Educación matemática
ISSN: 0187-8298
ISSN: 2448-8089
Editorial Santillana

DOI: 10.24844/EM3303.08

Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería

Resignification of the trigonometric ratio in first-year Engineering students

Diana del Carmen Torres-Corrales[1]
Gisela Montiel-Espinosa[2]

Resumen: Se reporta una investigación de diseño fundamentada en la Teoría Socioepistemológica (TS), con la que se responde a la pregunta ¿cuál es el proceso de resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería en un escenario de construcción social de conocimiento? Con el análisis transversal de una anidación de prácticas y el reconocimiento de los usos del conocimiento matemático, se identificó el proceso de resignificación en tres categorías. Estas caracterizan cuando los estudiantes (1) actúan matemáticamente en forma distinta, (2) responden con herramientas que van más allá de los procesos memorísticos y (3) evocan alguna noción relacionada. Aunado a ello, se reconoce que los modelos (a escala o bosquejo) de las tareas de trigonometría permiten un ir y venir entre el objeto simulado, el análisis del modelo y el cálculo numérico; así también, que para distinguir la relación trigonométrica de una relación proporcional es necesario un estudio covariacional de la relación ángulo-cuerda de objetos en diferentes ubicaciones.

Fecha de recepción: 23 de mayo de 2019. **Fecha de aceptación**: 4 de julio de 2021.

[1] Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), diana.torres@itson.edu.mx, orcid.org/0000-0002-0057-5336

[2] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav), gmontiele@cinvestav.mx, orcid.org/0000-0003-1670-9172

Palabras clave: *Estudiantes de Ingeniería, resignificación, trigonometría, Teoría Socioepistemológica, experimentos de diseño.*

Abstract: We report a design research based on Socioepistemological Theory (ST), which answers the question: What is the process of resignification of the trigonometric ratio in first-year engineering students in a scenario of the social construction of knowledge? With the transversal analysis of nesting of practices and the recognition of the uses of mathematical knowledge, the process of resignification was identified in three categories. These characterize when students (1) perform mathematically in a different way besides school mathematics, (2) respond with tools that go beyond memory processes, and (3) evoke some related notion. In addition, it is recognized that the models (scale or sketch) of Trigonometry tasks allow a back and forth between the simulated object, the analysis of the model, and the numerical calculation; also, that to distinguish the trigonometric relation from a proportional relation, a covariate study of the angle-string relation of objects in different locations is necessary.

Keywords: *Engineering students, resignification, trigonometry, Socio-epistemological Theory, design experiments.*

1. INTRODUCCIÓN

La motivación de la presente investigación surge al identificar dificultades en algunos estudiantes del primer año de Ingeniería –tronco común– al trabajar con nociones básicas de trigonometría en las asignaturas de matemáticas y física; por ejemplo, establecer apropiadamente las razones cuando el ángulo de referencia no está en la base horizontal del triángulo rectángulo.

La literatura especializada muestra que las dificultades se dan tanto en estudiantes como en profesores, en los estudiantes se presentan en todos los niveles donde se aborda la trigonometría: nivel secundario (12-15 años), nivel medio superior (15-18 años) y nivel superior (18 años en adelante).

Dentro de la literatura consultada, se identificó que la investigación en los niveles secundario y medio comenzó explorando y comparando los niveles de comprensión de los estudiantes al trabajar en los contextos del triángulo rectángulo y del círculo. En particular la investigación de De Kee, Mura y Dionne

(1996) mostró que, si bien en ambos contextos se presentaron dificultades y los niveles de comprensión fueron bajos, estos últimos fueron ligeramente mayores en el contexto del triángulo. Entre las dificultades encontradas se destaca que los estudiantes no distinguen entre una relación trigonométrica y una relación proporcional, y aplican la razón trigonométrica a triángulos no rectángulos –considerando hipotenusa al lado con longitud mayor–. Llamó la atención de las investigadoras que los estudiantes no relacionaban la función trigonométrica con la función circular, aunque encontraban que en ambas había círculos y se usaban radianes. Aunado a ello, se identificaron un conjunto amplio de dificultades para expresar simbólicamente tanto funciones como ecuaciones trigonométricas.

Sin embargo, es importante resaltar que el comparativo entre la comprensión lograda en ambos contextos tuvo sentido en el marco de la tradición llamada Matemática Moderna, pues hubo intentos por introducir la enseñanza de la trigonometría con el círculo unitario. La investigación de Kendal y Stacey (1996) evidenció el alto costo no sólo en comprensión, sino en retención y manejo algebraico que tenía este método, pues las tareas de introducción a la trigonometría eran básicamente de cálculo de longitud de lados y de medida de ángulos en triángulos rectángulos dados lados y ángulos conocidos, pero no se justificaba el iniciar con la definición formal de la función trigonométrica y el uso de procedimientos complejos para la resolución de problemas básicos. Más aún, identificaron que en todos los grupos se presentaron dificultades aritméticas y algebraicas antes de la instrucción con cualquiera de los métodos, pero los estudiantes que trabajaron con el método de las razones trigonométricas encontraban un camino efectivo para superar sus dificultades con ecuaciones complejas.

Aunque ambas investigaciones reportaron las dificultades más pronunciadas en el contexto/método[3] del círculo, reconocieron también su rol fundamental en la definición de la función trigonométrica para avanzar en el desarrollo conceptual de estas nociones. En ese sentido, no se trataba de elegir uno sobre el otro, sino decidir cuándo era pertinente cada uno.

La literatura más reciente ubica la enseñanza de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo como un contexto de introducción más situado o cercano a la enseñanza de la geometría, y al círculo unitario como el contexto de transición a las funciones trigonométricas en el marco del precálculo. Son dos momentos de la enseñanza que ya no están en disputa por un lugar, sin

[3] De Kee *et al.* (1996) hablan de contexto y Kendal y Stacey (1996) de método. En esta revisión se respeta el término usado por las autoras, aunque en ocasiones usan ambos.

embargo, algunas investigaciones continuaron contrastando los métodos (por ejemplo, Weber, 2005) e incluso se llegó a considerar que el énfasis temprano en el triángulo rectángulo podría llevar a un conocimiento fragmentado de las funciones trigonométricas (DeJarnette, 2018) o inducir dificultades en el manejo de la medida angular. En cambio, otras apuntan a la necesidad de que los estudiantes construyan significados trigonométricos que sean aplicables en ambos contextos (Moore, 2014).

Weber (2005) y Moore (2014) reportaron resultados positivos trabajando con el círculo, pero hay que considerar que ambos diseños se orientaron al trabajo con la función (sus propiedades y su naturaleza)[4] y la población del estudio –estudiantes de nivel superior en asignaturas de precálculo– tenía un cierto dominio algebraico que le permitió tratar con el círculo sin las dificultades que tiene la población del nivel secundario. También utilizaron diseños fundamentados en teorías o conceptos en Educación Matemática. En particular, Moore (2014) identificó que, más que solo el trabajo con el círculo es el acercamiento cuantitativo y covariacional lo que permite al estudiante construir los significados de la función seno; es decir, lograr la comprensión del origen y naturaleza de la cantidad, el reconocimiento de lo que cambia, cómo cambia y la relación entre lo que cambia.

Otras investigaciones en el nivel superior se ubican en programas de formación inicial docente en matemáticas, que esperan cierto dominio de conceptos como razón y función trigonométrica por parte del estudiante, pues lo asumen como 'conocimiento del contenido a enseñar'. Entre las dificultades que se reportan están algunas asociadas con la medición angular (Akkoc, 2008; Fi, 2003; Topçu *et al*., 2006), ya sea por la resistencia a considerar valores distintos a los grados como variable de las funciones o dificultades para definir al radián como relación multiplicativa entre el arco y el radio de un círculo; mismas que se explican por el uso predominante que hay de la medida angular en grados en el contexto del triángulo rectángulo y en la enseñanza introductoria de la trigonometría.

Solo se identificó una investigación con profesores en formación inicial (Cavey y Berenson, 2005) y una con profesores tanto en servicio como en formación de posgrado (Yiğit, 2016) cuyo acercamiento va más allá del conocimiento del contenido a enseñar, hacia el conocimiento didáctico del contenido, buscando con ello profundizar en el entendimiento del propio contenido trigonométrico.

[4] Esto mismo para el caso de (DeJarnette, 2018), aunque aquí se trabaja con estudiantes de nivel medio, también trabaja un diseño fundamentado teóricamente y hace uso de herramientas visuales de programación.

A diferencia de la población estudiantil, la población docente muestra un manejo apropiado de los procedimientos –ya sea que estén memorizados o evocados con la mnemotecnia SOH CAH TOA[5]–. Sin embargo, se reporta un uso y transición ambigua entre el círculo y el triángulo, sin mucha certeza de por qué lo hacen. Por ejemplo, Yiğit (2016) reporta el caso de una profesora que usa un círculo unitario para resolver una tarea y al ver que no le sirve para dar respuesta, traza –sin más argumentos– un triángulo rectángulo, ubica sus datos y entonces elige la razón trigonométrica apropiada para dar respuesta.

Se identifica que en la literatura hay un fuerte énfasis en atender a la comprensión de la función trigonométrica cuando se avanza en los niveles educativos. Sin embargo, hay escenarios de la educación superior, por ejemplo, en Ingeniería, donde las nociones trigonométricas en el triángulo rectángulo son un contenido matemático relevante. Torres-Corrales y Montiel (2021) y Serrano-Quevedo (2018) lo ponen de manifiesto en el análisis que hacen a dos programas de estudio en carreras de Ingeniería Mecatrónica en México. En ese sentido, no solo en la formación docente o en la educación básica resulta importante continuar la investigación relativa a la comprensión y aprendizaje del contenido trigonométrico, en particular relativo a la razón trigonométrica.

Aunado a esto, en la literatura hay poco trabajo orientado a problematizar la naturaleza trascendente de las nociones trigonométricas en todos sus contextos, principalmente en el triángulo rectángulo. La indiferencia de los estudiantes entre una relación trigonométrica y una relación proporcional que reportan De Kee *et al.* (1996), la gráfica lineal que bosquejan los estudiantes para representar la relación entre el tiempo y la distancia al suelo en un paseo sobre una rueda de la fortuna en la investigación de DeJarnette (2018), y asumir decrementos constantes de la medida del ángulo cuando hay incrementos constantes de su cateto adyacente por parte de profesores, que reporta Jácome (2011) (figura 1), ponen de manifiesto que, aun dominando los procedimientos, para dar respuesta a las tareas escolares, no se ha construido un significado relativo a la naturaleza trascendente de la relación trigonométrica.

[5] **SOH**: **S**ENO = Cateto **O**puesto sobre **H**ipotenusa; **CAH**: **C**oseno = Cateto **A**dyacente sobre **H**ipotenusa; **TOA**: **T**angente = Cateto **O**puesto sobre Cateto **A**dyacente.

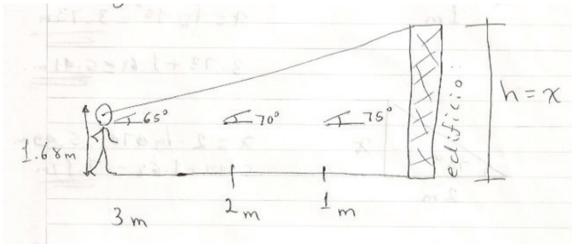


Figura 1. Razón trigonométrica como división de longitudes. (Jácome, 2011: 126)

A propósito de esta problemática, Montiel y Jácome (2014) realizaron un análisis del discurso Matemático Escolar (dME) en libros de texto del nivel secundario mexicano para identificar un posible origen de este "significado lineal" construido por los profesores. Estos autores reportan que "en la Trigonometría escolar no se presentan explicaciones y actividades que permitan reconocer e identificar que lo trigonométrico no está en la relación ángulo-distancia, sino en la naturaleza de dicha relación, y este constituye un espacio de oportunidad para que la linealidad se manifieste" (p. 1210).

Los análisis al discurso escolar de Montiel y Jácome (2014), Serrano-Quevedo (2018) y Torres-Corrales y Montiel (2021) comparten elementos de su perspectiva teórica (constructos teóricos de la Socioepistemología), por lo que vinculan las dificultades y concepciones reportadas por la literatura con la actividad matemática que se propone en Planes y Programas de Estudio, y libros de texto. Para el caso particular del análisis de tareas escolares relativas al trabajo con la razón trigonométrica en el triángulo rectángulo, reportan cómo estas se enmarcan en un contexto de proporcionalidad (triángulos rectángulos semejantes y razones proporcionales) y cálculo de valor faltante (longitud de un lado o medida angular), que no hace diferencia con el contexto de las tareas de proporcionalidad. Por otro lado, muestran que hay consideración de nociones geométricas (triángulos rectángulos, ángulos, semejanza, proporcionalidad, etc.), pero la actividad matemática no incluye su trazo o construcción, medición o modelación de una situación real, ni estudio de las relaciones entre los elementos del triángulo[6].

[6] Por ejemplo, como la tarea donde Yiğit (2016) pide incrementar la medida de un ángulo y encontrar qué cambia y qué se mantiene igual.

2. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

En la dirección de estas últimas investigaciones mencionadas, modificar la actividad matemática del estudiante redundaría en la construcción de otros significados. En particular se habla de *resignificar* la razón trigonométrica al proceso de construcción de significados ausentes o diferentes del discurso escolar, que son propios de su constitución en tanto saber matemático y dan cuenta de su naturaleza trascendente; lo cual no implica descartar los significados del discurso, pero que sin duda deben ampliarse. Dado el marco teórico en el que se desarrollan estas investigaciones, se habla de resignificación en escenarios de construcción social de conocimiento matemático.

Para delimitar la investigación y por el acceso a una universidad, se propuso una investigación de diseño situada en el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON, universidad pública y descentralizada ubicada en el norte de México) y en Fundamentos de Matemáticas, asignatura extracurricular del primer año cuyo penúltimo tema es la razón trigonométrica. Se invitó a participar de manera voluntaria y extra-clase a un grupo de 32 estudiantes, aceptaron seis estudiantes hombres y en este artículo se reporta la participación de los cuatro estudiantes que concluyeron todas las tareas. Los estudiantes tenían entre 19 y 22 años, y cursaban los programas de Ingeniería Industrial y de Sistemas (uno), Ingeniería Electromecánica (uno) e Ingeniería Civil (dos).

Tomando en consideración que el estudiante que recién ingresa a una carrera en Ingeniería tuvo interacción previa con los objetos trigonométricos escolares y que la investigación de diseño nos permite una intervención didáctica con la cual crear un escenario de construcción social de conocimiento matemático, se plantea como pregunta de investigación *¿cuál es el proceso de resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de Ingeniería en un escenario de construcción social de conocimiento?*

3. REFERENTES TEÓRICOS

La Teoría Socioepistemológica (TS) se ocupa de estudiar el problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional (Cantoral *et al.*, 2014), para lo cual integra una dimensión social al estudio del sistema didáctico (constituido por el saber, el profesor, el alumno y sus relaciones). La integración de esta dimensión asume una “descentración del objeto" y atiende de forma prioritaria la actividad humana (individual y social) que antecede y acompaña su producción. Por lo que incorpora al estudio de los objetos matemáticos –materializados en definiciones, técnicas, algoritmos o reglas– un enfoque de prácticas, desde donde lo social es un campo de prácticas corporizadas y materialmente entrelazadas, organizadas en torno a entendimientos prácticos compartidos (Schatzki, 2000).

Con base en el cúmulo de resultados de investigación, realizada en diferentes escenarios (históricos, didácticos, profesionales, populares, entre otros) y centrados en el estudio de la actividad humana, se han desarrollado y se van refinando modelos que dan cuenta de su organización social en prácticas cada vez más complejas. Para el estudio que aquí se reporta se utilizó la progresión pragmática 'acción → actividad → práctica socialmente compartida', de un modelo de anidación de prácticas (figura 2) que sintetiza la construcción social de conocimiento matemático.

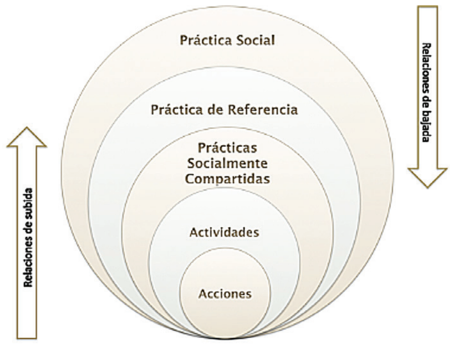


Figura 2. Modelo de anidación de prácticas (Cantoral *et al.*, 2015: 13)

En esta progresión pragmática –propuesta incluso para la intervención educativa (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017)– se reconoce una relación simbiótica entre el sujeto (y su participación) y la (constitución de una) práctica. Se parte de la *acción* directa del sujeto ante el medio a su integración en *actividades* situadas socioculturalmente que, a su vez, reiteradas con intencionalidad, devienen en *prácticas socialmente compartidas* (Cantoral *et al.*, 2014; Cantoral *et al.*, 2015).

Acciones y actividades, son aspectos observables y explícitos de la práctica (lo que se hace y se dice), pero su estudio requiere de identificar los aspectos no observables e implícitos, que subyacen y emergen de ellas. La práctica socialmente compartida puede entenderse como performativa o emergente según el escenario de estudio.

Un emergente de interés para la TS es el significado, por considerarlo fundamental en el entendimiento compartido en torno al cual se organiza un campo de prácticas. Para develar el significado construido o en construcción se estudia el *uso del conocimiento matemático*. El constructo *uso del conocimiento* se ha caracterizado como "las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico" (Cabañas, 2011: 75), "ya sea que el sujeto sea consciente de ello o no, que manipule de manera explícita o implícita, o que utilice representaciones típicamente escolares o propias del contexto" (Rotaeche, 2012: 27). Estos usos del conocimiento identificados se reconocen funcionales en tanto son compartidos por los participantes en y de la práctica, y dan respuesta a la tarea matemática (Torres-Corrales y Montiel, 2021).

Como toda perspectiva teórica en un paradigma social, la TS comparte la mirada situacional de la construcción de conocimiento y el reconocimiento de las circunstancias socioculturales que la rodean. Por ello se habla de una *racionalidad contextualizada* aludiendo a que la relación del sujeto con el saber es una función del contexto donde actúa y construye conocimiento (Cantoral *et al.*, 2014). Este contexto se ha dimensionado en tres niveles para su estudio y uso en escenarios de intervención: el *contexto cultural* refiere a la pertenencia a grupos humanos específicos y con él se reconocen influencias en el comportamiento e interacciones sociales de los sujetos o grupos involucrados; el *contexto situacional*, con el que se reconoce el rol del tiempo, el lugar y las condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática; y, finalmente, el *contexto de significación* que da forma y sentido a la matemática (Torres-Corrales y Montiel, 2021).

Considerando entonces que, el uso de un conocimiento matemático se da en el ejercicio de prácticas contextualizadas, de él emergen significados que se ponen en funcionamiento en situaciones nuevas y, bajo la misma consideración de emergente social, se resignifica. Esta dinámica continua de construcción de significado se ha denominado, en la TS, significación progresiva o *resignificación*.

3.1 Construcción social de conocimiento trigonométrico

La primera investigación socioepistemológica relativa al estudio de la construcción de conocimiento trigonométrico (Montiel, 2011) se situó en el escenario histórico con el objetivo de construir una hipótesis epistemológica basada en prácticas que diera cuenta de su génesis, y con ello recuperar los significados, herramientas, argumentos, procedimientos y contextos que le son propios y se han perdido en su constitución como saber escolar.

Los resultados de esta investigación apuntaron hacia un cambio epistemológico relevante, que sitúa un origen y significación de lo trigonométrico en el entendimiento de la naturaleza de la relación entre un ángulo central y la longitud de la cuerda que subtiende en un círculo, a propósito de la actividad matemática que la enmarca: la modelación geométrica de los fenómenos astronómicos en el *Almagesto* de Ptolomeo.

Esta actividad de modelación se caracterizó por integrar aportaciones matemáticas de diversas culturas. En lo que concierne al problema trigonométrico –tener una herramienta matemática que asocie cuantitativa y sistemáticamente los arcos (o ángulos centrales) con sus respectivas cuerdas y viceversa–, Ptolomeo requirió de tres herramientas fundamentales en su trabajo: la geometría axiomática deductiva griega, los avances aritmético-algebraicos de las civilizaciones mesopotámicas y una noción cuantitativa del ángulo (Cruz-Márquez, 2018). En este sentido, es necesario un contexto de significación estrictamente geométrico que enmarque el uso los objetos constitutivos del modelo –círculo, arco, ángulo, triángulo, cuerda, radio–; así como un campo de prácticas que doten de funcionalidad al modelo en el tránsito *de lo macro a lo micro*: de una realidad no manipulable a la realidad representada.

Centrar la atención en la naturaleza (trascendente) de la relación entre un ángulo central y la longitud de la cuerda que subtiende, en un contexto de significación geométrico, contrasta con la tradición escolar cuyo enfoque prioriza las aproximaciones aritméticas y algebraicas a las nociones trigonométricas en general, y con el acercamiento proporcional que hace a la razón trigonométrica en particular. Aunado a ello, el discurso escolar tiende a usar un modelo de referencia (figura 3) para establecer las razones trigonométricas relativas a un ángulo en triángulos rectángulos semejantes; mientras que el cambio propuesto demanda de variar el ángulo para *iniciar* el estudio de la relación entre la medida del ángulo y la medida de los lados del triángulo. En esa dirección es que, desde la investigación socioepistemológica, se reconoce que *lo trigonométrico* se construye en y desde un campo de prácticas, no se da como un objeto preestablecido.

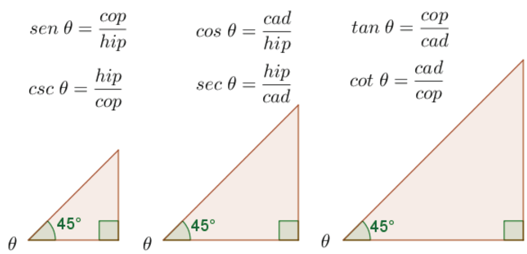


Figura 3. Modelo de referencia tradicional.

4. METODOLOGÍA DE PRODUCCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Se eligió la metodología de Experimentos de Diseño (Cobb *et al.*, 2003) para realizar la producción y análisis de datos. A continuación, se explica cómo se articularon sus seis etapas con los elementos teóricos elegidos y la literatura consultada.

4.1 Etapas 1, 2 y 3 del experimento de diseño

La etapa 1 fue desarrollada con detalle en la sección 3.1, aquí se sintetiza estableciendo que la intención teórica del diseño fue provocar la resignificación de la razón trigonométrica: en y desde el ejercicio de prácticas intencionadas el estudiante construya un significado de la razón trigonométrica como una herramienta proporcional para estudiar y cuantificar la relación no proporcional entre el ángulo y la cuerda/cateto. Mientras que para la etapa 2, especificación de ideas y formas de razonamiento, se señalan cuatro aspectos que fundamentan el diseño:

- Proponer trabajo geométrico en todas las tareas: medir y recolectar datos; establecer, analizar y cuantificar relaciones; construir y analizar modelos a escala (Vohns, 2006; Montiel, 2011; Cantoral *et al.*, 2015), con la intención de resolver la tarea, justificar y/o comprobar la respuesta numérica con el modelo (Montiel y Jácome, 2014; Mesa y Herbst, 2011).
- Poner en uso las nociones constitutivas de los modelos (trabajo con nociones previas, en términos de Moore, 2014)

- Provocar un acercamiento covariacional a la relación ángulo-cuerda (o ángulo-cateto) y resignificar la noción de ángulo a través de sus usos como cualidad (por su forma), cantidad (por ser susceptible a medirse) y como relación (por cómo se define y acota) (Rotaeche y Montiel, 2017).
- Transitar del triángulo/círculo como método al triángulo/círculo como herramienta/modelo en uso en la resolución de la tarea trigonométrica (Montiel, 2011; Moore, 2014).

En la etapa 3, especificación de supuestos sobre puntos de partida intelectual y social del aprendizaje, a partir de la literatura se considera que los estudiantes tendrán un cierto dominio de los objetos matemáticos en el marco de su participación en y de prácticas aritméticas y algebraicas, y, en consecuencia, podrán presentarse las dificultades y significados que se reportan en la literatura.

4.2 Diseño e intencionalidad

La etapa 4, formulación de un diseño, se compone de cinco tareas divididas en dos secciones (figura 4). Para las tareas, se eligieron marcos de referencia que resultaran familiares al contexto cultural que enmarca la puesta en escena: el de la Ingeniería –elaboración de instrumentos (tarea 1), movimientos del cuerpo (tarea 2), construcción de diagramas (tarea 4)–; el diseño completo puede consultarse en Torres-Corrales (2014).

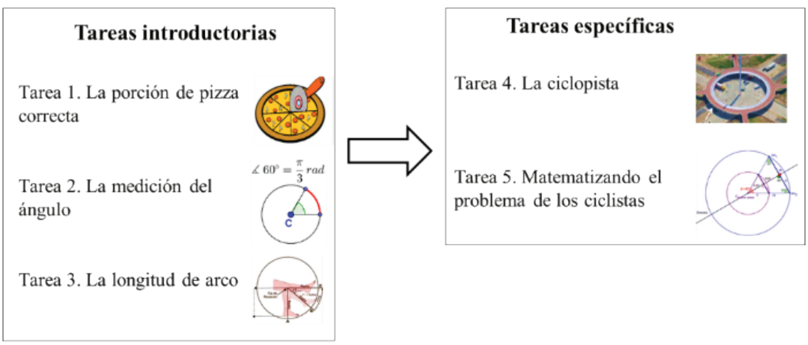


Figura 4. Tareas del diseño para resignificar la razón trigonométrica.

Las intencionalidades de las tareas introductorias son el manejo contextual de la medida angular a partir del diseño de un cortador de pizza (tarea 1); estudiar el círculo, sus partes y relaciones, y la medida angular en grados y radianes (tarea 2); y estudiar la longitud de arco en un problema experimental (tarea 3). Mientras que las intencionalidades en las tareas específicas son: estudiar el triángulo en el círculo y confrontar lo proporcional con lo no proporcional mediante un problema experimental (tarea 4); e identificar las razones trigonométricas mediante la matematización de la tarea 4 (tarea 5).

Así, el diseño en su conjunto propone usos del conocimiento (figura 5) y su significación progresiva en y desde el ejercicio de prácticas intencionadas en el experimento de diseño, organizado este en:

- *Momento I*. Construir significados angulares, midiendo y relacionando radio, ángulo y longitud de arco; e identificar la relación entre medida angular en grados y radianes.
- *Momento II*. Explorar la relación del ángulo-cuerda tanto en triángulos isósceles como en equiláteros, para reconocer que la cuerda crece cuando el ángulo está entre 0° y 180°, y repite los valores cuando está entre 180° y 360°.
- *Momento III*. Comparar la relación ángulo-cuerda *versus* la relación ángulo-arco para identificar que el arco crece a medida que el ángulo crece de 0° a 360°.
- *Momento IV*. Analizar las relaciones de los momentos II y III, e identificar cuándo hay (ángulo-arco) y cuándo no (ángulo-cuerda) una relación proporcional. Para estudiar la relación no proporcional se introduce un nuevo caso con un círculo de radio distinto y herramientas proporcionales (razón cuerda-radio), encontrando la relación proporcional entre cuerdas con relación a sus radios respecto a un ángulo.
- *Momento V*. Se introduce la bisectriz como herramienta geométrica para generar triángulos rectángulos y encontrar más relaciones de proporcionalidad, de manera particular las razones trigonométricas respecto a un ángulo.

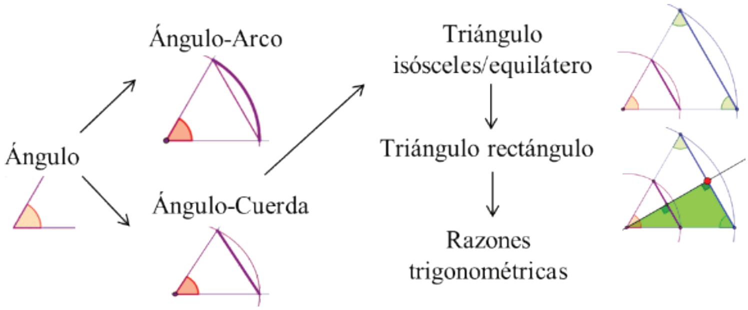


Figura 5. Desarrollo de usos de los objetos matemáticos constitutivos de los modelos.

4.3 PUESTA EN ESCENA

La etapa 5, puesta en escena del experimento de diseño –o escenario *didáctico* de construcción social de conocimiento matemático, en términos del fundamento teórico elegido–, fue extra-clase, con una duración de 302 minutos, distribuidos en tres sesiones durante mayo (las primeras dos sesiones) y julio (tercera sesión) del 2014; en la primera sesión se realizó la tarea 1 (36 minutos), en la segunda sesión la tarea 2 (35 minutos) y la tarea 3 (50 minutos), y en la tercera sesión la tarea 4 (76 minutos) y la tarea 5 (105 minutos).

Se explicó a grandes rasgos que el estudio formaba parte de una investigación de maestría en Matemática Educativa, el tratamiento que se daría a los datos recolectados y se omitió señalar el tema a tratar; ya que recientemente habían estudiado el tema de razón trigonométrica en Fundamentos de Matemáticas. Se tuvo el apoyo de un observador externo, quien llenó una bitácora de notas generales, tomó fotografías y grabó video de algunos episodios. La primera autora condujo la realización del experimento de diseño proporcionando hojas de trabajo a cada estudiante a medida que se desarrollaron las tareas.

En las tareas introductorias se proporcionaron: juego geométrico y materiales manipulables (cordón, hojas de papel y tijeras), sin explicar su utilización. Para las tareas específicas se les proporcionó juego geométrico y *applets* de GeoGebra. Estos últimos son simulaciones digitales que modelan a escala la ciclopista de la tarea 4, y cuyo objetivo es que el estudiante tenga oportunidad de explorar su configuración para identificar las partes del modelo, manipular sus elementos y establecer relaciones entre ellos y sus medidas. GeoGebra fue utilizado por los estudiantes durante la asignatura de Fundamentos de

Matemáticas para elaborar gráficas y vincularlas con modelos algebraicos, estaban familiarizados con sus potencialidades.

4.4 Análisis retrospectivo

La etapa 6, realización de un análisis retrospectivo, se llevó a cabo una vez concluida la puesta en escena. Se organizaron y seleccionaron los datos en tres niveles, primero fueron escaneadas las hojas de trabajo, y se revisaron los videos y las fotografías. Segundo, se transcribieron las respuestas de los estudiantes de las hojas de trabajo (argumentos, procedimientos, dibujos, modelos), las cuales constituyen la fuente primaria de los datos, y secundariamente, para ampliar las explicaciones, se tomaron en consideración la revisión de los videos y la bitácora de notas generales del observador externo. En un tercer nivel, se organizaron los datos en tablas para llevar a cabo una primera fase de análisis, que corresponde a la identificación de la progresión pragmática 'acción → actividad → práctica socialmente compartida' y de los usos del conocimiento matemático. Por cuestiones de extensión se muestra a manera de ejemplo la tabla de análisis completa de la tarea 1, en la siguiente sección, y solo una síntesis del análisis para el resto de las tareas.

Tomando en consideración que *acciones* y *actividades* son los aspectos observables y explícitos de la práctica, se identifican con los cuestionamientos analíticos ¿qué hace? y ¿cómo lo hace?, para el nivel de *acción*; y ¿para qué lo hace?, para el nivel de *actividad*. Por otro lado, por tratarse de una investigación de diseño, la *práctica socialmente compartida* se considera un emergente, que se configura a partir de la interacción entre estudiantes, diseño y profesora. La segunda fase de análisis consiste en un análisis transversal de la progresión pragmática, es decir, sobre los datos analizados de la primera fase, para el reconocimiento de emergentes: la articulación de actividades en torno a una práctica socialmente compartida y la construcción de significado con base en el uso de conocimiento matemático. Es en esta fase de análisis que se busca dar respuesta a la pregunta de investigación.

4.4.1 Tarea 1. La porción de pizza correcta

En la tarea 1, se observa que el elemento del contexto de significación que condicionó la racionalidad de los estudiantes fue la forma circular de la pizza y sus componentes. De ahí que, para los estudiantes, una solución válida fue proponer el diseño de un cortador que incluyera las medidas de los componentes de la pizza y que fuera semejante a otros cortadores conocidos por ellos: el cortador de manzanas.

El trabajo geométrico realizado fue medir, analizar el modelo, hacer y cuantificar relaciones del modelo con la pizza, y construir un modelo a escala del cortador. Esto les permitió reflexionar si el modelo a escala es congruente con la pizza. Se presentaron los tres usos del ángulo: como cualidad (esquina o abertura de la pizza), cantidad (al medirlo en grados) y relación (lo que determina la porción de una rebanada de pizza, medido desde el centro a la orilla). También los estudiantes identificaron que la medida del ángulo es distinta a una longitud, como el radio y el arco, al señalar que: "la medida del ángulo es igual en el modelo a escala y la pizza, mientras que las medidas del radio y arco necesitan multiplicarse por la escala".

Tabla 1. Selección, organización y análisis de datos de la tarea 1

<table>
<tr><th>Sección del diseño</th><th>Acciones</th></tr>
<tr><td>Momento I. Se introduce al contexto de la tarea: se cortan rebanadas de pizza de forma desigual y al venderlas genera inconformidad en los clientes.

Pregunta 1

Intencionalidad. Introducir una situación problema que despierte interés en el estudiante, para que posteriormente idee alternativas vinculadas a su imaginación y experiencia para responder la pregunta de inicio.</td><td>¿Qué hace? Identificar la necesidad de conocer las medidas de la pizza para el molde, dada su forma geométrica circular.
¿Cómo lo hace? Los cuatro estudiantes dieron alternativas de diseño de un cortador de pizza para que las rebanadas sean iguales:
<table><tr><td>Estudiante 1: Hacer un molde con las medidas exactas para todas las pizzas de Don Miguel.</td><td>Estudiante 2: Partidor de pizza, como el que usa para partir manzanas en partes iguales.</td></tr><tr><td>Estudiante 3: Ser más cuidadoso al momento de cortar las pizzas, o inventar o realizar un cortador diseñado para que siempre corte pedazos del mismo tamaño, dependiendo del tamaño de la pizza.</td><td>Estudiante 4: Tener más precisión al cortar la pizza ya sea con el cortador convencional o sería mejor tener un aparato o utensilio que sea más preciso. O poder cortarlas tú mismo.</td></tr></table>
Observaciones. Verbalmente y con movimientos de sus manos hicieron alusión a un molde que sea capaz de cortar la pizza con precisión, con forma circular y con secciones de cada rebanada. También mencionaron que era necesario conocer las medidas de la pizza para diseñar el molde.</td></tr>
</table>

Momento II. Justificar el empleo de una construcción geométrica para solucionar el problema, y en caso de no haber dado una respuesta acertada en el apartado anterior, el estudiante pueda continuar con la tarea.

Preguntas 2 y 3

Intencionalidad. El manejo de un modelo a escala de pizza familiar con el cual identificar las medidas de radio, ángulo y longitud de arco; y que estas permitan determinar las medidas reales de la pizza (figura 1 de la Tarea 1).

¿Qué hace? *Medir* radio, ángulo y longitud de arco del modelo a escala; *calcular* las medidas de radio, ángulo y longitud de arco de la pizza; *relacionar y comparar* las medias matemáticas de radio, ángulo y longitud de arco del modelo con su significado en la pizza.

¿Cómo lo hace? Emplearon los siguientes medios para el manejo del modelo a escala: regla para el radio, transportador para el ángulo central y cordón para el arco; para tomar cada medición posicionaron el medio, señalaron el inicio y fin, y compararon con sus compañeros las respuestas.

A partir de las medidas del modelo (radio y arco), multiplicaron la escala para obtener las medidas de la pizza; la medida del ángulo no fue multiplicada porque la asumieron como igual:

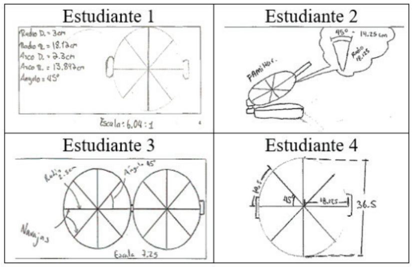
	Modelo	Pizza
Radio	7.25 cm	18.125 cm
Ángulo	45°	45°
Arco	5.7 cm	14.25 cm

Relacionar las medidas de un modelo a escala (construcción geométrica) con las medidas reales de la pizza.

Sus comparaciones sobre las medidas del modelo con las reales (pizza) fueron explicadas de manera verbal y señaladas en el modelo. En sus escritos los estudiantes mencionaron:

	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4
Radio	Es el centro a cualquier parte de la orilla de la pizza	Medida del centro a la orilla de la rebanada o la pizza	La orilla de cada pedazo de pizza, o desde el centro de la pizza hacia la orilla	De la orilla al centro
Ángulo	Es la abertura del centro a la orilla de la pizza	La punta de la rebanada	La abertura de cada pedazo	La abertura
Arco	Es el largo de la orilla de la pizza	Orilla de la rebanada	La medida de la curvatura de cada pedazo	La orilla de la rebanada

Observaciones. Al imprimir las hojas de trabajo se presentó un problema con la imagen, por lo que se cambió la medida del diámetro. Sólo el estudiante 1 y el estudiante 3 hicieron explícitas las medidas de longitud en centímetros.

Momento III. Se presenta un cortador tradicional de pizza, incapaz de medir y cortar las 8 rebanadas en una sola operación, sino que es el clásico disco rotatorio para cortar rebanadas individuales. **Pregunta 4** **Intencionalidad**. Dibujar el diseño que se da como alternativa, señalando las medidas reales (radio, ángulo y longitud de arco de la porción de pizza), identificadas en las etapas anteriores de la tarea.	**¿Qué hace?** *Construir* un cortador de pizza a través de un modelo a escala y especificar sus partes (radio, ángulo y longitud de arco). **¿Cómo lo hace?** Dibujaron el cortador de pizza como el cortador de manzana, y señalaron las medidas reales de radio, ángulo y arco:  **Observaciones**. Tres de los cuatro estudiantes elaboraron modelos a escala.
Actividad	**¿Para qué lo hace?** *Manejar situacionalmente la medida angular* a partir del diseño de un cortador de pizza.

Se interpreta que los estudiantes hicieron un *uso contextualizado del radio, ángulo y longitud de arco* para resolver la tarea 1, porque argumentaron que "el radio es una longitud medida del centro de la pizza a la orilla"; "el *ángulo* es lo que determina la porción de una rebanada de pizza, es la abertura o la esquina que tiene esta"; y "la longitud de arco es la orilla circular, redonda o curva de una porción de pizza".

4.4.2 Tarea 2. La medición del ángulo

En la tarea 2 se dieron varias acciones para realizar la actividad de "estudiar el círculo, sus partes y relaciones, así como la medida angular en grados y radianes". Al igual que en la tarea 1, la racionalidad de los estudiantes se condicionó por el trabajo con la circunferencia de radio de 10 cm; de donde una solución válida fue construir un modelo con juego geométrico y cordones, señalar sus componentes, y comparar con sus compañeros.

El trabajo geométrico consistió en construir un modelo de una circunferencia (figura 6) y analizarlo, lo que les permitió reflexionar y comprobar los cálculos numéricos con él, articulando los tres usos del ángulo, medido en grados y radianes:

- Radio-diámetro: "el radio mide la mitad del diámetro" (estudiante 3).
- Perímetro-diámetro-π: "el diámetro cabe 3 veces y un pedacito más. π es el número de veces que cabe el diámetro en la circunferencia" (estudiante 4).
- $\textit{Diámetro}=\pi$ y $\textit{radio}=2\pi$: multiplicar $\pi\times 2\cong \mathbf{6.2831}\ cm$ (estudiantes 1, 2 y 4) y dividir el perímetro calculado entre el radio $\frac{62.8320}{10}\cong\mathbf{6.2831}$ (estudiante 3).
- Circunferencia-ángulo en grados: medir ángulos de aproximadamente 57.3° con el transportador hasta completar la circunferencia de 360° y concluir que caben 6 y sobra un pedazo.
- Circunferencia-ángulo en radianes: "un radián es la misma longitud del radio que la longitud del arco" (estudiante 2).

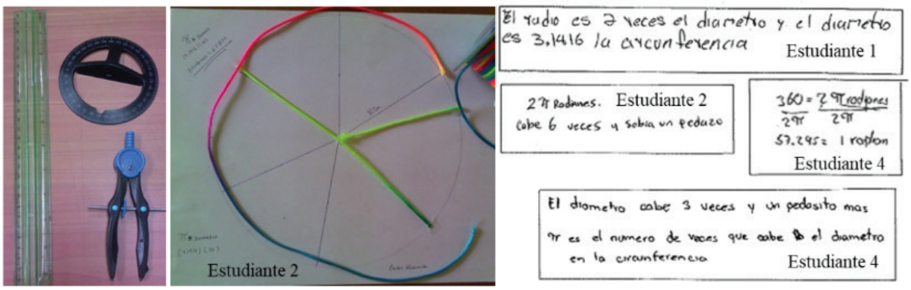


Figura 6. Producciones de los estudiantes en la tarea 2

Se infiere que el uso y estudio del círculo permitió que los estudiantes hicieran un *uso de sus elementos –radio, diámetro, ángulo y longitud de arco–* para resolver la tarea 2, ya que argumentaron que "la medida del diámetro le corresponde el doble del radio o el radio es la mitad del diámetro", "el diámetro cabe 3 veces y sobra un pedacito" y "el radio cabe 6 veces de forma completa y una de forma incompleta".

4.4.3 Tarea 3. La longitud de arco

En la tarea 3 se dieron varias acciones para realizar la actividad de "estudiar la longitud de arco en un problema experimental", en ellas se identifica que la racionalidad de los estudiantes se contextualizó por el movimiento circular que hace la rodilla respecto al pie. Con base en esto, una solución válida para ellos fue reconstruir el modelo en parejas, señalar sus componentes y comparar los modelos entre compañeros.

El trabajo geométrico consistió en: reconstruir y analizar el modelo a partir de hacer y cuantificar relaciones de sus elementos, lo que les permitió reconocer que, en ocasiones, medir la longitud de arco de un objeto en movimiento circular resulta complejo e incluso inaccesible, debido tanto a su tamaño como a su ubicación (ver figura 7). De aquí que expresaran la necesidad de utilizar fórmulas que permitan calcular la longitud de arco.

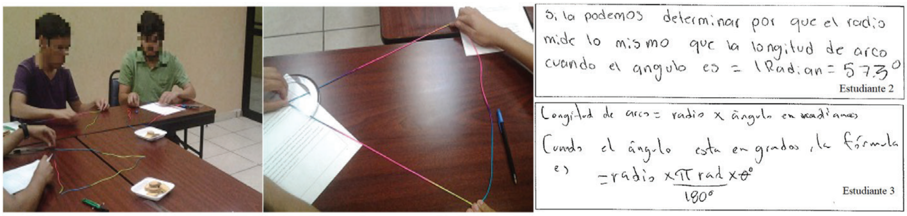


Figura 7. Producciones de los estudiantes en la tarea 3

En el trabajo geométrico de los estudiantes se dieron los tres usos del ángulo (como cualidad, cantidad y relación), con la medida en grados y radianes; y gracias al movimiento identificaron que esta tiene distintos valores. Sin embargo, se presentaron dificultades para establecer una fórmula de la longitud de arco en grados por lo que los estudiantes la construyeron en grupo a partir de relacionar la longitud de arco en radianes, argumentando que "cuando el ángulo es 1 radián, la longitud del radio y arco son iguales". La fórmula que establecieron fue longitud de arco en grados es $radio \times \frac{\pi\, rad \times \Theta^\circ}{180}$ a partir de su medida en radianes $\Theta \times radio$.

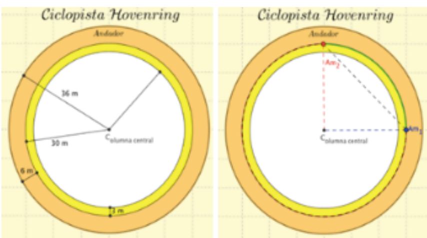
Dado esto, hicieron un uso contextualizado de la longitud de arco y del ángulo en radianes argumentando que "tiene más sentido comprobar la forma de obtener la fórmula a partir de una necesidad que sólo memorizarla".

4.4.4 Tarea 4. La ciclopista

En la tarea 4 se dieron varias acciones para realizar la actividad de "estudiar el triángulo en el círculo y confrontar lo proporcional con lo no proporcional", aquí la racionalidad de los estudiantes se contextualizó por la forma circular de la ciclopista y sus componentes: columna central de 70m de altura, diámetro exterior de 72m y diámetro interior de 54.3m, espacio de andador de 6m (radio) y espacio de luces de 2.85m (radio). Por lo que una solución válida para ellos fue proponer distintas maneras de calcular la distancia entre ciclistas, las cuales provenían de su conocimiento previo –escolar y de las tareas del diseño– y del consenso entre compañeros.

En el trabajo geométrico de los estudiantes se dieron los tres usos del ángulo, esta vez, la cantidad como medida solo en grados; y gracias al movimiento identificaron que el ángulo como cantidad tiene distintos valores a medida que se mueven los ciclistas respecto a la columna central, permitiendo con ello el estudio de la variación del ángulo y de la covariación de la relación ángulo-cuerda.

El trabajo geométrico realizado fue en distintos momentos orientado por el diseño. En el momento I, dado el modelo a escala de una ciclopista circular real, manipularon el *applet* de GeoGebra para identificar medidas y hacer relaciones (figura 8):



El *applet* es un modelo a escala y simula la vista frontal y de planta de la ciclopista.

Cuerda (línea punteada en color negro): dado un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras (todos los estudiantes) y la ley de senos y cosenos (estudiante 1 y estudiante 4).
Arco (línea sólida en color verde): multiplicar el radio y el ángulo (todos los estudiantes), donde el ángulo debe estar en radianes (estudiante 1 y estudiante 4).

Figura 8. Producciones de los estudiantes en el momento I de la tarea 4.

En el momento II, el trabajo geométrico de los estudiantes consistió en dibujar las posibles posiciones de los ciclistas y analizar cómo cambian la cuerda y el arco (figura 9) en ellas, por ejemplo, el estudiante 3 dibuja el círculo representando la ciclopista y distintos triángulos relacionados con las posiciones de los ciclistas. Sus bosquejos incluyen lo que parecen ser tres triángulos obtusángulos (casos 2, 5 y 6) y un triángulo acutángulo (caso 1); además, cuando las posiciones y el centro de la ciclopista forman una línea recta, estando los ciclistas en lados opuestos (caso 3) y casi en la misma posición (caso 4).

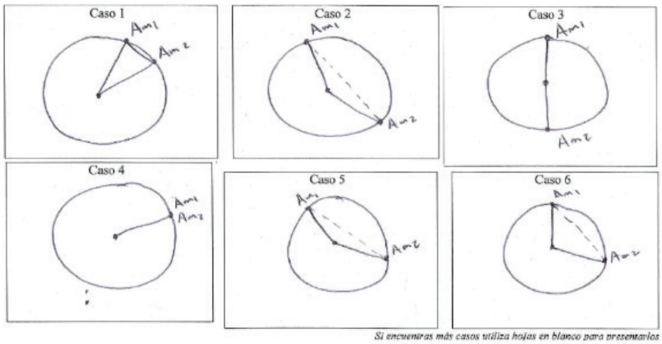


Figura 9. Producciones del estudiante 3 en el momento II de la tarea 4.

En los momentos III y IV, el trabajo geométrico de los estudiantes respecto al *applet* consistió en posicionar a los ciclistas a distancias determinadas (33, 35 y 36 metros) del centro y haciéndolos girar sobre la ciclopista, ubicaron cuándo se da la mayor y la menor distancia, y la trayectoria entre ciclistas. Por ejemplo, el estudiante 3 coloca a los ciclistas a 35m y escribe "no sucede lo mismo que con la distancia entre ciclistas porque la línea recta tiene un punto máximo, cuando lo pasa, empieza a bajar la distancia; con la distancia recorrida siempre va aumentando". De aquí que los estudiantes identificaron que el ángulo es lo que determina la distancia (cuerda) y la trayectoria (arco) entre ciclistas.

En el momento V, el trabajo geométrico fue relacionar y cuantificar ángulo-cuerda y ángulo-arco con la manipulación del *applet* y el llenado de tablas (figura 10). Cuando se preguntó ¿cómo aumenta la longitud de la cuerda y del arco cuando la separación angular aumenta al doble, al triple, etc.? (tabla de la izquierda) el estudiante 4 escribió: "la cuerda aumenta con la abertura del ángulo entre más grande mayor distancia de cuerda hasta llegar a 180° disminuye hasta volver a 0m; si aumentan los ángulos aumenta la longitud de arco". Al preguntar sobre la tabla de la derecha, ¿en qué momentos la distancia entre los ciclistas es la misma a medida que aumenta o disminuye la separación angular? El estudiante 2 escribió: "en 120° y 60°; en 300° y 240°", lo que indica que se obtendrán las mismas cantidades si se forma el mismo tipo de triángulos. Se preguntó ¿qué determina que sea posible que la distancia del recorrido y la distancia en línea recta sean casi la misma? los cuatro estudiantes dijeron: “que el ángulo sea más pequeño”.

Separación angular (α)	Distancia en línea recta (m) (**Cuerda**)	Recorrido entre ellos (m) (**Arco**)
$\alpha = 10°$	6	6
$\alpha = 20°$	12	12
$\alpha = 30°$	17	17
$\alpha = 40°$	22	23
$\alpha = 50°$	28	29

Datos generados de la segunda tabla con el deslizador a 33 m.

Separación angular (α)	Distancia en línea recta (m) (**Cuerda**)	Recorrido entre ellos (m) (**Arco**)
$\alpha = 0°$	0	0
$\alpha = 60°$	33	35
$\alpha = 120°$	57	69
$\alpha = 180°$	66	104
$\alpha = 240°$	57	138
$\alpha = 300°$	33	173
$\alpha = 360°$	0	207

Figura 10. Producciones del estudiante I en el momento V de la tarea 4

Dado lo anterior, los estudiantes hicieron un uso de forma contextualizada del ángulo, y de las relaciones ángulo-arco y ángulo-cuerda en el problema de los ciclistas.

4.4.5 Tarea 5. Matematizando el problema de los ciclistas

En la tarea 5 se dieron varias acciones para realizar la actividad de “identificar las razones trigonométricas mediante la matematización del problema de los ciclistas”, aquí la racionalidad de los estudiantes se contextualizó en el círculo y sus componentes. Por lo que, una solución válida fue retomar el trabajo geométrico de su conocimiento previo –escolar y de las tareas del diseño– y del consenso entre compañeros.

El trabajo geométrico de los estudiantes se dio en distintos momentos, acordes con el diseño. En el momento I, con el *applet* identificaron las medidas que simulan el inicio y el fin del andador de la ciclopista (figura 11), y respecto al ángulo central relacionaron la proporcionalidad de los triángulos en las circunferencias, por ejemplo: “el triángulo grande, así como sus medidas de radio, cuerda y arco, es el doble del pequeño” (estudiante 3).

En el momento II, el trabajo geométrico fue hacer y cuantificar relaciones a través de la evaluación de algunos valores del inicio-fin del andador cuando el ángulo aumenta y el radio permanece. En el momento III, los estudiantes analizaron la relación cuerda-radio de las dos circunferencias cuando se forman distintos tipos de triángulos. A las preguntas ¿qué relación guardan las cuerdas-radios de cada circunferencia? y ¿qué tipos de triángulos pueden formarse de acuerdo con sus ángulos?, un estudiante respondió: “aumenta hasta 180° y de ahí empieza a disminuir; pueden formarse triángulos equiláteros, escálenos y rectos” (estudiante 1).

En el momento IV, el trabajo geométrico de los estudiantes les permitió analizar los tipos de triángulos formados cuando se traza una bisectriz y cambia el ángulo central. Al preguntarles ¿cuántos triángulos observas, de qué tipo son y qué características y/o propiedades tienen?, dijeron "6 triángulos, 4 rectángulos y 2 equiláteros". Al llenar la tabla con un ángulo de 30° dijeron: "eso se parece a las fórmulas del seno, coseno y tangente, que usamos en Mecánica General, Dibujo, Física, Cálculo, para determinar distancias".

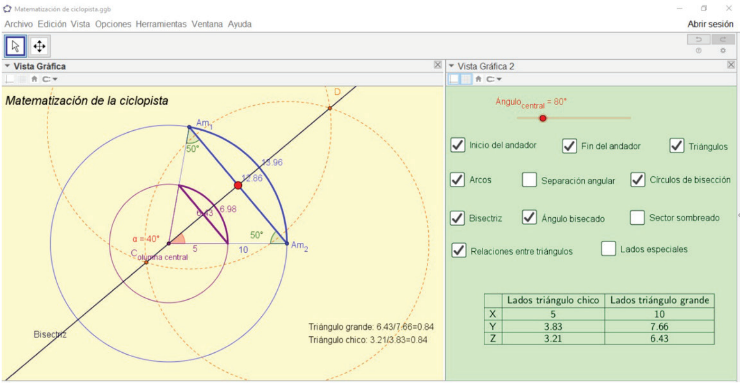


Figura 11. Pantalla del *applet* de GeoGebra de la tarea 5.

En el momento V, el trabajo geométrico fue analizar las relaciones de cuerda-radio respecto al ángulo central cuando se construyen triángulos rectángulos dado el trazo de la bisectriz. A las preguntas ¿qué distingue a hipotenusa, cateto opuesto y adyacente del triángulo rectángulo?, ¿cómo puedes identificarlos, aunque cambie de valor al mover el deslizador?, ¿qué parte del círculo representa?, los estudiantes escribieron:

- Hipotenusa: "la hipotenusa siempre será el lado más grande, representa el radio en un círculo y está enfrente del ángulo recto" (estudiante 1); "la hipotenusa está enfrente del ángulo recto, es el lado más largo y es el radio del círculo" (estudiante 4).
- Cateto opuesto: "se identifica porque está frente al ángulo bisecado" (estudiante 2); "es el opuesto que está al ángulo bisecado; es la media cuerda del círculo" (estudiante 3).
- Cateto adyacente: "se identifica por estar junto al ángulo recto y frente al cateto opuesto" (estudiante 2); "siempre está junto al ángulo bisecado" (estudiante 3).

En los momentos V y VI, los estudiantes reflexionaron y justificaron, con la exploración empírica de los momentos previos de la tarea 5 y con la formalidad matemática a través del llenado de tablas, que la razón trigonométrica es proporcional a un mismo ángulo. Finalmente, en el momento V argumentaron: "el trazo de la bisectriz nos permite tener triángulos rectángulos semejantes donde pueden utilizarse las razones trigonométricas; estas relaciones sí guardan proporcionalidad en todo momento".

Esta tarea permitió que los estudiantes hicieran un *uso del ángulo y de las relaciones arco-radio, cuerda-radio y radio-cuerda* al cambiar el ángulo central (0° a 360°) dados dos círculos concéntricos y el trazo de distintos triángulos. Con el uso de la relación cuerda-radio y el trazo de la bisectriz se generaron triángulos rectángulos que permitieron identificar las razones que son proporcionales respecto a un ángulo bisecado: las razones trigonométricas.

5. Discusión y conclusiones

Con el análisis transversal del experimento de diseño se responde a la pregunta de investigación: *¿cuál es el proceso de resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de Ingeniería en un escenario de construcción social de conocimiento?* Aunque la realización de las tareas no estaba sujeta a un tiempo específico y el lugar era distinto al aula de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas, los estudiantes en principio dieron respuestas en busca de la aprobación de la profesora, lo que fue disminuyendo con el desarrollo de las tareas.

Es decir, si bien los contextos cultural y situacional nunca dejaron de condicionar las interacciones de la experiencia, fue el contexto de significación geométrica lo que más influyó en el desarrollo de prácticas que intencionó el diseño. Aunado a ello, aunque las respuestas involucraban argumentos y procedimientos de su trayectoria escolar, su validez estuvo determinada por el diseño y, sobre todo, por el consenso entre los estudiantes; lo que destaca la suficiencia de ser funcional para resolver la tarea.

El trabajo geométrico provocado por el diseño fue para los estudiantes un mecanismo para comprobar los cálculos numéricos, a lo largo de toda la experiencia, lo que permitió que sus respuestas no se limitaran a repetir procedimientos memorísticos. También permitió en los estudiantes un ir y venir entre el análisis del modelo a escala y el cálculo numérico, diferenciando que los modelos a escala de las tareas 1, 2, 3 y 5 guardan en una proporción con los objetos simulados mientras que los dibujos no. Con lo que se confronta lo reportado en (Montiel y Jácome, 2014; Mesa y Herbst, 2011); incluso se identificó una manera distinta de considerar a los dibujos, por ejemplo, en la tarea 4 (figura 9) construyeron bosquejos para analizar las distintas posiciones de los ciclistas, diferenciando que no eran modelos a escala. Con base en esto, se interpreta que *el trabajo geométrico se logra como emergente a nivel de práctica socialmente compartida*.

En el experimento de diseño no se presentaron las dificultades reportadas en la literatura al trabajar articuladamente el triángulo y el círculo, por el contrario, permitió un significado robusto, en este caso, la razón trigonométrica como una herramienta proporcional para estudiar y cuantificar la relación no proporcional ángulo-cuerda (tabla 2).

Tabla 2. Síntesis del análisis de las tareas del experimento de diseño

Tarea y descripción		Cumplimiento de las intencionalidades del diseño	Usos
1	*La porción de pizza correcta*. Problema en contexto estático y construcción de modelos a escala.	Se cumplieron sin dificultades.	Uso contextualizado del radio, ángulo y longitud de arco.
2	*La medición del ángulo*. Problema intramatemático estático y construcción de modelos a escala.	Se cumplieron, pero se presentó la dificultad de expresar, en múltiplos de π, cuántos radianes tiene 1°.	Uso del radio, diámetro, ángulo y longitud de arco en el círculo.
3	*La longitud de arco* Problema en contexto, en movimiento y construcción de modelos a escala.	Se cumplieron, pero se presentó la dificultad de construir la fórmula de longitud de arco en grados.	Uso contextualizado de la longitud de arco y del ángulo en radianes.
4	*La ciclopista*. Problema en contexto en movimiento, análisis de modelos a escala y construcción de dibujos.	Se cumplieron, pero se presentó la dificultad de la clasificación de triángulos, excepto con el triángulo rectángulo.	Uso contextualizado del ángulo y de las relaciones ángulo-arco y ángulo-cuerda.
5	*Matematizando el problema de los ciclistas*. Problema intramatemático en movimiento y análisis de modelos a escala.	Se cumplieron sin dificultades.	Uso del ángulo y uso de las relaciones arco-radio, cuerda-radio y radio-cuerda.

En el experimento de diseño se dieron los tres usos del ángulo –cualidad, cantidad y relación– (Rotaeche y Montiel, 2017), lo que evitó promover un significado limitado de este. En las tareas 1, 3 y 4 fue un uso contextualizado y en la tarea 2 se dio un uso intramatemático del ángulo. A diferencia de las tareas 1 y 2, donde se estudiaron problemas estáticos, las tareas 3 y 4 trataron problemas del movimiento de objetos y esto permitió la variación del ángulo y un acercamiento covariacional a la relación ángulo-cuerda en la tarea 4.

Dado lo anterior, se argumenta que el experimento de diseño propuesto (figura 4) y el desarrollo de usos de los objetos matemáticos constitutivos de los modelos (figura 5) provocó la resignificación de la razón trigonométrica junto con las nociones matemáticas involucradas en las tareas. De las evidencias empíricas recolectadas, se identifican tres categorías de este proceso de resignificación, cuando los estudiantes: (1) *actúan matemáticamente en forma distinta* a lo reportado en la literatura especializada, principalmente en lo que concierne a las dificultades; (2) *responden con herramientas más robustas* (para ellos mismos) que las proporcionadas por la matemática escolar y tienen elementos construidos a partir de la tarea, validados por el grupo; y (3) *evocan alguna noción relacionada* con la matemática de interés, pero al no recordar la fórmula exacta o cómo aplicarla continúan la tarea según lo planeado en el diseño, o vinculan los resultados obtenidos con tareas escolares.

La categoría (1) caracteriza la resignificación cuando los estudiantes:

- Reconocieron que los dibujos no son proporcionales y los modelos a escala sí lo son (tarea 1), *versus* los dibujos que se reportan como suficientes en la actividad escolar.
- Identificaron el uso contextualizado del radio, longitud de arco y ángulo, tanto estático (tarea 1) como dinámico (tareas 3 y 4), donde el estudiante justifica y comprueba que las respuestas son adecuadas para cada tarea *versus* el apego a los procesos memorísticos.
- Reconocieron ángulos dentro de otras figuras (tareas 1, 3 y 4) y como ángulos 0°, 180° y 360° (tarea 4) *versus* que no suelen identificarlos (Rotaeche y Montiel, 2017).

La categoría (2) caracteriza la resignificación cuando los estudiantes:

- Expresaron la transición de grados a radianes como la relación entre valores numéricos y múltiplos de π, además de comprobarlos con las

medidas de cordones de radio y diámetro en la circunferencia, y no sólo como equivalencia o conversión de unidades de medida como se trata en la matemática escolar (tarea 2).
- Elaboraron una expresión matemática con sintaxis propia $\boldsymbol{radio} \times \frac{\pi\ rad \times \Theta°}{180}$, en donde ponen en usos los elementos del círculo y sus relaciones para calcular el arco (tarea 3).

La categoría (3) caracteriza la resignificación cuando los estudiantes:

- Evocaron a lo trigonométrico "esto se resuelve con la ley de los senos...", pero al no recordar la fórmula exacta o cómo utilizarla, continuaron con lo planeado (tarea 4).
- Expresaron que "la hipotenusa del triángulo rectángulo es el radio del círculo y la media cuerda es un cateto del triángulo" (tarea 5).
- Identificaron las relaciones que sí guardan proporcionalidad y se conocen como razones trigonométricas (tarea 5). Si bien las emplearon como la división de los lados de un triángulo rectángulo, esta adquiere un estatus de herramienta en y desde el ejercicio de prácticas que se logró: el trabajo geométrico en torno al estudio de la relación no proporcional entre el *ángulo* y la distancia.
- Vincularon las razones trigonométricas recién identificadas con sus contextos de aplicación escolar "eso se parece a las fórmulas del seno, coseno y tangente..." (tarea 5).

La metodología Experimentos de Diseño nos permitió elaborar, desarrollar y analizar un diseño de tareas fundamentado en una revisión de literatura y en la Teoría Socioepistemológica comprendiendo las condiciones en las cuales el diseño de tareas fue viable para los estudiantes. De esta manera fue posible realizar una investigación sistematizada que aporta a la investigación educativa en Trigonometría en el nivel superior.

Para finalizar, se plantea que la tipificación reflejada en las categorías encontradas en este experimento de diseño para la resignificación de la razón trigonométrica puede emplearse como estrategia para identificar los usos de otras nociones matemáticas en investigaciones socioepistemológicas.

REFERENCIAS

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers 'concept images of radian'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(7), 857-878. http://dx.doi.org/10.1080/00207390802054458

Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. [Tesis de doctorado]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1810

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116. https://bit.ly/3s8r0yA

Cavey, L. y Berenson, S. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(2), 171-190. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.001

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: Una problematización de las nociones trigonométricas* [Tesis de maestría]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.18095.64166

De Kee, S., Mura, R. y Dionne, J. (1996). La comprehension des notions de sinus et cosinuschez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics*, *16*(2), 19-27. https://bit.ly/3bYklQ9

DeJarnette, A. (2018). Students' Conceptions of Sine and Cosine Functions When Representing Periodic Motion in a Visual Programming Environment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(4), 390-423. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.4.0390

Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. [Tesis de doctorado]. University of Iowa. https://doi.org/10.17077/etd.hgi8dv0k

Jácome, G. (2011). *Estudio Socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor* [Tesis de maestría]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Kendal, M. y Stacey, K. (1996). Trigonometry: comparing ratio and unit circle methods. En P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education. Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 322-329). MERGA. https://cutt.ly/hjOWr2s

Mesa, V. y Herbst, P. (2011). Designing representations of trigonometry instruction to study the rationality of community college teaching. *ZDM Mathematics Education, 43*(1), 41-52. https://bit.ly/2KPWpm9

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significado trigonométrico en el profesor. *Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1193-1216. https://bit.ly/2zSLuWv

Moore, K. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 102-138.

Rotaeche, R. (2012). *Construcción de conocimiento matemático en escenarios escolares. El caso de la angularidad en el nivel básico*. [Documento predoctoral no publicado]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Rotaeche, R. y Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática, 29*(1), 171-199. https://doi.org/10.24844/EM2901.07

Schatzki, T. (2000). Introduction: Practice theory. En K. Knorr Cetina, T. Schatzki y E. von Savigny (Eds.), *The practice turn in contemporary theory* (pp. 10–23). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203977453

Secretaría de Educación Pública (2017). *Planes de Estudio de Referencia del Componente Básico del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. Secretaría de Educación Pública. https://bit.ly/2Rayx2O

Serrano-Quevedo, B. (2018). *Análisis de usos del conocimiento trigonométrico en el discurso escolar de Ingeniería Mecatrónica* [Tesis de maestría]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Topçu, T., Kertil, M., Akkoç, H., Yilmaz, K. y Önder, O. (2006). Pre-service and in-service mathematics teachers' concept images of radian. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 281–288). PME. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496939.pdf

Torres-Corrales, D. y Montiel. G. (2021). La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa. *Nóesis.*

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades, *29*(58-1), 24-55. http://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Torres-Corrales, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería*. [Tesis de Maestría]. Instituto Tecnológico de Sonora. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.2993.5603/1

Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry-an empirical approach. *ZDM Mathematics Education*, *38*(6), 498-504. https://doi.org/10.1007/BF02652787

Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. Mathematics *Education Research Journal*, *7*(3), 91-112. https://doi.org/10.1007/BF03217423

Yiğit, M. (2016). Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(7), 1028-1047. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1155774

Diana del Carmen Torres-Corrales

Dirección: Antonio Caso 2266, Villa Itson, C.P. 85130.
Ciudad Obregón, Sonora, México.
diana.torres@itson.edu.mx

Teléfono: +52 644 410 9000 Ext. 1722.