



Educación matemática

ISSN: 0187-8298

ISSN: 2448-8089

Editorial Santillana

Sánchez Santiesteban, José Luis; Cruz Ramírez, Miguel;
Dolores Flores, Crisólogo; Sigarreta Almira, José María
Estudio de los significados para la enseñanza que
poseen los profesores acerca del concepto de pendiente
Educación matemática, vol. 33, núm. 3, 2021, pp. 141-171
Editorial Santillana

DOI: <https://doi.org/10.24844/EM3303.06>

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40576159007>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

UAEH [redalyc.org](https://www.redalyc.org)

Sistema de Información Científica Redalyc
Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso
abierto

Estudio de los significados para la enseñanza que poseen los profesores acerca del concepto de pendiente

Study of the meanings for teaching that teachers have about the slope concept

José Luis Sánchez Santiesteban¹

Miguel Cruz Ramírez²

Crisólogo Dolores Flores³

José María Sigarreta Almira⁴

Resumen: En este trabajo se presenta una estrategia para el estudio de los significados para la enseñanza que poseen los profesores sobre el concepto de pendiente. La misma está conformada por tres etapas: la elaboración de los instrumentos empíricos para la captura de información, la aplicación de los instrumentos, y el análisis de la información recolectada para identificar, clasificar y valorar los significados. Esta estrategia explora la coherencia entre lo que el profesor intenta transmitir, lo que imagina que transmite, y lo que su interlocutor (el estudiante) concibe que se transmite. Con el fin de analizar la calidad estructural y funcional del componente instrumental de la estrategia, se presenta un estudio de su evaluación ante un panel de expertos. Los resultados se procesan con ayuda de una técnica para la representación del ordenamiento por similitud, respecto a la solución ideal (TOPSIS), basada en datos difusos.

Fecha de recepción: 30 de junio de 2020. **Fecha de aceptación:** 9 de abril de 2021.

¹ Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Facultad de Matemáticas, jlsanchezsantiesteban@gmail.com, orcid.org/0000-0002-8128-3457

² Universidad de Holguín Oscar Lucero Moya (UHOLM). Facultad de Informática. Departamento de Matemática, cruzramirezmiqel@gmail.com, orcid.org/ 0000-0002-1697-1624

³ Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), cdolores2@gmail.com, orcid.org/0000-0002-2748-6042

⁴ Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Facultad de Matemáticas, josemariasigarretaalmira@hotmail.com, orcid.org/ 0000-0002-0863-4695

Palabras clave: *Significados, estrategia, concepto, pendiente, profesores*

Abstract: In this paper we present a strategy for the study of the teaching meanings that teachers have regarding the concept of slope. It consists of three stages: the elaboration of empirical instruments for the collection of information, the implementation of the instruments, and the analysis of the information collected to identify, classify and evaluate the teachers' meanings. This strategy explores the coherence between what the teacher intends to convey, what he imagines he conveys, and what his interlocutor (the student) conceives to be conveyed. In order to analyze the structural and functional quality of the instrumental component of the strategy, a study of its evaluation before a panel of experts is presented. The results are processed with the help of a technique for the representation of the ordering by similarity to the ideal solution (TOPSIS), based on fuzzy data.

Keywords: *Meanings, strategy, concept, slope, teachers*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, una línea de investigación en Matemática Educativa está dirigida a la formación de profesores, en particular al estudio de los significados para la enseñanza que poseen los profesores; donde se considera a estos significados como base esencial para el desarrollo de su actividad docente (Keitel y Kilpatrick, 2005; Howson, 2005; Thompson, 2013; Martín *et al.*, 2016; Byerley y Thompson, 2017). En la misma dirección, nuestro interés de investigación se centra en identificar, clasificar y valorar tales significados, en lo fundamental, los significados que los docentes poseen para hacer efectivo el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de pendiente.

El significado de conceptos ha sido objeto de investigación desde la perspectiva cognitiva, es decir, asociado a los conocimientos matemáticos que poseen los profesores sobre un determinado concepto (Stump, 2001; Zaslavsky *et al.*, 2002; Moore-Russo *et al.*, 2011; Hoffman, 2015; Cho y Nagle, 2017). Además, el significado ha sido estudiado, desde la perspectiva didáctico-institucional, esencialmente, sustentado en un enfoque semiótico (Montenegro *et al.*, 2011; Martín *et al.*, 2016). Byerley y Thompson (2017), Thompson (2016) y Thompson (2013)

proponen un enfoque holístico para el estudio de los significados para la enseñanza a partir de lo que el profesor *intenta transmitir*, lo que *imagina que se transmite* y lo que el *interlocutor* (estudiante) *concibe que se está transmitiendo*. Estos investigadores han centrado sus estudios, esencialmente, en los dos primeros elementos de la terna antes mencionada; en esta dirección, para valorar los significados para la enseñanza integramos al estudio el tercer elemento, el interlocutor (estudiante).

Estudiar los significados para la enseñanza de la pendiente que poseen los profesores, es importante ya que es un concepto básico para la formación de las nuevas generaciones y está presente en los currículos de matemática a nivel mundial y es un “concepto de enlace poderoso” que permite explorar con mayor facilidad las diferentes relaciones matemáticas (Stanton y Moore–Russo, 2012; Teuscher y Reys, 2012; McGee *et al.*, 2015; Leinhardt *et al.*, 1990). En el plano contextual, la pendiente es importante por sus numerosas aplicaciones en la resolución de problemas matemáticos o prácticos. En este sentido Niss, Blum, y Galbraith (2007) refieren una importante dualidad. Por un lado, se pone de manifiesto la modelación, en la dirección “realidad $\rightarrow$ matemática”, o sea, un problema del contexto real motiva la utilización del concepto de pendiente, lo cual enfatiza el proceso. Por otro lado, se expresa la relación inversa “matemática $\rightarrow$ realidad”, donde se enfatiza el objeto matemático de pendiente en el sentido de buscar sus aplicaciones.

Aún persisten dificultades, obstáculos y errores en los docentes relacionados con los aspectos cognitivos y didácticos del concepto de pendiente, (Stump, 2001; Zaslavsky, *et al.*, 2002; Walter y Gerson, 2007; Teuscher y Reys, 2012; Deniz y Kabael, 2017; Cho y Nagle, 2017; Byerley y Thompson, 2017). Analizar las dificultades, obstáculos y errores resulta esencial para estudiar los significados para la enseñanza que poseen los profesores con respecto al concepto de pendiente, ya que servirán de referentes para la elaboración de actividades e instrumentos para su análisis y valoración. Comparar nuestros resultados con los reportados en la literatura, será una medida de la robustez del significado, ya que permitirá establecer la correlación entre lo que el docente intenta transmitir y lo que realmente trasmite.

Los estudios sobre la pendiente muestran el alto grado de dificultad que encierra este concepto, en buena medida esto se debe a la variedad de significados que se le asignan tanto en la teoría como en la práctica (Stump, 1999; Zaslavsky, *et al.*, 2002; Moore–Russo *et al.*, 2011; Mudaly y Moore–Russo, 2011; Nagle y Moore–Russo, 2013; Nagle *et al.*, 2017; Deniz y Kabael, 2017, Rivera *et*

al., 2019; Nagle *et al.*, 2019). Cabe destacar que los investigadores en función de favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la pendiente, han identificado diferentes representaciones de la misma, asociada a determinados contextos (conceptualizaciones), en particular Stump (1999); Stump (2001) y Moore-Russo *et al.* (2011) quienes determinaron y refinaron las hasta ahora conocidas: la razón algebraica o geométrica, propiedad funcional, de situaciones del mundo real, como indicador de comportamiento, como propiedad física, en forma de coeficiente paramétrico, trigonométrica, analítica, propiedad determinante, como constante lineal.

Esta dispersión conceptual ha resultado útil para identificar la diversidad de significados, así como errores en las formas de razonamientos. Por ejemplo, Rivera *et al.*, (2019) reportan que en algunos casos los alumnos confunden los conceptos de pendiente con la recta misma, o bien desconexión entre aspectos geométricos y variacionales. En gran medida estos hechos constituyen el resultado de carencias en el proceso de enseñanza. Walter y Gerson (2007) plantean que las dificultades en la comprensión del concepto de pendiente pueden estar condicionadas por los diversos significados que los profesores le asocian a dicho concepto (inclinación, declive, empinada, talud, entre otras). Estos autores también sostienen que el énfasis en la representación asociada con la expresión intuitiva de “subida vs. avance” ha contribuido a las dificultades de los estudiantes para establecer conexiones entre la pendiente, la posición de la línea recta y la razón de cambio, entre otros aspectos. Por su parte, Nagle *et al.*, (2017) reportan que algunos profesores, al referirse a situaciones físicas, lo hacen sin prestar atención explícita a la conexión entre la pendiente y la inclinación. De forma general, estos estudios reconocen la complejidad que entrañan los mecanismos tanto teóricos como empíricos empleados para captar los significados para la enseñanza que posee el profesor sobre la pendiente.

Investigaciones recientes han alertado acerca de la necesidad de un abordaje holístico, cuando se trata de estudiar el significado para la enseñanza que poseen los profesores de Matemáticas (Thompson, 2013 y 2016). En el caso particular del concepto de pendiente, ello se expresa en forma de un proceso de comunicación matemática, donde estos tres elementos resultan vitales para una comprensión más objetiva de la enseñanza y del aprendizaje (Byerley y Thompson, 2017). Este enfoque holístico también constituye un referente para la elaboración de actividades e instrumentos que faciliten la identificación, el análisis y la valoración de los significados para la enseñanza de la pendiente que poseen los profesores.

Las investigaciones ponen de manifiesto que se trata de una problemática compleja, donde la elaboración de estrategias para el estudio de los significados para la enseñanza que posee el profesor constituye una base importante, antes de emprender un análisis de las causas de estas deficiencias y antes de emprender acciones que permitan solventarlas (Mudaly y Moore-Russo, 2011; Byerley y Thompson, 2017). Así, nuestro trabajo se centra en la concepción de una estrategia, enfocada hacia el estudio los significados para la enseñanza del concepto de pendiente en profesores de matemáticas. La base epistémica fundamental que sustenta esta estrategia reside en el enfoque holístico desarrollado por Thompson (2013), de manera que el significado de pendiente requiere de la identificación de un conocimiento matemático (el qué), de la percepción subjetiva del docente respecto a cómo ello se transmite (el cómo), y el reflejo de este proceso de enseñanza en el aprendizaje (la aprehensión del estudiante, en el sentido de lo que concibe que se está transmitiendo). De manera especial, una estrategia enfocada hacia tales propósitos requiere de instrumentos de diagnóstico que permitan identificar, clasificar y valorar los significados para la enseñanza que poseen los profesores sobre el concepto de pendiente.

MARCO TEÓRICO

Esta investigación adopta la concepción sobre el significado desarrollada por Thompson (2013) y Byerley y Thompson (2017), donde el significado se centra en lo que la persona intenta transmitir a través de una expresión y lo que la persona imagina que se transmite cuando escucha un enunciado. Bajo esta mirada el significado tiene un carácter personal, está condicionado por el contexto, y se relaciona con la experiencia. De este modo, el significado también se expresa como parte integrante de este contexto y, a la vez, constituye un resultado de la propia experiencia. Por tanto, el significado tiene un profundo carácter recursivo y está asociado a una determinada actividad.

La recursividad del significado está relacionada con la teoría piagetiana de esquema, lo cual puede entenderse como una actividad operacional que se repite y se universaliza, de tal modo que resulta aplicable en diferentes situaciones y contextos (Piaget e Inhelder, 1976). A partir de los trabajos de Moreno (1996) y Byerley y Thompson (2017), se asume que un esquema constituye una actividad operacional, asociada con una acción que se orienta hacia la consecución de un objetivo. Para Piaget e Inhelder (1976), comprender es reacomodar un esquema a las estructuras cognitivas que ya se poseen. Por ello, la formación

de un significado puede verse como la construcción de un esquema, lo cual requiere aplicar las mismas operaciones de pensamiento repetidamente, con el fin de comprender situaciones que se tornan significativas.

Se coincide con Thompson (2013) cuando afirma que Piaget consideraba el significado y la comprensión como sinónimos, y que son el producto del pensamiento; a partir de este se concede significado a las cosas, se infiere más allá de lo que se percibe y está en relación, esencialmente, con los conceptos, juicios y razonamientos; bases fundamentales para la construcción y el refinamiento de los significados. Cabe destacar que el significado está basado en los esquemas y representaciones que posee la persona (Byerley y Thompson, 2017). Para el presente estudio, las representaciones asociadas con el aspecto operativo del pensamiento son esencialmente contextuales y pueden comprenderse como un resultado del procesamiento de la información sensorial y conceptual del medio circundante, en la mente del individuo. Ellas se concretan en forma de imágenes, proposiciones e interrelaciones sobre el concepto (Piaget e Inhelder, 1976; Moreno 1996). Es justo significar que estas representaciones están dotadas de forma y contenido, e incluso se relacionan estrechamente con los esquemas y, por consiguiente, con los significados.

El significado para la enseñanza planteado por Thompson (2013), pone de manifiesto que el significado que intenta transmitir el profesor, lo hace sobre la base del conocimiento que posee del contenido matemático asociado al concepto y al estudiante; por lo que para estudiar los significados matemáticos para la enseñanza tendremos en cuenta aquellos que posee el docente sobre la pendiente (lo que intenta transmitir); el conocimiento que posee del estudiante (lo que imagina que el estudiante entiende de lo que intenta transmitir) y lo que el interlocutor (estudiante) concibe que se está transmitiendo. Resulta oportuno plantear que nuestras bases teóricas y metodológicas están en relación directa con investigaciones que se ocupan de estudiar las relaciones existentes entre el currículo declarado y el currículo entendido en relación con el concepto de pendiente (Dolores e Ibáñez, 2020; Dolores *et al.*, 2020).

Anderson (1984) considera los esquemas como estructuras abstractas de información y, a su vez, como formas organizadas y operativas de almacenar información. Este autor identifica tres clases de esquemas fundamentales: el *guion*, como una suerte de rutinas de enseñanza cuya naturaleza es temporal, el *escenario*, que envuelve las circunstancias relacionadas con el salón de clase, y las *estructuras proposicionales*, las cuales le permiten al profesor organizar su conocimiento acerca del currículo escolar, del proceso de enseñanza-aprendizaje, del

diagnóstico del estudiante, del clima psicosocial, de las acciones didácticas más eficaces, entre otros aspectos. Por tanto, la formación matemática no es el único elemento que incide en la construcción de significados para la enseñanza, pues existen también otros elementos relacionados con la formación didáctica y la experiencia del propio docente (Ball *et al.*, 2008).

Como expresión del vínculo entre los esquemas y la construcción de significado, Pérez y Gimeno (1988) han destacado el concepto de esquema de traducción, el cual organiza la transferencia del conocimiento de carácter teórico a esquemas concretos de instrucción. Por este motivo, es posible al menos identificar dos formas fundamentales de las estructuras proposicionales: las preestablecidas y las establecidas. Por ejemplo, un enunciado preestablecido es aquel que el profesor tiene incorporado en su actividad cotidiana, de manera tal que forma parte de sus estructuras conceptuales; es decir, es capaz de establecer relaciones de tipo causa-efecto entre un enunciado y la compleja red de esquemas que ha construido. Un enunciado establecido es aquel que ha sido aprehendido bajo influencia externa, por ejemplo, en el marco de procesos de superación profesional, con el estudio de documentos normativos, con ayuda del intercambio entre colegas, entre otros escenarios.

Según Zaslavsky *et al.* (2002), 47% de los profesores presentan predisposición hacia los elementos visuales de la pendiente y entienden esta como un índice de inclinación. En su investigación, los autores reportan la existencia de confusión entre los aspectos algebraicos y geométricos de la pendiente, la escala y el ángulo. Hoffman (2015) asevera que los profesores participantes en su estudio consideran preferentemente la interpretación geométrica de la pendiente, ya que 45% de ellos la asocian con la razón geométrica. Stump (1999), por su parte, concluye que menos del 20% de los profesores entrevistados en su estudio asocia la pendiente como una relación funcional, y también observa cierta desconexión entre los conceptos de pendiente y de función. Además, este autor observa que las dificultades, obstáculos y errores sobre el concepto de pendiente obedecen, básicamente, a la utilización sistemática de determinadas acciones u operaciones sin plena claridad en sus significados y fundamentos. Estas carencias limitan los horizontes argumentativos, en el sentido de la abstracción reflexiva señalada por Moreno (1996), vista no solo como proceso cognitivo sino también como un resultado que deja una huella en el pensamiento del profesor. En la medida en que se constriñe la capacidad de ver un mismo concepto desde múltiples ángulos, más angostas son las posibilidades de enseñarlo con efectividad.

Nagle *et al.* (2013) aseveran, que las respuestas de un grupo de profesores a tareas relacionadas con el concepto de pendiente ponen de relieve que dicho concepto apenas es entendido como razón de cambio; sin embargo, los estudiantes se referían a la pendiente como un comportamiento de la gráfica. En palabras de Thompson (2013), ello refleja una dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de pendiente. En la misma dirección Byerley y Thompson, 2017 plantean que un significado es productivo si existe coherencia entre lo que el docente intenta transmitir, lo que imagina que transmite y lo que realmente transmite. Es deseable que la construcción de significados productivos le permita al discente comprender y dar sentido al conocimiento matemático, y a su vínculo con la solución de problemas teóricos y prácticos. El aprendizaje también requiere solidez del conocimiento, expresado en la productividad del significado con el paso del tiempo.

Diamond (2019) observa que los profesores hacen predicciones acerca del conocimiento que los estudiantes tienen sobre las aplicaciones del concepto de pendiente, con base en los significados que supuestamente deberían tener y al saber de su propia experiencia. Para este autor, una condición necesaria para que el profesor pueda guiar la enseñanza en general, y en particular la formación de significados productivos en los estudiantes, parte de una comprensión profunda de los significados de los conceptos matemáticos y de la capacidad para reconocer e implementar dichos significados en diversos contextos. Sin embargo, el conocimiento profundo sobre un tema no es suficiente para desarrollar una comprensión eficiente de los diferentes significados en los estudiantes (Ball *et al.*, 2008; Silverman y Thompson, 2008). Para el logro de este objetivo es necesario considerar otros factores, tales como el conocimiento de los estudiantes, reflejado en cómo los docentes imaginan que estos entienden los enunciados; y también el currículo, los textos, la estructura conceptual, sus representaciones e imágenes, el diseño de las actividades, entre múltiples aspectos didácticos.

ESTRATEGIA PARA EL ESTUDIO DE SIGNIFICADOS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE PENDIENTE

Tomando en consideración las observaciones anteriores, la estrategia se establece sobre cuatro principios que sirven de base para el estudio de los significados para la enseñanza que poseen los profesores:

- El énfasis en el estudio del profesor no significa desligar su análisis del estudiante. Por el contrario, se explora los significados para la enseñanza con base en el contenido que se transmite, lo que imagina que transmite y, lo que realmente se transmite.
- El contenido objeto de estudio consiste en el concepto de pendiente, cuyo significado puede describirse a partir de cuatro esquemas fundamentales: geométricos, analíticos, algebraicos, y contextual.
- El estudio de los significados para la enseñanza se erige con apoyo en tres componentes: uno cognitivo relacionado con los esquemas que ponderan la abstracción reflexiva, uno didáctico que contempla las acciones de enseñanza en función de los objetivos de aprendizaje, y uno personológico que toma en consideración los esquemas comunicativos que se establecen entre el docente y el discente. Por tanto, este último se manifiesta en forma de relación entre los dos primeros componentes.
- Los enunciados se estudian en el plano cognitivo, y se clasifican en preestablecidos y establecidos. Sin embargo, ellos pueden manifestarse en el plano didáctico.

La figura 1 ilustra los elementos para el estudio de los significados para la enseñanza en el contexto de la Educación Matemática.

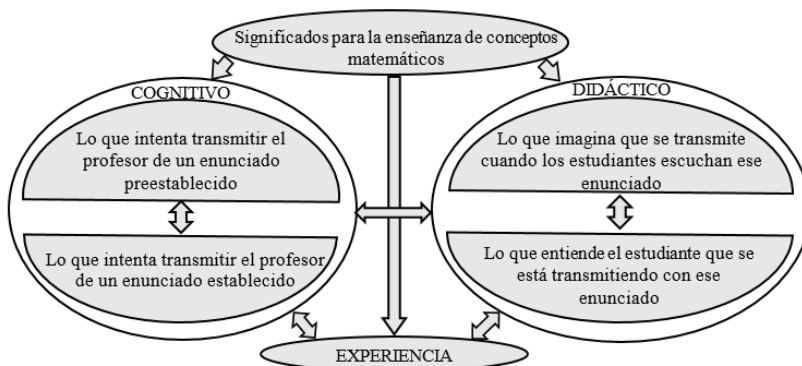


Figura 1. Elementos de los significados para la enseñanza.

Fuente: elaboración propia.

La estrategia consta de tres etapas:

Etapas de elaboración. En esta etapa los investigadores relacionan los posibles significados asociados al concepto objeto de estudio, elaboran los instrumentos para el análisis de los significados con ayuda de actividades, problemas, encuestas, entrevistas semiestructuradas, entre otros aspectos. Para la evaluación y perfeccionamiento de los instrumentos resulta útil su valoración por parte de un panel de expertos, la implementación de un estudio piloto, o bien la combinación de ambos métodos.

Los profesores establecen sus esquemas y significados como resultado y como proceso de abstracción reflexiva, en estrecha relación con su experiencia (Ball *et al.*, 2008). Por tal motivo, la determinación de los elementos a diagnosticar con ayuda de instrumentos empíricos no puede separarse de los posibles esquemas cognitivos y didácticos. Asimismo, los esquemas de contenido matemático están estructurados sobre la base del dominio de conceptos, teoremas, procedimientos, métodos, notaciones, y representaciones. Particularmente, los significados asociados al contenido matemático de la pendiente se clasifican de manera sintética en esquemas geométricos, algebraicos, analíticos y contextuales, con las siguientes especificaciones que operacionalizan la estrategia en el plano cognitivo y que pueden ponerse de manifiesto de modo establecido o preestablecido:

- Esquema geométrico es aquel donde el concepto de pendiente se caracteriza con ayuda de conceptos tales como ángulo de inclinación, razón entre las longitudes de catetos de un triángulo rectángulo formado con dos puntos de una recta y las respectivas diferencias de sus proyecciones, la razón entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal de un punto, entre otros elementos propios del ámbito de la geometría.
- Esquema algebraico es aquel donde el concepto de pendiente se expresa por intermedio de representaciones relacionadas con la razón de cambio entre valores de ordenada (dominio) y abscisa (imagen) de una función lineal. En esencia, el énfasis se pone en calcular el valor de m en la ecuación $y = mx + n$ ($m, n \in \mathbb{R}$), o bien de calcular una razón del tipo $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Esquema analítico es aquel donde el concepto de pendiente se relaciona con conceptos tales como la derivada de una función en un punto, la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, el límite de la pendiente de las secantes a una curva en un punto, la razón de cambio instantánea para una función cualquiera, la rapidez de cambio de la función

en un punto (la mejor aproximación lineal de una curva en la vecindad del punto es la recta tangente en dicho punto), entre otros elementos del análisis matemático.

- Esquema contextual es aquel donde se pondera el valor instrumental del concepto de pendiente, en el sentido de su utilidad para resolver problemas matemáticos o del mundo real y bajo una doble mirada: de modelación y de aplicación.

Por su parte, los esquemas didácticos se centrarán en elementos relacionados con el conocimiento del currículo, metodológico y del estudiante. La estrategia diferencia lo que se intenta transmitir, lo que se imagina que se transmite y lo que realmente se transmite, donde el contenido didáctico se expresa en objetivos curriculares, contenidos matemáticos, métodos y medios de enseñanza, formas organizativas del proceso de enseñanza-aprendizaje. De forma particular, el contenido explícito que se refleja en un syllabus (lo normativo) no necesariamente coincide con el contenido enseñado de manera plena (Dolores e Ibáñez, 2020; Dolores *et al.*, 2020; Nagle y Moore-Russo, 2014).

Etapas de implementación. Aquí se aplican los instrumentos elaborados en la etapa anterior, y se recoge la información a través de un proceso sistemático, planificado y ordenado. De gran utilidad resultan las tecnologías de la información y las comunicaciones, de manera que el diligenciado de una encuesta pueda efectuarse en un momento adecuado a criterio del profesor. Asimismo, las entrevistas pueden desarrollarse en tiempo real, pero también pueden organizarse en forma de salas de chat o en foros interactivos sincrónicos o asincrónicos. Un elemento importante está dado por la necesidad de que los participantes desplieguen una actitud colaborativa y abierta. Esto puede lograrse tomando como base una adecuada selección de cada individuo, el respeto irrestricto a la confidencialidad, el empleo óptimo del tiempo, la creación de alicientes que incentiven la motivación, entre otros aspectos. Particularmente, un incentivo puede estar dado por la entrega o sorteo de estímulos materiales, por la formalización de reconocimientos, por el empoderamiento de los participantes en el sentido de hacerlos partícipes de su propio desarrollo profesional, por la retroalimentación acerca de los resultados del estudio, entre otras posibilidades. Estos últimos aspectos de la etapa de implementación también son útiles en el trabajo con el panel de expertos, durante la etapa anterior.

Etapas de análisis. En esta etapa final se procesa la información recolectada para identificar, clasificar y valorar los significados para la enseñanza. Un

significado para la enseñanza se cataloga como productivo si existe suficiente coherencia entre lo que el profesor intenta transmitir, lo que imagina que transmite y lo que realmente transmite. Por este motivo, es importante triangular la información aportada por los diferentes instrumentos. De igual modo es importante identificar deficiencias de orden cognitivo o didáctico, con el fin de emprender acciones de mejora. Esta etapa también sirve de dispositivo para la retroalimentación sobre las etapas anteriores, de manera que se puede perfeccionar la estrategia continuamente y, también adecuarla a nuevos escenarios de investigación didáctica.

METODOLOGÍA

Se describe la aplicación parcial de la estrategia, centrada en la primera etapa de elaboración. Con base en los principios y componentes cognitivo y didáctico, se diseñó un cuestionario, una entrevista semiestructurada, y una entrevista grupal que se sometió a consideración de los expertos y finalmente se discutieron los resultados de esta aplicación parcial de la estrategia antes descrita.

OBJETIVOS Y PARTICIPANTES

El conjunto de instrumentos mencionados se puso a disposición de un panel de expertos para su valoración conforme a los indicadores preestablecidos y así corroborar su factibilidad para el estudio de los significados para la enseñanza del concepto de pendiente que poseen los profesores. En el estudio participaron tres actores: los propios investigadores, bajo el rol de establecimiento de acciones para el diseño de instrumentos; 10 profesores universitarios de matemática, de manera voluntaria sin recibir retribución monetaria, los cuales recibieron y diligenciaron los instrumentos de carácter individual y participan en la instrumentación de carácter colectivo (estudio piloto); así como un panel previo de 12 expertos quienes evaluaron el conjunto de instrumentos, a partir de su análisis y de los resultados mostrados tras la aplicación preliminar.

ELABORACIÓN Y PILOTAJE DE LOS INSTRUMENTOS

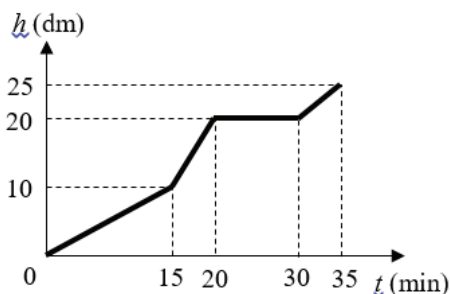
Las tareas que componen los instrumentos que se presentan para el estudio de los significados para la enseñanza de la pendiente que poseen los profesores, se elaboraron sobre la base de los elementos que conforman dicho significado (cognitivo y didáctico). El cuestionario va dirigido a explorar los significados matemáticos de los profesores; en este contexto, el significado del concepto se concreta en una descripción precisa y universal de una idea. La entrevista semiestructurada se diseñó con la finalidad de obtener información sobre cómo los profesores prevén transmitir el significado del concepto a sus estudiantes en el contexto didáctico-escolar. La entrevista grupal se elaboró para profundizar en los elementos que conforman los significados para la enseñanza; así como integrar y sistematizar la información obtenida de los otros dos instrumentos.

Las preguntas a los profesores se seleccionaron y diseñaron en función de estimular (explícita o implícitamente) en los docentes, los significados asociados a la pendiente en diferentes contextos. Además, dichas preguntas son el resultado de la labor docente e investigativa de los autores (con más de 25 años en la docencia universitaria) y de las siguientes investigaciones (Stump, 2001; Zaslavsky *et al.*, 2002; Cho y Nagle, 2017; Thompson 2013; Byerley y Thompson, 2017; Diamond, 2019; Dolores *et al.*, 2020). De las preguntas planteadas en el estudio piloto, se esperaba que sus respuestas revelaran los diferentes significados del concepto de pendiente. Las tareas 1, 2 del cuestionario modelan situaciones asociadas, esencialmente, con significados geométricos y algebraicos, en general, se esperaba que para su solución los profesores recurrieran a la razón entre el cateto vertical y el cateto horizontal del triángulo rectángulo cuya hipotenusa yace sobre la recta, la pendiente como el desplazamiento vertical por cada unidad de desplazamiento horizontal y la razón entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas de dos puntos que pertenecen a la recta. De las tareas 4 y 5 se esperaban respuestas asociadas con significados analíticos: la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, la razón de cambio de la función en un punto, velocidad instantánea.

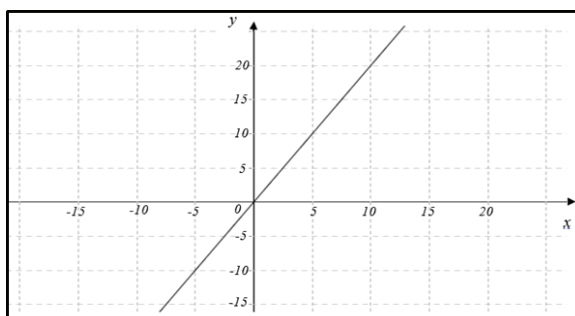
El primer instrumento consiste en un cuestionario, cuyo objetivo es indagar acerca de los elementos cognitivos de los profesores sobre el significado del concepto de pendiente. El encabezamiento del instrumento ha sido omitido y solo se presenta la batería de cuatro preguntas.

Contenido del cuestionario

- i. La gráfica muestra la altura que va alcanzando el agua durante el proceso de llenado de un tanque, a partir del momento en que se abre una llave y durante ciertos intervalos de tiempo, hasta que el tanque se llena totalmente.

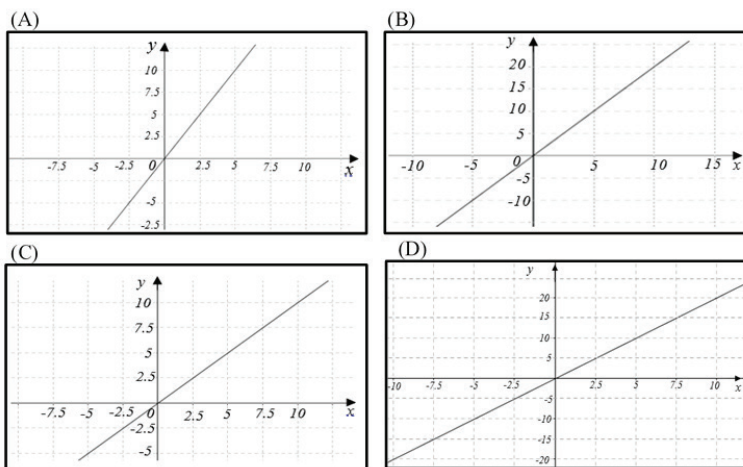


- ¿Se detuvo el proceso de llenado en algún momento? ¿Durante qué tiempo?
 - ¿Con qué rapidez se llena el tanque durante los primeros 15 minutos?
 - Seleccione la respuesta correcta y fundamente:
 "A los 18 minutos el agua tenía una altura de (A) __19 dm, (B) __16 dm, (C) __15 dm, (E) __18 dm".
 - ¿En cuál tramo la altura del agua cambió más rápidamente?
 - Determine la función que modela el proceso representado en la gráfica.
- ii. Considere la siguiente gráfica:



Justifique cuál o cuáles de las siguientes rectas tiene la misma pendiente que la recta ilustrada en la gráfica anterior.

- iii. Dos corredores comienzan una carrera al mismo tiempo y terminan en empate. Probar que en algún momento de la carrera ambos corredores alcanzan la misma velocidad.
- iv. Dada la ecuación $dy/dx = f(x,y)$, diga cuál o cuáles de los enunciados siguientes considera correcto o incorrecto y justifique en cada caso.
 - a. La derivada de una cierta función en cada punto del plano es $f(x,y)$.
 - b. La pendiente de una función en cada punto del plano donde existe el valor de f , es exactamente el valor de f en dicho punto.



- c. La ecuación determina en cada punto donde existe el valor de f , el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva solución en este punto.
- d. La razón de cambio de una función con respecto a la variación del valor de la variable independiente es $f(x,y)$.
- v. Un número $a \in \mathbb{R}$ se dice que es un punto fijo de la función f si $f(a) = a$. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ y tal que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que f tienen a lo sumo un punto fijo.

El segundo instrumento consiste en una entrevista semiestructurada, compuesta por una batería de siete preguntas. Este dispositivo se dirigió al plano didáctico y su objetivo consiste en conocer los significados para la enseñanza que poseen los profesores seleccionados, acerca del concepto de pendiente. Durante la fase de presentación, además de presentar los objetivos, declarar la confidencialidad, y crear condiciones de *rappor*t, se debate brevemente acerca del concepto de significado, en un sentido básicamente intuitivo.

Contenido de la entrevista semiestructurada

- i. ¿Considera usted que los significados de los conceptos matemáticos inciden en el desempeño de los estudiantes? ¿Por qué?
- ii. ¿Qué significados le atribuye usted al concepto de pendiente? ¿Lo considera un concepto esencial en la formación matemática? ¿Por qué?
- iii. ¿Con qué conceptos se relaciona el concepto de pendiente? Por favor, describa esta relación a través de un mapa conceptual.
- iv. Formule un enunciado (una proposición, un problema) que contenga el concepto de pendiente y explique qué significados tiene este para usted. ¿Cómo lo explicaría a sus estudiantes? ¿Qué imagina usted que entenderán sus estudiantes?
- v. ¿Cuáles de los significados antes mencionados sobre el concepto de pendiente (pregunta i) trata usted en clases? ¿Por qué?
- vi. ¿Qué dificultades se presentan en la enseñanza de la pendiente? ¿A qué causas atribuye estas?
- vii. ¿Cómo usted enseña el concepto de pendiente a sus estudiantes?

El tercer instrumento es una guía de seis preguntas para una entrevista grupal. El objetivo consiste en socializar el problema de investigación e identificar puntos de vista comunes acerca de los significados del concepto de pendiente y los esquemas que se transmiten del docente al discente.

Contenido de la entrevista grupal

- i. ¿Qué significado tiene para usted el término “pendiente” y la expresión “la pendiente de una función lineal”?
- ii. ¿Considera usted a la pendiente un concepto complejo para sus estudiantes? ¿Por qué?
- iii. ¿Explicita en qué contextos puede aparecer el concepto de pendiente? ¿Alguno más?
- iv. Dado los siguientes enunciados:
 - a. Se denomina pendiente o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación.
 - b. Se denomina línea recta al lugar geométrico de los puntos, tales que tomados dos cualesquiera de ellos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, el valor de la pendiente calculado por medio de la fórmula $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, con $x_1 \neq x_2$ resulta siempre constante.
 - c. La función $y = f(x)$ no tiene tangente horizontal.

¿Qué transmite cada uno de los enunciados anteriores? ¿Qué podrían entender los estudiantes?

- d. Considere el siguiente problema: un corredor recorrió una pista de 6 km en 45 minutos. ¿En algún momento del recorrido el corredor alcanzó la velocidad de 8 km/h? ¿Qué respuestas podrían dar los estudiantes? ¿Cuáles serían sus posibles interpretaciones?
- e. Formule un enunciado (afirmación, proposición, problema) en el que esté involucrado el concepto de pendiente. ¿Qué es lo que este transmite? ¿Qué podrían interpretar los estudiantes?

El cuestionario se aplicó en el escenario de la UAGro en el horario de la mañana. Seguidamente se realizaron las entrevistas semiestructuradas de forma individual, y luego la grupal en el mismo lugar, procurando un ambiente diáfano y constructivo, en el sentido de explorar aspectos de interés común relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de pendiente. La información diligenciada se digitalizó íntegramente, y las intervenciones en ambas entrevistas se registraron de forma taquigráfica. Todos estos elementos constituyen las evidencias del estudio piloto.

SELECCIÓN DEL PANEL DE EXPERTOS

La identificación de los expertos constituye un aspecto de singular importancia, ya que la opinión de estos provee información útil para la toma de decisiones de naturaleza investigativa. No solo se trata de buscar representatividad y profundidad analítica en el panel, sino también de lograr disposición a participar y permanecer en el proceso (Cruz, 2009). La selección se realiza con ayuda de la red académicas *Research Gate*, tomando en consideración tres requisitos mínimos: experiencia docente en la educación matemática universitaria de al menos una década, experiencia investigativa relacionada con la realización de estudios teórico-experimentales y que se manifieste en al menos diez artículos publicados en revistas arbitradas del campo de la educación matemática, y un índice $RG \geq 8$. El *RG Score* es un coeficiente de reputación que calcula esta red académica, a partir del total de documentos publicados y de su impacto, de las respuestas a preguntas que otros usuarios formulan dentro de su campo de investigación, del número de citas, de la cantidad de citas, seguidores y recomendaciones, principalmente.

VALORACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS Y LOS RESULTADOS DEL PILOTAJE POR EL PANEL DE EXPERTOS

Cada experto seleccionado recibió una invitación formal a participar, una explicación pormenorizada del proceso, así como el testimonio de absoluta confidencialidad. Para el intercambio de información se utilizó el servicio de mensajería electrónica. El panel recibe copia de los tres instrumentos, así como las evidencias digitalizadas del estudio piloto. También se entregó un formulario provisto de una matriz de 4×4 , donde cada fila corresponde a los tres instrumentos de forma individual y a su conjunto como un todo. Las columnas constituyen indicadores a evaluar, con ayuda de una escala ordinal de siete categorías lingüísticas: Muy bajo < Bajo < Medianamente bajo < Medio < Medianamente alto < Alto < Muy alto. Los indicadores de evaluación seleccionados son los siguientes: C1= pertinencia, C2= calidad, C3 = efectividad, y C4 = relevancia.

La pertinencia se adopta en el sentido de la valoración experta, acerca del nivel de conveniencia del elemento evaluado para seleccionarse definitivamente en un estudio de la presente naturaleza (aspecto de selección). Por ejemplo, un instrumento puede ser relevante por captar información fiable para un estudio científico (aspecto de contenido), puede contar con calidad por la estructura y rigor de las preguntas seleccionadas (aspecto de forma), incluso puede resultar efectivo en el contexto de su implementación y en el proceso comunicativo investigador/investigado (aspecto de funcionabilidad). Sin embargo, puede carecer de suficiente pertinencia por redundar en elementos que otro instrumento captó. Si bien estos criterios pueden tener alguna zona de solapamiento, su conjunto ayuda a formar un criterio aproximado sobre los aspectos evaluados, bajo la escala lingüística establecida. Para disminuir este riesgo, como complemento cualitativo, se solicitó finalmente a los expertos que expresen libremente otros criterios, a fin de enriquecer cada valoración.

PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN APORTADA POR EL PANEL DE EXPERTOS

Para el procesamiento de la información se implementó la técnica para la representación del ordenamiento por similitud respecto a la solución ideal, conocida como TOPSIS por sus siglas en inglés (Hwang y Yoon, 1981). En su versión clásica, esta técnica procesa información multicriterio para identificar la mejor solución a un problema, o bien para jerarquizar un conjunto preliminar de

variantes de solución. El principio básico consiste en que la alternativa más adecuada muestra la menor distancia posible respecto a la solución ideal positiva, así como la mayor distancia posible respecto a la solución ideal negativa. Los aspectos a evaluar son cuatro: A_1 = cuestionario, A_2 = entrevista semiestructurada, A_3 = entrevista grupal, y A_4 = los tres instrumentos como conjunto, conforme a los cuatro criterios establecidos y en la escala lingüística prefijada.

Ya que la información que proviene del conocimiento experto es flexible y subjetiva, se utiliza un enfoque borroso para el procesamiento de datos con la técnica antes mencionada (Park *et al.*, 2011). Además, cada categoría evaluativa tiene forma de variable lingüística, razón por la cual se “fuzzifica” con ayuda de una correspondencia biunívoca propuesta por Wang y Lee (2009), la cual se ilustra en la tabla 1.

Tabla 1. Escala lingüística y su correspondiente fuzzificación

Categoría lingüística	Abreviatura	Número difuso triangular
Muy bajo	MB	(0, 0, 0.2)
Bajo	B	(0.05, 0.2, 0.35)
Medianamente bajo	mB	(0.2, 0.35, 0.5)
Medio	M	(0.35, 0.5, 0.65)
Medianamente alto	mA	(0.5, 0.65, 0.8)
Alto	A	(0.65, 0.8, 0.95)
Muy alto	MA	(0.8, 1, 1)

Fuente: adaptado de Wang y Lee, 2009, p. 8983.

Siguiendo a Wang y Lee (2009), después de fuzzificar la información experta se jerarquizan los aspectos evaluados $A_i (1 \leq i \leq n)$, a partir de los criterios o indicadores preestablecidos $C_i (1 \leq i \leq m)$. Cada respuesta del experto $E_k (1 \leq k \leq l)$ constituye una matriz borrosa contentiva de $m \times n$ números difusos triangulares, o sea, $\tilde{x}_{ij}^{(k)} = (a_{ij}^k, b_{ij}^k, c_{ij}^k)$. Luego se promedian todas las evaluaciones para formar una matriz borrosa de decisión $\tilde{D} = [\tilde{x}_{ij}]_{m \times n}$, donde $\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{l} (\tilde{x}_{ij}^{(1)} + \tilde{x}_{ij}^{(2)} + \dots + \tilde{x}_{ij}^{(l)}) = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ y seguidamente se construye la matriz normalizada $\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m \times n}$, donde $\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^+}, \frac{b_{ij}}{c_j^+}, \frac{c_{ij}}{c_j^+} \right)$, donde $c_j^+ = \max\{c_{ij}\}$

Ya que no se ponderan los valores normalizados, estos se disponen en orden creciente de manera directa, para cada criterio C_j por separado. De esta forma resultan sendas soluciones ideales: una positiva $A^+ = (\tilde{r}_1^+, \tilde{r}_2^+, \dots, \tilde{r}_n^+)$ y otra negativa $A^- = (\tilde{r}_1^-, \tilde{r}_2^-, \dots, \tilde{r}_n^-)$, donde $\tilde{r}_j^+ = \max\{\tilde{r}_{ij}\}$ y $\tilde{r}_j^- = \min\{\tilde{r}_{ij}\}$. A continuación, para cada aspecto i se calculan las distancias i -ésimas respecto a las soluciones ideales positiva y negativa: $d_i^+ = \sum_{j=1}^n d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_j^+)$ y $d_i^- = \sum_{j=1}^n d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_j^-)$ donde d es la distancia euclidiana normalizada. Finalmente, los coeficientes de proximidad vienen dados por la expresión $CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-} \in [0,1]$, donde $1 \leq i \leq m$. Ello facilita jerarquizar los aspectos evaluados en el presente estudio, donde $m=n=4$. Se complementa esta jerarquización de los aspectos evaluados con la información cualitativa que aportan los expertos.

RESULTADOS

El estudio piloto corroboró los altos niveles de complejidad que entraña el estudio de los significados del concepto de pendiente. Principalmente, se observan dificultades relacionadas con el significado que los docentes le asocian a algunas de las exigencias planteadas en los instrumentos; lo que revela un análisis descontextualizado de las situaciones problemáticas presentadas. Los profesores manifiestan un conflicto cognitivo, en cuanto al significado de la pendiente bajo un cambio de escala del sistema de coordenadas. También se presenta confusión entre los aspectos funcionales y los aspectos asociados a la razón de cambio instantánea, significado analítico de la pendiente. A título de ejemplo, cabe mencionar que el 40% de los profesores participantes en la prueba piloto asumió en su respuesta al tercer problema del cuestionario que, si los corredores ocupaban la misma posición en algún momento, entonces tendrían la misma velocidad. He aquí la respuesta del profesor P7:

3.- Al trazar las gráficas de distancia contra tiempo de los corredores, estas van del punto $(0,0)$ hasta (t_f, d_f) , por continuidad debe haber un punto de intersección y es justo cuando tienen la misma velocidad.

Nótese que P7, en lugar de orientar su razonamiento hacia la búsqueda de una igualdad de pendientes, desvirtúa erróneamente su reflexión hacia la localización de un punto de intersección entre sendas curvas continuas.

La figura 2 contiene otras respuestas ilustrativas de los profesores al problema 3.

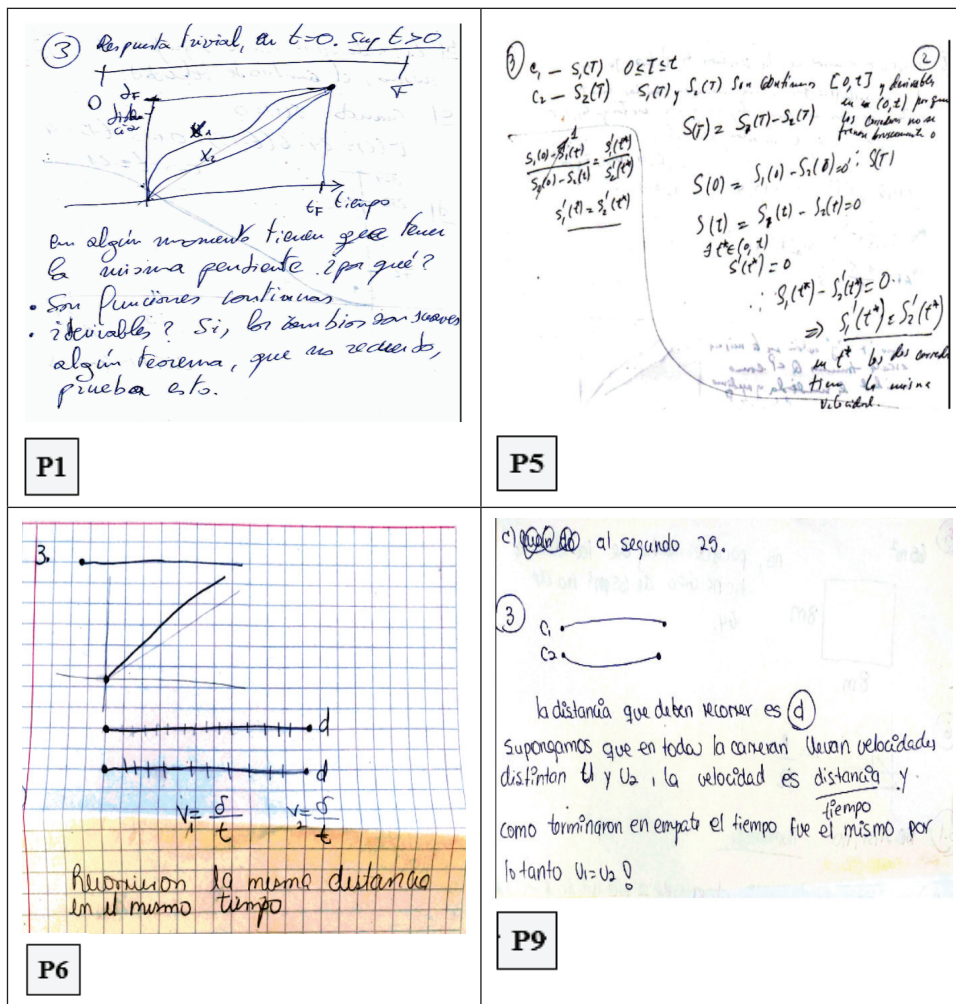


Figura 2. Ejemplos ilustrativos tarea 3.

Fuente: elaboración propia con resultados del estudio piloto.

Las dificultades son típicas: modelación aproximada del problema y descripción del razonamiento en forma incompleta (P1), desarrollo de un esquema analítico con descuido de los procesos de límite que acompañan al cociente incremental (P5), respuesta trivial por ausencia de comprensión plena del problema (P6), y confusión de los conceptos de velocidad instantánea y de velocidad media (P9). Todas las respuestas se digitalizaron con el objetivo de que los expertos contaran con un complemento de aplicación preliminar del conjunto de instrumentos elaborados.

De forma preliminar, con base en una búsqueda automatizada en *Research Gate* se identificaron 21 expertos potenciales, los cuales también poseen relaciones de trabajo científico con la UAGro, de forma directa o indirecta, y cumplen con los criterios de selección preestablecidos. El proceso transcurrió durante un periodo de confinamiento, a causa de la eventualidad causada por la COVID-19. Tras cumplirse un mes de haber solicitado la evaluación, se recibió respuesta de cerca de la mitad de los expertos. Se envió un recordatorio y se dio por culminado el proceso al transcurrir otras dos semanas. En total, se recibieron las evaluaciones de 13 expertos, de las cuales se desechó una por problemas en el llenado del formulario. Definitivamente, se compilaron las respuestas de 12 expertos ($l = 12$; 7 hombres y 5 mujeres), los cuales son doctores en educación matemática, y laboran en instituciones universitarias latinoamericanas como docentes de matemáticas superiores, con 13.5 años de experiencia promedio en esta actividad y un coeficiente de reputación promedio $RG \approx 8.7$. Además, pudo verificarse un índice de Hirsch promedio $H \approx 9.2$ en *Google Scholar*.

El diligenciado de la matriz evaluativa alcanzó un coeficiente de Cronbach fiable ($\alpha = 0.71$), conforme a la escala sugerida por Cohen *et al.* (2007). El conteo de las evaluaciones de cada aspecto evaluado (A_1 = cuestionario, A_2 = entrevista semiestructurada, A_3 = entrevista grupal, y A_4 = conjunto de instrumentos), conforme a los criterios prefijados (C_1 = pertinencia, C_2 = calidad, C_3 = efectividad, y C_4 = relevancia), permitió observar que la mayoría de estas se ubican entre las categorías de medianamente alto, alto y muy alto. Siguiendo la columna de los totales por categoría, las evaluaciones comprenden 95.83%, 95.83%, 93.75%, y 93.75% de las tres categorías superiores en la escala adoptada, respectivamente. Los resultados descriptivos aparecen descritos en la tabla 2. Las categorías con frecuencias completamente nulas han sido eliminadas.

Tabla 2. Tabla de frecuencias de las evaluaciones otorgadas por el panel de expertos

Aspecto evaluado	Categoría	Indicadores de evaluación				Total
		Pertinencia	Calidad	Efectividad	Relevancia	
Cuestionario	B	1	1	0	1	3
	mA	1	3	3	2	9
	A	3	1	0	0	4
	MA	7	7	9	9	32
	Total	12	12	12	12	48
Entrevista semiestructurada	M	1	0	0	1	2
	mA	2	1	3	0	6
	A	3	5	0	1	9
	MA	6	6	9	10	31
	Total	12	12	12	12	48
Entrevista grupal	mB	1	0	0	1	2
	M	0	0	0	1	1
	mA	2	3	3	4	12
	A	2	3	2	1	8
	MA	7	6	7	5	25
	Total	12	12	12	12	48
Conjunto de instrumentos	M	0	0	2	0	2
	mA	2	3	0	4	9
	A	3	2	4	1	10
	MA	7	7	6	7	27
	Total	12	12	12	12	48

Fuente: elaboración propia.

Después de promediar las evaluaciones de cada experto, se obtuvo la matriz difusa de evaluación, cuyos componentes normalizados aparecen en la tabla 3.

Tabla 3. Matriz difusa normalizada

Aspectos evaluados	Pertinencia	Calidad	Efectividad	Relevancia
Cuestionario	(0.52, 0.81, 0.91)	(0.40, 0.75, 0.78)	(0.39, 0.63, 0.78)	(0.41, 0.66, 0.81)
Entrevista semiestructurada	(0.47, 0.74, 0.88)	(0.42, 0.68, 0.80)	(0.40, 0.64, 0.79)	(0.41, 0.65, 0.81)
Entrevista grupal	(0.49, 0.77, 0.89)	(0.36, 0.58, 0.75)	(0.35, 0.57, 0.75)	(0.41, 0.65, 0.80)
Conjunto de instrumentos	(0.46, 0.74, 0.84)	(0.36, 0.60, 0.74)	(0.40, 0.64, 0.79)	(0.38, 0.62, 0.78)
$\tilde{r}_j^-$	(0.46, 0.74, 0.84)	(0.36, 0.58, 0.74)	(0.35, 0.57, 0.75)	(0.38, 0.62, 0.78)
$\tilde{r}_j^+$	(0.52, 0.81, 0.91)	(0.42, 0.75, 0.80)	(0.40, 0.64, 0.79)	(0.41, 0.66, 0.81)

Fuente: elaboración propia.

Luego se calculan las distancias respecto a las soluciones ideales positiva y negativa, lo cual permite determinar cada coeficiente de proximidad CC_i . La tabla 4 muestra los valores definitivos.

Tabla 4. Jerarquización de los aspectos evaluados con base en los coeficientes de proximidad

Aspectos evaluados	d_i^-	d_i^+	CC_i	Jerarquización
Cuestionario	0.0604	0.1634	0.2697	4
Entrevista semiestructurada	0.1730	0.0580	0.7489	2
Entrevista grupal	0.0622	0.1624	0.2769	3
Conjunto de instrumentos	0.1899	0.0331	0.8517	1

Fuente: elaboración propia.

Respecto a los resultados de la opinión cualitativa solicitada a los expertos, los elementos estuvieron relacionados con la corrección y mejoramiento de aspectos estructurales en forma puntual. Los elementos más recurrentes fueron tres: (1) otorgar a los participantes la posibilidad de añadir libremente algún otro aspecto, (2) emplear recursos audio-visuales para facilitar la comprensión, como en el caso del problema de la pregunta v en la entrevista grupal y, (3) diseñar un cuarto dispositivo que permita complementar la información con los argumentos de los estudiantes.

DISCUSIÓN

La metodología implementada puso a disposición de un panel de expertos los resultados de un estudio piloto, el cual apenas considera un segmento de las etapas de elaboración e implementación en la estrategia propuesta. Se pudo apreciar la existencia de algunas limitaciones asociadas al número relativamente limitado de profesores participantes en el estudio piloto, lo cual redujo las posibilidades de contar con un amplio espectro de respuestas que ilustre los esquemas de pensamiento del docente. Si bien la aplicación del instrumento reflejó fiabilidad, su valor rebasa escasamente el límite mínimo sugerido por Cohen *et al.* (2007), donde $\alpha = 0.7$. Asimismo, la también restringida cantidad de expertos reduce el grado de generalización de sus consideraciones evaluativas, y consecuentemente la validez externa.

Sin embargo, existen aspectos que proveen al estudio de cierto grado de validez nominal o de contenido, en el sentido de Malhotra *et al.* (2017). Por ejemplo, la matriz evaluativa refiere los tres instrumentos de forma independiente y también su conjunto como un todo, lo cual posibilita una evaluación holística de la parte instrumental en la estrategia. Los cuatro indicadores seleccionados (pertinencia, calidad, efectividad y relevancia) aportan información amplia y valiosa que enriquece esta evaluación. Aunque su número dista de ser exhaustivo, aspectos importantes como el rigor y la síntesis ya quedan enmarcados dentro del indicador de calidad. Por su parte, la pregunta abierta complementa cualitativamente la evaluación de cada experto, y ello permite considerar aspectos vinculados también a la parte conclusiva de la estrategia: la etapa de análisis.

Existen también otros elementos relacionados con la validez interna durante la aplicación del método de criterio de expertos, donde fueron disminuidas algunas posibles fuentes de invalidación. Siguiendo a Hernández *et al.* (2014, p. 137), algunas amenazas tales como la compensación en grupos de control, la maduración, la instrumentación, y la administración de varias pruebas, no tuvieron lugar, conforme a la metodología implementada. El anonimato de los expertos favoreció la no difusión de tratamientos, o sea, que los expertos se hubiesen comunicado entre sí. La selección del panel mostró una amplia experiencia en la realización de investigaciones experimentales en educación matemática, con indicadores de selección aproximadamente similares. Tampoco se observaron respuestas extremas ni desbalanceadas, lo cual disminuye la posible regresión. Asimismo, su conducta fue objetiva, directa y diáfana, con apego al respeto y a la ética científica en su comunicación con el panel.

De forma general, las condiciones del entorno para cada experto fueron similares, en el sentido de emitir sus consideraciones con tiempo suficiente desde su propia casa, así que existió cierta estabilidad en el ambiente experimental. Sin embargo, dos aspectos pudieron atentar contra la validez interna. En primer lugar, el periodo de confinamiento a causa de la pandemia de la COVID-19 constituyó un evento que pudo alterar de forma no controlada las posibilidades de que cada experto desplegara un análisis suficientemente profundo y minucioso (amenaza de historia). En segundo lugar, se detectaron situaciones de mortalidad, ya que algunos expertos abandonaron el experimento, incluso después de una segunda solicitud de respuesta. Este hecho ha sido reportado en numerosos estudios y constituye una de las principales amenazas durante el empleo del método de criterio de expertos (Cruz y Rúa, 2018).

Los resultados obtenidos permiten jerarquizar los instrumentos y su totalidad. En primer lugar, puede notarse un desbalance marcado del coeficiente de proximidad hacia la entrevista semiestructurada. Esto indica que los expertos consideran dicho instrumento más efectivo que los restantes $0.7489 > 0.2769 > 0.2697$. Tal singularidad puede estar dada por la importancia del intercambio directo entre el investigador y el sujeto investigado. En una entrevista individual es posible aclarar cualquier aspecto de forma inmediata, y también se eliminan ciertos sesgos, tales como el temor a la intervención en grupo, la presencia de individuos dominantes, entre otros elementos presentes en escenarios colectivos (Cruz, 2009).

Los instrumentos para este estudio se diseñaron como sistema integrador, en lo fundamental, el cuestionario de 10 tareas que fue enviado a los participantes del estudio piloto, que tenía por objetivos estimular los diferentes significados asociados con el concepto de pendiente. Las tareas 1, 2 y 7 favorecen, esencialmente, los significados geométricos y algebraicos. Las tareas 3, 6 y 10 permitieron explorar los significados geométricos y las tareas 4, 5, 8 y 9 los significados analíticos. Cabe destacar que tareas similares a las 1, 3 y 6, han sido utilizadas con objetivos semejantes en las siguientes investigaciones Stump, 1999; Zaslavsky, 2002; Thompson, 2016.

Al observar que el valor máximo de CC_i se alcanza en la totalidad de los instrumentos, puede afirmarse que el conjunto formado por los tres instrumentos, en cierta medida, supera las deficiencias de cada uno por separado. Además, la sugerencia de añadir un cuarto dispositivo relacionado con los argumentos del alumno acerca del concepto de pendiente, permite un perfeccionamiento del instrumental diagnóstico antes de emprender nuevas acciones de investigación. Una solución posible podría ser la elaboración de una guía de observación de clases, la adaptación de los propios instrumentos diseñados para el caso de los alumnos, el diseño de una guía para la revisión de exámenes relacionados con el concepto de pendiente, entre otras variantes. Esta observación favorece un análisis más integral del fenómeno, pues va más allá de los esquemas de pensamiento y los significados que se transmiten o imaginan transmitir, enfatizando la exploración empírica de lo que realmente se transmite. Finalmente, la sugerencia de incorporar recursos audio-visuales, así como la mejora continua de cada elemento de los instrumentos, son base para emprender un camino de validación futura, lo cual requeriría de otros estudios apoyados en muestras más representativas.

CONCLUSIONES

La presente estrategia se ha enfocado hacia el estudio de los significados para la enseñanza que poseen los docentes, en relación al concepto de pendiente. Su base estructural comprende tres etapas de elaboración, implementación y análisis, mientras que sus componentes funcionales incluyen lo cognitivo, lo didáctico y lo personalológico. De esta manera se explora el grado de coherencia que tiene lugar entre lo que el docente intenta transmitir, lo que imagina que transmite, y lo que el discente concibe que se transmite como producto de un canal comunicativo de enseñanza-aprendizaje. Un énfasis marcado se pone en el proceso de abstracción reflexiva, el cual transcurre en el componente cognitivo, donde los enunciados relacionados con el concepto de pendiente se manifiestan de manera establecida o preestablecida. Todo ello constituye un avance en la comprensión de los esquemas que se configuran alrededor de este concepto matemático. Este hecho les provee a los resultados descritos un valor argumentativo, desde una perspectiva teórica en educación matemática.

Con las primeras evidencias empíricas de aplicación, se ha podido observar la importancia de contar con un dispositivo instrumental que capte los significados para enseñanza que poseen los profesores sobre la pendiente. Las deficiencias en el proceso de elaboración de instrumentos de diagnóstico repercuten ulteriormente en las etapas de implementación y de análisis. De gran utilidad han sido el diseño y uso combinado de un cuestionario, una entrevista semiestructurada y una entrevista grupal, lo cual es perfectible ya que su objeto de análisis se enmarca en el estudio de los significados. Estos instrumentos favorecen la exploración directa de lo que el profesor intenta transmitir y lo que este imagina que trasmite, pero expresan de manera indirecta lo que el alumno concibe que se transmite. O sea, el profesor aporta información sobre su percepción acerca del aprendizaje del alumno. Si bien ello resulta útil y valioso, tal como señalaron los expertos, el diseño de otros dispositivos que exploren de forma más directa el pensamiento del alumno, favorecerá una aprehensión más objetiva del fenómeno objeto de estudio. En esto reside la utilidad práctica de los resultados obtenidos.

La contrastación empírica de un estudio con base teórico-metodológica resulta doblemente compleja. Por un lado, ha sido necesario desarrollar un estudio piloto que permita contar con evidencias tangibles de experimentación. Por otro, el dispositivo instrumental complementado con estas evidencias ha sido objeto de análisis por el juicio colectivo de un panel de expertos. Varios aspectos

ponderan la validez interna y nominal, pero queda pendiente el problema de la validez externa a causa de las muestras limitadas de los participantes. Ello resulta esencial, pues se relaciona expresamente con las potencialidades de generalización de los hallazgos contenidos en el presente estudio. En esto reside la continuidad y perfeccionamiento requeridos para investigaciones ulteriores.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al editor y a los árbitros anónimos, por sus valiosas sugerencias que permitieron mejorar la versión original del presente manuscrito.

REFERENCIAS

- Anderson, R. C. (1984). Some reflection's on the acquisition of knowledge. *Educational Researcher*, 13(9), 5-10.
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Byerley, C., y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, 48(2), 168-193.
- Carlson, M., Oehrtman, M., y Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment (PCA) instrument: A tool for assessing students' reasoning patterns and understandings. *Cognition and Instruction*, 28(2), 113-145.
- Cho, P., y Nagle, C. (2017). An analysis of students' mistakes on routine slope tasks. En E. Galindo, y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Routledge, Taylor & Francis Group.
- Cruz, M. (2009). *El método Delphi en las investigaciones educacionales*. Academia.
- Cruz, M., y Rúa, J. A. (2018). Surgimiento y desarrollo del método Delphi: una perspectiva cuantitativa. *Biblios*, 71, 90-107.
- Deniz, Ö., y Kabael, T. (2017). 8th grade students' processes of the construction of the concept of slope. *Education and Science*, 42(192), 139-172.
- Diamond, J. M. (2019). Teachers' beliefs about students' transfer of learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(5), 459-487.
- Dolores, C., Rivera, M. I., y Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, 120(2), 104-115.

- Gimeno, J. (2015). *Los contenidos: Una reflexión necesaria*. Morata.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. del P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill Education.
- Hoffman, W. (2015). Concept Image of Slope: Understanding Middle School Mathematics Teachers' Perspective Through Task-Based Interviews (Tesis doctoral no publicada). The University of North Carolina.
- Howson, G. (2005). "Meaning" and School Mathematics. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, y P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education. Mathematics Education Library* (17–38), 37. Springer.
- Hwang, C. L., y Yoon, K. (1981). *Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications*. Springer.
- Keitel, C., y Kilpatrick, J. (2005) Mathematics education and common sense. In: J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, y P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education. Mathematics Education Library* (105–128), 37. Springer.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64.
- Malhotra, N. K., Nunan, D., y Birks, D. F. (2017). *Marketing Research. An Applied Approach*. Pearson.
- Martin, E., Ruiz, J. F., y Rico, L., (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(3), 51–71.
- McGee, D., Moore–Russo, D., y Martínez, R. (2015) Making implicit multivariable calculus representations explicit. A clinical study, *PRIMUS*, 25(6), 529–541.
- Montenegro, E., García, J., Fuentes, I., Duharte, E., y Trobajo, A. (2009). Enfoque didáctico para la comprensión conceptual de significados matemáticos básicos a través del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, para la formación de profesores de Ciencias Exactas. *Revista Integra Educativa*, 2(1), 183–195.
- Moore–Russo, D., Conner, A., y Rugg, K. I. (2011). Can slope be negative in 3–space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3–21.
- Moreno, L. (1996). La epistemología genética: una interpretación. *Educación Matemática*, 8(3), 5–33.
- Mudaly, V., y Moore–Russo, D. (2011). South African teachers' conceptualizations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an advanced certificate in education programmer. *Pythagoras*, 32(1), Art. #25, 8 pages.
- Nagle, C., y Moore–Russo, D. (Eds.) (2013). SLOPE: A network of connected components. En M. Martinez, y A. Castro (Eds.), *Proceedings of the 35th Annual Meeting of the*

- North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 127–135). University of Illinois at Chicago.
- Nagle, C., Martínez-Planell, R., y Moore-Russo, D. (2019). Using APOS theory as a framework for considering slope understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, 54, 100684.
- Nagle, C., Moore-Russo, D., y Styers, J. (2017). Teachers' interpretations of student statements about slope. En E. Galindo, y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 589–596). Indianapolis, Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.
- Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J. Y., y Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, 1491–1515.
- Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI Study (pp. 3–32). Springer.
- Park, J., Park, I., Kwun, Y., y Tan, X. (2011). Extension of the TOPSIS method for decision making problems under interval-valued intuitionistic fuzzy environment. *Applied Mathematical Modelling*, 35(5), 2544–2556.
- Pérez, A., y Gimeno, J. (1988). Pensamiento y acción en el profesor: de los estudios sobre la planificación al pensamiento práctico. *Infancia y Aprendizaje*, 42, 37–63.
- Piaget, J., y Inhelder, B. (1976). *Génesis de las estructuras lógicas elementales*. Guadalupe.
- Rivera, M. I., Salgado, G., y Dolores, C. (2019). Explorando las conceptualizaciones de pendiente en estudiantes universitarios. *Bolema*, 33(65), 1027–1046.
- Silverman, J., y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 499–511.
- Stanton, M., y Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: a review of state standards. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270–277.
- Stump, S. L. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124–144.
- Stump, S. L. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 207–227.
- Teuscher, D., y Reys, R. (2012). Rate of change: AP Calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School Science and Mathematics*, 112(6), 359–376.

- Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning. En K. Leatham (Ed.), *Vital Directions for Research in Mathematics Education* (pp. 57–93). Springer.
- Thompson, P. W. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435–461). Taylor and Francis.
- Walter, J. G., y Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 65(2), 203–233.
- Wan, T.-C., y Lee, H.-D. (2009). Developing a fuzzy TOPSIS approach based on subjective weights and objective weights. *Expert Systems with Applications*, 36(5), 8980–8985.
- Zaslavsky, O., Sela, H., y Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: the effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 119–140.

JOSÉ LUIS SÁNCHEZ SANTIESTEBAN

Dirección: Av. Lázaro Cárdenas, S/N. Ciudad Universitaria, CP. 39086,
Chilpancingo, Guerrero, México
jlsanchezsantiesteban@gmail.com