Polya, 1966). Si la hipótesis aceptada es la de la equiprobabilidad entonces la Regla de Laplace permite cuantificar la mejor conjetura disponible. Si, por el contrario, la hipótesis formulada es rechazada, entonces la Regla de Laplace no es útil y se deberá recurrir a otros métodos y procedimientos que permitan obtener una medida de la credibilidad o fiabilidad de una conjetura. Esto es, requerirá plantear y resolver un problema, tal y como nos advierte Polya (1966, p. 356). Pero las hipótesis no deberían estar ausentes, ni tampoco estar implícitamente mencionadas, ni ser

3 Hipótesis que recibe otros nombres, como la "hipótesis equiazarosa" en Popper (1977, p. 157) o teórica en Eichler y Vogel (2014), ligada ésta a la noción de probabilidad "a priori" o probabilidad clásica.

impuestas, como habitualmente ocurre en la enseñanza. Las hipótesis deberían aflorar, discutirse, acordarse y, si fuera el caso, contrastarse. Para ello, los problemas se deben concebir como problemas de (hipótesis) conjetura-credibilidad/fiabilidad, diferentes en su desarrollo final de los problemas de encontrar-probar de Laktatos (1976) y Polya (1966) o los de conjeturar-demostración de Fiallo y Gutiérrez (2017), con quienes comparte la dialéctica hipótesis-conjetura, pero se distancia del tratamiento sobre la verdad de la conjetura. De esto hablaremos más adelante.

Pero, ¿qué se entiende y qué deberíamos entender por hipótesis y conjetura en el contexto de esta propuesta? Buscamos respuestas en el siguiente apartado.

3.2. *Hipótesis, conjeturas y el arte conjetural*

Por el sentido del uso cotidiano de las palabras hipótesis y conjetura nos parece que, en muchas ocasiones, se usan como sinónimas. Este uso no es ajeno al profesorado de matemáticas en formación, ya sea de educación primaria o de educación secundaria, lo que les convierte en términos confusos cuando su significado se ha de considerar restringido al contexto de hacer matemáticas. En efecto, en un trabajo de investigación en curso con profesorado de educación obligatoria, 102 alumnas y alumnos en total, de los cuales 70 son de último año de los grados de educación infantil y primaria (EIP) y 32 del máster de secundaria (MES), aproximadamente el 56% de ellos (64,3% de EIP y 37,5% de MES) consideran que la mejor opción, en un test de respuesta múltiple, a su idea sobre la noción de hipótesis es aquella que la liga a la noción de conjetura, frente a un 28%, aproximadamente (21,4% y 43,8%, respectivamente, en ambas muestras), que la liga con la de ser proposiciones matemáticas consideradas verdaderas que anteceden al razonamiento matemático (Martínez, Huerta y González, 2018). Pero, para la noción de conjetura no se produce la reciprocidad. El porcentaje que vincula esta noción con la de hipótesis es, aproximadamente, del 12% (10% y 15,6%, respectivamente), pero del 73,5% (77,1% y 65,6%, respectivamente) que la vincula con el significado de una probabilidad subjetiva. Estos datos parecen confirmar la existencia de más de un significado de estas nociones para los futuros profesores lo que, a su vez, anticipa dificultades en la comprensión del proceso de resolución de los problemas que hemos llamado de (hipótesis) conjetura-fiabilidad/credibilidad, es decir, problemas que requieren considerar hipótesis de partida, construir conjeturas, dependientes de las hipótesis formuladas, y estudiar la fiabilidad o credibilidad de éstas en términos de probabilidades, como veremos más adelante, construyendo argumentos convincentes. Parece pues necesario revisar los significados de estos términos desde diferentes puntos de vista, ya sea enciclopédico, filosófico, epistemológico o educativo, con el fin de interpretar en qué sentido parece que el profesorado en formación piensa, inicialmente, sobre estas nociones y en qué sentido deberían usarse para los problemas que proponemos para la enseñanza.

En su significado enciclopédico, una hipótesis es una "suposición de algo posible o imposible para sacar de ello una consecuencia" mientras que conjetura es un "juicio que se forma de algo por indicios u observaciones" (DRAE, www.rae.es), lo que anticipa, por sí mismo, una posible diferencia entre los significados de ambos términos. Hipótesis se presenta como una suposición sobre algo y conjetura como juicio que se forma sobre algo. En particular, nos interesa el significado de la noción hipótesis de trabajo que el DRAE define como aquella "hipótesis que se establece provisionalmente como base de una investigación".

Ferrater (1965), define hipótesis como "un enunciado o serie articulada de enunciados, que antecede a otros constituyendo su fundamento" (p. 846). Esta definición permite intuir una relación entre hipótesis y conjetura en el sentido en el que nos interesa aportar al razonamiento probabilístico: la hipótesis como fundamento de una conjetura, la hipótesis de la equiprobabilidad como fundamento para conjeturar que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Sin dicha hipótesis como fundamento la misma conjetura pierde credibilidad.

En las matemáticas formales las hipótesis se han relacionado con otros términos como fundamento, principio, postulado, supuesto o axioma (Ferrater, 1965, p. 846). Así ocurre, por ejemplo, con la definición formal de probabilidad de von Mises, basada en las hipótesis sobre los colectivos, o en la definición axiomática de Kolmogórov (Saldanha y Liu, 2014), o en cualquier otra de las muchas definiciones axiomáticas existentes cuya consideración es estrictamente necesaria en razonamientos de tipo demostrativo. Pero no es el tipo de razonamiento éste por el que abogamos, sino por el razonamiento plausible y estocástico. Así, consideramos la posición de Kant respecto de las hipótesis cuando afirma que las hipótesis no deben ser mera opinión sino fundarse en la posibilidad del objeto (Ferrater, 1965, p. 847). En este caso las suposiciones son verdaderas —y admisibles— hipótesis. Además, consideramos las hipótesis como una especie de andamiajes conceptuales, es decir, como hipótesis de trabajo en el sentido que le da Ferrater (1965, p. 884). La función de estas hipótesis, dice Ferrater, es ayudar a comprender mejor los fenómenos de que se trata. La hipótesis no es confirmada (o invalidada) por los fenómenos, pues de lo contrario no sería una hipótesis, pero no es totalmente independiente de los fenómenos pues de lo contrario no ayudaría en nada a comprenderlos. La hipótesis de la equiprobabilidad, como hipótesis de trabajo, nos ayuda a entender la Regla de Laplace.

Polya (1966) habla de hipótesis estadística en la resolución de problemas de probabilidad. Estas hipótesis pueden entenderse como un conjunto de hipótesis de trabajo. Así, por ejemplo, si lanzamos un conjunto de dados y exploramos la probabilidad de que haya una mayoría de números mayores que 4, la hipótesis estadística de que los dados se van a considerar justos implica dos hipótesis de trabajo, una que se refiere al comportamiento de cada uno de los dados, a quienes se les puede considerar (por hipótesis) equiprobables y otra, se refiere al comportamiento del conjunto de los dados durante el experimento aleatorio, considerando que sus resultados son (por hipótesis) independientes. Una hipótesis estadística no se juzga sino es el caso, pero, cuando bajo esas hipótesis el comportamiento esperable de un fenómeno aleatorio no ocurre, o bien ocurre con muy poca credibilidad, entonces es licito estudiar dichas hipótesis. Lo esperable es así una conjetura sujeta a nuevas hipótesis que son la reformulación de las iniciales.

Polya (1966), como Bernoulli[4] (1987/1713), asegura que "todos nuestros conocimientos consisten en conjeturas, excepto el de las Matemáticas (formales)" (p. 13). Pero, recalca que "hay conjeturas y conjeturas. Unas que merecen respeto y confianza y otras que no merecen ni confianza ni respeto... y, entre unas y otras, se dan toda clase de conjeturas, presentimientos e intuiciones" (p. 13). Afirma, además, que el conocimiento matemático se asegura mediante el razonamiento demostrativo, pero las conjeturas se apoyan por medio del razonamiento plausible. El razonamiento demostrativo establece la verdad, matemática, de una conjetura. El razonamiento plausible proporciona la credibilidad necesaria para la consideración de una conjetura fiable. Este tipo de razonamiento, el plausible, es el que se mostrará especialmente útil en la resolución de problemas de probabilidad, en los que lo que se busca no es demostrar la verdad de ningún enunciado probabilístico, ya sea numérico o no numérico, en el sentido de Popper (1977, p. 138), sino la fiabilidad, credibilidad o, incluso, la verosimilitud de una conjetura como respuesta a un problema formulado en un contexto de incertidumbre mediante un razonamiento estocástico.

Entendemos por conjeturar como Bernoulli (1713), esto es, conjeturar sobre algo es, también, medir su probabilidad[5], y por resolver un problema de

4 *Ea quae certa sunt et indubia, dicimur scire intelligere: caetera omnia conjicere tantum vel opinari* (Bernoulli, 1713, p. 213). "Decimos que sabemos o comprendemos lo que es cierto e indudable y que conjeturamos u opinamos sobre todo lo demás".

5 *Conjicere rem aliquam est metiri illius probabilitatem.*

probabilidad en el mismo sentido que el Arte de Conjeturar o Estocástica, es decir, traduciendo con cierta libertad, como el arte de medir como mejor podamos las probabilidades exactas de las cosas[6], con el fin de que podamos siempre elegir o seguir en nuestros juicios y acciones aquello que se aprendiere de manera mejor, preferible, escrupulosa y más reflexionada[7] (traducción toma de Fernández y Rodríguez, 2015)

Desde el punto de vista epistemológico, Bunge (2013) distingue entre ciencias formales (las matemáticas) y ciencias factuales (las ciencias experimentales). De esta forma, también distingue entre el sentido de uso del término hipótesis en una u otra ciencia. Hipótesis, en las ciencias formales, como postulados o axiomas surgidos de la experiencia y como puntos de partida en el proceso deductivo. Solo las conclusiones (teoremas) obtenidas a partir de los axiomas han de mostrarse matemáticamente verdaderas, no los axiomas mismos que pueden elegirse a voluntad y esto se habrá logrado si se respeta la coherencia lógica "esto es, si no se violan las leyes del sistema de lógica que se ha convenido en usar" (Bunge, 2013, p. 13). Pero, resolver un problema de probabilidad no consiste precisamente en llegar a unas conclusiones sobre la probabilidad de un suceso, o sobre el valor esperado de una variable aleatoria, que, bajo ciertas hipótesis, deban mostrarse matemáticamente verdaderas, sino razonablemente creíbles o fiables en el contexto particular en el que se obtienen. Así pues, las hipótesis no pueden elegirse a voluntad, sino que han de ser elegidas de un modo tal que permitan ser verificables por la experiencia, como la hipótesis de la equiprobabilidad, por ejemplo. En consecuencia, el sentido de uso de la hipótesis en la resolución de problemas de conjeturar-argumentar comparte significados con las ciencias formales, como axiomas o postulados, y con las ciencias factuales como conjeturas. La simulación como método de resolución de problemas (Huerta, 2015) permite transformar un problema desde la ciencia formal a la ciencia factual en la que se puede experimentar como un problema simulado. Las hipótesis del problema original, que lo modeliza, se traducen en hipótesis estadísticas requeridas para su simulación. Las conjeturas formuladas en el problema original, finalmente, se convierten en hipótesis verificables por la experiencia al resolver los problemas simulados.

6 *Ars Conjectandi sive Stochastice nobis definitur ars metiendi quam fieri potest exactissime probabilitates rerum.*

7 *Eo fine, ut in judiciis et actionibus nostris semper eligere vel sequi possimus id, quod melius, sitius, tutius aut consultius fuerit deprehensum; in quo solo omnis philosophi sapientia et Politici prudentia versatur.*

3.3. *Hipótesis, conjeturas y la resolución de problemas de probabilidad. Base para una propuesta de enseñanza*

Polya (1966, p. 171) distingue entre problemas rutinarios y problemas no rutinarios. Los problemas de probabilidad, en el contexto de los juegos de azar equitativos, en el que la consideración de la hipótesis de la equiprobabilidad es muy razonable y la regla de Laplace permite asignar probabilidades a los sucesos, pueden llegar convertirse en problemas rutinarios en la enseñanza. Siguiendo a Polya, no diremos que los problemas rutinarios de probabilidad no son útiles para la enseñanza, sino todo lo contrario, pero sí afirmamos, como él, que limitar la enseñanza de la probabilidad a este tipo de problemas es rebajar su aprendizaje a unos niveles escasamente útiles y formativos. Un ejemplo de su potencial puede verse en Minyana (2018). Esta autora, siguiendo a Huerta (2018), desarrolla un proceso de enseñanza con estudiantes de 12-13 años basado en la resolución de un problema, de los que hemos llamado de hipótesis-conjetura-argumentación, el Problema de la Cueva (Huerta, 2002), con el fin de desarrollar lo que aquí entendemos como pensamiento estocástico. En el anexo puede verse la versión escolar de este problema. La autora anima a sus alumnos a considerar no sólo las hipótesis formuladas por el problema sino también aquellas que se requieren para su abordaje, las hipótesis estadísticas de la equiprobabilidad de elección de las puertas y de la independencia de las pruebas, si el proceso aleatorio termina después de más de una prueba. Las preguntas se formulan con el fin de que los alumnos razonen sobre ellas elaborando sus conjeturas, que son discutidas y valoradas en su credibilidad o fiabilidad. La simulación será el método que usará para que sus alumnos resuelvan sobre ello y decidan qué conjetura resulta más fiable o creíble tras el análisis exploratorio de los datos producidos por la simulación y las correspondientes inferencias informales realizadas a partir de la información que proporciona.

En efecto, un enfoque para la enseñanza de la probabilidad y la estadística como el que se infiere de lo que proponemos en este trabajo no podría tener éxito sin que haya un profesorado bien preparado para ello. En este sentido, Huerta (2015, 2018) propone un modelo de formación basado en la resolución de problemas con intención didáctica, en el que el profesorado en formación adquiere un doble papel frente a los problemas que se les propone: a priori como resolutores de los problemas y, a posteriori, como futuro profesorado que encuentra en la resolución de los problemas que ha resuelto un contexto idóneo para producir enseñanza en probabilidad y estadística. En este modelo, efectivamente, los problemas se conciben como problemas de hipótesis-conjetura-credibilidad/fiabilidad. En la resolución de estos problemas se combinan aspectos procedimentales como: a) una manera heurística de resolver problemas, b) el uso de la simulación como método de resolución de problemas de probabilidad con contenido heurístico, y c) el análisis didáctico posterior del proceso de resolución como medio para cultivar una cierta mirada profesional (Llinares, 2018) de los problemas, con el fin, entre otros, de explorar qué oportunidades de aprendizaje proporcionaría la resolución de dichos problemas, considerados éstos como contextos para la enseñanza en la escuela primaria y secundaria.

El método de resolución propuesto por Huerta (2015, 2018), en sus primeros pasos, requiere que se formulen un conjunto de hipótesis, estadísticas en el sentido de Polya (1966), con el fin de que la situación de incertidumbre original pueda ser abordada, modelizada. Sujeta a estas hipótesis, el método propone que el resolutor elabore alguna conjetura sobre la pregunta del problema cuya fiabilidad o credibilidad se cuestiona a continuación. La cuestión de la fiabilidad o credibilidad de una conjetura se ve inmersa en un proceso de razonamiento plausible con el fin de apoyarla, refutarla o reformularla. Implica, además, un proceso de investigación en el que la simulación o experimentación pueden ser los instrumentos necesarios para la formulación de la mejor conjetura. Se enmarca, además, en un enfoque más general sobre la enseñanza de las matemáticas llamado *inquiry-based learning* (IBL) (Maaβ and Doorman, 2013), entendido como una forma de enseñar y unas prácticas de aula en la que son los propios estudiantes los que preguntan y ponen cuestiones, exploran y evalúan (p. 887).

Se puede inferir entonces que el enfoque para la enseñanza de la probabilidad, en todos los niveles, esté basado en este juego hipótesis-conjetura propio del quehacer matemático, con la diferencia de que, en un contexto de incertidumbre, dada una hipótesis o un conjunto de ellas conducente a una conjetura, de ésta no se predica sobre su verdad, lo que implicaría usar un razonamiento demostrativo (Polya, 1966, p. 13), sino sobre su fiabilidad o credibilidad en términos de probabilidades, implicando el uso del razonamiento plausible. Con esta sugerencia se pretende tratar con otros enfoques alternativos a los actuales sobre la enseñanza de la probabilidad y, en consecuencia, de la necesidad de formación de los profesores en esta dialéctica, formación sobre la que la investigación está de acuerdo en que es bastante deficitaria (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016).

3.4. *El método de resolución de problemas de probabilidad por simulación*

El método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (en adelante MRPPS) tiene sus referentes en la propia experiencia del autor y en trabajos anteriores con los que se relaciona y comparte ideas relevantes. Así, a parte de lo que ya se ha discutido en apartados anteriores en relación con las nociones de hipótesis y conjeturas, consideradas como elementos fundamentales de la actividad matemática necesaria para la resolución de los problemas de probabilidad, comparte, además, con otros autores aspectos procedimentales necesarios durante el proceso de resolución. Así, con Beth (1989) comparte la propuesta de usar la simulación como un método para modelizar problemas realistas, pero que aquí la reinterpretamos como un método de resolución de problemas con contenido heurístico; con Schup (1989) compartimos su idea de circuito estocástico que la interpretamos como el esquema básico del proceso de resolución de problemas en el que la simulación es usada como una herramienta heurística que transforma el problema original en un problema simulado cuya resolución permite obtener una respuesta al primero. Comparte con Wild y Pfannkuch (1999) la idea de razonamiento estadístico implicado en los procesos empíricos de investigación, pues la respuesta al problema simulado requiere de dicho razonamiento, aplicado en el análisis de los datos a partir del diseño e implementación de una simulación cuya finalidad es obtener información sobre el comportamiento de un sistema en un contexto de incertidumbre. Finalmente, comparte con Spiegelhalter y Gage (2014) la idea de referirse a la resolución de problemas de probabilidad por simulación como un manifiesto para la enseñanza de la probabilidad y la estadística en todos los niveles educativos y en la formación de profesores, con un enfoque basado en el IBL (Maaβ and Doorman, 2013) y con el anhelo de un enfoque distinto de la enseñanza de la probabilidad y estadística al actual (Pfannkuch, 2018 y Pratt, 2011).

En efecto, parafraseando a Bernoulli, hemos calificado el Método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (MRPPS) como el *arte* de hacer las cosas necesarias para elaborar la mejor conjetura posible sobre la realización o no de un fenómeno incierto o sobre el comportamiento de una variable aleatoria. El MRPPS está descrito por medio de 8 pasos, cada uno de ellos con una finalidad claramente establecida y con un tipo de razonamiento requerido. Así, el proceso de resolución comienza con el necesario análisis del enunciado del problema (paso 1). El método identifica a éste como el problema original ya que el resolutor se encontrará, a lo largo del proceso de resolución, con la necesidad de resolver algún problema intermedio, a quien el método le califica de problema simulado, fruto de la simulación. Este análisis inicial permite pensar sobre dos aspectos importantes: la necesidad o no de formular hipótesis iniciales que permitan abordar la resolución del problema y la elaboración de conjetura razonables sobre lo que es preguntado en el problema (paso 2). El riesgo de que se elaboren conjeturas arbitrarias es bastante alto al comienzo del proceso de resolución pues, como dice Poincaré, (1992), la ignorancia sobre las cosas y sus causas fuerzan a ello, más aún en contextos de incertidumbre. Durante los pasos 1 y 2 el protagonista es el razonamiento plausible y su objeto la modelización del problema. Minyana (2018) prueba que este razonamiento se activa en niños/as de 12-13 años, quienes elaboran de manera intuitiva conjeturas razonables sobre la ocurrencia de sucesos o sobre valores esperados, tanto en procesos aleatorios discretos, lanzamiento de dos dados, como en procesos estocásticos de Markov absorbentes (Gordon, 1997) (Problemas 2, 3 o 4 en el anexo).

En los primeros pasos del método (paso 3), descrito aquí, por el momento, sin intención didáctica, la conjetura, ligada a la hipótesis o al conjunto de hipótesis sobre la que se sustenta, se somete a juicio sobre su credibilidad, fiabilidad, etc. El resolutor tiene, entonces, dos caminos para construir argumentos que den cuenta de la credibilidad o fiabilidad de la conjetura formulada. Por un lado, identificar un modelo teórico, o construir uno si no existe, o no lo encuentra, para las hipótesis consideradas, que le permita obtener una respuesta teórica al problema y valorar así la bondad de su conjetura inicial al compararla con la respuesta teórica, considerada como la mejor de las conjeturas para el conjunto de hipótesis formuladas. Por otro, experimentar/simular el problema (paso 4) con el fin de que un nuevo problema (el problema simulado), situado en un contexto distinto al del problema original, cuya resolución (paso 5) le permita elaborar argumentos razonables con los que discutir la credibilidad o fiabilidad de la conjetura surgidos del análisis de los datos y de llevar a cabo inferencias sobre ellos y, si es el caso (paso 7) , elaborar una nueva conjetura con un mayor grado de credibilidad o fiabilidad que la inicial, lo que convierte al método en un método recursivo (paso 8). La intención didáctica del método se presenta al futuro profesorado en el paso 6. En él se plantea si las argumentaciones construidas a partir de inferencias realizadas en dos muestras de datos obtenidas de manera independiente, es decir, fruto de simular el problema con dos generadores de azar distintos, son dependientes de éste dando lugar a conclusiones distintas o no.

4. Concreción en una propuesta para la formación inicial del profesorado

La propuesta que presentamos aquí se articula alrededor de la resolución de problemas como los que se muestran a modo de ejemplo en el anexo. El orden en el que se van a describir es intencional para este trabajo, al mostrar que cada nuevo problema exige del resolutor un mayor nivel de competencia en el método de resolución del problema, lo cual, desde el punto de vista de su formación como profesor, permite enriquecer la mirada profesional sobre el problema al identificar posibles trayectorias de aprendizaje y la posibilidad así de fomentar el desarrollo del razonamiento estocástico, así como el papel de gestor del proceso de resolución del problema en el aula.

4.1. *Objetivos didácticos de la propuesta*

Los problemas que constituyen esta propuesta de formación de profesores comparten los siguientes objetivos.

1. Objetivos generales. Que el profesorado en formación adquiera competencias tanto en la resolución de problemas de probabilidad como actividad matemática y en la consideración de la resolución de problemas como contexto de enseñanza. En particular:

    a. Introducir al profesorado en el método de resolución de problemas de probabilidad por simulación.

    b. Introducir al profesorado la resolución de problemas como contexto de enseñanza para la probabilidad y la estadística y el método de resolución como metodología de enseñanza.

2. Objetivos específicos.

    a. Relacionados con el primer objetivo general. Que el profesorado en formación adquiera un uso competente de las hipótesis y conjeturas en el razonamiento estocástico, tanto en sus significados relacionados con las ciencias formales como con el de las ciencias factuales. En particular, que el profesorado en formación adquiera competencias en:

        i. La dialéctica hipótesis-conjeturas en la actividad matemática.

        ii. La formulación de las hipótesis necesarias que permiten abordar el problema desde un punto de vista matemático.

        iii. La elaboración, mediante el uso del razonamiento plausible, de tantas conjeturas como sean necesarias en respuesta a las preguntas formuladas en el problema. Dependencia de las conjeturas de las hipótesis consideradas.

        iv. Los métodos de verificación de conjeturas. Reconocimiento de que medir la credibilidad / fiabilidad de una conjetura en un contexto de incertidumbre es, también, una actividad propia de las matemáticas.

        v. La simulación como un método con el que poder estudiar la credibilidad o fiabilidad de las conjeturas que se elaboran en un contexto de incertidumbre.

b. Relacionados con el segundo objetivo general. Que el profesorado en formación vaya construyendo una mirada profesional cada vez más satisfactoria sobre el potencial de la resolución de problemas de probabilidad por simulación como contexto de enseñanza y del método de resolución con contenido heurístico como una metodología de enseñanza. En particular,

    i. El reconocimiento del potencial del análisis inicial de la situación problemática para que el alumnado reconozca la necesidad de formular hipótesis iniciales con el fin de que el problema sea tratable matemáticamente.

    ii. El reconocimiento de que es posible desarrollar competencias en el alumnado de educación primaria y secundaria en relación con la formulación de hipótesis y conjeturas, como se prescribe en sus respectivas directrices curriculares.

    iii. El reconocimiento de que los estudiantes de niveles inferiores pueden ser capaces de construir argumentos sobre la fiabilidad de las conjeturas formuladas como actividad propia de quehacer matemático.

    iv. El reconocimiento de que la simulación como un método de resolución de problemas realistas permite abordar problemas cuya complejidad teórica los haría inabordables en los niveles educativos en los que tienen competencias profesionales.

    v. El reconocimiento de la riqueza de significados que los conceptos de probabilidad, variable aleatoria y esperanza matemática de una variable aleatoria adquieren en aplicación del MRPPS a la resolución de problemas de probabilidad.

4.2. *La propuesta de problemas. Un ejemplo*

En la tabla siguiente (TABLA I) se describen características de problemas que pueden formar parte de una propuesta como la nuestra. Obviamente, el número de problemas no es lo que la caracteriza, pues este puede variar en función de los objetivos que se persigan, la disponibilidad, etc. sino el método usado para su resolución.

TABLA I
Características de los problemas propuestos en la formación de profesores

Variables: HT = Hipótesis teóricas; C = Conjeturas plausibles; MT = Modelo teórico; MR = Medio de representación; ME = Modelo empírico; P = Significados de la probabilidad; E = significado de la esperanza matemática.

Valores: E / I / P = equiprobabilidad (E) / Independencia de las pruebas (I) / Formuladas en el problema (P); PCI = Probabilidad compuesta de pruebas independientes; CMA = Cadena de Markov absorbente; Ex = Experimentación; S = Simulación; T / P / S = Significado teórico (T) / Significado Frecuencial (F) / Significado Subjetivo (S); VM = Valor medio o promedio de un conjunto de datos.

Problema	*HT*	*C*	*MT*	*MR*	*ME*	*P*	*E*
Piedra - Papel - Tijera	E / I	Existe / No existe estrategia.	PCI	Árbol	Ex	TFS	
Parchís	E / I	*n* intentos	CMA	Grafo	S		VM
Colecciones (con limitaciones)	E / I	Sí / No	PCI	Árbol	S	TFS	
Colecciones (sin limitaciones)	E / I	*n* intentos	CMA	Grafo	S	TFS	VM
Caza de patos	E / I	n supervivientes / difícil / fácil sobrevivir	Bi (n, p)	Árbol	S	TFS	VM
El problema de la cueva (con limitaciones)	E / I / P	Difícil / fácil salir. Salen *n* personas. Muchos / pocos intentos	PCI	Árbol	S	TFS	
El problema de la cueva (sin limitaciones)	E / I / P	Siempre se sale. Salen muchos / *n* / todos. Mucho / poco tiempo	CMA	Grafo	S		VM

Todos los problemas propuestos son abordables bajo las hipótesis teóricas iniciales de la equiprobabilidad y la independencia de las pruebas, aunque no es una condición *sine qua non*. Así, por ejemplo, el problema de Piedra-Papel -Tijera comienza abordándose bajo estas hipótesis que son abandonadas en dudar de que el comportamiento de los humanos al elegir al azar entre diferentes posibilidades se pueda describir mediante esas hipótesis. En consecuencia, el problema planteado para estudiar la fiabilidad de la conjetura formulada se ha de abordar de un modo empírico sin hipótesis teóricas previas.

Todos los problemas, excepto el problema de Piedra-Papel-Tijera, requieren de la simulación para estudiar la fiabilidad de conjeturas sobre la probabilidad de ocurrencia de un suceso y/o el valor esperado de una variable aleatoria. Esto permite considerar a lo largo del proceso de resolución los distintos significados de la probabilidad. Se parte, por ejemplo, de una conjetura que se formula en términos de una probabilidad subjetiva o un número esperado, se evalúa la fiabilidad de éstos, en la medida que esto es posible, mediante una probabilidad o esperanza matemática teórica y se finaliza argumentando sobre la bondad de la conjetura mediante una probabilidad empírica o un valor esperado.

Los modelos teóricos desde los que se pueden abordar estos problemas van desde un espacio de probabilidad finito compuesto de pruebas independientes (PCI), a una Binomial (Bi), a una cadena de Markov absorbente (CMA). La simulación, como método de resolución, los hace abordables independientemente de dichos modelos teóricos. El problema de la cueva, en particular, permite transitar desde un modelo PCI, con la inclusión en el enunciado del problema de una hipótesis (supuesto P) particular que hace finito el espacio de posibilidades, a un modelo CMA con la consideración de una nueva hipótesis (supuesto P) que convierte el espacio de posibilidades en infinito. Esto mismo puede tratarse en el problema de las colecciones.

Los árboles, como sistemas de representación habituales en los problemas PCI, también se ven afectados cuando el problema transita hacia un modelo CMA, convirtiéndose en grafos que representan paseos aleatorios. Podemos verlo en el problema de la cueva (Huerta, 2002).

Todo lo anterior tiene que ver con la formación del profesorado en aspectos conceptuales y procedimentales que proporcionan la resolución de los problemas propuestos, así como el desarrollo del pensamiento estocástico que pueden enriquecer aún más su mirada profesional. Pero, al mismo tiempo, también se derivan aspectos metodológicos que deberían tener en cuenta ante una situación real de enseñanza. Estos, fundamentalmente, tienen que ver con la gestión del proceso de resolución del problema. El propio método, como método que es, constituye una guía metodológica para el profesorado. De su aplicación surgen cuestiones de tipo metodológico sobre las que el profesorado deberá tomar ciertas decisiones *in situ*. Así, deberá decidir qué generadores de azar usará con sus alumnos para simular el problema: simulación física o virtual, o ambas. El número de simulaciones que deberían realizarse en clase para alcanzar un grado de fiabilidad aceptable de la conjetura inicialmente formulada. Derivado de esto, la necesidad de la tecnología para la obtención, tratamiento y análisis de la información producida por la simulación. La manera en la que va gestionar la variabilidad de los datos aportados por las diferentes simulaciones proporcionadas por los alumnos o grupos de alumnos. La vuelta atrás en el problema y la revisión de las hipótesis y conjeturas inicialmente consideradas. Cuando, en fin, va a dar por terminado el problema con la mejor conjetura que se pueda alcanzar. Son aspectos que sólo la experiencia y puesta en práctica permitirán enriquecer la mirada profesional del profesorado.

5. A modo de reflexión final

Actualmente, la enseñanza de las matemáticas está cuestionada tanto en sus contenidos como en sus enfoques. El cambio de siglo y con él la irrupción imparable de la tecnología en las vidas de los ciudadanos pone en cuestión el conservadurismo de una enseñanza de las matemáticas ancladas en el siglo anterior. Recientemente, se ha celebrado una conferencia en Ginebra, (a la que se puede acceder en www.fondationhelvetica.ch/genevaconference/) en la que el propósito es dar respuesta a la pregunta: ¿Qué deberían aprender los estudiantes en el siglo XXI?, mediante conferencias que propugnan cambios en el currículum escolar de matemáticas, señalando qué partes o temas deberían introducirse o ser enfatizadas, y por qué, y algo mucho más crucial qué aspectos deberían dejarse de enfatizar o incluso eliminar. En esta discusión se aboga por que la probabilidad y la estadística tengan un protagonismo mayor que el que tienen actualmente en las propuestas curriculares, con un enfoque distinto que, junto con una manera heurística de resolver problemas realistas, favorezcan el desarrollo del razonamiento estocástico, (Devlin, 2018, en http://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/DEVLIN-talk-2018.pdf).

En este trabajo llamamos a las puertas de la formación del profesorado del siglo XXI que ha de enseñar probabilidad y estadística. Proponemos un enfoque nuevo para una nueva enseñanza, en cualquier nivel educativo, que esté basada en la dialéctica hipótesis-conjetura mediante la resolución de problemas realistas que hemos acuñado como de hipótesis-conjetura-fiabilidad / credibilidad, en los que en la construcción de argumentos para apoyar o rechazar una conjetura quepa tanto el enfoque teórico, frecuentista o subjetivo de la probabilidad.

Con este trabajo, también, nos movemos modestamente hacia el curriculum de futuro, como el que imagina Pfannkuch (2018), con una propuesta que combina elementos de la actividad matemática en la resolución de problemas aplicados a los problemas de probabilidad y que dan sentido a unos y otros. Que implica a un buen número de procesos de razonamiento: como el razonamiento matemático, al fundamentarlo en las hipótesis necesarias que hacen que un problema realista formulado, en esta ocasión, en una situación de incertidumbre, sea posible tratarlo matemáticamente; que implica al razonamiento plausible necesario para formular conjeturas razonables y que implica, finalmente, al razonamiento estocástico que permite construir argumentos sobre la fiabilidad o credibilidad de las conjeturas planteadas. ¿O es que el razonamiento estocástico es una combinación de todos ellos? En el desarrollo de propuestas como la nuestra y en la necesaria investigación sobre el comportamiento de los distintos actores, profesores y alumnos, en ella puede estar la respuesta.

Referencias

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee H., y Sánchez, E. (Eds.) (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*, ICME-13 Topical Surveys, DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1

Begué, N., Batanero, C., y Gea, M. M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral en estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias 36*(2), 63-79.

Bernoulli, J. (1987/1713). *Ars conjectandi - 4ème partie*. Rouen: IREM. (Original work published in 1713).

Beth, B. (1989). Using simulation to model real-world problems. In M. Morris (Ed.) *Studies in Mathematics Education. The teaching of statistics,* 7, 95-100. Paris: UNESCO.

Benson, C. T., & Jones, G. A. (1999). Assessing Students' Thinking in Modeling Probability Contexts. *The mathematics Educator 4*(2), 1-21.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Tween Concepts. In C. Batanero & E. Chernoff (eds.), *Teaching and Learning Stochastics,* ICME-13 Monographs. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_17

Bunge, M. (2013). *La ciencia. Su método y su filosofía*. Pamplona: Laetoli.

Cardeñoso, J. M., Moreno, A., García-González, E., y Jiménez-Fontana, R. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. *Avances de Investigación en Educación Matemática 11*, 145 – 167.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. In C. Batanero, G. Burril, and C. Reading (eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI / IASE Study*, (pp. 85-95). New York: Springer.

De Villiers, M., & Heideman, N. (2014). Conjecturing, Refuting and Proving within the Context of Dynamic Geometry. *Learning and Teaching Mathematics*, *17*, 20-26.

Devlin, K. (2018). The Mathematics People Really Need. Presentación disponible en http://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/DEVLIN-talk-2018.pdf y vídeo en https://youtu.be/qBOnWZyq468, ambas visitada el 22 de junio de 2018.

Eichler, A., & Vogel, M. (2014). Three Approaches for Modelling Situations with Randomness. In E. J. Chernoff, B. Sriraman (eds.) (2014), *Probabilistic Thinking, Presenting Plural Perspective* (pp. 75-100). Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Fernández, B., y Rodríguez, B. (2015). Del *Ars Conjectandi* al Valor de riesgo. *Miscelánea matemática*, *60*, 25-45

Ferrater Mora, J. (1965). *Diccionario de Filosofía*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 145-167.

Furinghetti, F., Olivero F., & Paola, D. (2010). Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 32*(3), 319-335. DOI: https://doi.org/10.1080/00207390120360

Gordon, H. (1997). *Discrete Probability*. New York: Springer

Huerta, M. P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(1), 75-86.

Huerta, M. P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad *con intención didáctica* en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). Alicante: SEIEM.

Huerta, M. P. (2018). Preparing Teachers for Teaching Probability Through Problem Solving. In C. Batanero and E. J. Chernoff (eds.), *Teaching and Learning Stochastics*, ICME-13 Monographs (pp. 293-311). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_17.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge Academic Press.

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in purely random situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

Llinares, S. (2018). Escribir narrativas. De observar a mirar profesionalmente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 39-50). Gijón: SEIEM

Maaβ, K., & Doorman. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based leaning. *ZDM-International Journal on Mathematics Education*, *45*(6), 887-899.

Makar, K. & Rubin, A. (2014). Informal statistical inference revisited. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education*. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Martínez, M. L., Huerta, P. y González, E. (2018). Dificultades de los maestros y profesores en formación para identificar hipótesis y conjeturas en una tarea de probabilidad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (p.638). Gijón: SEIEM.

Martínez, M. L. y Huerta, M. P. (2015). Diseño e implementación de una situación de incertidumbre en una clase de educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 4(1), 24-36.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MEC, 2014a). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero por que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado de 1 de marzo de 2014. Madrid.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MEC, 2014b). Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre por que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado de 1 de enero de 2015. Madrid.

Minyana, M. (2018). *Hipòtesi i conjectures en el pensament estocàstic d'estudiants de 1er de Educació Secundària Obligatòria (12-13 anys)*. (Hypothesis and conjectures in 12-13 aged-students' stochastic thinking). Trabajo de Fin de Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València.

Pfannkuch, M. (2018). Reimaging Curriculum Approaches. In D. Ben-Zvi, K. Makar & J. Garfield (eds.) (2018), International Handbook of Research in Statistics Education (pp. 387-413). Springer International Handbooks of Education. https:// doi.org/10.1007/978-3-3319-66195-7_12

NCTM (2018). *Principles and Standards for School Mathematics*. Disponible en https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf (visitado el 12 de julio de 2018)

Poincaré, H. (1992). *La Science et l'Hypothèse*. Rueil-Malmason: La Bohème.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Popper, K. (1977). *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos.

Pratt, D. (2011). Re-connecting probability and reasoning about data in secondary school teaching. Proceedings of the 58th World Statistical Congress (pp. 890-899). Dublin.

Saldanha, L., & Liu, Y. (2014). Challenges in Developing Coherent Probabilistic Reasoning: Rethinking Randomness and Probability from a Stochastic Perspective. In E. J. Chernoff, B. Sriraman (eds.) (2014), *Probabilistic Thinking, Presenting Plural Perspective* (pp. 367-398). Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Schup, H. (1989). Appropriate teaching and learning of stochastics in the middle grades (5-10). In M. Morris (Ed.) *Studies in Mathematics Education. The teaching of statistics.* (vol. 7), (pp. 101-121). Paris: UNESCO.

Spiegelhalter, D., & Gage, J. (2014). What Can Education Learn from Real-World Communication of Risk and Uncertainty? *The Mathematics Enthusiast 12*(1-3), 4-10.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J., & Cañizares M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 10*(1), 7-25.

Shaughnessy, J. M. (1983). The psychology of inference and the teaching of probability and statistics: Two sides of the same coin? In R. W. Sholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 325-350). Amsterdam, The Netherlands: Elsevier.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review 67* (3), 223-265.

Zimmermann, G. (2002). *Students' reasoning about probability simulation during instruction*. Doctoral Dissertation. Retrieved from https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/02.Zimmerman.Dissertation.pdf

Autores

M. Pedro Huerta. Universitat de València, España. manuel.p.huerta@uv.es

Anexo

Enunciados de ejemplos de problemas.

1. piedra-papel-tijera

En el juego de piedra, papel o tijera, ¿existe alguna estrategia ganadora?

2. el 5 en el juego del parchís

En el juego del parchís, ¿cuántos turnos es razonable esperar hasta que, al lanzar el dado, aparezca el 5 y podamos sacar ficha?

3. las colecciones

Una empresa de alimentación lanza una promoción de uno de sus productos regalando una figura al azar de las *n* que constituyen la colección, que introduce en el interior del envoltorio. El precio de ese producto es de 1 euro.

a) ¿Crees que podrás completar la colección de n=3 piezas si sólo dispones de 9 €? Se sugiere hacer un estudio en función del tamaño de la colección y la disponibilidad económica.
b) Si el dinero disponible no es un obstáculo, por término medio (aproximadamente, más o menos, razonablemente), ¿cuántos productos tendrías que comprar para completar una colección de *n* figuritas? Se sugiere hacer un estudio dependiendo de *n*.

4. la caza de patos

Diez cazadores se encuentran apostados alrededor de una laguna cuando se posan en ella 10 patos. Todos los cazadores son de élite. En un momento dado, los 10 cazadores dispararan a la vez.

a) Antes de que los cazadores disparen, ¿qué probabilidad crees que tenía un pato cualquiera de no ser alcanzado?
b) Después de disparar, por término medio, ¿cuántos patos crees que no serán alcanzados? (Se sugiere formular las preguntas en términos predictivos).

5. el problema de la cueva

En una cueva se han introducido 27 personas. La cueva tiene tres puertas. Por una de ellas se llega al exterior en una hora. Por otra, después de caminar durante dos días se vuelve al interior desde donde se partió. Por la tercera, después de caminar durante tres días se vuelve también al interior de la cueva. Ninguna de las personas es capaz de recordar la puerta que ha elegido cada vez que intenta salir de la cueva, pues hay tanta obscuridad que impide cualquier reconocimiento de las puertas. Así que cada vez que lo intentan salir lo dejan todo en manos del azar. Consideremos, por separado, estos dos supuestos:

a) Cada persona tiene comida para 5 días y una hora.
b) La comida no es problema, es ilimitada.

Para cada una de los supuestos anteriores:

1 ¿Crees que las personas que están en el interior lo tienen fácil para salir de la cueva?
2 ¿Cuántas personas esperas que (por término medio) podrían salir de la cueva?
3 ¿Cuánto tiempo esperas que se ha de emplear (por término medio) en salir de la cueva?