



Educação em Revista

ISSN: 0102-4698

ISSN: 1982-6621

Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais

LIMA, GABRIEL LOUREIRO DE; BIANCHINI, BARBARA LUTAIF  
REFLEXÕES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE  
ÁLGEBRA A PARTIR DAS PRODUÇÕES DO GT04 DA SBEM  
Educação em Revista, vol. 38, e24723, 2022  
Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais

DOI: <https://doi.org/10.1590/0102-469824723>

Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=399371145004>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais informações do artigo
- Site da revista em [redalyc.org](https://www.redalyc.org)

redalyc.org  
UAEM

Sistema de Informação Científica Redalyc

Rede de Revistas Científicas da América Latina e do Caribe, Espanha e Portugal

Sem fins lucrativos acadêmica projeto, desenvolvido no âmbito da iniciativa  
acesso aberto

ARTIGO

**REFLEXÕES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA A PARTIR DAS PRODUÇÕES DO GT04 DA SBEM**

**GABRIEL LOUREIRO DE LIMA<sup>1</sup>**  
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5723-0582>

**BARBARA LUTAIF BIANCHINI<sup>2</sup>**  
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0388-1985>

**RESUMO:** Este artigo é uma análise interpretativa de caráter bibliográfico. Tem por objetivo, estabelecer interlocução entre cinco pesquisas de autoria de membros do Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior (GT04), da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra, com reflexões presentes em estudos de outros autores de renome na Educação Algébrica. As discussões organizam-se em três temáticas: requisitos para aprender Álgebra; como a Álgebra é ensinada e como deveria ser ensinada; e a natureza das dificuldades evidenciadas na aprendizagem de Álgebra. Para coletar, categorizar e analisar dados, adotamos alguns pressupostos da Análise de Conteúdo na ótica de Bardin. Por meio do estudo realizado, pudemos perceber que, embora os objetos das pesquisas do GT04 sejam o ensino e a aprendizagem de Matemática na universidade, muitas das discussões relacionadas à Álgebra presentes nas investigações dos membros deste Grupo por nós iluminadas e articuladas com afirmações de pesquisadores de renome, tanto no cenário nacional quanto internacional da Educação Algébrica, não dizem respeito especificamente ao ensino superior. Considerações relacionadas à especificidade do GT se fazem presentes de maneira mais contundente nas reflexões acerca da natureza das dificuldades evidenciadas na aprendizagem de Álgebra, havendo, no entanto, mesmo nesta categoria de análise, considerações pertinentes também à Educação Básica.

**Palavras-chave:** Ensino de Álgebra; Dificuldades de Aprendizagem em Álgebra; Educação Matemática no Ensino Superior; Análise Interpretativa.

**CONSIDERATIONS ON THE TEACHING AND LEARNING OF ALGEBRA BASED ON THE WORKS OF GT04 OF SBEM**

**ABSTRACT:** The objective of this article, which contains a bibliographical characteristic, is to present discussions related to three themes: the requisites to learn Algebra; how Algebra is taught and how it should be taught; and the nature of the difficulties evidenced in the learning of Algebra. This study was carried out based on the dialogue of issues raised by means of interpretative analysis, held in five studies from members of the Work Group Mathematical Education in Higher Education (GT04), from the Brazilian Society of Mathematical Education (SBEM), regarding the teaching and learning of Algebra,

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). São Paulo, SP, Brasil. <gllima@.pucsp.br>

<sup>2</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). São Paulo, SP, Brasil. <barbara@pucsp.br>

with reflections and studies from noteworthy authors in Algebraic Education. To collect categorize and analyse data, we adopted assumptions from Content Analysis in the point of view of Bardin. Despite the fact that the objectives of the studies of GT04 are the teaching and learning of Mathematics in Higher Education, by carrying out the study, we were able to realize many discussions related to Algebra present in the investigations of the members of this Group, brought to light and articulated with statements from noteworthy national and international researchers of Algebraic Education, related to Basic Education. Considerations related to the specificity of the Work Group are more decisively present in the reflections regarding the nature of the difficulties presented in the learning of Algebra, even though considerations related to Basic Education are also included in this category of analysis.

**Keywords:** Teaching of Algebra, Learning Difficulties in Algebra, Mathematical Education in Higher Education, Interpretative Analysis.

## REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA A PARTIR DE LAS PRODUCCIONES DEL GT04 DE LA SBEM

**RESÚMEN:** El objetivo de este artículo, de carácter bibliográfico, a partir de la interlocución de cuestiones logradas por medio de un análisis interpretativo, realizado en cinco investigaciones de autoría de miembros del Grupo de Trabajo Educación Matemática en la Enseñanza Superior (GT04), de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática, sobre la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra, con reflexiones presentes en estudios de otros autores de renombre en la Educación Algebraica, es presentar discusiones acerca de tres temáticas: requisitos para aprender el Álgebra; cómo el Álgebra es enseñado y cómo debería ser enseñado; y la naturaleza de las dificultades evidenciadas en el aprendizaje del Álgebra. Para recolectar, categorizar y analizar datos, adoptamos algunos presupuestos del Análisis del Contenido en la óptica de Bardin. Por medio del estudio realizado, aunque los objetos de investigación del GT04 sean la enseñanza y el aprendizaje de Matemática en la universidad, muchas de las discusiones relacionadas al Álgebra presentes en las investigaciones de los miembros de este Grupo, por nosotros esclarecidas y articuladas con afirmaciones de investigadores de renombre, tanto en el escenario nacional como el internacional de la Educación Algebraica, podemos percibir que no se refieren específicamente a la enseñanza superior. Consideraciones relacionadas a la especificidad del GT se hacen presentes de manera más contundente en las reflexiones acerca de la naturaleza de las dificultades evidenciadas en el aprendizaje del Álgebra. También habiéndose tomado, en esta categoría de análisis, consideraciones pertinentes a la Educación Básica.

**Palabras clave:** Enseñanza del Álgebra, Requisitos para aprender Álgebra, Dificultades de Aprendizaje en Álgebra, Grupo de Trabajo Educación Matemática en la Enseñanza Superior, Análisis Interpretativo.

## INTRODUÇÃO

A investigação relatada neste artigo é parte integrante de um amplo projeto de pesquisa, implementado desde 2017, com o objetivo de analisar os principais estudos realizados, a partir de 2000, por membros do Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior (GT04), filiado à Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Como principais trabalhos do Grupo, entendemos aqueles que estão de algum modo vinculados às reuniões trienais de seus integrantes, que ocorrem durante as edições do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPREM), realizadas em 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015 e 2018.

Como produtos deste projeto de pesquisa, há seis artigos já publicados, sendo quatro em periódicos nacionais, um em um periódico internacional e um nos anais de um evento. Há ainda um

artigo submetido à avaliação para publicação em um periódico nacional. Algumas informações a respeito destes produtos são apresentadas no Quadro 1.

**QUADRO 1. Produtos já obtidos por pesquisas a partir das produções do GT04**

Autores	Título	Ano e Local de Publicação
Gabriel Loureiro de Lima, Barbara Lutaif Bianchini e Eloiza Gomes	Cálculo e Análise: mapeamento das pesquisas do GT04 - Educação Matemática no Ensino Superior	<i>Vidya</i> . Santa Maria: Revista do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, v.37, n.2, p. 314-334, 2017.
Barbara Lutaif Bianchini, Gabriel Loureiro de Lima e Eloiza Gomes	Formação de professor: reflexões da Educação Matemática no Ensino Superior	<i>Educação e Realidade</i> . Porto Alegre, v. 44, n.1, p. 1-22, 2019.
Barbara Lutaif Bianchini, Gabriel Loureiro de Lima e Eloiza Gomes	Possibilidades de novas pesquisas em Cálculo, Análise e Álgebra Linear a partir de um mapeamento das investigações do GT04	<i>REnCiMa</i> . São Paulo, v. 10, n.2, p. 112-124, 2019b.
Gabriel Loureiro de Lima, Barbara Lutaif Bianchini e Eloiza Gomes	Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear: uma análise das pesquisas do GT04 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática	<i>Educação Matemática em Revista</i> . Brasília, v.24, n.62, p. 140-154, abr./jun. 2019.
Barbara Lutaif Bianchini, Gabriel Loureiro de Lima e Eloiza Gomes	<i>Linear algebra in engineering: an analysis of Latin American studies</i>	<i>ZDM Mathematics Education</i> 51, p. 1097-110, 2019.
Barbara Lutaif Bianchini, Gabriel Loureiro de Lima e Eloiza Gomes	Cálculo, Análise e Álgebra Linear: indicações para novas pesquisas a partir das investigações do GT04	VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018, <i>Anais...</i> Foz do Iguaçu/BR, p.1-11, 2018.
Barbara Lutaif Bianchini e Gabriel Loureiro de Lima	A Álgebra e seu papel: reflexões a partir das produções do GT 04 da SBEM	<i>Bolema</i> : Boletim de Educação Matemática, v. 35, p. 981-999, 2021.

Fonte: Autores da pesquisa.

No último artigo mencionado no Quadro 1 (BIANCHINI; LIMA, 2021), que foi submetido e atualmente encontra-se em avaliação em um periódico nacional, apresentamos parte dos resultados que obtivemos por meio da realização de uma análise interpretativa, na acepção de Severino (2007), tomando como *corpus* cinco produções do GT04 acerca do ensino e da aprendizagem de Álgebra (desconsiderando aquelas relativas à Álgebra Linear por estas já terem sido alvo de uma de nossas pesquisas anteriores). No presente artigo, damos continuidade à apresentação dos resultados obtidos por meio desta análise interpretativa e que não puderam ser contemplados na publicação anterior. Enfocamos neste texto três aspectos: (i) requisitos para aprender Álgebra; (ii) como a Álgebra é ensinada e como deveria ser ensinada; (iii) a natureza das dificuldades evidenciadas na aprendizagem de Álgebra. Antes de passarmos efetivamente à apresentação dos dados, explicitamos, na próxima seção, algumas considerações iniciais

acerca das principais pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra realizadas no âmbito do GT04.

## PESQUISAS DO GT04 SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

A pesquisa que realizamos caracteriza-se como bibliográfica, na visão de Marconi e Lakatos (2003, p. 183), uma vez que para a coleta de dados, recorremos a uma “bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo”, a saber, as principais produções do GT04 a partir do momento de sua criação, em 2000, até dezembro de 2019. Tais produções são artigos publicados nos seguintes *loci*:

- anais das sete edições já realizadas do SIPEM;
- livro Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates (FROTA; NASSER, 2009);
- livro Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior (FROTA; BIANCHINI; CARVALHO, 2013);
- volume 15, número 3, publicado em 2013, da revista Educação Matemática Pesquisa (EMP), do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PEPGEM) da PUC-SP (número temático relativo ao GT04);
- volume 37, número 2, publicado em 2017, da revista Vidya do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (número temático relativo ao GT04);
- volume 10, número 2, editado em 2019, da Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa), do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul (número temático relativo ao GT04).

A busca nessas publicações, a partir dos títulos e dos resumos, por artigos referentes ao ensino e à aprendizagem de Álgebra (não considerando a Álgebra Linear uma vez que a temática já foi objeto de nossas análises, como evidenciamos por meio do Quadro 1) resultou em cinco investigações. De três delas (publicadas nos anais do SIPEM), haviam disponíveis apenas os resumos. Como entendemos ser essencial realizar a análise dos textos na íntegra, solicitamos aos autores que, se possível, nos enviassem esses materiais. Dois deles nos foram enviados por correio eletrônico; o que ainda restava não foi enviado pelas autoras (Fabiane Mondini e Maria Aparecida Viggiani Bicudo) que preferiram nos indicar um texto que havia sido publicado posteriormente em uma revista científica em decorrência daquele cujo resumo tínhamos em mãos. É por esta razão que inserimos também em nosso *corpus* de análise um artigo não publicado em nenhum dos *loci* anteriormente indicados, e sim oriundo do volume 2, número 2, editado em 2010, da revista Acta Scientiae do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil. Em síntese, o *corpus* de análise para essa investigação é constituído por cinco artigos que, em termos de autoria, data, título, objetivo, fundamentação teórica, questões metodológicas e sujeitos de pesquisa, passamos a caracterizar brevemente. Ressaltamos que os resultados dessas pesquisas não são explorados nesta caracterização, mas nas reflexões que apresentamos nas próximas seções.

Em *Equações Algébricas nas práticas vivenciadas: uma abordagem histórica*, Savioli (2006), objetiva apresentar uma proposta para ser implementada com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de forma a possibilitar a eles um momento de reflexão sobre as equações algébricas, algo nem sempre oportunizado na formação inicial do professor de Matemática. Para o desenvolvimento da proposta apresentada, a Resolução de Problemas foi adotada como metodologia e a autora não recorre à uma fundamentação teórica explícita, mas faz referência à utilização da História da Matemática no ensino.

Savioli (2009), no artigo *Origens e caracterizações da Álgebra e do pensamento algébrico sob a ótica de vários autores*, de natureza bibliográfica, visa explorar o estudo do pensamento algébrico na Educação Básica e Superior a partir de diferentes concepções de Álgebra propostas por diferentes autores, como Lins e Gimenez (1997), Usiskin (1995), Kieran (1995, 2004) e Tall (2002).

Visando estudar as concepções de professores de Álgebra dos cursos de Licenciatura em Matemática a respeito da relevância dessa disciplina na formação de professores, em *A presença da Álgebra nos cursos de Licenciatura em Matemática no Estado do Rio Grande do Sul*, Mondini e Bicudo (2010) realizaram

o que denominaram de “entre-vistas” (encontros presenciais por meio dos quais o entrevistador observa atentamente o depoente quanto este concede sua entrevista) com professores de Álgebra de um curso de Licenciatura em Matemática e analisaram os dados obtidos a partir de concepções de Álgebra de autores como Lins e Gimenez (1997) e Miguel, Fiorentini e Miorim (1992).

No artigo *Indícios de dificuldade na compreensão da Matemática Avançada: o conceito de grupo*, Elias, Barbosa e Savioli (2012) têm com objetivo analisar como estudantes de Licenciatura em Matemática lidam com conceitos da Matemática Avançada relacionados ao objeto matemático *grupo*, que tem um novo estatuto cognitivo, sendo construídos a partir de definições formais. Tendo por fundamentação teórica preceitos relacionados ao Pensamento Matemático Avançado na perspectiva de Tall (2002, 1995), para a coleta de dados foram entrevistados estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática.

Finalmente, Kirnev e Savioli (2017), no artigo *Set-befores e Met-befores: influência no estudo de anéis de polinômios*, como traduz muito bem o título do trabalho, objetivam investigar que *set-befores* e *met-befores* (termos que no trabalho são definidos conforme a acepção de Tall (2008)) estão envolvidos em resoluções de atividades sobre *anéis de polinômios*. A fundamentação teórica do estudo está diretamente atrelada ao objetivo das pesquisadoras e é constituída por ideias acerca do Pensamento Matemático Avançado de Tall (2004, 2008) e de Pirâmide de Avaliação (segundo De Lange (1999)). Os sujeitos da pesquisa foram estudantes de um curso de Bacharelado em Matemática que já haviam cursado a disciplina *Estruturas Algébricas* e, para a coleta de dados, foram aplicadas atividades desenvolvidas a partir das referências bibliográficas da disciplina mencionada e essa aplicação envolveu uma avaliação diagnóstica e, posteriormente, a reaplicação dessas atividades disponibilizando aos estudantes materiais complementares.

Tendo apresentado essa caracterização sintética em relação a alguns aspectos das pesquisas que compõem o *corpus* desta investigação, passamos, na sequência, a detalhar a metodologia empregada para a coleta, categorização e análise dos dados desse estudo.

## METODOLOGIA

Finalizada a composição do *corpus* de pesquisas do GT04 que seriam analisadas em nosso estudo, passamos a efetivamente coletar e categorizar os dados para, na sequência, analisa-los. Essas ações foram conduzidas a partir de alguns preceitos da Análise de Conteúdo, adotada de acordo com Bardin (2001). Realizamos, sem estabelecer nenhuma hipótese *a priori*, e individualmente, o que a autora denomina de *leitura flutuante* dos textos e, nesse processo, procuramos destacar *índices* (referências explícitas a alguns temas e que auxiliam o pesquisador a “recortar” o texto em unidades comparáveis para posterior categorização e análise). A partir desses índices, cada um de nós, autores deste artigo, procurou construir um conjunto de categorias de análise. Esses dois conjuntos foram posteriormente confrontados e, finalmente, como resultado desse processo, chegamos à cinco categorias:

- C1 - O que é Álgebra?
- C2 - O papel da Álgebra
- C3 - Requisitos para aprender Álgebra
- C4 - Como a Álgebra é ensinada e como deveria ser ensinada
- C5 - Natureza das dificuldades evidenciadas na aprendizagem da Álgebra

Realizamos então, considerando extratos dos textos inseridos em cada uma dessas cinco categorias, uma análise interpretativa, como postula Severino (2007). Nesta análise, fomos além das reflexões presentes nos textos do *corpus*, estabelecendo diálogos entre elas e outras presentes em distintas investigações realizadas por pesquisadores de amplo reconhecimento no campo da Educação Algébrica. Na publicação mencionada na última linha do Quadro 1, debruçamo-nos sobre a análise dos dados referentes às categorias C1 e C2. No presente artigo, nos detemos nas considerações acerca das categorias C3, C4 e C5.

## REQUISITOS PARA APRENDER ÁLGEBRA

Dentre as temáticas presentes nas cinco categorias por nós construídas a partir da análise das produções dos membros do GT04, a relativa aos requisitos para aprender Álgebra foi a menos explorada. Dos cinco textos, apenas dois trazem algum tipo de reflexão a respeito desta problemática e ambos são pesquisas direcionadas a elementos de Álgebra estudados no ensino superior, a saber, grupos e *anéis de polinômios*.

Mesmo tendo como foco o ensino universitário, Kirnev e Savioli (2017) ressaltam um requisito para aprender Álgebra que pode ser explorado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental: *o desenvolvimento do pensamento matemático* do aluno. E a essa respeito, as autoras afirmam, com base nas ideias de Tall (1995), que esse tipo de pensamento pode se desenvolver inicialmente em níveis mais básicos, por meio da percepção e ação sobre objetos do mundo externo e, posteriormente, realizando operações com objetos abstratos, o que promoverá uma evolução cognitiva.

Outro requisito para a aprendizagem de Álgebra apontado por Kirnev e Savioli (2017, p. 534 - grifo nosso) é “*o desenvolvimento de uma dimensão estrutural e processual do conhecimento matemático*”.

Em relação a um dos requisitos para a compreensão de conceitos não elementares da Álgebra, como é o caso de *grupo*, Elias, Barbosa e Savioli (2012) destacam *a coordenação de noções relacionadas a conjunto, operações e axiomas*, que sustentará o raciocínio envolvido no estudo de *estruturas algébricas*.

Visando enriquecer as reflexões iniciadas pelos membros do GT04, apresentamos a seguir alguns outros requisitos apontados por pesquisadores da Educação Matemática e, especialmente da Educação Algébrica, não contemplados nesta categoria até o presente momento.

Em diálogo com as ideias de Kirnev e Savioli (2017) acerca da necessidade de desenvolver o pensamento matemático do estudante, Santos e Almeida (2015) ressaltam que, a partir dos anos 1990, pesquisadores como Rômulo Lins, James Kaput, Dario Fiorentini, Maria Ângela Miorim, Antonio Miguel, Abraham Arcavi e Maria Blaton passaram a salientar que um requisito essencial para o aprendizado de Álgebra é *o desenvolvimento*, desde os primeiros anos de escolaridade, *de uma forma peculiar de pensar*, denominada de *pensamento algébrico*, uma categoria específica do pensamento matemático citado por Kirnev e Savioli (2017), em seus diferentes aspectos. Para Kieran (2004), citada por Cardoso (2010), o pensamento algébrico

[...] envolve o desenvolvimento de modos de pensar através de actividades para as quais o simbolismo da álgebra pode ser usado como ferramenta, mas que não são exclusivas da álgebra e que podem ser abordadas sem qualquer uso de simbolismo algébrico, tais como, analisar relações entre quantidades, detectar a estrutura, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e predizer (KIERAN, 2004, p. 149 *apud* CARDOSO (2010)).

Cardoso (2010) salienta que, na visão de diferentes autores como Kriegler (2008) e Heirdsfield (2002), um dos requisitos para a construção do pensamento algébrico é *o desenvolvimento de estratégias de cálculo com compreensão* de forma a possibilitar a “descoberta de padrões e relações que suscitam e aprofundam a compreensão da estrutura numérica subjacente” (p. 116). Para atingir esse requisito, a autora afirma, com base em McIntosh (1998) e Threfall (2002), que um elemento importante é: “o desenvolvimento de um cálculo mental flexível e adaptado a cada situação, por análise das “estratégias” ou métodos que surgem inevitavelmente nas tentativas de cálculo” (p. 130) de cada estudante em cada situação considerada, de forma a dar maior ênfase “à compreensão do funcionamento dos números e das suas relações e propriedades” (Idem). A autora reforça que a iniciação ao pensamento algébrico já nos primeiros anos de escolaridade é importante para que os alunos desenvolvam uma compreensão “da estrutura geral subjacente ao sistema numérico, através duma abordagem que, para além da aquisição de procedimentos aritméticos, realce formas de raciocínio baseadas na descoberta de padrões, nas relações funcionais e na generalização” (p. 131).

Outro requisito necessário para o aprendizado de Álgebra destacado por Santos e Almeida (2015) é *a construção de significado para a Álgebra e sua linguagem*. Esse aspecto está relacionado ao desenvolvimento do pensamento algébrico, mas, segundo os autores, não de maneira hierárquica, ou seja, “o aluno não desenvolve primeiro o pensamento algébrico para só depois construir significado para a

álgebra e sua linguagem. Isso ocorre de forma concomitante [...] e, quanto mais significado da álgebra e de sua linguagem é construído pelo aluno, mais ele desenvolve o pensamento algébrico” (p. 547).

A partir das considerações de Grugeon (1995), Santos e Almeida (2015) salientam que, do ponto de vista cognitivo, o desenvolvimento de competências algébricas se estrutura em duas dimensões: “instrumento (*capacidade de produzir expressões algébricas que traduzem um problema*) e objeto (*aspecto sintático e semântico das expressões algébricas para manipulá-las formalmente*) (p. 542 - grifos nossos).

Para encerrar as análises desta categoria, apresentamos um requisito evidenciado por Pires (2012) com base nas ideias de Trigueros e Ursini (2005), para o qual o aprendizado efetivo de Álgebra requer o desenvolvimento, por parte dos estudantes, da “*capacidade de trabalhar com cada um dos três usos da letra (incógnita, número genérico e relação funcional)* e dos aspectos evidenciados no modelo 3UV (3 Usos da Variável) e de *passar de um a outro de modo flexível*, de acordo com as exigências do problema a ser resolvido” (p. 61 – grifos nossos).

## COMO A ÁLGEBRA É ENSINADA E COMO DEVERIA SER ENSINADA

Nesta categoria, buscamos, a partir das reflexões presentes nos artigos que constituem o *corpus* desta pesquisa, apresentar um contraponto entre a forma como a Álgebra usualmente tem sido trabalhada em diferentes cursos e a maneira como os conteúdos relacionados a esta área da Matemática deveriam ser abordados em sala de aula. Procuramos, portanto, evidenciar quais atualmente são e quais deveriam ser, na visão dos autores das produções analisadas, as metas da Educação Algébrica, agregando a estas ideias, algumas reflexões presentes em textos de outros pesquisadores da área.

Em relação ao que usualmente se observa no ensino de Álgebra, Mondini e Bicudo (2010, p. 46) salientam que “a postura letrista é considerada comum nas aulas de Álgebra, porém é criticada pelos professores e apresentada como inadequada principalmente nas séries finais do Ensino Fundamental”. As mesmas autoras, a partir de entrevistas realizadas com alunos da Licenciatura em Matemática, evidenciam que:

[...] a Álgebra é, muitas vezes, apresentada aos estudantes como uma determinada maneira de a Matemática proceder, por meio de uma linguagem característica. Consideram-na como expandida por outras áreas da Matemática, destacam seu rigor e suas estruturas, porém pensam deste modo somente quando falam da Álgebra no Ensino Superior. (MONDINI; BICUDO, 2010, p. 47)

Savioli (2009) de certa maneira complementa as observações de Mondini e Bicudo (2010) ao retomar as considerações de Kaput (1999) que afirma que “a Álgebra escolar tem tradicionalmente sido ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desconexos de outros conhecimentos matemáticos e do mundo real dos estudantes (KAPUT, 1999 apud SAVIOLI, 2009, p.7). A autora, novamente recorrendo a Kaput (1999), reitera que a imagem tradicional da Álgebra é dada por simplificação de expressões algébricas, resolução de equações e aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos.

O que acontece é a memorização de procedimentos que consideram apenas operações sobre sequências de símbolos, a resolução de problemas artificiais sem significado para o aluno, a avaliação de acordo com a capacidade de produzir a correta sequência de símbolos e não de acordo com a compreensão dos conceitos e do raciocínio matemático. (SAVIOLI, 2009, p. 8).

Kirnev e Savioli (2017, p. 534) também trazem considerações a respeito desta questão, tendo por base as afirmações de Fiorentini, Miguel e Miorin (1993), os quais apontam que, tradicionalmente, o ensino de Álgebra tende à “redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica. Isto é, são trabalhadas a resolução de atividades que consistem em converter a linguagem corrente em linguagem simbólica e aplicar algoritmos para a resolução (de problemas)”.

Um aspecto sempre em voga quando se discute o ensino de Álgebra na Licenciatura em Matemática é a relação entre os conteúdos estudados pelos licenciandos e aqueles com os quais irão trabalhar na Educação Básica. Nesse sentido, Mondini e Bicudo (2010, p. 49), a partir das considerações de Figueiredo (2007) salientam que, em alguns cursos de Licenciatura “as disciplinas voltadas à discussão

de como desenvolver o estudo e o ensino de Álgebra pensando no Ensino Fundamental, são tratadas como revisão do conteúdo do Ensino Médio, não permitindo ao futuro professor articular os conceitos para sua futura prática docente”.

Outra questão apontada por Mondini e Bicudo (2010) é que, em algumas instituições as disciplinas de Álgebra da Licenciatura são ministradas conjuntamente àquelas de outros cursos, ou seja, ao se organizar tais disciplinas, não se consideram as especificidades de se formar um professor de Matemática para a Educação Básica.

A respeito da orientação que deveria ser adotada no ensino de Álgebra, Savioli (2006) ressalta que, além de ser dada oportunidade ao discente de conhecer como se deu a evolução histórico-epistemológica desse ramo da Matemática, especialmente na formação do professor, deveriam ser promovidas discussões com e entre os estudantes, nas quais estes pudessem “colocar suas ideias acerca de cada assunto abordado, bem como se expressar em relação ao que e como aprendeu” (p. 3) determinado tópico em sua vida escolar. Os alunos devem ser estimulados a formular questões sobre aquilo que está sendo abordado em sala de aula e a participar de debates, expressando suas dúvidas em relação ao objeto matemático em foco. Para a mesma autora, deve-se motivar os estudantes a descobrir a importância dos conteúdos que estão sendo trabalhados no âmbito da Matemática e, em particular, da Álgebra. Neste processo, “o estudante não é considerado um sujeito passivo, mas ativo, um pesquisador que sabe interpretar, solucionar e levantar conjecturas [...] reconhecer e manipular resoluções de maneira diversificada para um problema” (p. 6-7).

O professor, enquanto orientador da aprendizagem precisa buscar diferentes maneiras de ensinar, utilizando-se de metodologias diferentes e de instrumentos didáticos que subsidiem suas aulas e atividades. Precisa proporcionar aos seus estudantes experiências matemáticas para que eles possam se tornar profissionais independentes e críticos (SAVIOLI, 2006, p. 7).

Também em relação ao ensino de Álgebra na formação inicial do professor de Matemática, Mondini e Bicudo (2010, p. 46) enfatizam, entre os estudantes de Licenciatura entrevistados em sua pesquisa, a presença da concepção do professor como “facilitador” da aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, a formação Matemática, Metodológica e Didática do licenciando deve municiá-lo de “subsídios para criar ambientes de aprendizagem de modo a tornar a Álgebra acessível à compreensão dos alunos”.

Os entrevistados por Mondini e Bicudo (2010) entendem que nos cursos de Licenciatura, a Álgebra deveria ser voltada para os conteúdos da Educação Básica, uma vez que “quando os depoentes falam sobre a relevância da Álgebra na Licenciatura consideram que o conteúdo deveria ser desenvolvido pensando na atuação dos alunos como futuros professores” (p. 48).

Na nossa visão, embora sempre que possível a abordagem dos objetos da Álgebra na Licenciatura deva estar relacionada aos conceitos que os egressos desses cursos irão ensinar na Educação Básica, a formação matemática do futuro professor não pode se limitar àquilo que ele irá lecionar; esta deve ser mais ampla e abrangente. Essa ideia está presente, inclusive no depoimento de um desses entrevistados, que afirma que é importante “algum conhecimento daquelas estruturas algébricas como: grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais, para que eles (os professores da Educação Básica) também possam fundamentar melhor” (p. 51) o que ensinam.

Mondini e Bicudo (2010), a partir das ideias de Souza (2008), atribuem à Álgebra, na Licenciatura, o *status* de disciplina na qual é construído o alicerce básico para ensinar os princípios fundamentais da Matemática. No entanto, ao organizar o ensino de Álgebra no curso de Licenciatura em Matemática, além de não perder de vista a formação do professor para atuar na Educação Básica,

Faz-se necessário, porém, uma apresentação destes princípios (fundamentais da Matemática), mostrando ao aluno a importância da Álgebra, chamando a atenção para os pontos relevantes e não apenas cumprir currículo e apresentar a teoria de forma vazia e abstrata. Assim como qualquer outra disciplina, a Álgebra deve ser apresentada de maneira a fazer sentido ao aluno o porquê que ela faz parte de seu currículo. (MONDINI; BICUDO, 2010, p. 51).

Para Savioli (2009, p. 6), com base em Kieran (1992, 2004), no ensino de Álgebra, deve-se dar “maior ênfase às atividades que promovam o desenvolvimento de interpretações procedimentais”, além de estabelecer “uma raiz comum para a Álgebra e a Aritmética”. A mesma autora, tomando como

referência as ideias de Kaput (1999), ratifica que deve-se começar a ensinar Álgebra desde cedo, “integrar a aprendizagem da Álgebra com outros tópicos, partir dos poderes cognitivos dos alunos, inserir diferentes formas de pensamento algébrico e encorajar uma aprendizagem ativa” (SAVIOLI, 2009, p. 7). Ainda a partir das considerações de Kaput (1999), afirma que, no currículo,

A álgebra deve ser entendida de uma forma muito mais ampla, profunda e rica do que acontece tradicionalmente [...]. Mas, como “algebrizar” a atividade matemática na escola? Promovendo hábitos de pensamento e de representação em que se procure a generalização, sempre que possível, tratando os números e as operações algebricamente – prestar atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objetos formais para o pensamento algébrico (SAVIOLI, 2009, p. 7-8).

Em relação especificamente a quando introduzir o simbolismo algébrico, Savioli (2009, p. 11), fundamentada em Arcavi (1994), ressalta que este “deve ser introduzido desde o início, em situações que os alunos possam apreciar o poder dos símbolos na expressão de generalizações e justificações de fenômenos aritméticos”.

Em síntese, Savioli (2009, p. 11) postula que “a educação algébrica deve ter duas metas essenciais: permitir que os estudantes sejam capazes de produzir significados para a álgebra e possibilitar que eles desenvolvam a habilidade de pensar algebricamente”.

No Quadro 2 apresentamos uma síntese das características que emergem dos trabalhos do GT04 que analisamos, no que diz respeito às características que são predominantes no ensino de Álgebra e aquelas que deveriam predominar neste contexto.

**QUADRO 2. Características predominantes e as que deveriam predominar no ensino de Álgebra**

Características que são predominantes no ensino de Álgebra	Características que deveriam ser predominantes no ensino de Álgebra
<p><b>De maneira geral:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Postura letrista;</li> <li>• Desconexão com outros conhecimentos matemáticos;</li> <li>• Desconexão com conhecimentos do mundo real dos estudantes;</li> <li>• Memorização de procedimentos;</li> <li>• Ênfase em operações sobre sequências de símbolos;</li> <li>• Resoluções de problemas artificiais e sem significados para os estudantes;</li> <li>• Avaliação privilegiando a capacidade do estudante em produzir uma correta sequência de símbolos e não sua compreensão acerca dos conceitos e seu raciocínio matemático;</li> <li>• Redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica;</li> <li>• Ênfase na resolução de atividades que consistem em converter a linguagem corrente em linguagem simbólica e aplicar algoritmos para a resolução de problemas.</li> </ul>	<p><b>De maneira geral:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Oportunidade ao discente de conhecer como se deu a evolução histórico-epistemológica da Álgebra;</li> <li>• Discussões nas quais os estudantes possam colocar suas ideias acerca de cada assunto abordado, bem como se expressar em relação ao que e como aprendeu;</li> <li>• Motivação aos estudantes para descobrirem a importância dos conteúdos que estão sendo trabalhados;</li> <li>• Valorização de atividades que oportunizam o desenvolvimento de interpretações procedimentais;</li> <li>• Estabelecimento de uma raiz comum para a Álgebra e a Aritmética;</li> <li>• Trabalho com a Álgebra desde os primeiros anos de escolaridade;</li> <li>• Integração da Álgebra com outros tópicos;</li> <li>• Inserção de diferentes formas de pensamento algébrico;</li> <li>• Promoção de hábitos de pensamento e de representação nos quais se busque a generalização, o tratamento algébrico dos</li> </ul>
<b>Na formação inicial de professores de Matemática:</b>	

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Disciplinas voltadas à discussão de como desenvolver o estudo e o ensino de Álgebra no Ensino Fundamental tratadas como revisão do conteúdo do Ensino Médio, sem oportunizar ao futuro professor articular os conceitos para sua futura prática docente;</li> <li>• Disciplinas de Álgebra ministradas conjuntamente com outros cursos, desconsiderando a especificidade que deveria haver na formação de um professor.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>números e das operações, de forma a voltar a atenção às relações existentes e não apenas aos valores numéricos;</li> <li>• Simbolismo algébrico introduzido desde o início do trabalho com a Álgebra, por meio de situações nas quais os estudantes possam apreciar o poder dos símbolos na expressão de generalizações e justificações de fenômenos aritméticos;</li> <li>• Ênfase na produção, por parte dos estudantes, de significados para a Álgebra e no desenvolvimento da habilidade de pensar algebricamente.</li> </ul> <p><b>Na formação inicial de professores de Matemática:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ambientes de aprendizagem que tornem a Álgebra acessível à compreensão dos alunos;</li> <li>• Conteúdo desenvolvido tendo em vista a atuação dos alunos como futuros professores, embora, de maneira mais abrangente, sem se limitar àquilo que os egressos irão lecionar, de forma a que sejam capacitados para fundamentar melhor o que ensinam;</li> <li>• Ênfase nas disciplinas de Álgebra na construção do alicerce básico para ensinar os princípios fundamentais da Matemática;</li> <li>• Explicitação aos estudantes da importância da Álgebra e de seus pontos mais relevantes.</li> </ul>
---	---

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao buscarmos considerações de outros pesquisadores da Educação Algébrica acerca de como, de maneira geral, a Álgebra deveria ser ensinada, identificamos ideias concordantes a estas que emergem das investigações realizadas pelos membros do GT04, especialmente em termos de três aspectos intimamente interrelacionados: *o foco no desenvolvimento do pensamento algébrico, a abordagem da Álgebra desde os primeiros anos de escolaridade* (o que se designa atualmente, em contexto internacional, por *Early Algebra*) e *a Aritmética como parte da Álgebra*. Apresentamos, a seguir, algumas ideias de diferentes autores que ratificam a importância de considerar estes aspectos e que, ao mesmo tempo, evidenciam o quanto eles estão interligados.

Para Santos e Almeida (2015), que fundamentam suas considerações em trabalhos de autores como Rômulo Lins, James Kaput, Dario Fiorentini, Maria Ângela Miorim, Antonio Miguel, Abraham Arcavi e Maria Blaton, o ensino de Álgebra na Educação Básica deve começar desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e prosseguir até o Ensino Médio, tendo como eixo norteador o pensamento algébrico. Os autores afirmam que este ensino “deve estar voltado muito mais para a construção de significado e o desenvolvimento do pensamento algébrico, em detrimento da manipulação da linguagem algébrica. [...] O estudante aprenderá de forma significativa os objetos algébricos se, no cerne do ensino da álgebra, estiver o pensamento algébrico” (SANTOS; ALMEIDA, 2015, p. 546). Fazendo referência a Araújo (2008) e a Lins (1992), os autores reforçam essa ideia salientando que o ensino de Álgebra deve

contemplar a construção do pensamento algébrico, além de aspectos formais, uma vez que pensar algebricamente é condição essencial para atribuir significado à Álgebra e à sua linguagem.

Na visão de Branco e Ponte,

Nos primeiros ciclos de ensino é importante que os alunos generalizem e modelem situações usando linguagem natural e representações pictóricas antes de se introduzir a simbologia algébrica ou os gráficos. O ensino deste tema deve seguir uma abordagem que possibilite aos alunos a utilização de estratégias informais, por meio das quais eles descubram e verifiquem as soluções, e adotando progressivamente estratégias mais formais. A determinação de soluções pode ser informada pela identificação de relações lineares envolvendo quantidades desconhecidas. Os alunos não têm necessariamente que começar a resolução de um problema com a representação da informação por meio de símbolos (BRANCO; PONTE, 2011, p. 63)

A introdução das notações e do simbolismo algébrico, embora não devam ser o foco do ensino de Álgebra, segundo Cardoso (2010) devem estar presentes, desde os primeiros anos, como suporte à aprendizagem da Matemática. A autora ressalta que a Álgebra, no ensino, deve ser vista “quase como um tema transversal que se inicia muito cedo com o trabalho com investigação de regularidades em sequências, estabelecimento de relações e propriedades” (p. 103).

Pires (2012) destaca que é fundamental valorizar “situações em que os alunos realizem atividades de modelagem, utilizando diferentes formas do pensamento algébrico, fazendo conjecturas, discutindo, testando suas ideias e praticando atividades computacionais” (p. 61). Como ressalta Araújo (2008) citada por Santos e Almeida (2015), é necessário, para ensinar a Álgebra de maneira significativa, conectar os novos conhecimentos àqueles conhecimentos que os alunos já possuem.

O foco no desenvolvimento do pensamento algébrico exige um repensar acerca do relacionamento de dois campos da Matemática que, muitas vezes, no ensino são trabalhados de maneira desconectadas, mas que são interligados: a Aritmética e a Álgebra. A este respeito, Carpenter, Franke e Levi (2003) destacam que o fato de haver, no ensino, uma separação não natural entre a Álgebra e a Aritmética dificulta aos estudantes tanto a construção de diferentes formas de pensamento a respeito da Matemática trabalhada na escolaridade inicial, quanto a aprendizagem de Álgebra em níveis subsequentes de escolaridade.

Também sobre a relação existente entre Aritmética e Álgebra, Cardoso (2010, p. 108), com base nas considerações de Schliemann, Carraher e Brizuela (2007), ressalta que há ideias, técnicas e representações comuns a estes campos e que a alternativa ao que em geral é feito, é conceber a “aritmética como parte da álgebra, designadamente a que lida com sistemas de numeração, a reta numérica, funções simples, etc”. Ainda adotando como premissas as ideias de Schliemann, Carraher e Brizuela (2007), Cardoso (2010, p. 130) salienta que “a abordagem da álgebra nos primeiros anos deve assentar numa visão da aritmética como parte da álgebra em que os factos aritméticos são encarados como instâncias de ideias mais gerais e na exploração e generalização de padrões que permitam interpretações funcionais”. A autora reforça que “as operações aritméticas sejam encaradas desde o início como funções, ou abordando os conceitos de função e mudança mesmo independentemente dos universos numéricos” (Idem). Com base nos apontamentos de Rivera (2006):

subscreve, não o afastamento dos conceitos, processos e operações tradicionais e fundacionais que levam à proficiência aritmética que todos os alunos devem possuir, mas sim a reorientação do pensamento matemático das crianças para as relações e para competências algébricas poderosas como o trabalho com padrões e a generalização. Neste sentido, e fazendo uma súmula de resultados de investigação nesta área, este autor faz, entre outras, as seguintes recomendações didácticas: (a) Abordar os sistemas numéricos de modo que os alunos tomem consciência da existência de propriedades ou relações inerentes que devem ser articuladas matematicamente. [...] (b) Ensinar os alunos a valorizar as representações informais e formais. Um dos objectivos do ensino é fazer a ponte entre as representações espontâneas das crianças e os sistemas de representação formais validados pela comunidade matemática. Parece também haver uma relação entre a competência de representação e a facilidade de fazer generalizações, um processo importante em álgebra; (c) Explorar funções de modo que as crianças possam começar a desenvolver a predisposição para a modelação algébrica. Uma forma será ensinar as quatro operações numa perspectiva funcional, não apenas como um processo que produz um resultado, mas como um processo de mudança (CARDOSO, 2010, p. 124-125).

A partir do que postula Kieran (2004), Cardoso (2010) ressalta que, para estabelecer conexões no ensino, entre Aritmética e Álgebra, é necessário:

(1) o foco nas relações e não meramente no cálculo de respostas numéricas; (2) o realce nas operações e nas suas inversas e na ideia relacionada de fazer e desfazer; (3) o foco na representação e resolução simultânea de problemas em vez de apenas na resolução; (4) a utilização de números e letras em vez de apenas números; e (5) a reformulação do significado do sinal de igual, que normalmente é encarado como um separador entre o problema e a solução, ou seja, um indicador para efectuar as operações constantes do lado esquerdo. (CARDOSO, 2010, p. 104).

Em síntese, “o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade é considerado importante não só como preparação para estudos mais avançados, procurando resolver o insucesso dos alunos na álgebra, mas também para dar profundidade ao trabalho com a aritmética”. (CARDOSO, 2010, p. 129). Ou seja, a autora observa que, neste sentido: “o pensamento algébrico surge assim como tema unificador da matemática escolar” (p. 131).

Além desses aspectos relacionados à ênfase do pensamento matemático, à inserção da Álgebra desde os primeiros anos de escolaridade e à consideração da Aritmética como parte integrante da Álgebra, Santos e Almeida (2015, p. 542) trazem um outro elemento que deve ser levado em consideração no ensino de Álgebra: em geral, ela é abordada na sala de aula e nos livros didáticos de maneira parcial, considerada somente “como um objeto matemático, abandonando-se o seu caráter de ferramenta”, no sentido de Douady (1986) e, para os autores, “tal perspectiva não tem sentido nos estudos em psicologia da educação matemática. Pesquisas recentes nesse domínio têm demonstrado a necessidade de se considerarem ambos os aspectos – objeto e ferramenta – constitutivos desse campo conceitual” (Idem).

Em relação à abordagem de Álgebra na formação inicial de professores, como preconiza-se à introdução das ideias deste campo da Matemática já nos primeiros anos de escolaridade, Branco e Ponte (2011) salientam que os docentes a serem formados para atuar nesse nível escolar também devem ser preparados de forma a desenvolver conhecimentos de conteúdo e conhecimentos didáticos que os capacite a ensinar esse tema aos alunos dos primeiros anos. A este respeito, os autores destacam que: “No âmbito da formação inicial em Álgebra é necessário, tal como noutras temas matemáticos, proporcionar aos formandos um conjunto diversificado de experiências de aprendizagem sobre esse tema, promovendo o conhecimento para o ensinar” (p. 64).

Vale e Pimentel (2013) apresentam considerações de Ponte e Chapman (2008) sobre formação inicial de professores de Matemática que, embora tenham sido feitas em âmbito geral, sem enfatizar a Álgebra, também se aplicam à abordagem de conteúdos algébricos em cursos de formação de docentes. Para eles, as abordagens exploratórias são importantes por oportunizarem momentos de discussão, argumentação, estabelecimento de conjecturas, testes e validações de resultados.

Também em Vale e Pimentel (2013) são explicitadas ideias de Kaput e Blanton (2001) e Blanton e Kaput (2003) acerca de como deve se constituir uma formação de professores tendo como foco o desenvolvimento do pensamento algébrico para que, posteriormente, tais docentes possam auxiliar os estudantes a adquirem uma compreensão aprofundada de Álgebra. Tal formação compreende três dimensões: (a) construção de oportunidades de raciocínio algébrico; (b) desenvolver a capacidade de identificar situações que oportunizam a generalização e então explorá-las; “(c) A criação de uma cultura de sala de aula e práticas de encorajamento de processos de generalização e formalização no contexto de conjecturas e argumentação intencional, de modo que ocorram frequentemente oportunidades de raciocínio algébrico e sejam exploradas quando ocorrerem” (VALE; PIMENTEL, 2013, p. 102).

Outras ideias apresentadas por Vale e Pimentel (2013) são as de Jacobs et al. (2007) que postulam que, na formação de professores em Álgebra para o ensino básico, as tarefas apresentadas

devem envolver pensamento algébrico, como forma, não só de prover um fundamento para o estudo subsequente da álgebra, como também de aprofundar a compreensão da aritmética básica, e concluem que o envolvimento dos professores em discussões acerca do raciocínio

algébrico pode ser uma motivação para uma mudança fundamental no ensino, não só da álgebra, mas da matemática em geral (VALE; PIMENTEL, 2013, p. 107-108).

Para Blanton et al. (2007) citado por Ponte e Branco (2013, p. 138), “os professores devem desenvolver a sua compreensão do que envolve e o que não envolve o ensino da Álgebra nesta fase de escolaridade (anos iniciais do Ensino Fundamental)”. Ponte e Branco (2013, p. 138) salientam também que os professores em formação devem ser estimulados a perceber a relação da Álgebra com a Aritmética.

Encerramos essa categoria reforçando as ideias de Billings (2008), apresentadas por Ponte e Branco (2013, p. 138), segundo as quais “antes de promover o pensamento algébrico nas suas salas de aula, os professores têm de desenvolver uma compreensão pessoal sobre o que significa pensar algebricamente, para o que precisam de múltiplas experiências de análise da variação, de identificação, representação e generalização de relações entre variáveis”.

## NATUREZA DAS DIFICULDADES EVIDENCIADAS NA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Nesta última categoria, da mesma forma que nas anteriores, após evidenciar as considerações presentes nos artigos de autoria dos membros do GT04 que constituem o *corpus* de nossa análise, estas serão postas em diálogo com reflexões oriundas de investigações desenvolvidas por outros pesquisadores nacionais e internacionais da área de Educação Algébrica.

Devido ao foco das pesquisas desenvolvidas no GT04, a saber, questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Matemática no Ensino Superior, a primeira observação que fazemos acerca desta categoria já era por nós esperada: predominam reflexões acerca da natureza das dificuldades na aprendizagem de Álgebra na universidade. No entanto, muitas destas estão relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra na Educação Básica. Por esta razão, teceremos considerações abrangendo também esse nível educacional.

Uma primeira dificuldade, apontada por Savioli (2009, p. 6) a partir das ideias de Rojano (1996) está relacionada à “separação que os estudantes costumam fazer entre manipulação algébrica e seu uso na solução de problemas, bem como fatores decisivos na evolução da constituição da linguagem algébrica”. Complementa assegurando que a origem de tal dificuldade pode ser uma “educação algébrica que oculta a semântica de sua gramática”. A dificuldade dos estudantes na manipulação simbólica, diretamente relacionada a esta questão, é aspecto ressaltado por Kirnev e Savioli (2017).

Uma questão que tem origem no tipo de abordagem de Álgebra que é praticada na Educação Básica e posteriormente repercute no estudo deste campo da Matemática, especialmente das Estruturas Algébricas, na universidade e que, portanto, está diretamente relacionada à natureza de algumas dificuldades com a Álgebra é, segundo Kirnev e Savioli (2017), a apresentação precoce da álgebra estrutural, precedendo os trabalhos com os processos algébricos e sem a preocupação com o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O não desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos escolares pode estar na raiz de outra dificuldade evidenciada pelo estudante na universidade: fixar-se em casos particulares ao invés de buscar generalizações, aspecto salientando por Elias, Barbosa e Savioli (2012). Outro tipo de dificuldade em questões de Álgebra apontado por estes autores está relacionado ao fato de que os estudantes, em muitos casos, ao chegar à universidade e se deparar com disciplinas tratando de tópicos avançados de Álgebra, em razão das abordagens dadas na Educação Básica, “não se desprenderam de um padrão de imitar soluções. Isso revela que eles ainda não construíram estratégias mentais que os aproximariam do novo estatuto cognitivo dos objetos matemáticos da matemática avançada” (p. 15).

Mais uma questão, diretamente associada ao que foi discutido no parágrafo anterior e também relacionada à natureza de algumas dificuldades enfrentadas no estudo de Álgebra na universidade está vinculada ao entrave do estudante em ampliar seus conhecimentos, a partir do ponto de vista do Ensino Superior, a respeito de alguns conteúdos estudados na Educação Básica. Kirnev e Savioli (2017) citam o caso do anel de polinômios que normalmente é estudado em disciplinas de *Estruturas Algébricas*. Afiram que, neste contexto, os estudantes associam “as experiências vividas com as *operações com polinômios* usualmente abordadas na Educação Básica, sendo desprezadas nesse processo de resolução as

experiências vivenciadas no Ensino Superior [...], ou seja, os estudantes não associam ambos os processos de ensino e aprendizagem” (p. 544).

Outro aspecto ligado à natureza de dificuldades enfrentadas pelos estudantes com a Álgebra e que evidencia o quão relacionados estão as abordagens dadas à Matemática na Educação Básica com o desempenho dos estudantes no Ensino Superior, diz respeito ao fato de nos ensinos Fundamental e Médio a validade dos resultados matemáticos, em geral, não ser questionada; já é garantida de antemão pela própria Matemática. Para Kirnev e Savioli (2017, p. 535), em razão disso, “os estudantes no ciclo básico de aprendizagem não desenvolvem habilidades e competências [...] relacionadas aos *processos axiomáticos de provas e demonstrações*, culminando em dificuldades diante de conteúdos [...] abordados em *Estruturas Algébricas*”.

Dificuldades presentes na verificação da validade ou não de resultados matemáticos também são evidenciadas no estudo universitário de Álgebra. Elias, Barbosa e Savioli (2012, p. 11) ressaltam que, em alguns casos, o estudante comete “equívocos com elementos lógicos da demonstração, pois [...] utiliza fatos a serem demonstrados para demonstrar as propriedades”. Em relação a este aspecto, os autores com base em Nolt e Rohatyn (1991) ressaltam que se trata “da falácia do raciocínio circular, [...] erro que ocorre quando, no argumento demonstrativo, utiliza-se a própria conclusão, comprometendo, assim, sua irrefutabilidade” (p. 12). Também a respeito de dificuldades relacionadas às demonstrações em Álgebra, Elias, Barbosa e Savioli (2012) perceberam que, em muitos casos, o estudante não conseguem identificar o que de fato precisa ser provado. Exemplificam essa questão mencionando uma situação em que, embora o estudante devesse demonstrar a unicidade do *elemento neutro de grupo*, ele afirma “só vai ser *grupo* se...”, não reparando que não era o fato de ser ou não *grupo* que estava sendo posto à prova.

A dificuldade em compreender qual é a tarefa a ser realizada não se restringe às demonstrações. Kirnev e Savioli (2017) apontam que os estudantes, mesmo no Ensino Superior, ainda apresentam entraves associados à compreensão de enunciados e da notação utilizada.

Elias, Barbosa e Savioli (2012) salientam ainda mais um aspecto por eles percebido ao analisarem demonstrações construídas por estudantes em relação a tópicos avançados de Álgebra – no caso, especificamente, *grupo*: a visão elementar que eles têm em relação a esse conceito, “sem entendê-lo como um objeto matemático construído a partir da definição formal, com propriedades próprias” (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2012, p. 16).

Consultando outros textos de pesquisadores da Educação Algébrica, destacamos algumas outras possíveis naturezas de dificuldades relacionadas à aprendizagem de Álgebra, que não foram mencionadas pelos membros do GT04 em suas produções. Estão intimamente relacionadas à Educação Básica que, conforme já salientamos, não é o foco das pesquisas do mencionado GT.

Santos e Almeida (2015), a partir das ideias de autores como Rômulo Campos Lins, Joaquim Giménez, Yves Chevallard, Carolyn Kieran e Gérard Vergnaud, destacam que alguns entraves enfrentados pelos estudantes têm em sua origem a “dificuldade em perceber a existência de uma ruptura epistemológica na passagem do raciocínio aritmético para o algébrico, o que exige uma transição para a introdução de uma nova linguagem e forma de raciocínio lógico-matemático” (p. 542). Essa ideia trazida por Santos e Almeida (2015) relaciona-se diretamente à questão apontada por Kirnev e Savioli (2017) de, em geral, o ensino de Álgebra na Escola Básica ainda não enfatizar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A questão discutida no parágrafo anterior é também abordada por Schliemann (2015) que afirma, a partir de estudos de Carraher e Schliemann (2007) e Booth (1988) que “as dificuldades de estudantes, ao serem introduzidos à álgebra no ensino médio e secundário, têm sua origem [...] num currículo que enfatiza primeiro o ensino de aritmética e, só mais tarde, o ensino de álgebra e numa abordagem que [...] privilegia a manipulação de símbolos algébricos para a resolução de equações” (SCHLIEmann, 2015, p. 9).

Um último aspecto que gostaríamos de salientar nesta categoria é trazido por Santos e Almeida (2015) que, embasados em estudos de Da Rocha Falcão (1996), Pomerantsev e Korosteleva (2002) e Teles (2004), afirmam ainda não haver clareza dos obstáculos (na concepção de Brousseau (1997)), e se estes têm origens epistemológicas ou didáticas, relacionados aos erros ou às dificuldades dos estudantes em Álgebra.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio da investigação de caráter bibliográfico relatada neste artigo, constituindo-se como uma análise interpretativa de trechos, organizados em categorias elaboradas por intermédio de pressupostos da Análise de Conteúdo, das principais produções sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra de autoria de membros do GT04, que posteriormente foram articuladas com aportes provenientes de pesquisas desenvolvidas por autores de relevo no cenário da Educação Algébrica, apresentamos reflexões visando contribuir com debates acerca: dos *requisitos para aprender Álgebra*, de *como a Álgebra é ensinada e como deveria ser ensinada* e da *natureza das dificuldades evidenciadas na aprendizagem de Álgebra*.

Em relação aos *requisitos para aprender Álgebra*, tanto a partir das produções do GT04, quanto por meio do diálogo destas com pesquisas de outros autores, identificamos os seguintes:

- desenvolver o pensamento matemático e, desde os primeiros anos de escolaridade, o pensamento algébrico;
- desenvolver tanto a dimensão estrutural quanto a processual do conhecimento matemático;
- coordenar noções relacionadas a conjuntos, operações e axiomas;
- desenvolver estratégias de cálculo com compreensão;
- construir significado para a Álgebra e sua linguagem;
- desenvolver competências algébricas em dimensões de objeto e de instrumento;
- ser capaz de mobilizar diferentes usos da variável e de transitar entre eles de modo flexível.

A respeito de *como a Álgebra é ensinada*, o estudo realizado indica que, na visão dos autores dos textos analisados, predominam:

- uma postura letrista;
- a desconexão com outros conhecimentos matemáticos e com conhecimentos do mundo real dos estudantes;
- a memorização de procedimentos;
- a ênfase em operações sobre sequências de símbolos;
- a resoluções de problemas artificiais e sem significados para os estudantes;
- avaliações privilegiando a capacidade do estudante em produzir uma correta sequência de símbolos e não sua compreensão acerca dos conceitos e seu raciocínio matemático;
- a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica;
- a ênfase na resolução de atividades que consistem em converter a linguagem corrente em linguagem simbólica e aplicar algoritmos para a resolução de problemas.

Em contraposição a esse cenário, ao refletir acerca de *como a Álgebra deveria ser ensinada*, os autores das pesquisas com as quais trabalhamos neste artigo, salientam que deveriam predominar características como:

- oportunidade ao discente de conhecer como se deu a evolução histórico-epistemológica da Álgebra;
- discussões nas quais os estudantes pudessem colocar suas ideias acerca de cada assunto abordado, bem como se expressar em relação ao que e como aprenderam;
- motivação aos estudantes para descobrirem a importância dos conteúdos que estão sendo trabalhados;
- valorização de atividades que oportunizam o desenvolvimento de interpretações procedimentais;

- estabelecimento de uma raiz comum para a Álgebra e a Aritmética;
- trabalho com a Álgebra desde os primeiros anos de escolaridade;
- integração da Álgebra com outros tópicos;
- inserção de diferentes formas de pensamento algébrico;
- promoção de hábitos de pensamento e de representação nos quais se busque a generalização, o tratamento algébrico dos números e das operações, de forma a voltar a atenção às relações existentes e não apenas aos valores numéricos;
- simbolismo algébrico introduzido desde o início do trabalho com a Álgebra, por meio de situações nas quais os estudantes possam apreciar o poder dos símbolos na expressão de generalizações e justificações de fenômenos aritméticos;
- ênfase na produção, por parte dos estudantes, de significados para a Álgebra e no desenvolvimento da habilidade de pensar algebricamente.

Quando analisamos *o ensino de Álgebra em cursos que visam formar professores de Matemática*, as considerações que apresentamos indicam que, nesse contexto, há duas características bastante presentes e que podem converter-se em entraves:

- as disciplinas voltadas à discussão de como desenvolver o estudo e o ensino de Álgebra no Ensino Fundamental são tratadas como disciplinas com o objetivo de revisar conteúdos do Ensino Médio, sem oportunizar ao futuro professor articular os conceitos para sua futura prática docente;
- as disciplinas de Álgebra são, muitas vezes, ministradas conjuntamente com outros cursos, desconsiderando a especificidade que deveria haver na formação de um professor.

*Na formação do professor de Matemática, a Álgebra deveria ser ensinada*, segundo ressaltam os autores dos textos analisados, tendo-se por base os seguintes pressupostos:

- a necessidade de proporcionar aos (futuros) professores em formação a vivência e, consequentemente reflexões acerca de como estrutura-los, de ambientes de aprendizagem que tornam a Álgebra acessível à compreensão dos alunos;
- o conteúdo a ser trabalhado na formação inicial deve ser desenvolvido com vistas à atuação dos alunos como futuros professores, mas, de maneira mais abrangente, sem se limitar àquilo que os egressos irão lecionar, de forma que sejam capacitados para fundamentar melhor o que ensinam;
- a ênfase nas disciplinas de Álgebra nos cursos de formação de (futuros) professores deve estar na construção do alicerce básico para ensinar os princípios fundamentais da Matemática;
- deve-se sempre explorar com os (futuros) professores a importância da Álgebra e de seus pontos mais relevantes;
- os (futuros) docentes devem ser preparados, por meio da vivência de um conjunto diversificado de experiências de aprendizagem de Álgebra, a desenvolver conhecimentos de conteúdo e conhecimentos didáticos que os capacite a ensinar esse tema aos alunos dos primeiros anos de escolaridade;
- as abordagens exploratórias devem ser valorizadas por oportunizarem momentos de discussão, argumentação, estabelecimento de conjecturas, testes e validações de resultados;
- para auxiliar os (futuros) professores em formação para uma atuação que possa contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico por parte de seus estudantes, recomenda-se estruturar essa formação em termos de três dimensões: (a) construção de oportunidades de raciocínio algébrico; (b) desenvolver a capacidade

de identificar situações que oportunizam a generalização e então explorá-las; (c) A criação de uma cultura de sala de aula e práticas de encorajamento de processos de generalização e formalização no contexto de conjecturas e argumentação intencional, de modo que ocorram frequentemente oportunidades de raciocínio algébrico e estas sejam exploradas quando ocorrerem;

- as tarefas apresentadas na formação de (futuros) professores devem envolver pensamento algébrico, como forma, não só de prover um fundamento para o estudo subsequente de Álgebra, como também de aprofundar a compreensão da Aritmética;
- os (futuros) professores devem desenvolver uma compreensão acerca do que envolve e o que não envolve o ensino de Álgebra nos primeiros anos de escolaridade e devem ser estimulados a perceber a relação da Álgebra com a Aritmética.
- durante suas formações, os (futuros) professores precisam desenvolver uma compreensão pessoal sobre o que significa pensar algebricamente, objetivo que pode ser atingido a partir da vivência de múltiplas experiências de análise da variação, de identificação, representação e generalização de relações entre variáveis.

Embora os objetos das pesquisas do GT04 sejam o ensino e a aprendizagem de Matemática na universidade, muitas das reflexões relacionadas à Álgebra presentes nas investigações dos membros deste Grupo por nós sistematizadas neste artigo e postas em diálogo com afirmações de autores de referência, tanto no cenário nacional quanto internacional da Educação Algébrica, não dizem respeito especificamente ao Ensino Superior, permanecendo igualmente válidas ao considerar a Educação Básica. Isso pode ser ratificado pela síntese de nossas observações apresentadas até este momento nessas considerações finais desse artigo.

Reflexões relacionadas à especificidade do GT se fazem presentes de maneira mais contundente nas produções do Grupo ao considerarmos dados relativos à *natureza das dificuldades evidenciadas na aprendizagem de Álgebra*. No entanto, mesmo nesta categoria de análise há considerações pertinentes também à Educação Básica; estas estão relacionadas às seguintes possíveis causas das dificuldades percebidas na aprendizagem de Álgebra por parte dos alunos:

- um currículo que enfatiza primeiro o ensino de Aritmética e, só mais tarde, o ensino de Álgebra com abordagem privilegiando a manipulação de símbolos algébricos para a resolução de equações;
- a não compreensão de enunciados e das notações utilizadas;
- a separação que os estudantes costumam fazer entre manipulação algébrica (na qual também apresentam dificuldade) e seu uso na solução de problemas, bem como fatores decisivos na evolução da constituição da linguagem algébrica, algo que pode ter origem em uma educação algébrica que oculta a semântica de sua gramática;
- a apresentação precoce da álgebra estrutural, precedendo os trabalhos com os processos algébricos e sem a preocupação com o desenvolvimento do pensamento algébrico;
- a fixação em casos particulares ao invés de buscar generalizações;
- a não percepção da existência de uma ruptura epistemológica na passagem do raciocínio aritmético para o algébrico, o que exige uma transição para a introdução de uma nova linguagem e forma de raciocínio lógico-matemático.

Especificamente em relação à aprendizagem de Álgebra no Ensino Superior, as pesquisas do GT indicam como possíveis naturezas para as dificuldades:

- a necessidade, por parte dos estudantes, de construir estratégias mentais que os aproximem do novo estatuto cognitivo dos objetos matemáticos da Matemática Avançada;

- a necessidade de os estudantes ampliarem seus conhecimentos, a partir do ponto de vista do Ensino Superior, a respeito de alguns conteúdos estudados na Educação Básica;
- o não desenvolvimento, por parte dos estudantes, durante a Educação Básica, de competências e habilidades relacionadas aos processos axiomáticos de provas e demonstrações, uma vez que a validade dos resultados matemáticos, na maioria das vezes, não é questionada, mas já garantida de antemão. O não desenvolvimento dessas competências e habilidades resulta, no estudo universitário de Álgebra, em equívocos, pelos estudantes, como, por exemplo, utilizar a tese na demonstração e não conseguir identificar o que de fato é para ser provado;
- a não compreensão dos objetos da Álgebra avançada como sendo construídos a partir de uma definição formal e de propriedades características.

Esperamos, por meio das reflexões apresentadas neste artigo, contribuir tanto para a explicitação de aspectos que, por serem de fundamental importância nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra possam ser alvos de outras investigações visando aprofundar ou ampliar resultados já obtidos, tanto por parte de autores do GT04, quanto por quaisquer outros pesquisadores da Educação Matemática, como também para o repensar: dos currículos de Álgebra (em termos do que ensinar desta área da Matemática), da didática empregada ao seu trabalhar com a Álgebra (ou seja, como qualificar o ensino de conteúdos desta área), de práticas docentes nos diferentes níveis educacionais, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até a pós-graduação, e da abordagem da Álgebra em cursos de formação inicial e de formação continuada de professores.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, Elizabeth Adorno de. Ensino de Álgebra e formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.
- ARCAVI, Abraham. Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. **For the learning of Mathematics**. v. 14, n.1, p. 24-35, 1994.
- BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2001.
- BIANCHINI, Barbara Lutaif; LIMA, Gabriel Loureiro de. A Álgebra e seu papel: reflexões a partir das produções do GT 04 da SBEM. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 35, p. 981-999, 2021.
- BILLINGS, Esther. Exploring generalization through pictorial growth patterns. Em: GREENES, Carole; RUBENSTEIN, Rheta (Eds.). **Algebra and algebraic thinking in school mathematics**. Reston: NCTM, 2008. p. 279-293.
- BLANTON, Maria; KAPUT, James. Developing elementary teachers' "Algebra eyes and ears". **Teaching Children Mathematics**, v. 10, n. 2, p. 70-77, 2003.
- BLANTON, Maria; SCHIFTER, Deborah; INGE, Vickie; LOFGREN, Patty; WILLIS, Richmond; DAVIS Frank; CONFREY, Jere. Early algebra. Em: KATZ, Victor J. (Ed.). **Algebra: gateway to a technological future**. MAA Report. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 2007. p. 7-14.
- BOOTH, Leslie. R. Children's difficulties in beginning algebra. Em: COXFORD, Arthur. F.; SHULTE, Albert. P. (Eds.). **The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook**, p. 20-32. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

BRANCO, Neusa; PONTE, João Pedro da. A álgebra na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência de formação. **Indagatio Didactica**. Universidade de Aveiro, v. 3, n. 1, p. 59-79, fev. 2011.

BROUSSEAU, Guy. **Theory of didactical situations in mathematics**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

CARDOSO, Maria Teresa Pimentel Cardoso. **O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?**. 2010. 587f. Tese (Doutorado em Estudos da Criança, Área de Conhecimento: Matemática Elementar) – Instituto de Estudos da Criança, Universidade do Minho, Minho, 2010.

CARPENTER, Thomas P.; FRANKE, Megan L.; LEVI, Linda. **Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school**. Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia D. Early algebra and algebraic reasoning. Em: LESTER JR, Frank K. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**: a project of the National Council of Teachers of Mathematics, p. 669-705. Charlotte, NC:Information Age Publishing, 2007

DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. Clinical analysis of difficulties in algebraic problem solving among Brazilian students: principal aspects and didactic issues. Em: International Conference for the Psychology Of Mathematics Education (PME), 20th, 1996, Valencia (Espanha). **Proceedings...** Valencia: PME Editions, vol. 2, p.257- 264, 1996.

DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

DOUADY, Régine. Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. **Recherche en Didactique des Mathématiques**: La Pensée Sauvage Éditions, v. 7.2, p. 5-31, 1986.

ELIAS, Henrique Rizek; BARBOSA, Linlya Natássia Sachs Camerlengo de; SAVIOLI, Angela Marta Pereira Dores das. Indícios de dificuldade na compreensão da Matemática avançada: o conceito de grupo. Em: V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2012, **Anais...** Petrópolis/BR, p.1-17, 2012.

FIGUEIREDO, Auriluci de Carvalho. **Saberes e concepções de Educação Algébrica em um curso de Licenciatura em Matemática**. 2007. 290f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FIorentini, Dario; MIGUEL, Antonio; MIORIN, Maria Ângela. Contribuições para um repensar... A educação algébrica elementar. **Pro-prosições**, v. 4, n 1, p. 78-91, 1993.

FROTA, Maria Clara Rezende; BIANCHINI, Barbara Lutaif; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas, SP: SBEM, Papirus, 2013.

FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Brasília: SBEM, 2009.

GRUGEON, Brigitte. **Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BEP et Première G.** 1995. 680f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Université de Paris 7 Denis Diderot, 1995.

HEIRDSFIELD, Ann; COOPER, Thomas. Inaccurate mental addition and subtraction: Causes and compensation. Em: BARTON, Bill; IRWIN, Kathryn; PFANNKUCH, Maxine; THOMAS, Michael O. J. (Eds.). **Proceedings Mathematics Education in the South Pacific**, 2002, p. 334-341. Auckland, NZ.

JACOBS, Victoria R.; FRANKE, Megan L.; CARPENTER, Thomas P.; LEVI, Linda; BATTERY, Dan. Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 38, n. 3, p. 258-288, 2007.

KAPUT, James J. Teaching and Learning a new algebra with understanding. **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999.

KAPUT, James; BLANTON, Maria. Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming Task Structure. **Proceedings of the ICMI - Algebra Conference**. Melbourne, Australia, p.344-351. Dec. 2001.

KIERAN, Carolyn. Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it?. **Mathematics Educator**, v.8, n.1, p. 139-151, 2004.

KIERAN, Carolyn. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. Em: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Alberto. P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 104-110.

KIERAN, Carolyn. **The learning and teaching of school algebra**. Em: GROUWS, Douglas. (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, p. 390-419. 1992.

KIRNEV, Débora Cristiane Barbosa; SAVIOLI, Angela Marta Pereira Dores das. *Set-befores e Met-befores: influência no estudo de anéis de polinômios*. VIDYA. Santa Maria: Revista do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, v.37, n.2, p. 533-547, 2017.

KRIEGLER, Shelley. Just what is algebraic thinking. **Retrieved September**, v. 10, p. 1-11, 2008.

LINS, Romulo Campos. **A framework for understanding what Algebraic Thinking is**. 1992. 372f. Tese (Doutorado em Filosofia) - School of Education, University of Nothingam, Nothingam, 1992.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

MARCONI, Eva Maria; LAKATOS, Marina de Andrade. **Fundamentos da metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

MCINTOSH, Alistair. Teaching mental algorithms constructively. Em: MORROW, Lorna J.; KENNEY, Margaret J. (Eds.). **The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics – 1998 Yearbook**, p. 44-48. Reston: NCTM, 1998.

MIGUEL, Antonio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Pró-Posições**, v.3., n.1, p. 39-54, 1992.

MONDINI, Fabiane; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A presença da Álgebra nos cursos de Licenciatura em Matemática no Estado do Rio Grande do Sul. **Acta Scientiae**. Canoas, v.12, n.2, p. 43-54, jul./dez. 2010.

NOLT, John; ROHATYN, Dennis. **Lógica**. Tradução de Mineko Yamashita. São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

PIRES, Flavio de Souza. **Álgebra e Formação Docente: o que dizem os futuros professores de Matemática.** 2012. 138f. Dissertação (Mestrado em Educação, Área de Concentração: . **Álgebra e Formação Docente: o que dizem os futuros professores de Matemática.** 2012. 138f. Dissertação (Mestrado em Educação, Área de Concentração: Educação) – Programa de Pós Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

POMERANTSEV, Lucy; KOROSTELEVA, Olga. Do Prospective Elementary And Middle School Teachers Understand The Structure Of Algebraic Expressions? **Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal 1: Content Knowledge** (electronic), p. 1-10, 2002.

PONTE, João Pedro; CHAPMAN, Olive. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. Em: ENGLISH, Lyn; KIRSHNER, David (Eds.). **Handbook of International Research in Mathematics Education**, p. 223 -261. New York: Taylor and Francis, 2008.

PONTE, João. Pedro da; BRANCO, Neusa. Pensamento algébrico na formação inicial de professores. **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, n. 50, p. 135-155, out./dez. 2013. Editora UFPR.

RIVERA, Ferdinand. Changing the face of Arithmetic: Teaching Children Algebra. **Teaching Children Mathematics**, v. 12, n. 6, p. 306-311, 2006.

ROJANO, Teresa. The role of problems and problem solving in the development of algebra. Em: BEDNARZ, Nardine.; KIERAN, Carolyn.; LEE, Lee. **Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching**. London: Kluwer Academic Publishers, p. 55-62, 1996.

SANTOS, Marcelo Câmara; ALMEIDA, Jadilson Ramos. Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil: Pesquisa em Educação Algébrica. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v.17, n.13, p. 541-555, 2015.

SAVIOLI, Angela Marta Pereira Dores das. Equações Algébricas nas Práticas Vivenciadas: uma abordagem histórica. Em: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2006, **Anais...** Curitiba/BR, p.1-09, 2006.

SAVIOLI, Angela Marta Pereira Dores das. Origens e caracterizações da Álgebra e do Pensamento Algébrico sob a ótica de vários autores. Em: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2019, **Anais...** Taguatinga/BR, p.1-17, 2009.

SCHLIEMANN, Analúcia D. Aritmética, Álgebra, Funções e Representações Múltiplas Através do Currículo Escolar. Em: Encontro de Investigação em Educação Matemática - Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 2015, **Atas...** Bragança/PT, p.09-27, 2015.

SCHLIEMANN, Analúcia; CARRAHER, David; BRIZUELA, Barbara. **Bringing out the algebraic character of arithmetic - From children's ideas to classroom practice**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2007.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 23.ed. São Paulo: Cortez, 2007.

TALL, David. **Advanced mathematical thinking**. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.

TALL, David. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. Em: International Conference for the Psychology Of Mathematics Education, 19., 1995, Recife. **Anais...** Recife, 1995, v. 1, p. 161-175.

TALL, David. The Transition to Formal Thinking in: Mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, v. 20 n. 2, p. 5-24, 2008.

TALL, David. Thinking through three worlds of mathematics. Em: **Proceedings of the 28th conference of PME**, Bergen, Norway, p. 281-288, 2004.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. A Relação entre a Aritmética e a Álgebra na Matemática Escolar: a influência da compreensão das propriedades da igualdade e o conceito de operações inversas na resolução de equações polinomiais do 1º grau. Em: VIII Encontro de Educação Matemática, 2004, **Anais...** Recife/PE, 2004.

THRELFALL, John. Flexible mental calculation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 50, n. 1, p. 29-47, 2002.

TRIGUEIROS, Maria. URSINI, Sonia. Integración de los distintos usos de la variable. Em: V CIBEM – Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 2005, Porto. **Actas V CIBEM**. 2005.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. Em: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Alberto P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 9-22.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa. O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. **Da Investigação às Práticas**, v. 3, n. 2, p. 98–124, 2013.

## CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Autor 1 – Coordenador do projeto, participação ativa na análise dos dados e revisão da escrita final.  
 Autora 2 – Coordenadora do projeto, participação ativa na análise dos dados e revisão da escrita final.

## DECLARAÇÃO DE CONFLITO DE INTERESSE

Os autores declaram que não há conflito de interesse com o presente artigo.

**Submetido:** 09/07/2020

**Aprovado:** 15/02/2022