



Ingeniería, investigación y tecnología

ISSN: 1405-7743

ISSN: 2594-0732

Facultad de Ingeniería, UNAM

Arganis-Juárez, Maritza Liliana; Cortés-Rosas, Jesús Javier; González-Cárdenas, Miguel Eduardo; Pinilla-Morán, Víctor Damián; Salazar-Moreno, Alfonso; García-Burgos, Salvador  
Métodos de integración numérica de Newton aplicados en un problema de manejo de embalses  
Ingeniería, investigación y tecnología, vol. XIX, núm. 2, 2018, Abril-Junio, pp. 183-193  
Facultad de Ingeniería, UNAM

DOI: <https://doi.org/10.22201/ii.25940732e.2018.19n2.016>

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40458281006>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en [redalyc.org](https://www.redalyc.org)

UNAM  
[redalyc.org](https://www.redalyc.org)

Sistema de Información Científica Redalyc  
Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso  
abierto



# Métodos de integración numérica de Newton aplicados en un problema de manejo de embalses

## Newton's numerical integration schemes applied in a reservoir operation problem

Arganis-Juárez Maritza Liliana

Universidad Nacional Autónoma de México

Instituto de Ingeniería, Facultad de Ingeniería

Correo: MArganisJ@ingen.unam.mx

Cortés-Rosas Jesús Javier

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería

Correo: j.javier.cortes@gmail.com

González-Cárdenas Miguel Eduardo

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería

Correo: migue\_033@yahoo.com.mx

Pinilla-Morán Víctor Damián

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería

Correo: vdpinillam@gmail.com

Salazar-Moreno Alfonso

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería

Correo: ing.alfonso.salazar.moreno@gmail.com

García-Burgos Salvador

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería

Correo: salvador.gb40@gmail.com

### Resumen

En este trabajo se presenta un estudio de caso para aplicar los conceptos de integración numérica de utilidad en las ciencias básicas de ingeniería. Se obtuvo el volumen de almacenamiento en un embalse, usando los esquemas de integración numérica de Newton (Trapezoidal, Simpson 1/3 y Simpson 3/8) a partir de los datos del tránsito de avenidas por el embalse de la presa "Las Cruces", del proyecto hidroeléctrico de la Comisión Federal de Electricidad en el que se consideró como hidrograma de entrada la avenida de diseño para la obra de excedencias. Los resultados de los volúmenes calculados se compararon con los que reportó el programa que realiza el tránsito de la avenida, obteniéndose resultados conservadores con los métodos de integración Newton, respecto a la integración a través de rectángulos que realiza el programa de tránsito de la Comisión Federal de Electricidad.

**Descriptores:** Esquemas de integración numérica de Newton, esquema trapezoidal, esquema de simpson 1/3, esquema de simpson 3/8, volumen de almacenamiento de un embalse.

### Abstract

This paper presents a case study to apply the concepts of numerical integration which is a useful concept in the engineering basic sciences. The storage volume in a reservoir was obtained using Newton's numerical integration schemes (Trapezoidal rule, Simpson 1/3 and Simpson 3/8) from data of flood routing by the dam "Las Cruces", an hydroelectric project of the Federal Electricity Committee where it was considered as input the design hydrograph for the spillway. The results of the calculated volumes were compared with those who reported the program that performs the flood routing, giving conservative results with Newton's integration methods regarding integration through rectangles that performs the flood routing program of the Federal Electricity Committee.

**Keywords:** Newton's numerical integration schemes, trapezoidal scheme, simpson 1/3 scheme, simpson 3/8 scheme, reservoir storage volume.

### INTRODUCCIÓN

El tránsito o laminación de avenidas por embalses es uno de los problemas fundamentales de la hidrología de superficie que se aplica en el diseño y revisión de la obra de excedencias de una presa, en este tipo de obras colaboran ingenieros de distintas áreas (ingenieros civiles, mecánicos, electricistas, geofísicos, geólogos, entre otros). Con el desarrollo de equipos de cómputo los métodos numéricos para su cálculo, basados todos ellos en la ecuación de continuidad han cobrado auge como herramienta para obtener resultados a este problema. En

este trabajo se seleccionaron los resultados de los hidrogramas de entrada y de salida, además del volumen de almacenamiento máximo que dio el programa trate.bas de la Comisión Federal de Electricidad (CFE) considerando los datos de la avenida de diseño con periodo de retorno de 10,000 años que podría presentarse en el embalse de un proyecto hidroeléctrico (P.H) que se construirá próximamente en México; se hizo una comparación de los resultados que se obtienen al usar los métodos de integración numérica de Newton: Trapezoidal, Simpson 1/3 y Simpson 3/8 para calcular el volumen de almacenamiento a partir del concepto del área encerra-

da entre dos curvas (en este problema las curvas son los hidrogramas de entrada y de salida). Los métodos de integración numérica tienen numerosas aplicaciones en la ingeniería (Smith, 1988; Campos-Aranda, 2002; Frontini y Sormani, 2002; Nieves y Domínguez, 2014; Yusuf-Osama, 2012).

### METODOLOGÍA

#### ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ecuación diferencial de continuidad utilizada en el tránsito de avenidas de embalses se puede expresar como

$$I - O = \frac{ds}{dt} \quad (1)$$

donde

$I$  = datos del hidrograma de entrada  
 $O$  = hidrograma de salida  
 $dS/dt$  = variación del almacenamiento en el embalse en el tiempo

Se entiende por hidrograma a la curva que representa la variación del gasto o caudal a lo largo del tiempo.

Si se integra la ecuación 1

$$\int dS = \int (I - O) dt \quad (2)$$

En la ecuación 2 se puede observar la relación del incremento del volumen almacenado con el caudal o gasto de entrada  $I$ , el caudal de salida  $O$  y el incremento del tiempo. Pero si el objetivo es obtener el volumen almacenado  $S$  al final de un intervalo, se trata de una ecuación con dos incógnitas porque el caudal de salida  $O$  es otra variable que no se conoce al final del intervalo, por ese motivo este problema se resuelve con auxilio de la curva elevaciones capacidades del embalse.

El tránsito de avenidas permite resolver este problema y con este procedimiento se revisa el funcionamiento hidrológico adecuado del embalse ante el posible paso de una avenida en el mismo, ya que se debe garantizar que con la operación de la obra de excedencias no se rebasa el nivel de aguas máximas extraordinarias (NAME) de diseño de la presa.

### CFE PROGRAMA TRATE.BAS

Este programa está codificado en Quick Basic, utiliza el método numérico de tránsito de avenidas del Manual de Obras Civiles de la Comisión Federal de Electricidad (CFE, 1980); este método resuelve la ecuación de continuidad (1) reordenándola de manera conveniente y usando la curva elevaciones capacidades descargas, realizando un proceso por aproximaciones sucesivas al valor del gasto de salida en cada intervalo de tiempo analizado.

### ESQUEMA DE INTEGRACIÓN TRAPEZIAL

La fórmula de integración trapezoidal o del trapecio, estima a la integral definida de una función  $y(x)$  entre los límites  $x_0$  y  $x_n$  a partir de la suma de las integrales de polinomios de primer grado pasados entre cada dos puntos; el esquema de integración trapezoidal, en término de las ordenadas de la función, tabulada con un incremento  $h$  en la variable independiente, se representa de la manera siguiente

$$A_{1/2} = \frac{h}{2} \left( y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \quad (3)$$

La notación anterior obedece a la interpretación geométrica de la integral como el área bajo una curva, el  $\frac{1}{2}$  corresponde al factor que afecta al incremento constante  $h$  en la variable independiente. El error que se cometa al calcular la integral con esta expresión será pequeño si el incremento constante  $h$  utilizado es pequeño (Iriarte, 1990; Luthe *et al.*, 1984; Gerald, 1990).

### ESQUEMA DE SIMPSON 1/3

El esquema de integración de Simpson 1/3, se obtiene a partir de pasar polinomios de segundo grado entre cada tres puntos de la función  $y(x)$ , se denota

$$A_{1/3} = \frac{h}{3} \left( y_0 + y_n + 2 \sum y_{par} + 4 \sum y_{impar} \right) \quad (4)$$

Esta fórmula de integración tiene la restricción de para poder aplicar la  $n$  (subíndice del último valor del intervalo de integración) debe ser número par (Iriarte, 1990; Luthe *et al.*, 1984; Curtis, 1990).

### ESQUEMA DE SIMPSON 3/8

El esquema de integración de Simpson 3/8 considera pasar polinomios de tercer grado entre cada cuatro puntos de la función  $y(x)$  y está dado por la ecuación siguiente

$$A_{3/8} = \frac{3}{8}h(y_0 + y_n + 2\sum y_{\text{múltiplos de 3}} + 3\sum y_{\text{restantes}}) \quad (5)$$

Para que la fórmula de Simpson 3/8 sea aplicable  $n$  debe ser múltiplo de 3.

En las ecuaciones 3 a 5 la variable  $A$  representa al incremento en el volumen almacenado  $S$  de la ecuación 1,  $h$  representa el incremento constante en el tiempo  $t$  del hidrograma de entrada y de salida, la variable  $y$  corresponde a las ordenadas del hidrograma de entrada  $y$  o de salida ( $I$ ,  $O$ ).

Los esquemas de Simpson 1/3 y Simpson 3/8 proporcionan resultados similares, aunque la función corresponda a un polinomio de grado superior a tres; estas dos expresiones son las que producen menores errores en la estimación de la integral, pero hay que tomar en cuenta que tienen restricciones en su aplicación. También se puede calcular el valor de la integral combinando las dos expresiones anteriores, utilizándolas por tramos, en que sean aplicables (Iriarte, 1990; Luthe *et al.*, 1984, Gerald, 1990).

### DATOS DE ENTRADA AL PROBLEMA

Se tomó la información de los hidrogramas de entrada y salida que resultaron de aplicar el programa de tránsito de avenidas Trate.bas de la CFE, a partir de condiciones iniciales en el embalse previamente especificadas (se tiene que conocer la elevación inicial en el embalse, el hidrograma de entrada  $I$  al embalse, la curva elevaciones-capacidades de almacenamiento del embalse y la curva elevaciones-descargas por la obra de excedencias  $y$ , de existir, descargas por la obra de toma de la presa).

Los hidrogramas de entrada y salida constaron de 241 datos (desde  $t=0$  hasta  $t=240$ ) (Tabla 1) en la tabla aparece  $i$  que es  $s$  el contador de datos, el tiempo en horas, el volumen almacenado en el embalse en  $\text{hm}^3$ , la elevación en  $m$ , el gasto de entrada  $I$  en  $\text{m}^3/\text{s}$  y el gasto de salida  $O$  en  $\text{m}^3/\text{s}$ .

El hidrograma de entrada que se utilizó correspondió al obtenido para un periodo de retorno de 10,000 años, periodo de tiempo en años que comúnmente se utiliza para el diseño de la obra de excedencias de gran-

des presas, es decir, no se aplica una avenida histórica, sino una avenida de diseño. El periodo de retorno se define como el tiempo en años que en promedio puede transcurrir para que un evento (en el ejemplo un caudal o gasto) pueda ocurrir al menos una vez en este tiempo.

En la Figura 1 se dibujan los hidrogramas de entrada, salida, así como información relevante resultado del tránsito de la avenida por el embalse.

### APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA PARA ESTIMAR EL VOLUMEN ALMACENADO EN EL EMBALSE

#### PROBLEMA

##### Caso 1

Se obtendrá el volumen de almacenamiento neto ante el paso de la avenida por el embalse de un Proyecto Hidroeléctrico. El volumen que se desea obtener corresponde al área encerrada entre las dos curvas (la del hidrograma de entrada menos la del hidrograma de salida).

Se considera un factor de conversión de unidades para obtener el volumen  $S$  en millones de  $\text{m}^3$ , porque el gasto está en  $\text{m}^3/\text{s}$  y el tiempo en horas, para ello se transforma el tiempo a segundos, multiplicando por los segundos de una hora y con ello se obtendría el volumen en  $\text{m}^3$  y al dividir entre un millón se logra obtener el volumen en millones de  $\text{m}^3$ .

Como  $n=240$ , es par y es múltiplo de 3, se aplicarán los esquemas de integración de Simpson 1/3 y Simpson 3/8, adicionalmente se utilizará el esquema de integración trapecial para comparar los resultados con el dato del incremento del volumen reportado por el programa con que se realizó el tránsito de la avenida.

### DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación se hace un resumen de los resultados del volumen neto adicional que almacenó el embalse al pasar la avenida por él.

En las tablas anteriores  $A_1$  es el área bajo el hidrograma de entrada y  $A_2$  es el área bajo el hidrograma de salida.

#### DETALLE DE LA ESTIMACIÓN DE LA DIFERENCIA DEL VOLUMEN DEL CASO DE LA TABLA 2

Cálculo de  $A_1$ . En el esquema de integración trapecial no se toma en cuenta el valor final del contador de datos  $i$ , por lo que se usa el esquema considerando como factor el incremento del tiempo entre dos y multiplicando a una vez el dato del hidrograma de entrada  $I$  (pri-

Tabla 1. Resultados de un tránsito de avenidas por el embalse de un proyecto hidroeléctrico

i	Tiempo (h)	Volumen almacenado (hm <sup>3</sup> )	Elevación (m)	Gasto de entrada (m <sup>3</sup> /s)	Gasto de salida (m <sup>3</sup> /s)	i	Tiempo (h)	Volumen almacenado S (hm <sup>3</sup> )	Elevación (m)	Gasto de entrada I (m <sup>3</sup> /s)	Gasto de salida O (m <sup>3</sup> /s)
0	0	1626.318	238	1578.25	0	36	36	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
1	1	1627.626	238.031	1578.25	1559.003	37	37	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
2	2	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	38	38	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
3	3	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	39	39	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
4	4	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	40	40	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
5	5	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	41	41	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
6	6	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	42	42	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
7	7	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	43	43	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
8	8	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	44	44	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
9	9	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	45	45	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
10	10	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	46	46	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
11	11	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	47	47	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
12	12	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	48	48	1627.748	238.034	1703.69	1703.69
13	13	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	49	49	1627.874	238.037	1899.28	1853.785
14	14	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	50	50	1627.912	238.038	1899.28	1898.61
15	15	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	51	51	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
16	16	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	52	52	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
17	17	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	53	53	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
18	18	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	54	54	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
19	19	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	55	55	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
20	20	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	56	56	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
21	21	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	57	57	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
22	22	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	58	58	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
23	23	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	59	59	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
24	24	1627.643	238.032	1578.25	1577.996	60	60	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
25	25	1627.724	238.034	1703.69	1674.484	61	61	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
26	26	1627.748	238.034	1703.69	1703.355	62	62	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
27	27	1627.748	238.034	1703.69	1703.69	63	63	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
28	28	1627.748	238.034	1703.69	1703.69	64	64	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
29	29	1627.748	238.034	1703.69	1703.69	65	65	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
30	30	1627.748	238.034	1703.69	1703.69	66	66	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
31	31	1627.748	238.034	1703.69	1703.69	67	67	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
32	32	1627.748	238.034	1703.69	1703.69	68	68	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
33	33	1627.748	238.034	1703.69	1703.69	69	69	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
34	34	1627.748	238.034	1703.69	1703.69	70	70	1627.912	238.038	1899.28	1899.28
35	35	1627.748	238.034	1703.69	1703.69	71	71	1627.912	238.038	1899.28	1899.28

Tabla 1. Continuación

i	Tiempo (h)	Volumen almacenado (hm <sup>3</sup> )	Elevación (m)	Gasto de entrada (m <sup>3</sup> /s)	Gasto de salida (m <sup>3</sup> /s)	i	Tiempo (h)	Volumen almacenado S (hm <sup>3</sup> )	Elevación (m)	Gasto de entrada I (m <sup>3</sup> /s)	Gasto de salida O (m <sup>3</sup> /s)
72	72	1627.912	238.038	1899.28	1899.28	107	107	1694.456	239.63	11413.86	8335.535
73	73	1628.203	238.045	2350.02	2245.815	108	108	1706.678	239.922	12237.79	8531.585
74	74	1628.29	238.047	2350.02	2349.14	109	109	1718.563	240.193	11625.59	8720.173
75	75	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	110	110	1727.653	240.396	11013.1	8861.359
76	76	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	111	111	1734.105	240.54	10400.61	8961.561
77	77	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	112	112	1738.061	240.629	9788.12	9023.013
78	78	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	113	113	1739.657	240.665	9175.63	9047.806
79	79	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	114	114	1739.023	240.65	8563.14	9037.943
80	80	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	115	115	1736.278	240.589	7950.65	8995.325
81	81	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	116	116	1731.538	240.483	7338.16	8921.709
82	82	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	117	117	1724.912	240.335	6725.67	8818.794
83	83	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	118	118	1716.502	240.147	6113.18	8688.169
84	84	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	119	119	1706.409	239.916	5500.69	8527.258
85	85	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	120	120	1694.74	239.637	4888.2	8340.098
86	86	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	121	121	1681.583	239.322	4275.38	8129.07
87	87	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	122	122	1669.064	239.022	4220.922	4969.81
88	88	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	123	123	1668.745	239.015	4166.823	4172.595
89	89	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	124	124	1668.724	239.014	4112.724	4118.352
90	90	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	125	125	1668.703	239.014	4058.625	4064.108
91	91	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	126	126	1668.682	239.013	4004.526	4011.508
92	92	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	127	127	1668.661	239.013	3950.427	3955.621
93	93	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	128	128	1668.641	239.012	3896.328	3901.377
94	94	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	129	129	1668.619	239.012	3842.229	3848.778
95	95	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	130	130	1668.598	239.011	3788.13	3794.534
96	96	1628.291	238.047	2350.02	2349.9	131	131	1668.577	239.011	3734.031	3738.647
97	97	1629.382	238.073	3174.06	2491.419	132	132	1668.556	239.01	3679.932	3686.047
98	98	1633.311	238.167	3998.04	2498.385	133	133	1668.535	239.01	3625.833	3631.804
99	99	1640.173	238.331	4822.02	2510.548	134	134	1668.514	239.009	3571.734	3577.56
100	100	1649.948	238.565	5646	2527.874	135	135	1668.493	239.009	3517.635	3523.317
101	101	1662.617	238.868	6469.98	2550.331	136	136	1668.472	239.008	3463.536	3469.073
102	102	1669.919	239.043	7293.96	7198.724	137	137	1668.451	239.008	3409.437	3416.474
103	103	1670.259	239.051	8117.94	7947.435	138	138	1668.43	239.007	3355.338	3362.23
104	104	1672.311	239.1	8941.92	7980.336	139	139	1668.409	239.007	3301.239	3306.343
105	105	1677.129	239.216	9765.9	8057.629	140	140	1668.388	239.006	3247.14	3253.743
106	106	1684.56	239.393	10589.88	8176.806	141	141	1668.367	239.006	3193.041	3199.5

Tabla1. Continuación

i	Tiempo (h)	Volumen almacenado (hm <sup>3</sup> )	Elevación (m)	Gasto de entrada (m <sup>3</sup> /s)	Gasto de salida (m <sup>3</sup> /s)	i	Tiempo (h)	Volumen almacenado S (hm <sup>3</sup> )	Elevación (m)	Gasto de entrada I (m <sup>3</sup> /s)	Gasto de salida O (m <sup>3</sup> /s)
142	142	1668.346	239.005	3138.942	3145.256	177	177	1629.993	238.088	1808.24	2492.503
143	143	1668.325	239.005	3084.843	3091.013	178	178	1627.959	238.039	1808.24	1954.831
144	144	1668.305	239.004	3030.744	3036.769	179	179	1627.838	238.036	1808.24	1809.719
145	145	1668.284	239.004	2977	2982.526	180	180	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
146	146	1667.995	238.997	2341.38	2559.865	181	181	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
147	147	1667.211	238.978	2341.38	2558.474	182	182	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
148	148	1666.432	238.96	2341.38	2557.094	183	183	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
149	149	1665.658	238.941	2341.38	2555.722	184	184	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
150	150	1664.889	238.923	2341.38	2554.359	185	185	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
151	151	1664.125	238.904	2341.38	2553.004	186	186	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
152	152	1663.365	238.886	2341.38	2551.658	187	187	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
153	153	1662.611	238.868	2341.38	2550.32	188	188	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
154	154	1661.861	238.85	2341.38	2548.99	189	189	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
155	155	1661.116	238.832	2341.38	2547.67	190	190	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
156	156	1660.375	238.815	2341.38	2546.358	191	191	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
157	157	1659.64	238.797	2341.38	2545.054	192	192	1627.836	238.036	1808.24	1808.2
158	158	1658.909	238.78	2341.38	2543.759	193	193	1627.698	238.033	1595.07	1644.094
159	159	1658.183	238.762	2341.38	2542.471	194	194	1627.658	238.032	1595.07	1595.471
160	160	1657.461	238.745	2341.38	2541.192	195	195	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
161	161	1656.744	238.728	2341.38	2539.921	196	196	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
162	162	1656.032	238.711	2341.38	2538.658	197	197	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
163	163	1655.324	238.694	2341.38	2537.403	198	198	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
164	164	1654.62	238.677	2341.38	2536.156	199	199	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
165	165	1653.921	238.66	2341.38	2534.918	200	200	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
166	166	1653.227	238.644	2341.38	2533.687	201	201	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
167	167	1652.537	238.627	2341.38	2532.463	202	202	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
168	168	1651.851	238.611	2341.38	2531.248	203	203	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
169	169	1650.212	238.572	1808.24	2528.342	204	204	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
170	170	1647.628	238.51	1808.24	2523.761	205	205	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
171	171	1645.06	238.448	1808.24	2519.21	206	206	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
172	172	1642.508	238.387	1808.24	2514.687	207	207	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
173	173	1639.973	238.327	1808.24	2510.193	208	208	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
174	174	1637.454	238.266	1808.24	2505.728	209	209	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
175	175	1634.951	238.207	1808.24	2501.292	210	210	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
176	176	1632.464	238.147	1808.24	2496.883	211	211	1627.657	238.032	1595.07	1595.471



Tabla 1. Continuación

i	Tiempo (h)	Volumen almacenado S (hm <sup>3</sup> )	Elevación (m)	Gasto de entrada I (m <sup>3</sup> /s)	Gasto de salida O (m <sup>3</sup> /s)
212	212	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
213	213	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
214	214	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
215	215	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
216	216	1627.657	238.032	1595.07	1595.471
217	217	1627.636	238.032	1562.65	1570.399
218	218	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
219	219	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
220	220	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
221	221	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
222	222	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
223	223	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
224	224	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
225	225	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
226	226	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
227	227	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
228	228	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
229	229	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
230	230	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
231	231	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
232	232	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
233	233	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
234	234	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
235	235	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
236	236	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
237	237	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
238	238	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
239	239	1627.63	238.031	1562.65	1562.801
240	240	1627.63	238.031	1562.65	1562.801



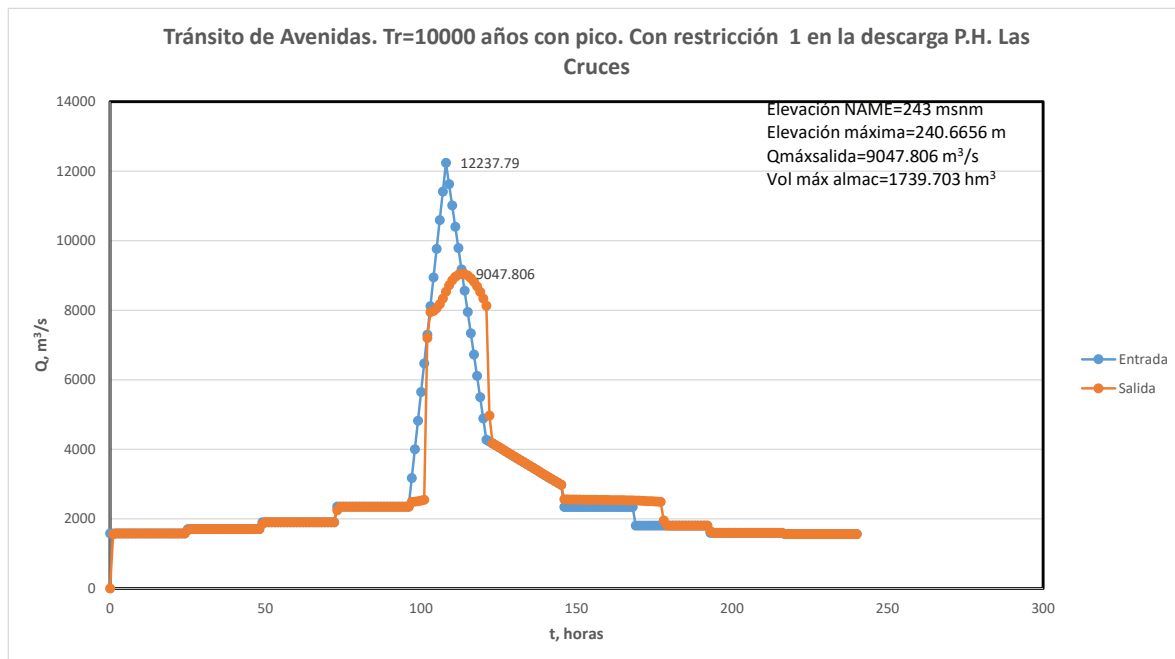


Figura 1. Resumen de resultados del tránsito de avenidas, para una avenida de diseño correspondiente a un periodo de retorno de 10,000 años

Tabla 2. Volumen neto almacenado por el embalse, calculado por el método de integración trapecial

$A_1$ , hm³	$A_2$ , hm³	Diferencia de volumen, hm³
2289.575	2282.957	6.618

Tabla 3. Volumen neto almacenado por el embalse, calculado por el método de integración Simpson 1/3

$A_1$ , hm³	$A_2$ , hm³	Diferencia de volumen, hm³
2282.009	2276.060	5.949

Tabla 4. Volumen neto almacenado por el embalse, calculado por el método de integración Simpson 3/8

$A_1$ , hm³	$A_2$ , hm³	Diferencia de volumen, hm³
2289.296	2282.201	7.095

mer renglón, quinta columna) más una vez el último valor del hidrograma de entrada I (último renglón, quinta columna) más dos veces la suma de las ordenadas intermedias del hidrograma de entrada I (del segundo al penúltimo renglón) y multiplicando por los factores de conversión de unidades para obtener al volumen en hm³.

Cálculo de  $A_2$ . Se emplea el esquema de integración trapecial considerando como factor el incremento del tiempo entre dos y multiplicando a una vez el dato del hidrograma de salida O (primer renglón, sexta colum-

na) más una vez el último valor del hidrograma de salida O (último renglón, sexta columna) más dos veces la suma de las ordenadas intermedias del hidrograma de entrada O (del segundo al penúltimo renglón) y multiplicando por los factores de conversión de unidades para obtener al volumen en hm³.

La diferencia de volumen. Corresponde a la diferencia de  $A_1$  menos  $A_2$ .

### DETALLE DE LA ESTIMACIÓN DE LA DIFERENCIA DEL VOLUMEN DEL CASO DE LA TABLA 3

Cálculo de  $A_1$ . Debido a que el esquema de integración de Simpson 1/3 debe ser par, se revisó que el último valor de  $i$  lo sea ( $i=240$ , es par), por lo anterior, sí es válida su aplicación; se considera como factor un tercio del incremento del tiempo, multiplicando a una vez el dato del hidrograma de entrada I (primer renglón, quinta columna) más una vez el último valor del hidrograma de entrada I (último renglón, quinta columna), y luego se identifican los valores de  $i$  que sean pares ( $i=2,4,6,\dots,238$ ) porque los datos del hidrograma de entrada I correspondientes a esos valores van multiplicados por dos, y los valores restantes (sin considerar las ordenadas ya tomadas ( $i=3,5,7,\dots,237$ )) van multiplicadas por cuatro. Al final se hace la multiplicación por los factores de conversión de unidades para obtener al volumen en  $\text{hm}^3$ .

Cálculo de  $A_2$ . Se considera como factor un tercio del incremento del tiempo y multiplicando a una vez el dato del hidrograma de salida O (primer renglón, sexta columna) más una vez el último valor del hidrograma de salida O (último renglón, sexta columna), y luego se identifican los valores de  $i$  que sean pares ( $i=2,4,6,\dots,238$ ) porque los datos del hidrograma de salida O correspondientes a esos valores van multiplicados por dos, y los valores restantes (sin considerar las ordenadas tomadas en cuenta, ( $i=3,5,7,\dots,237$ )) van multiplicadas por cuatro. Finalmente, se hace la multiplicación por los factores de conversión de unidades para obtener al volumen en  $\text{hm}^3$ .

La diferencia de volumen. Corresponde a la diferencia de  $A_1$  menos  $A_2$ .

### DETALLE DE LA ESTIMACIÓN DE LA DIFERENCIA DEL VOLUMEN DEL CASO DE LA TABLA 3

Cálculo de  $A_1$ . Debido a que el esquema de integración de Simpson 3/8 debe ser múltiplo de 3 se revisó que el último valor de  $i$  lo sea ( $i=240$ , es múltiplo de 3), por lo anterior sí es válida su aplicación; se considera como factor tres octavos del incremento del tiempo y multiplicando a una vez el dato del hidrograma de entrada I (primer renglón, quinta columna) más una vez el último valor del hidrograma de entrada I (último renglón, quinta columna), y luego se identifican los valores de  $i$  que sean múltiplos de 3 ( $i=3,6,9,12,\dots,237$ ) porque los datos del hidrograma de entrada I correspondientes a esos valores van multiplicados por dos, y los valores restantes (sin considerar las ordenadas ya tomadas en cuenta, ( $i=2,4,5,7,8,\dots,239$ )) van multiplicadas por tres.

Finalmente, se hace la multiplicación por los factores de conversión de unidades para obtener al volumen en  $\text{hm}^3$ .

Cálculo de  $A_2$ . Se considera como factor tres octavos del incremento del tiempo y multiplicando a una vez el dato del hidrograma de salida O (primer renglón, sexta columna) más una vez el último valor del hidrograma de salida O (último renglón, sexta columna), y luego se identifican los valores de  $i$  que sean múltiplos de 3 ( $i=3,6,9,12,\dots,237$ ) porque los datos del hidrograma de salida O correspondientes a esos valores van multiplicados por dos, y los valores restantes (sin considerar las ordenadas ya tomadas en cuenta, ( $i=2,4,5,7,8,\dots,239$ )) van multiplicadas por tres. Finalmente se hace la multiplicación por los factores de conversión de unidades para obtener al volumen en  $\text{hm}^3$ .

La diferencia de volumen. Corresponde a la diferencia de  $A_1$  menos  $A_2$ .

### Caso 2

El volumen de sobrealmacenamiento máximo en el embalse es el que ocurre hasta que se presenta el gasto máximo del hidrograma de salida. Obteniendo el volumen hasta que ocurre el gasto máximo del hidrograma de salida.

En el caso de integración trapezoidal no hay restricciones en su aplicación y a continuación se indican los resultados (Tabla 5). (El cálculo para obtener  $A_1$  (área bajo el hidrograma de entrada) y  $A_2$  (área bajo el hidrograma de salida) es similar al realizado para la Tabla 2).

Tabla 5. Cálculo del volumen de sobrealmacenamiento por el método de integración trapezoidal

$A_1, \text{hm}^3$	$A_2, \text{hm}^3$	Diferencia de volumen, $\text{hm}^3$
1157.132	1041.976	115.155

Al observar que  $n=113$  hasta que se presenta el gasto máximo de salida, no se puede aplicar de un solo paso el esquema de integración de Simpson 1/3 o de Simpson 3/8 por lo que se optó por combinar métodos de integración considerando Simpson 1/3 (S1/3) del instante  $i=0$  al instante  $i=110$  y Simpson 3/8 (S3/8) del instante  $i=110$  al instante  $i=113$  (para ello se usó un procedimiento similar al descrito para las Tablas 3 y 4). Los resultados se resumen a continuación. También se hicieron comparaciones de estos resultados con los obtenidos con el programa del que se tomó la información. Estas comparaciones también se presentan a continuación (Tabla 6).

Tabla 6. Volumen de total sobrealmacenamiento

Método	A1, hm <sup>3</sup>	A2, hm <sup>3</sup>	Diferencia de volumen, hm <sup>3</sup>
S1/3	1048.576	943.883	
S3/8	109.019	97.015	
total	1157.595	1040.897	116.698

La diferencia en el cálculo de sobrealmacenamiento contra lo reportado en el programa de tránsito es de 1.542 millones de m<sup>3</sup>. En la tabla 7 se reporta el volumen de sobrealmacenamiento obtenido con los métodos combinados y los obtenidos con el programa.

Tabla 7. Diferencia en el sobrealmacenamiento contra lo reportado en el programa de tránsito

Método	V, mm <sup>3</sup>
Combinando métodos	3.313
Con trapecial	1.770

Cabe mencionar que el programa aproxima el volumen con la suma de todas las ordenadas de los hidrogramas de entrada menos las suma de las ordenadas del hidrograma de salida y multiplicando por la diferencia de tiempo ( $\Delta t$ ).

En la Tabla 8, se muestra el almacenamiento máximo que se obtiene al considerar el almacenamiento inicial en el embalse.

Tabla 8. Almacenamiento máximo

Método	Diferencia de volumen, hm <sup>3</sup>
Trapecial	1741.473
S1/3+S3/8	1743.016

La diferencia de volumen respecto al valor obtenido con el programa de tránsito de avenidas se muestra en la Tabla 9, de lo cual se deduce que el resultado numérico es el más conservador.

Tabla 9. Diferencias respecto al valor obtenido con el programa de tránsito de avenidas

Método	Diferencia de volumen, hm <sup>3</sup>
Trapecial	-1.770
S1/3+S3/8	-3.313

## CONCLUSIONES

Se aplicaron algoritmos de integración numérica en la estimación del volumen de almacenamiento en un embalse de un proyecto hidroeléctrico ante la posible ocurrencia de una gran avenida (representada por el hidrograma de entrada al embalse) los esquemas de integración de Simpson 1/3 y Simpson 3/8 dieron resultados más conservadores en el volumen de sobrealmacenamiento en el embalse, respecto a lo que reportó el programa Trate.bas de la CFE, pero este último calcula de una manera gruesa, a partir de rectángulos este volumen. Es importante destacar que en este estudio se hicieron comparaciones de cálculos numéricos a partir de considerar una avenida de diseño; pero es importante en futuras investigaciones, realizar validaciones de los volúmenes estimados numéricamente con mediciones que se realicen usando modelos de laboratorio,

## REFERENCIAS

- Campos-Aranda D.F. *Introducción a los métodos numéricos, software en Basic y aplicaciones a la hidrología superficial* [en línea], Revisión sistemática, San Luis Potosí, México, Editorial Universitaria Potosina, 2002 [fecha de consulta: 13 de abril de 2016]. Disponible en: <https://books.google.com.mx/books?hl=es&lr=&id=zsQM4QfNVwoC&oi=fnd&pg=PP13&dq=m%C3%A9todo+de+integraci%C3%B3n+num%C3%A9rica+de+Newton+para+embalses&ots=tpzAgLxqTZ&sig=eNAAA4pSfGcFNE36ho4WxVoud3E#v=onepage&q&f=false>
- Comisión Federal de Electricidad. Manual de diseño de obras civiles, Cap. A.1.8. Tránsito de Avenidas, CFE, México, 1980.
- Frontini M. y Sormani E. Some variant of Newton's method with third-order convergence, *Elsevier, Applied Mathematics and Computation* (número 140), diciembre, 2002: 419-426.
- Gerald F.C. *Análisis numérico*, 2ª ed., México, Alfa Omega, 1990, pp. 631.
- Iriarte V.B.R. *Métodos numéricos*, 1ª ed., México, Facultad de Ingeniería, UNAM, Trillas, 1990, pp. 269.
- Luthe R., Olivera A., Schutz F. *Métodos numéricos*, 1ª ed., México, Limusa, 1984, pp. 443.
- Nieves-Hurtado A., Domínguez-Sánchez F.C. *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*, 1ª ed., México, Grupo Editorial Patria, 2014, pp. 454-494.
- Smith W.A. *Análisis numérico*, 4ª ed., México, Prentice Hall, 1988, pp. 240-246.
- Yusuf-Osama A. New Newton's method with third-order convergence for solving nonlinear equations, *World Academy of Science. Engineering and Technology International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, (número 6), enero, 2012: 118-12.

## AGRADECIMIENTOS

Este artículo fue auspiciado por el proyecto PAPIME PE105117 Plataforma Educativa para Análisis Numérico.

## Citación sugerida:

### Citación estilo Chicago

Arganis-Juárez, Maritza Liliana, Jesús Javier Cortés-Rosas, Miguel Eduardo González-Cárdenas, Víctor Damián Pinilla-Morán, Alfonso Salazar-Moreno, Salvador García-Burgos. Métodos de integración numérica de Newton aplicados en un problema de manejo de embalses. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, XIX, 02 (2018): 183-193.

### Citación estilo ISO 690

Arganis-Juárez M.L., Cortés-Rosas J.J., González-Cárdenas M.E., Pinilla-Morán V.D., Salazar-Moreno A., García-Burgos S. Métodos de integración numérica de Newton aplicados en un problema de manejo de embalses. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, volumen XIX (número 2), abril-junio 2018: 183-193.

## SEMBLANZAS DE LOS AUTORES

*Maritza Liliana Arganis-Juárez.* Es ingeniero civil de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, con maestría en ingeniería hidráulica por la DEIFI, UNAM y doctorado Posgrado, UNAM. Es investigador titular en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, con líneas de investigación en Hidrología, aprovechamientos hidráulicos, optimización vía programación dinámica estocástica y uso de algoritmos genéticos en problemas de hidrología. Es profesor de asignatura definitiva de análisis numérico y cinemática y dinámica en la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería, UNAM; ha realizado artículos para congresos y revistas nacionales e internacionales.

*Jesús Javier Cortés-Rosas.* Es ingeniero mecánico electricista por la Facultad de Ingeniería de la UNAM y estudió la Maestría en administración por la Facultad de Contaduría y Administración, con diplomado en planeación y administración de recursos humanos y en desarrollo humano. Es profesor de carrera de la Facultad de Ingeniería en el área de matemáticas aplicadas. Se ha desempeñado como jefe del Departamento de Matemáticas Avanzadas, Análisis Numérico y Dibujo, así como jefe de servicio de campo en Equipos de Construcción e Industria, SA de CV de la División Bienes de Capital del Grupo ICA; fue auditor técnico externo, entre otros cargos.

*Miguel Eduardo González-Cárdenas.* Es ingeniero mecánico electricista por la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Realizó la maestría en administración (organizaciones) en la Facultad de Contaduría y Administración de la UNAM. Profesor de carrera titular y de asignatura definitiva en análisis numérico y ecuaciones diferenciales. Ha participado en congresos, foros y seminarios nacionales con diversas ponencias.

*Víctor Damián Pinilla-Morán.* Es ingeniero mecánico electricista, en el área de telecomunicaciones de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y realizó la maestría en administración de organizaciones. Ha impartido los cursos de cálculo I, computadoras y programación, métodos numéricos, temas selectos de la filosofía de la ciencia y de la tecnología, ecuaciones diferenciales, análisis numérico, probabilidad y estadística y matemáticas avanzadas; así como numerosos cursos de Excel y SPSS en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Actualmente desarrolla proyectos tecnológicos en radiocomunicaciones y colabora con el Instituto Federal de Telecomunicaciones, la International Amateur Radio Union, la Federación Mexicana de Radioexperimentadores. A.C. y el Sistema Nacional de Protección Civil.

*Alfonso Salazar-Moreno.* Ingeniero eléctrico electrónico por la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Profesor de asignatura de análisis numérico en la Facultad de Ingeniería de la UNAM; colaborador de la Coordinación de Procesos e Información del Consejo Técnico de la Facultad de Ingeniería. Docente en línea de estadística básica y matemáticas administrativas en la Universidad Nacional Abierta y a Distancia de México (UnADM), así como facilitador del curso propedéutico de inducción para los aspirantes a alumnos de la UnADM. Ha sido responsable de la materia de informática y laboratorio de informática para el Colegio Johann Heinrich Pestalozzi. Ha sido Supervisor de la operación de la Planta de Bombeo Casa Colorada Profunda de la CONAGUA.

*Salvador García-Burgos.* Tiene la carrera de Ingeniería, es profesor definitivo y ha impartido clases desde 1971 en las asignaturas de métodos numéricos, computadoras y programación y análisis numérico en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Es coordinador de Ciencias Aplicadas en la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Ha colaborado en dependencias federales y de la UNAM en distintos cargos a nivel Subdirección, Coordinación y como asesor.