



Ingeniería, investigación y tecnología

ISSN: 1405-7743

Facultad de Ingeniería, UNAM

Castañeda-Balderas, Rubén; Díaz-Díaz, Alberto; Domínguez-Alvarado, Axel Fernando; Martínez-Morín, Claudio Iván  
Soluciones de Ecuaciones Diferenciales por Elemento Finito (SEDEF)  
Ingeniería, investigación y tecnología, vol. XXI, núm. 1, e00002, 2020, Enero-Marzo  
Facultad de Ingeniería, UNAM

DOI: <https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2020.21n1.002>

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40465091002>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en [redalyc.org](https://www.redalyc.org)

UNAM [redalyc.org](https://www.redalyc.org)

Sistema de Información Científica Redalyc  
Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso  
abierto



## Soluciones de Ecuaciones Diferenciales por Elemento Finito (SEDEF)

## Solutions of Differential Equations by Finite Element (SEDEF)

Castañeda-Balderas Rubén

Centro de Investigación en Materiales Avanzados S.C., México

Departamento de Metalurgia e Integridad Estructural

Correo: [ruben.castaneda@cimav.edu.mx](mailto:ruben.castaneda@cimav.edu.mx)

<https://orcid.org/0000-0002-0040-6321>

Díaz-Díaz Alberto

Centro de Investigación en Materiales Avanzados S.C., México

Departamento de Metalurgia e Integridad Estructural

Correo: [alberto.diaz@cimav.edu.mx](mailto:alberto.diaz@cimav.edu.mx)

<https://orcid.org/0000-0002-4873-7947>

Domínguez-Alvarado Axel Fernando

Centro de Investigación en Materiales Avanzados S.C., México

Departamento de Metalurgia e Integridad Estructural

Correo: [axel.dominguez@cimav.edu.mx](mailto:axel.dominguez@cimav.edu.mx)

<https://orcid.org/0000-0003-1255-8987>

Martínez-Morfin Claudio Iván

Centro de Investigación en Materiales Avanzados S.C., México

Departamento de Metalurgia e Integridad Estructural

Correo: [cimartinezmorfin@gmail.com](mailto:cimartinezmorfin@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0002-5300-3681>

### Resumen

En este trabajo se expone el desarrollo de la primera versión de un software amigable de elemento finito gratuito y de código abierto llamado SEDEF ©, el cual propone y resuelve un sistema de ecuaciones diferenciales generales dependientes de dos dimensiones, una espacial y una temporal. Estas ecuaciones se proponen de tal manera que se puedan modelar diferentes fenómenos físicos. Cabe mencionar que se da solución a la parte espacial de las ecuaciones generales mediante el método del elemento finito y a la temporal por medio del método BDF ("Backward Differentiation Formula"), lo que resulta en sistemas de ecuaciones lineales con matrices dispersas. Estos sistemas son programados y resueltos en el lenguaje C++; el álgebra de matrices dispersas se soluciona a través de la librería CSparse creada por Timothy A. Davis (2006). El software está dotado de una interfaz gráfica intuitiva y fácil de manejar programada en RAD Studio XE, la cual permite tener un módulo exclusivo para problemas de transferencia de calor, un módulo para problemas de vigas de Euler en un plano y un módulo general donde el usuario puede adaptar sus propias ecuaciones constitutivas para problemas particulares unidimensionales. La validación del software se hace a través del planteamiento de tres problemas: uno matemático, otro de transferencia de calor y un último de vigas en el plano. En estos, la solución de SEDEF se compara con soluciones analíticas y los resultados del software comercial de elementos finitos COMSOL Multiphysics. El fin que persigue SEDEF es el de dotar a las instituciones educativas de una herramienta que ayude en el entendimiento de matemáticas, física y varias ramas de ingeniería gracias a la resolución de ecuaciones y la interfaz gráfica amigable para las etapas de preprocesamiento y postprocesamiento de resultados.

**Descriptores:** Software, elementos finitos, ecuaciones diferenciales, vigas, transferencia de calor.

### Abstract

This paper presents the development of the first version of SEDEF, a free and open source software which proposes and solves a system of general differential equations that depends of two dimensions: spatial and temporal. These equations are proposed in a manner that they can model several physical phenomena. It's worth mentioning that the spatial part of the general equations are solved by the finite element technique while the temporal part is solved by the BDF ("Backward Differentiation Formula") method. These methods lead to the resolution of linear equations systems with sparse matrices. All the implementation is developed in C++ and the sparse matrices algebra is solved by the CSparse library created by Timothy A. Davis (2006). The software has an intuitive, easy to use graphic user interface (GUI) developed in RAD Studio XE. This GUI has three main modules that solve: heat transfer problems, in-plane Euler beam problems and mathematical problems which can be modeled by the generic unidimensional transient equations. Software validations are performed for each one of the modules by making the analysis of particular problems. Results obtained by SEDEF are compared with analytical solutions and results obtained by COMSOL Multiphysics, a commercial finite element software. The main purpose of SEDEF software is to provide academic institutions a tool that helps in understanding mathematics, physics and several engineering branches owing to the equations resolution and the friendly interface for preprocessing and postprocessing stages.

**Keywords:** Software, finite elements, differential equations, beams, heat transfer.

## INTRODUCCIÓN

Los fenómenos físicos pueden ser descritos por medio de ecuaciones diferenciales parciales (Johnson, 2009; Boyce, 2000) para las cuales es imposible encontrar soluciones analíticas en la mayoría de los casos. Cuando esto sucede, es necesario apoyarse en métodos numéricos como el método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés) (Yuste, 2006; Moaveni, 1999). Este método genera sistemas de ecuaciones enormes que se pueden resolver haciendo uso del poder de cálculo computacional. El presente trabajo de investigación se centra en la creación de una primera versión de una herramienta FEM desarrollada en la plataforma RAD Studio XE (cuyo lenguaje base es C++) (Deitel & Deitel, 1995; Joyanes, 2008). El software desarrollado es llamado SEDEF © (Soluciones de Ecuaciones Diferenciales por Elemento Finito) y se pretende que su primera versión sea capaz de resolver cualquier sistema diferencial de una dimensión (1D) temporal con derivadas espaciales de orden dos. El programa está dotado de una interfaz gráfica modular que permite plantear y resolver problemas de fenómenos de transferencia de calor, modelos de vigas y sistemas generales de ecuaciones diferenciales. El fin que persigue SEDEF es principalmente subsanar las áreas académicas que requieren del uso de la simulación computacional y que poco progresan en México por los altos costos de las herramientas comerciales existentes en el mercado. Los detalles para su descarga y las políticas de uso se pueden consultar en el Sitio Web del proyecto en [www.sedef.mx](http://www.sedef.mx).

En este artículo, se presenta primeramente la interfaz gráfica de SEDEF. Después, se muestran las ecuaciones genéricas que resuelve el software. Luego, se aplica el método de elementos finitos a la resolución de

dichas ecuaciones. Posteriormente, se muestran los tipos de estudio y aplicaciones a fenómenos físicos que se pueden hacer con esta primera versión de SEDEF. Finalmente, se presenta la validación de SEDEF mediante la comparación de sus resultados con las del software comercial de elementos finitos COMSOL Multiphysics y con soluciones analíticas.

## INTERFAZ GRÁFICA

El diseño de la interfaz gráfica se basa principalmente en las etapas de configuración que requiere el método del elemento finito. Estas etapas consisten en la definición de parámetros de estudio, definición de la geometría o dominio, la captura de propiedades de materiales y constantes, la aplicación de condiciones de frontera y condiciones iniciales, la construcción del mallado, el cálculo y finalmente el post-procesamiento. Para cada una de estas etapas, el software cuenta con una serie de herramientas que permiten al usuario realizar de manera rápida y precisa la configuración de su proyecto de simulación.

El software SEDEF incluye una interfaz específica para la configuración y simulación de problemas de transferencia de calor (*Heat Transfer*), de vigas (*Beam*) y de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales generales o PDE. Para cualquiera que sea el tipo de simulación, se puede elegir entre un estudio de tipo estático o de tipo transitorio.

En cuanto a la construcción del dominio, el software está dotado de herramientas tipo CAD (diseño asistido por computadora), con lo cual un usuario puede crear y manipular dominios con facilidad y de la misma manera puede iniciar el condicionamiento de los mismos (Figura 1). Además, SEDEF proporciona un analizador

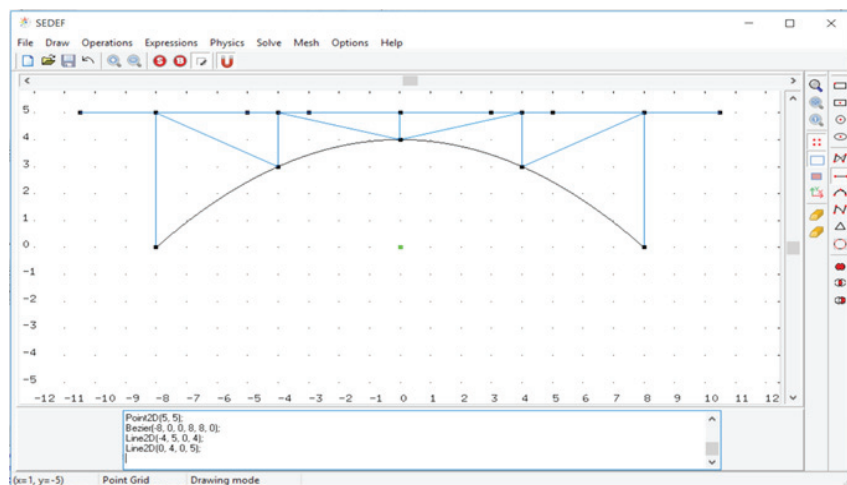


Figura 1. Ejemplo de CAD para vigas

léxico y sintáctico que permite realizar el condicionamiento del problema a través de expresiones matemáticas (funciones de variables de espacio y tiempo) y no solo de valores numéricos constantes.

Para la etapa del mallado del dominio, las opciones pueden variar entre la imposición de un número de elementos en el dominio, la exigencia de tamaños máximos y mínimos de elementos, hasta poder introducir una tasa de crecimiento del mallado respecto a una extremidad mediante series geométricas (Figura 2).

Finalmente, la etapa de post-procesamiento está programada de acuerdo con el tipo de estudio, por lo cual la interfaz puede variar entre simples gráficas XY, hasta un mapa de colores sobre los dominios (Figura 3).

### ECUACIONES GENERALES

Para poder modelar gran cantidad de fenómenos físicos es necesario proponer expresiones que puedan representar cualquier sistema de ecuaciones diferenciales

parciales (EDPs) (Johnson, 2009; Boyce, 2000), con coeficientes tanto dependientes del espacio como del tiempo. En SEDEF, se proponen dos ecuaciones genéricas, ambas consideran un vector incógnita  $\tilde{u}$  de  $n$  funciones escalares de las variables de espacio  $x$  y tiempo  $t$  ( $x \in \Omega_s$  y  $t \in [t_0, \tau]$ ,  $\Omega_s$  es el dominio número  $s$ ). La primera EDP genérica es:

$$\tilde{K}\ddot{\tilde{u}} + \tilde{L}\dot{\tilde{u}} + \tilde{M}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{N}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{P}\tilde{u} = \tilde{f} \quad (1)$$

Para algunos fenómenos físicos que involucran términos de convección y difusión, es más cómodo manejar la ecuación genérica siguiente:

$$\tilde{K}\ddot{\tilde{u}} + \tilde{L}\dot{\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\tilde{M}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \tilde{O}\tilde{u} + \tilde{r} \right) + \tilde{N}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{P}\tilde{u} = \tilde{f} \quad (2)$$

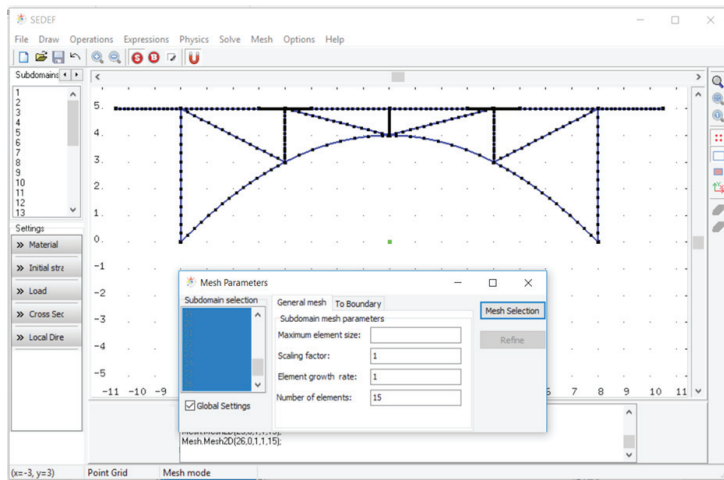


Figura 2. Mallado de una geometría

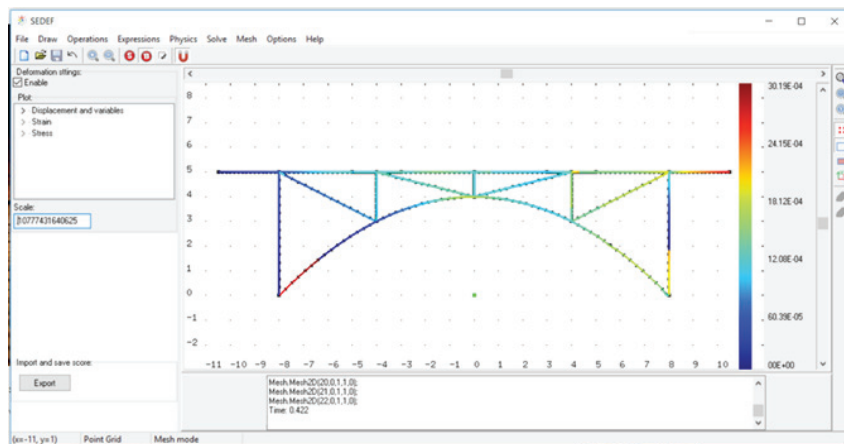


Figura 3. Módulo de post-procesamiento

Para las ecuaciones 1 y 2  $\tilde{K}, \tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{O}, \tilde{N}$  y  $\tilde{P}$  son matrices de coeficientes del sistema de dimensión  $n \times n$ ,  $\tilde{f}$  y  $\tilde{r}$  son vectores conocidos de dimensión  $n$ ,  $\tilde{u}$  es el vector de incógnitas de dimensión  $n$  y el punto sobre el vector  $\tilde{u}$  indica derivada parcial de este respecto al tiempo. Las componentes del vector  $\tilde{u}$  son:

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{pmatrix} u^1(x, t) \\ \vdots \\ u^n(x, t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

A continuación, se muestra una interpretación física a los términos de la ecuación (2):

- $\tilde{K}$  = coeficientes de masa
- $\tilde{L}$  = coeficientes de amortiguamiento
- $-\tilde{M} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \tilde{O} \tilde{u} + \tilde{r}$  = flujo conservativo
- $\tilde{M} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \tilde{O} \tilde{u}, \tilde{r}$  = difusión, la convección y la fuente del flujo, respectivamente
- $\tilde{N} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$  = convección
- $\tilde{P} \tilde{u}$  = la absorción
- $\tilde{f}$  = vector fuente

#### APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Las ecuaciones diferenciales parciales propuestas en la sección anterior son válidas en el dominio número  $s$ :  $\Omega_s = [a_s, b_s]$ . Para esta porción de línea y su respectiva ecuación, se aplica el método de elementos finitos (FEM) en una forma débil (Felippa, 2003). Por ejemplo, para la ecuación (2), se obtiene la siguiente ecuación integral escalar:

$$\int_{a_s}^{b_s} \tilde{\varphi}^t \tilde{K} \tilde{u} dx + \int_{a_s}^{b_s} \tilde{\varphi}^t \tilde{L} \dot{\tilde{u}} dx + \int_{a_s}^{b_s} \tilde{\varphi}^t \frac{\partial}{\partial x} \left( -\tilde{M} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \tilde{O} \tilde{u} + \tilde{r} \right) dx + \int_{a_s}^{b_s} \tilde{\varphi}^t \tilde{N} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} dx + \int_{a_s}^{b_s} \tilde{\varphi}^t \tilde{P} \tilde{u} dx = \int_{a_s}^{b_s} \tilde{\varphi}^t \tilde{f} dx \quad (4)$$

donde  $\tilde{\varphi}$  es un vector de funciones de forma de la variable de espacio y el superíndice  $t$  indica la transposición del vector. Se define el vector de flujo:

$$\tilde{v}_f(x, t) = \begin{cases} \tilde{M} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} & \text{para la ecuación (1)} \\ -\tilde{M} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \tilde{O} \tilde{u} + \tilde{r} & \text{para la ecuación (2)} \end{cases} \quad (5)$$

Para el término de la ecuación integral que involucra al vector de flujo se realiza una integración por partes, la cual hace aparecer las condiciones de frontera sobre el vector flujo. Sin embargo, es posible que en lugar del flujo se conozca directamente el valor de la incógnita en la frontera; por lo que los valores conocidos en las fronteras  $x = a_s$  y  $x = b_s$  son:

$$g_{as}^i = \begin{cases} v_f^i(a_s, t) & \text{si se conoce el valor del vector de flujo} \\ u^i(a_s, t) & \text{si se conoce el valor de la incógnita} \end{cases} \quad (6)$$

$$g_{bs}^i = \begin{cases} v_f^i(b_s, t) & \text{si se conoce el valor del vector de flujo} \\ u^i(b_s, t) & \text{si se conoce el valor de la incógnita} \end{cases}$$

Donde

$v_f^i$  = la componente  $i$  del vector  $\tilde{v}_f$   
 $u_i$  = la componente  $i$  del vector  $\tilde{u}$

Continuando con el proceso, se divide el dominio en  $m$  elementos delimitados por nodos. Se interpola a  $\tilde{u}$  en cada elemento con polinomios de  $x$  de grado  $p \in \{1, 2, 3, 4\}$  y se consideran funciones de forma del mismo grado polinomial. Al verificar la ecuación integral para cualquier función de forma se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\tilde{\sigma}(t) \tilde{U}(t) + \tilde{\lambda}(t) \dot{\tilde{U}}(t) + \tilde{T}(t) \tilde{U}(t) = \tilde{e}(t) \quad (7)$$

Donde:

$\tilde{U}$  = vector que contiene el valor de cada una de las incógnitas en cada nodo de la malla  
 $\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}$  y  $\tilde{T}$  = matrices cuadradas de masas, amortiguamientos y rigideces, respectivamente  
 $\tilde{e}$  = vector fuente.

Es posible que el problema cuente con más de un dominio y además los dominios tengan zonas de unión, para esto se definen fronteras internas y externas como se muestra en la Figura 4. Para asegurar la continuidad en las fronteras internas, se escriben las expresiones 8 y 9.

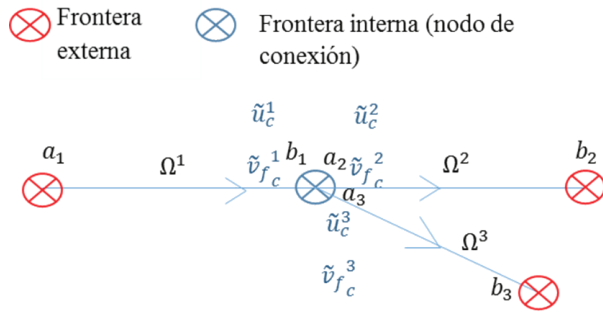


Figura 4. Ejemplo de un problema con tres dominios conectados

$$\tilde{u}_c^1 = \dots = \tilde{u}_c^s = \dots = \tilde{u}_c^{n\Omega} \quad (8)$$

$$\sum_{s=1}^{n\Omega} \eta \tilde{v}_{fc}^s = \tilde{g} \quad (9)$$

Donde:

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{si la frontera en la unión es } a_s \\ -1 & \text{si la frontera en la unión es } b_s \end{cases} \quad (10)$$

$\tilde{g} = \tilde{0}$  si el flujo es continuo,  $\tilde{g} \neq \tilde{0}$  si se desea definir una discontinuidad del flujo,  $\tilde{u}_c^s$  es el vector de incógnitas en el nodo de unión en el dominio  $s$ ,  $\tilde{v}_{fc}^s$  es el vector de flujo en el nodo de unión del dominio  $s$ ,  $n_\Omega$  es el número de dominios.

## TIPOS DE ESTUDIO

### ESTUDIO ESTÁTICO

Cuando se realiza un estudio estático o estacionario, la ecuación (7) se reduce a:

$$\tilde{T}\tilde{U} = \tilde{e} \quad (11)$$

Se determina  $\tilde{U}$  mediante un método directo con matrices dispersas (Davis, 2006).

### ESTUDIO TRANSITORIO

Para estudios dependientes del tiempo se utiliza la técnica BDF (Backward Differentiation Formula) (Ascher & Petzold, 1998). En este tipo de estudio se requieren definir las condiciones iniciales. Estas condiciones son el valor en el primer instante de la incógnita y si hay

términos de segunda derivada respecto al tiempo también es necesario el valor de su derivada en cualquier punto  $x$  del dominio:

$$\tilde{u}(x, t_0) = \tilde{v}_0(x), \quad \dot{\tilde{u}}(t_0) = \dot{\tilde{v}}_0(x) \quad (12)$$

donde  $\tilde{v}_0$  y  $\dot{\tilde{v}}_0$  son los valores iniciales del vector de funciones incógnita y sus derivadas de acuerdo con el tiempo, respectivamente.

Se discretiza el tiempo en una serie de instantes  $t_r$  ( $1 \leq r \leq m$ , el número total de instantes considerados es  $m$ ) y se aplican series de Taylor (Chapra, 2007) hasta un orden  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  a la ecuación (7). Todo este procedimiento resulta en:

- Caso  $\tilde{\sigma} \neq 0$ :

$$\tilde{U}(t_r) = h\beta_{k-1}\dot{\tilde{U}}(t_r) - \sum_{i=1}^k a_{i-1}^{k-1}\tilde{U}(t_{r-i}), \quad (13)$$

$$\dot{\tilde{U}}(t_r) = \tilde{V}^{-1} \left[ h\beta_{k-1} \left( \tilde{e}(t_r) + \tilde{T}(t_r) \sum_{i=1}^k a_{i-1}^{k-1}\tilde{U}(t_{r-i}) \right) - \tilde{\sigma}(t_r) \sum_{i=1}^k a_{i-1}^{k-1}\dot{\tilde{U}}(t_{r-i}) \right]$$

$$\text{donde } \tilde{V} = \tilde{\sigma}(t_r) + h\beta_{k-1}\tilde{\lambda}(t_r) + (h\beta_{k-1})^2\tilde{T}(t_r)$$

- Caso  $\tilde{\sigma} = 0$ :

$$\dot{\tilde{U}}(t_r) = \tilde{V}^{-1} \left[ h\beta_{k-1}\tilde{e}(t_r) - \tilde{\lambda}(t_r) \sum_{i=1}^k a_{i-1}^{k-1}\tilde{U}(t_{r-i}) \right] \quad (14)$$

$$\text{donde } \tilde{V} = \tilde{\lambda}(t_r) + h\beta_{k-1}\tilde{T}(t_r)$$

En las expresiones (13-14),  $h$  es el paso de tiempo,  $a_{i-1}^{k-1}$  y  $\beta_{k-1}$  son coeficientes resultantes del desarrollo BDF y cuyo valor puede encontrarse en (Domínguez, 2015).

## ADAPTACIONES A FENÓMENOS FÍSICOS

### TRANSFERENCIA DE CALOR

La ecuación de transferencia de calor unidimensional en un medio sólido (Zill, 2012) está dada por:

$$\rho(x, t)c_p(x, t)\frac{\partial}{\partial t}T(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-k(x, t)\frac{\partial}{\partial x}T(x, t)\right) = Q(x, t) \quad (15)$$



donde  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\kappa$  y  $Q$  son la densidad del material, el calor específico, la conductividad térmica y la fuente de calor, respectivamente. El vector de incógnitas  $\tilde{u}$  de la ecuación general (2) tiene una sola componente: la temperatura  $T$ . Por identificación, las matrices y el vector fuente de la ecuación (2) se reducen a escalares:

$$K = M = O = N = P = 0, L = \rho c_p, M = \kappa \text{ y } f = Q \quad (16)$$

Debido a esto, el vector de flujo de calor, tiene una sola componente, la cual tiene por expresión

$$v_f = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (17)$$

Las condiciones de frontera pueden ser sobre el flujo de calor (ecuación (17)) o el valor de la temperatura  $T$ .

#### VIGAS EN EL PLANO

Para vigas de Euler en el plano (Liu, 2003; Slivker, 2007), se tienen dos desplazamientos  $u$  y  $v$  y una rotación  $\theta$  dentro del plano. Las 3 ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial x} = f_x \\ \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} = f_y \\ I_{zz} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial M_z}{\partial x} - Q = m \end{cases} \quad (18)$$

mientras que el comportamiento mecánico está definido por las 3 ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} - \theta = 0 \\ M_z - EI_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial x} = M_z^0 - EI_{zz} \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \\ N - EA \frac{\partial u}{\partial x} = N_0 - EA \varepsilon_0^n \end{cases} \quad (19)$$

En las ecuaciones (18-19):

- $\rho$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $I_{zz}$ ,  $N$ ,  $Q$  y  $M_z$  son la densidad del material, el módulo de Young del mismo, el área de la sección, el momento de inercia de la sección, la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento, respectivamente.

- $f_x$ ,  $f_y$  y  $m$  son las densidades lineales de fuerzas aplicadas en  $x$  y  $y$ , y la densidad lineal de momento aplicado.
- $N_0$ ,  $M_z^0$ ,  $\theta_0$  y  $\varepsilon_0^n$  son valores previos de fuerza normal, momento, ángulo de rotación y deformación normal (pre-esfuerzos, pre-deformaciones).

El vector de incógnitas escogido para la ecuación (2) es:

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ Q \\ M_z \\ N \end{pmatrix} \quad (20)$$

Las matrices de coeficientes y el vector fuente tienen las siguientes expresiones:

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ -EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ m \\ 0 \\ M_z^0 - EI_{zz} \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \\ N_0 - EA \varepsilon_0^n \end{pmatrix} \quad (23)$$

Las demás matrices en la ecuación (2) son cero. Estas ecuaciones son válidas en el sistema de coordenadas locales. Para definir un sistema en común para todos los

dominios, llamado sistema global (Figura 5), se implementa la matriz de rotación:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \cos \theta_e & \sin \theta_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_e & \cos \theta_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Al definir la matriz de rotación  $\tilde{\mathbf{R}}$ , el vector de funciones incógnitas  $\tilde{\mathbf{u}}^g$  en coordenadas globales (X,Y) es:

$$\tilde{\mathbf{u}}^g = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \theta \\ Q \\ M_z \\ N \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ Q \\ M_z \\ N \end{pmatrix} \quad (25)$$

y el vector de flujo:

$$\tilde{\mathbf{v}}_f = \begin{pmatrix} Q \sin \theta_e - N \cos \theta_e \\ -N \sin \theta_e - Q \cos \theta_e \\ -M_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Por lo tanto, según la ecuación 9, la ecuación de equilibrio de los nodos de conexión (los cuales son fronteras internas) entre dominios distintos se escribe en:

$$\sum \tilde{\mathbf{F}}_i + \tilde{\mathbf{F}}_e = \tilde{\mathbf{0}} \quad (27)$$

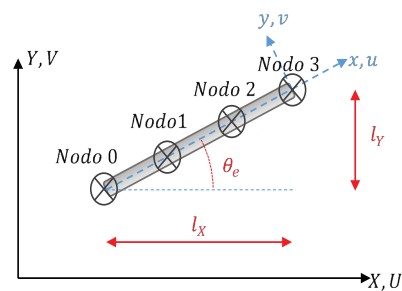


Figura 5. Elemento viga en el plano

donde  $\tilde{\mathbf{F}}_i$  es el vector de fuerzas internas aplicadas en el nodo de conexión  $\tilde{\mathbf{F}}_e$  y es el vector de fuerzas externas aplicadas en dicho nodo.

## VALIDACIÓN

VALIDACIÓN 1: ESTUDIO ESTACIONARIO CON DOS VARIABLES Y DOS DOMINIOS

El problema consiste de los dominios  $\Omega_1 = [0,5]$  y  $\Omega_2 = [5,7.3]$  con dos funciones incógnita  $u_1$  y  $u_2$ . El sistema de ecuaciones, en forma de la ecuación genérica (2), es:

$$k=1 \text{ y } 2, \forall x \in \Omega_k: \frac{d}{dx} \left[ -\tilde{\mathbf{M}}^k \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dx} \\ \frac{du_2}{dx} \end{pmatrix} \right] + \tilde{\mathbf{N}}^k \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dx} \\ \frac{du_2}{dx} \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{P}}^k \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{f}}^k \quad (28)$$

Donde:

$$\tilde{\mathbf{M}}^1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -x & -2 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{N}}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{P}}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{f}}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x(90x - 15x^2 - 90) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^2 = \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{N}}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{P}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{f}}^2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 - 45x^2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Para este problema, no se plantea la continuidad del flujo en el nodo  $x = 5$ . Las condiciones de frontera son:

- $u_1(0) = 0, u_1(5) = 15(5)^3, u_1(7.3) = 15(7.3)^3$
- $u_2(0) = u_2(5) = 1$

La solución analítica del problema es:

$$\forall x \in \Omega_1, \tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 15x^3 \\ 90x - 15x^3 + \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \left[ 1426 \csc\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) - \cot\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \right] \end{pmatrix} \quad (30)$$

y

$$\forall x \in \Omega_2, \tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 15x^3 \\ 100x - 30x^3 + 3251 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Para el estudio se utilizaron 100 elementos lineales por cada dominio. En la Figura 6 se muestra la comparación entre la solución analítica y la solución numérica de SEDEF. Se aprecia que se obtienen prácticamente los mismos resultados. El error relativo máximo cometido por SEDEF es de 1.38 %. Se puede disminuir este error uti-



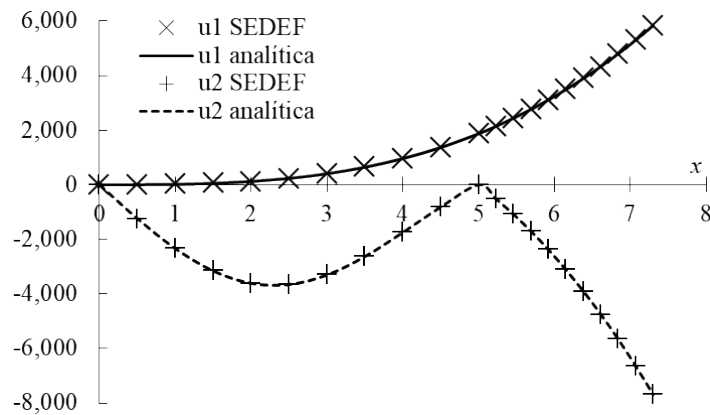


Figura 6. Solución analítica vs solución de SEDEF para un sistema de ecuaciones diferenciales

lizando un mayor número de elementos o empleando elementos de mayor orden (por ejemplo: cúbicos en lugar de lineales, es decir, funciones de forma de tipo polinomios de grados 3 en lugar de grado 1).

#### VALIDACIÓN 2: ESTUDIO DE TRANSFERENCIA DE CALOR DEPENDIENTE DEL TIEMPO

Para esta prueba se desea predecir la distribución de temperatura  $\forall t \in [0,1]$  (en segundos), de una barra de longitud  $l = 2m$  ( $\Omega = [-1, 1]$ ) con las siguientes propiedades:  $\kappa = 1 \text{ W/(m}\cdot\text{k)}$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$  y  $c_p = 1 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

Las condiciones iniciales están dadas por una temperatura uniforme e igual a  $1^\circ\text{C}$ . Las condiciones de frontera están dadas por la condición que la temperatura en ambos bordes ( $x = 1m$  y  $x = -1m$ ) decrece linealmente con el tiempo:

$$T(x = 1, t) = T(x = -1, t) = 1 - \gamma t \quad (32)$$

donde  $\gamma = 1^\circ\text{C/s}$ . Para validar los resultados obtenidos, se compararán estos contra los resultados del software COMSOL. En el mallado se emplearon 27 elementos de segundo grado.

Las temperaturas obtenidas por ambos software son graficadas en función de la variable de espacio en la Fi-

gura 7, y esto en diferentes instantes. El resultado obtenido por ambos software es prácticamente el mismo (el error relativo máximo es 0.113 %); esto significa que el módulo de transferencia de calor de SEDEF fue adaptado correctamente a partir de la ecuación (2) y que los resultados del software son precisos.

#### VALIDACIÓN 3: CONJUNTO DE VIGAS EN EL PLANO

Se desea predecir los desplazamientos en el puente que se muestra en la Figura 8, hecho de acero estructural. En esta figura, los nodos están enumerados del 0 al 15 en color negro mientras que los dominios van del 0 al 22 en color rojo. Los nodos 0 y 4 están empotrados; en los nodos 10 y 15 existen apoyos de articulación y de rodillo, respectivamente.

El puente está sometido a las cargas mostradas en la Tabla 1 y al peso propio de la estructura que está dado por:

$$W_i = g A_i \rho \quad (33)$$

Donde:

$W_i$  = peso propio del dominio  
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

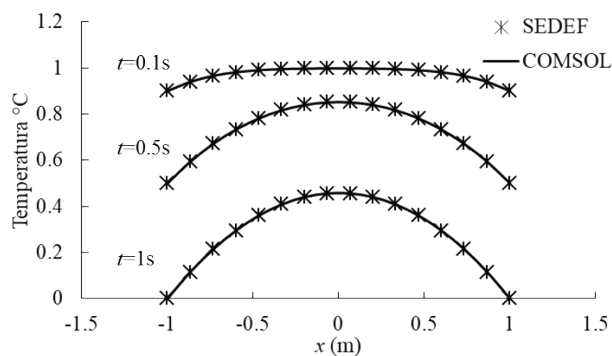


Figura 7. Temperaturas obtenidas por COMSOL y SEDEF

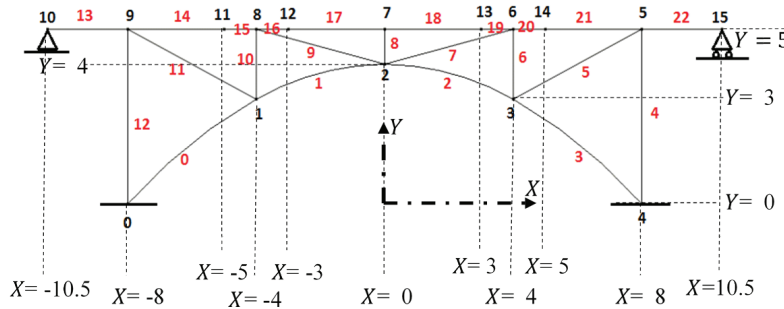


Figura 8. Geometría considerada del puente; números negros hacen referencia al nodo, números rojos al dominio

$A_i$  = área transversal del dominio

$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  = densidad

Se tienen dos tipos secciones transversales diferentes: tipo 1 y tipo 2. La nomenclatura de sus dimensiones se muestra en la Figura 9 y sus valores en la Tabla 2 para cada sección.

Tabla 1. Fuerzas nodales

Nodo	$F_x(\text{N})$	$F_{xy}(\text{N})$
11	3000	3000
12	3000	3000
13	-3000	3000
14	-3000	3000

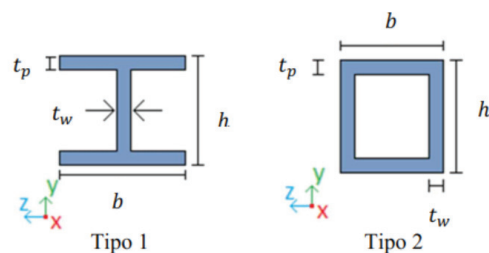


Figura 9. Secciones transversales consideradas

Tabla 2. Dimensiones de la sección transversal de cada dominio

Dominio(s)	Tipo de sección	$h(\text{m})$	$b(\text{m})$	$t_w(\text{m})$	$t_p(\text{m})$
0.1	1		0.4	0.025	0.025
2.3	1		0.4	0.025	0.025
4-12	2	0.25	0.25	0.025	0.025
13-22	1	0.4	0.2	0.0125	0.0125

Los dominios 13 a 22, además de estar sometidos a su peso propio, soportan una densidad lineal de carga en

dirección  $y$  de grados de  $-24.7212 \text{ kN/m}$  y sufren una variación de temperatura  $\delta T = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ . El coeficiente de dilatación térmica del material es  $\alpha = 12.03 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  y el módulo de Young es  $E = 200 \text{ GPa}$ .

La altura de la sección transversal del arco varía linealmente conforme a las siguientes fórmulas:

$$\begin{cases} \forall X \in [-8, 0]: h_1(X) = 0.6 - \frac{0.3L(X)}{L(0)} \\ \forall X \in [0, 8]: h_2(X) = 0.3 \left( 1 + \frac{L(X) - L(0)}{L(8) - L(0)} \right) \end{cases} \quad (34)$$

Donde:

$$L(X) = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2} X \sqrt{64X^2 + X^2} + 32 \ln \left( \frac{X}{8} + \sqrt{\frac{X^2}{64} + 1} \right) \right] + 4 \left[ \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right] \quad (35)$$

Se utilizaron 40 elementos por dominio y elementos con funciones de forma de grado 3. En la Figura 10, se muestran las deformadas obtenidas por COMSOL y por SEDEF utilizando un factor de amplificación de 450. No se aprecia diferencia alguna entre las dos deformadas. Para cada nodo, se determinó la magnitud de desplazamiento con SEDEF y se calculó la diferencia relativa respecto al resultado obtenido por COMSOL. En la Figura 11, se muestra un histograma con las diferencias relativas mencionadas para cada nodo. Estas diferencias son muy pequeñas: la máxima diferencia no alcanza 0.5 %. Esta diferencia tiende hacia cero a medida que se refina el mallado. Cabe señalar que la diferencia entre los resultados de SEDEF y COMSOL radica en que COMSOL no maneja el mismo orden de elementos

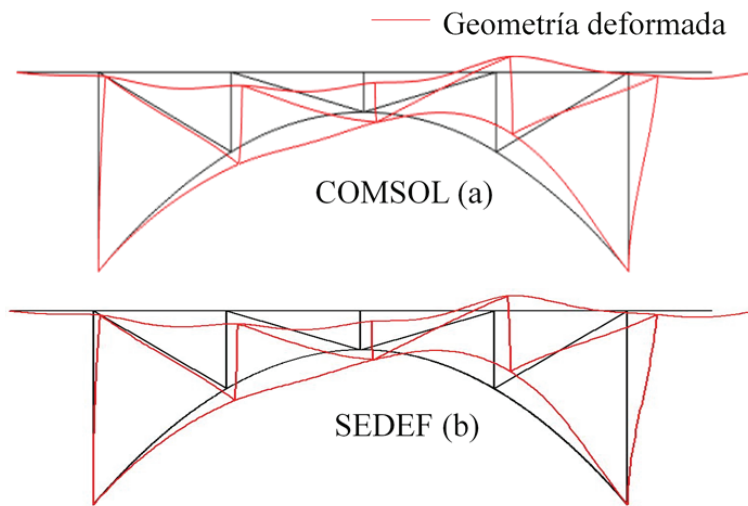


Figura 10. Comparación de la geometría deformada entre, a) COMSOL y b) SEDEF

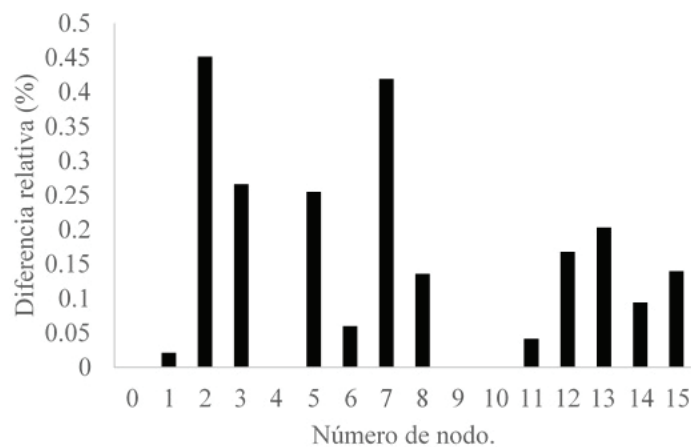


Figura 11. Diferencia relativa de desplazamientos nodales de SEDEF respecto a los de COMSOL

(mismo grado polinomial de funciones de forma) para los desplazamientos y rotaciones mientras que en SEDEF sí, y esto no solo para desplazamientos y rotaciones, sino también para momentos de flexión y fuerzas normales y cortantes. Por todas estas razones, se valida el módulo de vigas de SEDEF y se comprueba su utilidad y precisión para problemas de vigas sometidas a cargas termo-mecánicas.

### CONCLUSIONES

Se desarrolló la primera versión de un software gratuito llamado SEDEF para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales por el método de elementos finitos. En esta versión, SEDEF es capaz de resolver problemas

transientes de una dimensión espacial en sus tres módulos: ecuaciones matemáticas genéricas, transferencia de calor en sólidos y vigas en el plano. Se realizaron varias pruebas confrontando los resultados de SEDEF contra soluciones analíticas y numéricas obtenidas por el software comercial COMSOL Multiphysics y se comprobó la precisión de SEDEF para su validación. También, SEDEF resuelve los problemas de manera rápida y utilizando pocos recursos de memoria de la computadora. Con lo anterior, se puede decir que el programa es eficiente y eficaz. La eficiencia conseguida se debe principalmente a la implementación de la librería C++.

En un futuro, el programa se aplicará a más fenómenos físicos, entre ellos se encuentra el de vigas en el es-

pacio. También se desarrollará un algoritmo capaz de obtener los valores y vectores propios de las matrices dispersas. Asimismo, se hará un desarrollo para resolver problemas 2D. Todo esto será implementado en la segunda versión del software gratuito SEDEF.

A pesar de las limitaciones de la primera versión de SEDEF, el software puede ser ya una herramienta de gran valor pedagógico para clases de matemáticas, métodos numéricos, física y mecánica, entre otras. También, el software puede ser de utilidad para científicos e ingenieros, particularmente para ingenieros civiles (Yuste, 2006) por el alcance del módulo de vigas.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración técnica a Rivera-Nevárez Enrique Alonso, Gutiérrez-Ramírez Leonardo, Viramontes-Mendoza José Arturo, López-Cárdenas Fernando, Pallares-López José Luis, Torres-Macedo Omar, Bolívar-Moreno David, Zapata-Santana Alexis. También hacer mención al Instituto Tecnológico de Chihuahua II por todas las atenciones técnicas prestadas durante el desarrollo de este proyecto.

#### REFERENCIAS

- Ascher, U.M. & Petzold, L.R. (1998). *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Davis, T.A. (2006). *Direct methods for sparse linear systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718881>
- Deitel, H.M. & Deitel, P.J. (1995). *Como programar en C/C++*. PRENTICE HALL HISPOANOAMERICA, S.A.
- Domínguez-Alvarado, A.F. (2015). *Resolutor de sistemas de ecuaciones diferenciales unidimensionales por el método del elemento finito*. Chihuahua: Universidad Autónoma de Chihuahua.
- Felippa, C.A. (2003). *Introduction to finite element methods*. University of Colorado at Boulder: Department of Aerospace Engineering Sciences.
- Johnson, C. (2009). *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge university press. <https://doi.org/10.1002/nme.1620261016>
- Joyanes-Aguilar, L. (2008). *Fundamentos de programación-algoritmos, estructuras de datos y objetos*. España: McGraw-Hill.
- Liu, G. (2003). *The finite element method a practical course*. Butterworth Heinemann.
- Moaveni, S. (1999). *Finite element analysis theory and applications with ANSYS*. Prentice Hall.
- Slivker, V. (2007). *Mechanics of structural elements*. Springer.
- Chapra-Steven C., R.P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. 5a edición. México: McGraw Hill.
- Boyce-William E., R.C. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa.
- Yuste, S.B. (2006). *Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros*. Universidad de Extremadura Servicio de publicaciones.
- Zill, D.G. (2012). *A first course in differential equations whit modeling applications*. 10a edición. Estados Unidos: Cengage Learning.