



Educación matemática

ISSN: 0187-8298

ISSN: 2448-8089

Editorial Santillana

Dolores Flores, Crisólogo; Mosquera García, Gustavo Andrés
Conceptualizaciones de la pendiente en el currículo colombiano de matemáticas
Educación matemática, vol. 34, núm. 2, 2022, pp. 217-244
Editorial Santillana

DOI: <https://doi.org/10.24844/EM3402.08>

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40576161009>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

UAEM  redalyc.org

Sistema de Información Científica Redalyc
Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso
abierto

Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano de matemáticas

Conceptualizations of slope in Colombian intended mathematics curriculum

Crisólogo Dolores Flores,¹
Gustavo Andrés Mosquera García²

Resumen: Este artículo da cuenta de una investigación enfocada en explorar qué conceptualizaciones de la pendiente se promueven en el currículum colombiano de matemáticas. Se utilizó el método de Análisis de Contenido a través del cual se examinaron dos documentos curriculares: Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y Los Derechos Básicos de Aprendizajes en Matemáticas. Como marco referencial se utilizaron las conceptualizaciones de la pendiente identificadas por Stump (1999) y Moore-Russo *et al.* (2011). Los resultados indican que en la primaria se enfatizan las conceptualizaciones propiedad funcional y situación del mundo real, en secundaria las del coeficiente paramétrico e indicador de comportamiento, en bachillerato la propiedad funcional, situación del mundo real y la concepción en cálculo. El currículum colombiano tiene una tendencia marcada hacia el desarrollo del pensamiento variacional. Este trabajo aporta información acerca de cómo se prevé la enseñanza de la pendiente en Colombia, resultados que son comparados con lo que prevén al respecto el currículum norteamericano y mexicano, los resultados pueden ser útiles en las

Fecha de recepción: 31 de mayo de 2021. **Fecha de aceptación:** 14 de junio de 2021.

¹ Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, Guerrero, México, cdolores2@gmail.com; cdolores@uagro.mx, orcid.org/0000-0002-2748-6042

² Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, Guerrero, México, gmosquera@uagro.mx, orcid.org/0000-0002-3664-3716

reformas curriculares para prever consecuencias no deseadas en el aprendizaje de este concepto.

Palabras clave: *Curriculum colombiano de matemáticas, conceptualizaciones de la pendiente, nivel primario, nivel secundario, nivel bachillerato.*

Abstract: This article reports on an investigation focused on exploring which conceptualizations of slope are promoted in the Colombian intended mathematics curriculum. The Content Analysis method was used through which two curricular documents were examined: The Basic Standards of Competence in Mathematics and The Basic Learning Rights in Mathematics. As a reference framework, the slope conceptualizations identified by Stump (1999) and Moore-Russo *et al.* (2011) were used. The results indicate that in primary school functional property and real-world situation conceptualizations are emphasized, in secondary school those of the parametric coefficient and behavior indicator, in high school functional property, real world situation and the conception in calculus. The Colombian curriculum has a marked tendency towards the development of variational thinking. This work provides information about how the teaching of slope is expected in Colombia, results that are compared with what the North American and Mexican curricula provide in this regard, the results can be useful in curricular reforms to anticipate unwanted consequences in learning of this concept.

Keywords: *Colombian intended mathematics curriculum, conceptualizations of slope, Elementary school level, Middle level, High school level.*

1. INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre la pendiente provienen del interés por investigar qué conocimiento tienen los profesores y estudiantes acerca de este concepto. Ese conocimiento se ha condensado en once conceptualizaciones descubiertas por Stump (1999, 2001b) y enriquecidas por Moore-Russo *et al.* (2011). Investigaciones realizadas sobre esta base han puesto al descubierto, por una parte, que los profesores prefieren usar conceptualizaciones asociadas a situaciones físicas que situaciones funcionales (Stump, 1999) y, además, tienen perspectivas limitadas sobre la pendiente en

contextos del mundo real (Nagle *et al.*, 2017); por otra, que el conocimiento sobre la pendiente de estudiantes universitarios tiende a girar en torno a lo procedimental con poca relación con la covariación o la aplicación a situaciones del mundo real (Nagle y Moore-Russo, 2013a), asimismo, transfieren un conocimiento limitado de la pendiente en la resolución de tarea en contextos como de la estadística (Nagle *et al.*, 2017).

El concepto de pendiente es complejo y por tanto difícil de comprender. Complejo por la amplia variedad de significados que se le asocian en su enseñanza-aprendizaje que van desde el uso cotidiano o común (p. ej., la pendiente como una “cuesta”: “cuesta abajo”, “cuesta arriba”), pasando por sus aplicaciones, hasta sus once conceptualizaciones (Moore-Russo *et al.*, 2011; Stump, 1999). Por ello, la investigación también ha puesto atención en el estudio de las dificultades, confusiones y conceptos erróneos que tienen los estudiantes, tales como: confundir la altura con la pendiente de una recta (Leinhardt *et al.*, 1990), calcular la pendiente como “aumento en x ”/ “aumento en y ” en lugar de “aumento en y ”/ “aumento en x ” (Cho y Nagle, 2017) o, bien, considerar los términos pendiente, razón de cambio e inclinación como conceptos diferentes y sin conexión (Teuscher y Reys, 2010). En la última década, algunos investigadores (Cheng, 2010; Demir, 2018; Moore-Russo *et al.*, 2011) han enfocado la atención en el proceso de aprendizaje del concepto en cuestión, y otros han estudiado la pendiente en los libros de texto (Choy *et al.*, 2015; Dolores e Ibáñez, 2020; Hong y Choi, 2018). Sin embargo, de acuerdo con la literatura consultada, se sabe poco sobre la pendiente en el currículum. Hasta el momento se han publicado solo tres investigaciones: dos que estudian esta situación en Estados Unidos de Norteamérica (Stanton y Moore-Russo, 2012; Nagle y Moore-Russo, 2014) y una en México (Dolores *et al.*, 2020). Todas ellas toman como referente las once conceptualizaciones de la pendiente previamente identificadas (Stump, 1999; Moore-Russo *et al.*, 2011).

Para el caso de Norteamérica, Stanton y Moore-Russo (2012) examinaron los estándares matemáticos de los cincuenta estados de USA, encontraron que ocho conceptualizaciones están presentes en más de la mitad de los estados; la razón geométrica es predominante, seguida de la de indicador de comportamiento, propiedad determinante y propiedad funcional. En cambio, Nagle y Moore-Russo (2014) compararon los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (PSSM) y los Estándares Estatales Básicos Comunes para Matemáticas (CCSSM), y encontraron que el número total de referencias de pendiente en el plan de estudios de primaria y secundaria fue similar para PSSM (57) y CCSSM

(53), y que la propiedad funcional, constante lineal y situación del mundo real son las conceptualizaciones dominantes.

Por otra parte, Dolores *et al.* (2020) al examinar las conceptualizaciones de la pendiente en el currículo mexicano encontraron énfasis de la propiedad funcional, del coeficiente paramétrico y de la situación del mundo real. Descubrieron también una discontinuidad en el currículo, ya que se introduce la pendiente en el grado 9 y a pesar de que se estudian funciones lineales en el grado 10 se omite su utilización. En este trabajo se hizo notar la escasa atención de la pendiente como razón geométrica, contrario a lo que sucede en el currículo norteamericano. Además, en el currículo mexicano se enfatiza el coeficiente paramétrico muy utilizado en las manipulaciones algebraicas, hallazgo que da soporte a un enfoque más procedimental que conceptual de la pendiente en este currículo.

Las conceptualizaciones de la pendiente por ser procesos o acciones que pueden intervenir en la formación de un concepto, según la literatura consultada son parte de la enseñanza de la matemática del nivel medio básico y medio superior. De acuerdo con Nagle *et al.* (2019) y Nagle y Mooore-Russo (2013b) pueden contribuir en la formación de esquemas en los estudiantes y así desarrollar su comprensión. Estos procesos en general son previstos en el currículo, por ello en este trabajo nos proponemos dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué conceptualizaciones de la pendiente se promueven en el currículo colombiano de matemáticas y cuáles son las predominantes? Las respuestas a esta pregunta nos permitirán obtener un primer acercamiento de cómo se pretende sea enseñada la pendiente en este país sudamericano, también puede aportar información para quienes hacen estudios internacionales sobre este concepto con fines de diagnóstico, de mejora o incluso de reforma curricular.

2. MARCO REFERENCIAL

Este artículo adopta como referentes esenciales: al currículo y a las conceptualizaciones de la pendiente. El término currículo se utiliza de diferentes formas en todo el mundo, sin embargo, es posible distinguir entre elementos curriculares que están oficialmente sancionados (el currículo oficial o previsto), aquellos que están en los libros de texto o materiales para la enseñanza (currículo potencial) o los que inciden en su operacionalización mediante la práctica llamado también currículo operativo o enseñado (Dolores, 2012). En este estudio interesa el currículo oficial.

Para conceptualizar aspectos del currículum recurrimos a Remillard y Heck (2014). Ellos plantean que el currículum oficial se compone de metas y objetivos, del contenido de las evaluaciones consiguientes y el currículum diseñado. Las metas y los objetivos incluyen “expectativas para el aprendizaje o desempeño de los estudiantes y, en algunos casos, los recursos educativos o curriculares y las vías de aprendizaje que se emplearán” (p. 708). Las evaluaciones consiguientes no estipulan formalmente un alcance y una secuencia de contenidos; sin embargo, debido a lo que está en juego en estas evaluaciones, influyen en el contenido que tratan los profesores. El currículum diseñado es el “conjunto de planes de instrucción especificados por un organismo de gobierno autorizado, ya sea un ministerio de educación o una provincia local” (p. 710), puede incluir materiales de instrucción adoptados por funcionarios educativos locales y los planes de clase o de un curso diseñados por los propios profesores. Los currículos oficiales actuales suelen contener estándares, Remillard y Heck (2014) consideran que estos pueden ser nacionales o regionales como parte del currículum oficial.

Al referirse a su concreción, Solís (2012) plantea que el currículum suele concebirse como cerrado o abierto, “es cerrado cuando son muy limitadas las posibilidades de innovación y concreción de la escuela y del profesor” (p. 16), es abierto cuando da un margen amplio de acción al profesor y a la escuela para que determinen parte de ese currículum considerando su propio contexto educativo. El currículum colombiano es abierto, ya que las autoridades educativas nacionales marcan los lineamientos generales pero las escuelas o los profesores diseñan su propio currículum en función de su entorno educativo.

Por otro lado, los conceptos son parte sustancial del conocimiento matemático y se construyen por mediación de concepciones y conceptualizaciones. Las concepciones son un constructo mental o representación de la realidad que contiene creencias, significados, imágenes mentales, preferencias, actitudes, etc. (Brown y Hirschfeld, 2007). Las conceptualizaciones según Vergnaud (1990) están presentes en los procesos de transformación de los conceptos como instrumento a los conceptos como objeto, por medio de una operación lingüística que es la nominalización. La conceptualización está hecha de “representaciones de objetos, propiedades, relaciones, transformaciones, circunstancias, condiciones y relaciones funcionales entre estos objetos, y entre estos objetos y la acción en cuestión” (Vergnaud, 1996, p. 275). Esto resalta la importancia del lenguaje como medio de representación de los objetos, porque a través del lenguaje las conceptualizaciones se hacen objetos visibles y comunicables. Duval (2011), al referirse a los objetos matemáticos en particular, plantea que no son otra cosa que invariantes

(operatorio o lógico-discursivo) de una multiplicidad de representaciones semióticas posibles, “son objetos, artefactos, términos lingüísticos, en general signos, que se utilizan para hacer visible una intención y para conducir a terminar una acción” (Radford, 2005, p. 203). Para los propósitos de este trabajo no interesan los procesos de transformación o de acción a los que se refiere Vergnaud (1990), sino al producto de esa transformación. Nos referimos a las representaciones lingüísticas de la pendiente, en tanto objeto de aprendizaje, expresadas mediante sus propiedades, condiciones y relaciones con otros objetos como la razón, la función, la tangente trigonométrica, la inclinación, el ángulo de inclinación, la derivada, etc. A estas representaciones llamaremos conceptualizaciones de la pendiente. Todas ellas aparecen descritas en la tabla 1.

Tabla 1. Conceptualizaciones de la pendiente.

Categoría	La pendiente como...	Código
Razón geométrica	Razón del “desplazamiento vertical sobre el desplazamiento horizontal” en la gráfica de una recta (a menudo vista como el triángulo rectángulo en la gráfica de una recta que resalta el desplazamiento horizontal y el vertical).	G
Razón algebraica	Cambio en y sobre el cambio en x ; representación de la razón con expresiones algebraicas (a menudo visto como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ o $\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$).	A
Propiedad física	Propiedad de la recta a menudo descrita con expresiones como: grado, inclinación, ladeo, declive, empinado, “qué tan alto sube una recta”.	P
Propiedad funcional	Razón de cambio constante entre variables o cantidades (por ejemplo, cuando aumenta 2, aumenta 3) presente en varias representaciones de funciones; a veces se ve en situaciones que involucran razones relacionadas o constantes de proporcionalidad (donde la razón unitaria es la pendiente).	F
Coefficiente paramétrico	Coefficiente m (o su valor numérico) en $y = mx + b$ o en $y - y_1 = m(x_2 - x_1)$ que actúa como un parámetro.	PC
Concepción trigonométrica	Propiedad relacionada con el ángulo que una recta forma con una recta horizontal (usualmente el eje positivo); tangente del ángulo de inclinación.	T
Concepción en cálculo	Medida relacionada con la derivada como la pendiente de la tangente a una curva, de una recta secante, o cómo razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso no lineal).	C

Situación del mundo real	Situación física (estática, por ejemplo: una rampa, escalera, etc.)	R
	Situación funcional dinámica que relaciona dos variables (p. ej., distancia vs tiempo, velocidad vs tiempo, costo vs tiempo).	
Propiedad determinante	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares entre sí; propiedad con la cual una recta puede ser determinada si un punto de la recta es también dado.	D
Constante lineal	“Recta” o “plana”, ausencia de curvatura de una recta que no se ve afectada por la traslación; propiedad única de las “rectas” (puede ser referenciada como lo que hace que una línea sea “recta” o la “rectitud” de una línea); mención de que cualesquiera dos puntos de una recta pueden ser utilizados para determinar la pendiente.	L
Indicador de comportamiento	Propiedad que indica el crecimiento, decrecimiento, tendencia horizontal de una recta o la propiedad que indica la cantidad (o severidad) del aumento o disminución de una recta; si no es cero, indica que la recta tiene una intersección con el eje x .	B

Nota: Adaptado de Nagle y Moore-Russo (2014, p. 44).

3. MÉTODO

El análisis de los documentos curriculares se realizó utilizando el Método de Análisis de Contenido de Bardin (2002) y las categorías de conceptualizaciones de la pendiente descritas en la tabla 1. El método consta de tres fases: primera, preanálisis; segunda, explotación del material y tercera, tratamiento de los resultados. Según Bardin (2002), la primera consiste en la elección de los documentos que se van someter a análisis y el planteamiento del objetivo; la segunda consiste en operaciones de codificación, descomposición o enumeración del contenido y la tercera, se refiere al tratamiento de los resultados mediante operaciones estadísticas simples o más complejas para darles fiabilidad y a partir de ellos proponer inferencias a propósito de los objetivos previstos.

Primera Fase. En el preanálisis se seleccionaron los documentos curriculares para su posterior análisis. Varios son los documentos que orientan a la educación colombiana, sin embargo, se eligieron aquellos que mejor reflejan el conocimiento matemático que se pretende que los estudiantes aprendan desde el grado 1 hasta el 11. Los documentos que se ajustaron a este criterio fueron: los Estándares Básicos de Competencia (EBC) (Ministerio de Educación Nacional

[MEN], 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (MEN, 2016), los dos referidos al área de matemáticas.

En el sistema educativo colombiano los Estándares Básicos de Competencia de las áreas fundamentales del conocimiento, son documentos que establecen un conjunto de estándares para las áreas de Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales y Ciudadanía. “Un estándar es un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad” (MEN, 2006, p. 11). En particular, en los EBC en Matemáticas se declara un conjunto de estándares para ciclos de grados y se organizan en cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Cada estándar pone el énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales de la actividad matemática tales como: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Pueden referirse también a otros procesos generales utilizables en distintos contextos para contribuir a superar el nivel seleccionado como estándar.

Los DBA, son documentos que guardan concordancia con los EBC. En ellos se expone un conjunto de aprendizajes estructurantes para cada área y grado escolar que han de aprender los estudiantes y desarrollar procesos que les permitan alcanzar los EBC (MEN, 2016). En los DBA se establecen aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular. “Aprendizajes son la conjunción de conocimientos, habilidades y actitudes que otorgan un contexto cultural e histórico a quien aprende. Son estructurantes en tanto expresan las unidades básicas y fundamentales sobre las cuales se puede edificar el desarrollo futuro del individuo” (MEN, 2016, p. 6). En particular, los DBA están compuestos de tres elementos centrales: el enunciado, las evidencias de aprendizajes y el ejemplo. El primero, se refiere al aprendizaje estructurante que los estudiantes necesitan para desenvolverse en diversos contextos sociales y culturales; en el segundo, se expresan indicios claves que muestran si los estudiantes están alcanzando el aprendizaje expresado en el enunciado y, en el tercero, se concretan y complementan las evidencias de aprendizaje.

Segunda Fase. La fase de explotación del material se centró en las operaciones de codificación, elección de las unidades de análisis, organización de la información y análisis del contenido. Se adoptaron las codificaciones de las conceptualizaciones de la pendiente ya descritas en la tabla 1. La elección de las unidades estuvo en función de las formulaciones que mejor reflejaban los aprendizajes pretendidos, los cuales están cifrados en los estándares en los EBC y los aprendizajes estructurantes

de los DBA. Para la organización de la información se elaboraron dos matrices de doble entrada, una para los EBC y otra para los DBA. Las columnas contienen las menciones explícitas o implícitas; la formulación del estándar y del aprendizaje estructurante sujeto de análisis; el código de la conceptualización de la pendiente que le corresponde y, la frecuencia entendida como la cantidad de menciones a las conceptualizaciones encontradas. Las filas fueron asignadas a los grados o grupos de grados escolares para los que se prevé el estándar o el aprendizaje estructurante a alcanzar.

Para el análisis del contenido se consideraron: los enunciados de los estándares y los aprendizajes estructurantes; la “mención explícita” o “implícita” de la pendiente; las frases o palabras clave que hacen referencia o tienen relación con alguna de las conceptualizaciones de la pendiente. La mención explícita o implícita fue necesaria, primero, porque la pendiente “es un concepto poderoso de enlace” (Leinhardt, *et al.*, 1990, p. 54) que se construye de la conexión de varios conceptos previos (p. ej., razón, variación proporcional, razón constante de proporcionalidad, etc.) que en el currículum suelen estar previstos antes de su deliberado tratamiento (Dolores *et al.*, 2020) en virtud de que son base para que el alumno comprenda el concepto de pendiente. Segundo, se suele prever su tratamiento en el currículum (explícitamente) en la educación secundaria (Stanton y Moore-Russo, 2012) y el preuniversitario a fin de proporcionar a los estudiantes un medio para describir el comportamiento de funciones básicas y de sus razones de cambio. Y tercero, porque es el fundamento de conceptos matemáticos más avanzados como la derivada (Deniz y Kabaël, 2017) y de conceptos estadísticos como la regresión lineal y la línea de mejor ajuste (Casey y Nagle, 2016; Nagle *et al.*, 2017), por lo que la pendiente puede aparecer explícita o implícitamente en el currículum. Por esto, cuando la pendiente o alguna de las expresiones claramente descritas en la tabla 1 (p. ej., la fórmula algebraica con la que se representa la pendiente, razón de cambio de una función) estaba presente en los documentos, se consideró como una mención explícita de la conceptualización correspondiente. Cuando alguna de las conceptualizaciones está presente, pero no se menciona el término pendiente o algún sinónimo, entonces se documentó como mención implícita.

El análisis del enunciado (de cada estándar y aprendizaje estructurante) incluyó la detección de las frases o palabras clave y estas, a su vez, fueron elementos fundamentales para decidir la o las conceptualizaciones de la pendiente promovidas. Las decisiones fueron soportadas por la correspondencia con las características de las conceptualizaciones descritas en la tabla 1 y puestas en la figura 1 como justificación. En la figura 1 se describen dos ejemplos de estos procedimientos.

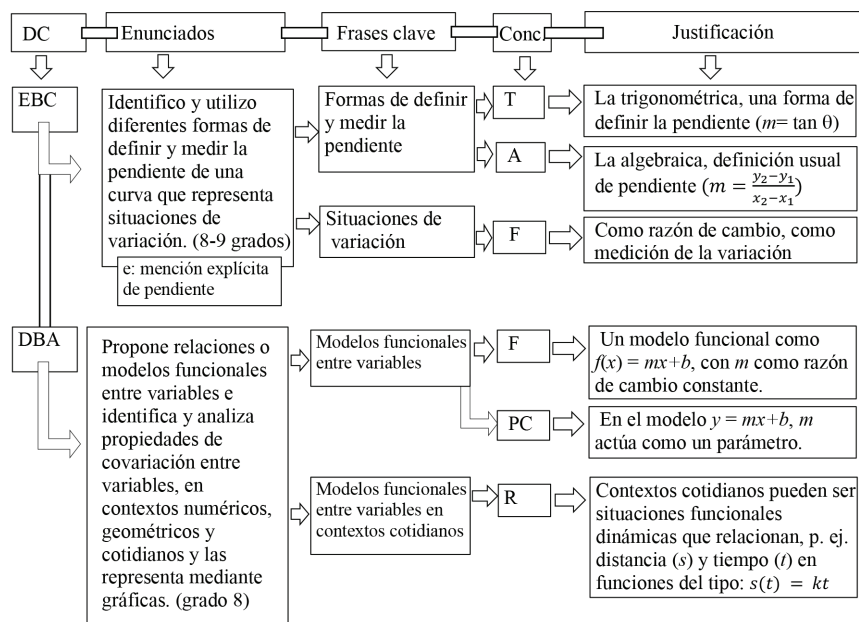


Figura 1. Procedimientos utilizados para el análisis del contenido (ejemplos).

DC = Documentos curriculares; Conc. = Conceptualizaciones.

Tercera Fase. Para el tratamiento de los resultados se empleó la técnica de triangulación caracterizada por Fusch *et al.* (2018) para verificar las opiniones subjetivas, equilibrar las opiniones personales y eliminar los sesgos asociados con un investigador. Para ello, de forma independiente, el equipo de investigación revisó los documentos curriculares, primero cada uno de los investigadores por separado leyeron cada documento con el objetivo de identificar las conceptualizaciones de la pendiente presentes en los enunciados. Al final, en conjunto se compararon y discutieron las clasificaciones propuestas. En caso de algún desacuerdo, los investigadores discutieron el extracto hasta llegar a un consenso sobre el tipo de conceptualización promovida.

4. CONCEPTUALIZACIONES DE LA PENDIENTE IDENTIFICADAS EN LOS EBC

4.1. DEL GRADO 1 AL 5. PRIMARIA³

De los setenta y ocho estándares propuestos para este nivel educativo, en nueve de ellos se identificaron dos conceptualizaciones que corresponden a tres tipos de pensamiento matemático: numérico, métrico y variacional. Estas fueron: propiedad funcional y situación del mundo real (tabla 2). La propiedad funcional que induce a la idea de razón de cambio está presente en los nueve estándares en las frases “situaciones de variación proporcional”, “razones”, “situaciones de proporcionalidad directa”, “patrones de variaciones en secuencias numéricas” y “situación de variación proporcional en las ciencias económicas, sociales y naturales”. La presencia de frases como: “situaciones de variación”, “distancia, tiempo”, “rapidez”, “situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales” sugieren la presencia de la conceptualización situación del mundo real dinámica porque contienen variables vinculadas a la realidad.

4.2 DEL GRADO 6 AL 9. SECUNDARIA

Para este nivel se proponen sesenta y siete estándares, en seis de ellos se encontraron evidencias de siete conceptualizaciones de la pendiente, la mayoría implícitas (tabla 2). La presencia de las conceptualizaciones fue detectada en dos tipos de pensamiento: en el numérico y en el variacional. La propiedad funcional sigue siendo la de mayor dominio, se identificó en los estándares enlistados en este nivel educativo a través de las frases “situaciones de proporcionalidad directa e inversa”, “situaciones de cambio y variación”, “variación lineal” y “cambios en los parámetros de ciertas familias de funciones”. Las conceptualizaciones coeficiente paramétrico y razón algebraica se insinúan en la frase “representación algebraica de familia de funciones”. Las conceptualizaciones propiedad física y la concepción trigonométrica tiene relación directa con la definición analítica de pendiente, por eso fueron asociados a frase “diferentes formas de definir y medir la pendiente”. De acuerdo con los EBC, del grado 8 al 9 es la primera vez que aparece explícitamente el término

³ La primaria en Colombia comprende del grado 1 al 5; la secundaria del 6 al 9 y el bachillerato del 10 al 11.

“pendiente” (tabla 2), para precisar en qué grado se introduce revisamos dos de los textos usuales en Colombia, el de Ramírez *et al.* (2013) y el MEN (2017), donde se puede constatar que es introducida en el grado 8 a partir de la noción de razón de cambio en funciones lineales. Otras dos conceptualizaciones promovidas fueron la situación del mundo real e indicador de comportamiento, la primera fue notada en la frase “situaciones de variación”, y la segunda en las frases “correlación positiva y negativa” y “comportamiento de cambio en representaciones gráficas cartesianas”.

Tabla 2. Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en los EBC

Grado	e- i	Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBC)	Cód.	f
1-3	i	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional (p. 80).	F	1
	i	Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y graficas (p. 81).	F	1
4-5		Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones (p. 82).	F	1
	i	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas (p. 82).	F	1
	i	Modelo situaciones de dependencia mediante proporcionalidad (p. 82).	F	1
	i	Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso, masa, rapidez) y de unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud en situaciones aditivas y multiplicativas (p. 83).	F	1
	i	Predigo patrones de variación en secuencias numérica, geométrica o gráfica (p. 83).	F	1
	i	Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales (p. 83).	F	1
	i	Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales (p. 83).	F, R	2
6-7	i	Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa (p. 84).	F	1
	i	Reconozco el conjunto de valores de cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación) (p. 85).	F, R	2

	i	Análizo propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o proporcionalidad directa en contextos aritméticos y geométricos (p. 85).	F, B	2
8-9	e	Identifico y utilizo diferentes formas de definir y medir la pendiente de una curva que representa situaciones de variación (p. 87).	P, F, T, R	4
	i	Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en sus gráficas (p. 87).	A, F, PC	3
	i	Analizo en gráficas cartesianas el comportamiento de cambio en funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas (p. 87).	F, B	2
10-11	e	Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como velocidad media, aceleración y densidad medias (p. 89)	A, F, R	3
	e	Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos (p. 89).	F, C, R	3
	e	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas (p. 89).	PC, F, C, B	4
	e	Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas (p. 89).	F, C, B	3
Total				37

Nota: Los estándares se obtuvieron de MEN (2006, p. 46-95). Las franjas corresponden a los niveles educativos. e = mención explícita; i = mención implícita; Cód.= Código; f= Frecuencia.

4.3 DEL GRADO 10 AL 11. BACHILLERATO

En cuatro de los veintisiete estándares de este nivel se reconocieron seis conceptualizaciones explícitas de pendiente, correspondientes a dos tipos de pensamientos: el métrico y el variacional. La propiedad funcional sigue siendo dominante (tabla 2), se promueve en las frases “velocidad media, aceleración y densidad media”, “razón de cambio” y “variación periódica con funciones”. La conceptualización de concepción en cálculo se evidenció en los tres últimos estándares, mediante las frases “derivada como razón de cambio”, “relaciones de las funciones

y sus derivadas” e “interpretación y utilización de las derivadas”. La conceptualización indicadora de comportamiento se infiere de “las propiedades de las funciones polinómicas” y de “la variación periódica” de las funciones trigonométricas. Se promueve la conceptualización de situación de mundo real en frases relativas a la variación física como “velocidad media, aceleración y densidad media” o situaciones fuera de las matemáticas como “derivadas de funciones básicas en contextos no matemáticos”. Las que poco se promueven en este nivel educativo fueron las conceptualizaciones de razón algebraica y coeficiente paramétrico asociadas a un solo estándar, en frases como “resolver problemas mediante razones como velocidad media” y “relaciones de las propiedades de expresiones algebraicas y gráficas de funciones”, respectivamente.

5. CONCEPTUALIZACIONES DE LA PENDIENTE IDENTIFICADAS EN LOS DBA

5.1 DE GRADO 1 AL 5. PRIMARIA

De los cincuenta y cinco aprendizajes estructurantes planteados para este nivel educativo, en tres de ellos se infiere la presencia de dos conceptualizaciones implícitas de pendiente: propiedad funcional y situación del mundo real (tabla 3). En la frase “situación de variación y constantes” se nota la conceptualización de propiedad funcional. Esta misma está inmersa en otros dos aprendizajes estructurantes por medio de las frases “resolución de problemas de velocidad” y “unidades para medir la rapidez”, además se deja entrever la conceptualización situación del mundo real al referirse a fenómenos físicos.

5.2 DEL GRADO 6 AL 9. SECUNDARIA

Para este nivel educativo se formulan cuarenta y cuatro aprendizajes estructurantes, en siete de ellos se infiere la presencia de cuatro conceptualizaciones implícitas de pendiente (tabla 3). La propiedad funcional estuvo presente en cada uno de los aprendizajes estructurantes, se hizo evidente a partir de las frases “resolver problemas de variación”, “covariación directa e inversa entre variables”, “representa situaciones de variación numérica o gráfica” y “relaciones geométricas entre trayectoria y desplazamiento de los cuerpos”. La conceptualización de situación de mundo real se promueve en cinco de los siete aprendizajes estructurantes,

se manifiesta en frases como “covariación entre variables en contextos cotidianos”, “variación de magnitudes en fenómenos de la vida diaria” e “interpreta el desplazamiento de los cuerpos en diferentes situaciones”. La conceptualización coeficiente paramétrico se promueve en tres aprendizajes estructurantes en frases como “modelado de ecuaciones lineales” y “modelado de funciones”, por medio de sus modelos algebraicos del tipo $y = mx + b$; la de indicador comportamiento que poco se promueve subyace de la frase “variación y covariación con los comportamientos gráficos”.

Tabla 3. Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en los DBA

Grado	e-i	Aprendizajes estructurantes de los DBA	Cód.	f
2	i	Compara y explica características que se pueden medir, en la resolución de problemas de longitud, superficie, velocidad, peso o duración de los eventos, entre otros (p. 17).	F, R	2
3	i	Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación (p. 27).	F	1
4	i	Elige instrumentos y unidades para estimar y medir longitud, área, volumen, ..., rapidez, temperatura, y con ellos hace los cálculos para resolver problemas (p. 32).	F, R	2
6	i	Interpreta números enteros y racionales con sus operaciones, en diferentes contextos, al resolver problemas de variación, repartos, particiones, estimaciones, etc. (p. 45).	F	1
	i	Identifica y analiza propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa en gráficas (p. 49).	F, R	2
7	i	Representa en el plano cartesiano la variación de magnitudes y sobre esta base explica el comportamiento de situaciones y fenómenos de la vida diaria (p. 56).	F, R	2
		Plantea y resuelve ecuaciones, las describe verbalmente y representa situaciones de variación de manera numérica, simbólica o gráfica (p. 56).	F, PC	2
8	i	Identifica y analiza relaciones entre propiedades de gráficas y sus exp. algebraicas y las de variación y covariación, con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación (p. 63).	F, PC, R, B	4
	i	Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (p. 64).	F, PC, R	3

9	i	Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas entre trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones (p. 70).	F, R	2
10	e	Resuelve problemas sobre el significado de medidas de magnitudes relacionales (velocidad y aceleración medias) en tablas, gráficas y expresiones algebraicas (p. 75).	F, PC, R	3
	e	Comprende y usa la razón de cambio para estudiar el cambio promedio y el cambio en torno de un punto y lo reconoce en rep. gráficas, numéricas y algebraicas (p. 77).	F, PC, C	3
	e	Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes (p. 77).	F, PC, C	3
11	e	Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio, para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto (p. 82).	F, C, R	3
	e	Interpreta y diseña técnicas para hacer mediciones (en rapidez, razón de cambio) con niveles crecientes de precisión (diferentes instrumentos para la misma medición, escalas, estimaciones, verificaciones a través de mediciones indirectas) (p. 83).	F	1
	e	Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos (p. 84)	F, C, R	3
	e	Usa propiedades y modelos funcionales ($\pm f'(x)$) para analizar situaciones y establecer relaciones funcionales para estudiar la variación en situaciones intra y extraescolares (p. 85).	F, C, R, B	4
	e	Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas (aplicando el dy/dx , variación de $f(x)$ y $f'(x)$) (p. 85).	F, C, B	3
Total				44

Nota: Los datos fueron tomados de MEN (2016), las franjas corresponden a los niveles educativos.

5.3 DEL GRADO 10 AL 11. BACHILLERATO

De los veinte aprendizajes estructurantes que se plantean para este nivel educativo, en ocho de ellos se promueve cinco conceptualizaciones explícitas de pendiente (tabla 3). Igual que en los niveles educativos anteriores la propiedad funcional sigue siendo la de mayor frecuencia, se identificó en los ocho aprendizajes estructurantes a través de las frases “velocidad y aceleración media”, “razones de cambio entre magnitudes” y “relaciones funcionales para estudiar la variación”. Predominó también en este nivel la concepción en cálculo, que se hizo visible en seis aprendizajes en las frases “razón de cambio en torno de un punto”, “nociones de derivada como razón de cambio”, “valor de la pendiente de la tangente a una curva” y “derivadas de funciones para resolver problemas”. La conceptualización de situación del mundo real se promueve en cuatro de los siete aprendizajes, se evidenció en frases como “medidas de magnitudes (velocidad y aceleración media)”, “resolver problemas de derivada como razón de cambio en diferentes contextos”, “derivadas de algunas funciones básicas en contextos no matemáticos” y “variación en situaciones extraescolares”. La conceptualización coeficiente paramétrico se infiere que se promueve en la frase “representación de magnitudes expresiones algebraicas”. Por último, la conceptualización de indicador de comportamiento fue identificada a partir de la frase “relación del signo de la derivada con características geométricas” (reconocida con el símbolo: $\pm f'(x)$) ya que el signo de la derivada tiene relación con el comportamiento de la función primitiva.

6. DISCUSIÓN

6.1 CONCEPTUALIZACIONES DE LA PENDIENTE POR NIVELES EDUCATIVOS

En los EBC y DBA de la primaria se promueven las conceptualizaciones propiedad funcional y situación el mundo real (figura 2), todas en forma implícita, referidas principalmente a situaciones de cambio y variación proporcional, medición de magnitudes y patrones de variación. Lo implícito de las conceptualizaciones es explicable porque en la primaria no se enseña este concepto, más bien se preparan las condiciones previas para su tratamiento en secundaria. Estos resultados son coincidentes con el currículum mexicano (Dolores *et al.*, 2020) y con el norteamericano (Nagle y Moore-Russo, 2014), también coinciden en considerar a la proporcionalidad como precursor del concepto de pendiente,

aunque es notable en los EBC y DBA la predominancia de la variación y el cambio, en particular la variación lineal, constatable en MEN (2006, p. 85).

En los EBC y DBA de la secundaria incrementa la cantidad de conceptualizaciones (figura 2) ya que aparece la pendiente como “pendiente de una curva que representa situaciones de variación” (MEN, 2006, p. 87), con ello sugiere el estudio de la pendiente tanto en funciones no lineales como lineales. Igual que en la primaria, en este nivel se pone énfasis en la propiedad funcional y en la situación mundo real, la primera debido a la reiterada referencia en las situaciones de variación y las razones de cambio que involucran y, en la segunda, debido a que la currícula colombiana está diseñada bajo el enfoque de competencias y estas en su acepción más general son tendientes al aprendizaje funcional y preparatorio para la vida (Fonseca y Gamboa, 2017). Además, en este nivel aparecen el coeficiente paramétrico, el indicador de comportamiento, la razón algebraica, propiedad física y concepción trigonométrica, debido, por una parte, por la introducción del lenguaje algebraico y por otra, porque se prevé la utilización de diferentes formas de definir la pendiente (que puede incluir la algebraica y la trigonométrica). En cuanto a conceptualizaciones en secundaria hay similitud con el currículum mexicano (Dolores *et al.*, 2020) y el norteamericano (Nagle y Moore-Russo, 2014), salvo que en el mexicano aparece el término “pendiente” en el grado 9 y en los otros dos en el grado 8. A diferencia del currículum el mexicano (Dolores *et al.*, 2020) y norteamericano que enfatizan el estudio de la pendiente en funciones lineales (Stump, 1999; Teuscher y Reys, 2010), en los EBC se amplía el estudio hasta las curvas que representan situaciones de variación. Es notable la ausencia en este nivel de la conceptualización razón geométrica, muy escasa en el currículum mexicano, pero significativamente presente en el norteamericano.

En los EBC y DBA del bachillerato se incrementa la cantidad y variedad de las conceptualizaciones de la pendiente respecto de la primaria y secundaria (figura 2) y aparecen vinculadas a dos conceptos centrales: razón de cambio y derivada. Privilegian la propiedad funcional, la concepción en cálculo y la situación del mundo real porque a menudo recomienda estudiar la razón de cambio en contextos de la física como la velocidad, la aceleración, la densidad, aunque no desestiman el contexto intra-matemático. En cambio, Dolores *et al.* (2020) para este nivel señalan que el currículum mexicano introduce la definición analítica de pendiente y su aplicación en cálculo como razón de cambio instantánea, por lo que se vincula a estos conceptos las conceptualizaciones situación el mundo real, coeficiente paramétrico e indicador de comportamiento, aunque la presencia de la razón

algebraica, la constante lineal y la concepción del cálculo no es despreciable. Poco se promueve la conceptualización del cálculo en el currículum norteamericano, inclusive las demás, excepto la situación funcional y la constante lineal.

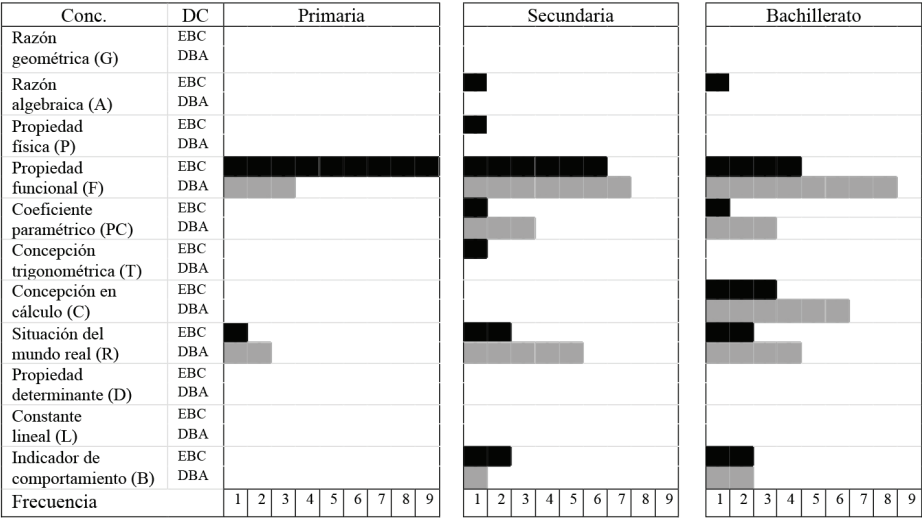


Figura 2. Conceptualizaciones de la pendiente en los EBC y DBA por niveles educativos.
Conc. =Conceptualizaciones; DC= Documentos curriculares analizados.

6.2 CONCEPTUALIZACIONES DE LA PENDIENTE ENFATIZADAS EN EL CURRÍCULO COLOMBIANO

El número total de menciones de las conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano, fueron treinta y siete en los EBC y cuarenta y cuatro en los DBA. En general las conceptualizaciones más enfatizadas fueron la propiedad funcional, situación del mundo real y la concepción en cálculo (figura 2). La propiedad funcional fue la conceptualización más común en ambos documentos, se evidenció ligeramente más en los EBC que en los DBA. Por el contrario, los DBA enfatizaron las conceptualizaciones de la pendiente de situación del mundo real, concepción en cálculo y coeficiente paramétrico. Estos resultados en conjunto son parcialmente coincidentes con el currículum mexicano (Dolores *et al.*, 2020) y el norteamericano (Nagle y Moore-Russo, 2014) ya que enfatizan

los tres, las dos primeras conceptualizaciones: propiedad funcional y situación del mundo real, sin embargo, se diferencian en la tercera de mayor énfasis, el colombiano enfatiza la concepción del cálculo, el mexicano la del coeficiente paramétrico y el norteamericano la constante lineal.

El predominio de la conceptualización situación del mundo real en los tres currículums es consistente con el desarrollo de las competencias matemáticas recomendada por la OECD (2004), en donde se enfatiza que la competencia matemática es el conocimiento matemático puesto en uso funcional en una multitud de situaciones diferentes, de donde se infiere que es esencial enseñar la pendiente (y otros tantos conceptos) en contextos del mundo real. Aquí juega un papel importante la conexión que se puede establecer entre las situaciones estáticas y dinámicas que caracterizan esta conceptualización para darle a la pendiente un significado productivo como lo señalan Byerley y Thompson (2017), en el sentido de utilizarla para comprender una amplia variedad de contextos y problemas con base en la formación de esquemas.

El énfasis, tanto en los EBC y los DBA como en el currículum mexicano y norteamericano de la conceptualización propiedad funcional, puede contribuir a la comprensión del concepto de pendiente y de la razón de cambio posibilitando las conexiones entre ambos conceptos. Sin embargo, al estudiar el currículum enseñado, Salgado *et al.* (2019) encontraron que los profesores le confieren escasa importancia a la propiedad funcional ya que prácticamente no la enseñan, probablemente esa sea la causa por la cual los estudiantes no hacen esa conexión entre pendiente y razón de cambio tal como lo evidenciaron Dolores *et al.* (2019). También la conceptualización situación del mundo real es enfatizada en los EBC y DBA y en los currículums mexicano y norteamericano, pero los futuros profesores le dan escaso énfasis en la enseñanza (Stump 2001a; Nagle y Moore-Russo, 2013b) y poco es utilizada por los estudiantes (Rivera *et al.*, 2019), quizá, en ambos casos, por las dificultades que implica la aplicación de este concepto a situaciones de la vida real o a transferirlo a otros contextos como lo afirman Susac *et al.* (2018). Estos hallazgos sugieren distanciamiento entre lo que se prevé en el currículum, lo que se enseña en las aulas y lo que aprenden los estudiantes sobre la pendiente, por lo que es necesario que las futuras reformas curriculares consideren el desarrollo de estrategias tendientes a disminuir esa distancia.

En los DBA se prevé explícitamente el desarrollo de las ideas de covariación, en cambio, en el currículum mexicano y en el norteamericano (en particular NCTM, 2000) se le confiere escasa atención. La covariación tiene fuerte presencia en las conceptualizaciones propiedad funcional y situación del mundo real, concebir la

pendiente como razón a menudo requiere considerar su propiedad funcional dentro de una situación del mundo real (Stanton y Moore-Russo, 2012), por tanto, la conexión entre ambas conceptualizaciones puede contribuir de manera importante a su comprensión. Varias investigaciones (Thompson y Carlson, 2017; Kertil *et al.*, 2019; González, 2021) destacan la importancia de desarrollar la capacidad de los estudiantes o profesores para coordinar cantidades covariantes en la comprensión de la pendiente, suele llamársele razonamiento covariacional. Los hallazgos de este trabajo indican que este tipo de razonamiento ya está considerado en el currículum colombiano por la reiterada presencia de la covariación en el estudio de situaciones de variación y cambio.

Es notable, tanto en los EBC como en los DBA, la ausencia de las conceptualizaciones razón geométrica, constante lineal y propiedad determinante. En el currículum mexicano también reciben escasa atención, particularmente la primera y la tercera (Dolores *et al.*, 2020), por el contrario, en el currículum norteamericano la constante lineal es una de las tres mayoritariamente enfatizadas (Nagle y Moore-Russo, 2014), y las conceptualizaciones razón geométrica y propiedad determinante se encuentra en los cursos obligatorios del grado 8 al 12 de más de cuarenta y tres estados de USA (Stanton y Moore-Russo, 2012). La razón geométrica permite visualizar la pendiente como desplazamientos en el plano cartesiano de “lo que sube” entre “lo que avanza” justamente por la “rectitud” de las gráficas de funciones lineales que permite tomar secciones de ellas como hipotenusas de los triángulos determinados por esos desplazamientos. Deniz y Kabaël (2017) afirman que la razón geométrica es importante para la interiorización de la pendiente como una razón constante porque se vincula con la conceptualización constante lineal. La ausencia de las conceptualizaciones razón geométrica, constante lineal en el currículum colombiano puede limitar, la visualización de la pendiente en el plano y la conexión entre esas conceptualizaciones. Con ello se dan escasas oportunidades a los estudiantes de desarrollar su comprensión sobre la pendiente. Por otro lado, la propiedad determinante quizá sea omitida en el currículum colombiano por el énfasis del estudio de situaciones de variación del mundo real, sin embargo, es necesaria para la determinación de paralelismo cuando dos situaciones de variación tienen razones de cambio iguales o incluso cuando estas son recíprocas y de signos contrarios. Esta omisión por tanto también podría estar restando oportunidades de desarrollar la comprensión del concepto en cuestión a los estudiantes de ese país.

7. CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y FUTUROS TRABAJOS

Los resultados del análisis de los EBC y DBA aportan elementos adicionales a la investigación acerca de la pendiente y sus múltiples conceptualizaciones, dan un panorama amplio sobre cómo prevé el currículo que sea enseñada la pendiente en Colombia. Las evidencias obtenidas en este trabajo nos han permitido concluir que el currículo colombiano de matemáticas tiene una fuerte tendencia hacia lo variacional. Esto, debido al énfasis que en él tienen las conceptualizaciones con esencia variacional como la propiedad funcional, situación del mundo real y la concepción del cálculo. Además, en los EBC aparece más de cuarenta veces el término “variación” y en los DBA más de cien veces. Tanto en el currículo mexicano como en el norteamericano estas conceptualizaciones también tienen predominio (sobre todo las dos primeras), pero el término “variación” aparece con menos frecuencia, treinta veces en el currículo mexicano y en los estándares norteamericanos (NCTM, 2000) solo diez veces. Esta tendencia variacional del currículo colombiano da oportunidad a los estudiantes a desarrollar su comprensión del concepto de pendiente como razón de cambio, ya que les prepara condiciones desde la primaria considerando el estudio de la variación proporcional en situaciones de variación y cambio posibilitando que lleguen a la secundaria y estudien este concepto como tal en el marco del tratamiento de las relaciones funcionales y las propiedades de covariación, elementos que le dan sentido a este importante concepto. Con esto se sientan las bases en el currículo colombiano a partir de las cuales se posibilita el abordaje en el bachillerato de la derivada que es, en esencia, un concepto variacional y es tratado en este nivel educativo justamente como una razón de cambio y como pendiente de tangentes a curvas.

La ausencia de la conceptualización razón geométrica, propiedad determinante y constante lineal y la escasa presencia de la razón algebraica, concepción trigonométrica y la propiedad física, descubiertas en el análisis de los datos, podrían limitar las oportunidades para que los estudiantes colombianos puedan construir redes de conexiones entre ellas y así contribuir a la comprensión del concepto de pendiente. Las conexiones son piezas fundamentales en la comprensión matemática (García-García y Dolores-Flores, 2018), en particular las conexiones entre todas las conceptualizaciones de la pendiente pueden ser orientadas combinando la interpretación visual y analítica vs el conocimiento procedimental y el conceptual como lo sugieren Nagle y Moore-Russo (2013a) o bien utilizando el marco de referencia propuesto por Nagle *et al.* (2019).

Cambios curriculares que favorezcan la presencia de más conceptualizaciones de la pendiente para gestar una red rica de significados entre ellas, podrían robustecer la comprensión de los estudiantes de este importante concepto.

Este estudio nos ha permitido hacer comparaciones con las investigaciones de su tipo hechas en el continente americano, y nos permitió apreciar que el desarrollo por niveles educativos de la idea de pendiente en el currículum el colombiano es similar al desarrollo previsto en el currículum mexicano y norteamericano. Las ideas de proporcionalidad le preceden en nivel de primaria, aparece en la secundaria y se amplía en el bachillerato con énfasis en el estudio de la razón de cambio y su conexión con la derivada en todos los casos.

Los documentos analizados proporcionan orientaciones nacionales sobre las competencias y los aprendizajes, sin embargo, es necesario recordar que Colombia tiene un currículum abierto en donde cada escuela puede diseñar su propio currículum. Esto significa que las orientaciones nacionales tienen que ser adaptadas a los contextos específicos de cada escuela.

Es posible que, en Colombia igual que ocurre en varios países, el currículum previsto y el enseñado tengan divergencias, pero se sabe muy poco al respecto en Latinoamérica en general. Por tanto, es importante que investigaciones futuras arrojen luz sobre la relación entre el currículum previsto y el enseñado en relación con la pendiente. Entre el currículum previsto y el enseñado se ubica el currículum potencial plasmado en los libros de texto que son materiales que los conectan (Choppin *et al.*, 2020). Estos, juegan también un papel importante ya que, por un lado, son mediadores entre las intenciones de los diseñadores de currículum y los maestros que imparten instrucción en las aulas, por otro lado, porque proporcionan explicaciones y ejercicios para que los estudiantes completen sus tareas de enseñanza y a los profesores les ofrecen guías de instrucción para orientar este proceso (Van Steenbrugge *et al.*, 2013). Por ello, trabajos futuros podrían examinar las relaciones entre las conceptualizaciones de la pendiente previstas en el currículum, las tratadas en los libros de texto y las que se enseñan en el aula, tanto en el contexto colombiano como en el latinoamericano en general. Con ello se podría tener una mejor aproximación sobre la enseñanza y el aprendizaje de este concepto en esta región geográfica del mundo.

REFERENCIAS

- Bardin, L. (2002). *El análisis de contenido*. 3a Edición. Akal.
- Brown, T. L., y Hirschfeld, G. (2007). Students' conceptions of assessment and mathematics: Self-Regulations Raises Achievement. *Australian Journal of Education & Development Psychology*, 7, 63-74.
- Byerley, C. y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48(1), 168-193. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003>
- Casey, S. y Nagle, C. (2016). Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. *Educational Studies in Mathematics*, 92 (2), 163-177. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9679-y>
- Cheng, I. (2010). Fractions: A new slant on slope. *Mathematics teaching in the Middle school*, 16(1), 35-41. <https://doi.org/10.5951/MTMS.16.1.0034>
- Cho, P., y Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students' mis takes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, 3(1), 135-150.
- Choppin, J., McDuffie, A.M., Drake, C. y Davis, J. (2020). The role of instructional materials in the relationship between the official curriculum and the enacted curriculum, *Mathematical Thinking and Learning*, 1-26, <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1855376>
- Choy, B., Lee, M., y Mizzi, A. (2015) Textbook signatures: An exploratory study of the notion of gradient in Germany, Singapore and South Korea. En K. Beswick, T. Muir, y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 161-168). University of Tasmania.
- Clement, J. (1985). Mis conceptions in graphing. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (9th)* (vol. 1, pp. 369-375). Noordwijkerhout, The Netherlands.
- Demir, M. (2018). Effects of virtual manipulatives with different approaches on students' knowledge of slope. *Journal of Interactive Learning Research*, 29(1), 2550.
- Deniz, Ö., y Kabaal, T. (2017). 8th grade students' construction processes of the concept of slope. *Education and Science*, 42(192), 139-172. <https://doi.org/10.15390/EB.2017.6996>
- Dolores, C. (2012). ¿Hacia dónde reorientar el Currículum de Matemáticas del Bachillerato? En C. Dolores y M. S. García, (Eds.), *¿Hacia dónde reorientar el Currículum de Matemáticas del Bachillerato?* (pp. 165-181). Plaza y Valdés, UAGro.

- Dolores, C., e Ibáñez, G. (2020). Slope conceptualizations in mathematics textbooks. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(67), 825–846. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a22>
- Dolores, C., Rivera, M. I., y García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3), 369–389. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050>
- Dolores, C., Rivera, M., y Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, 120(2), 104–115. <https://doi.org/10.1111/ssm.12389>
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. Proem.
- Fusch, P., Fusch, G. E., y Ness, L. R. (2018). Denzin's Paradigm Shift: Revisiting Triangulation in Qualitative Research. *Journal of Social Change*, 10, 19–32. <https://doi.org/10.5590/IOSC.2018.10.1.02>
- Fonseca, J. y Gamboa, M. (2017). Aspectos teóricos sobre el diseño curricular y sus particularidades en las ciencias. *Boletín Redipe*, 6(3), 83–112.
- García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 227–252. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994>
- González, D. A. (2021). The progression of preservice teachers' covariational reasoning as they model global warming, *The Journal of Mathematical Behavior*, 62, <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100859>
- Hong, D., y Choi, K. (2018). A comparative analysis of linear functions in Korean and American standards-based secondary textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1025–1051.
- Kertil, M., Erbas, A. K., y Cetinkaya, B. (2019). Developing prospective teachers' covariational reasoning through a model development sequence. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–27. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1576001>
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64. <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>
- MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN (Ed.), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadana* (pp. 46–95). Mineducación. http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

- MEN (2016). *Derechos básicos de aprendizajeV2*. Panamericana Formas e Impresos S.A http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matemáticas.pdf
- MEN (2017). *Vamos a aprender matemáticas. Libro del estudiante 8*. MEN (2017). Ministerio de Educación Nacional /Ediciones SM, S. A.
- Moore-Russo, D., Conner, A., y Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3–21. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9277-y>
- Nagle, C., Casey, S., y Moore–Russo, D. (2017). Slope and line of best fit: A transfer of knowledge case study. *School Science and Mathematics*, 117(1–2), 13–26. <https://doi.org/10.1111/ssm.12203>
- Nagle, C., Martínez-Planell, R., y Moore–Russo, D. (2019). Using APOS theory as a framework for considering slope understanding. *Journal of Mathematical Behaviour*, 54, 100684. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.12.003>
- Nagle, C. y Moore-Russo, D. (2013b). Slope: a network of connected components. In: M. Martínez, y A. Castro (Eds.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 127-135). University of Illinois at Chicago.
- Nagle, C., y Moore–Russo, D. (2013a). The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content. *Investigations in Mathematics Learning*, 6(2), 1–18. <https://doi.org/10.1080/24727466.20covariation13.11790330>
- Nagle, C., y Moore–Russo, D. (2014). Slope across the curriculum: Principles and standards for school mathematics and common core state standards. *The Mathematics Educator*, 23(2), 40–59.
- Nagle, C., Moore–Russo, D., y Styers, J. (2017). Teachers' interpretations of student statements about slope. En E. Galindo, y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 589–596). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Organization for Economic Cooperation and Development (OECD). (2004). *The PISA 2003 assessment frame work: Mathematics, reading, science and problem-solving knowledge and skills*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264101739-en>
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191–213.

- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortíz, L., Cell, V., De Armas, R., Castaño, J., Gamboa, J., y Jiménez, J. (2013). *Los caminos del saber matemáticas* 8. Editorial Santillana S. A.
- Remillard, J. T., y Heck, D. J. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 46(5), 705–718. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4>
- Rivera, M., Salgado, G., y Dolores, C. (2019). Explorando las Conceptualizaciones de la Pendiente en Estudiantes Universitarios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 1027–1046. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a03>
- Salgado, G., Rivera, M., Dolores, C. (2019). Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del bachillerato. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15(57), 41–56.
- Solís, I. (2012). Del currículum de la RIEB a un modelo curricular institucional. En J. C. Guzmán, (Coord.), *Del currículum al aula. Orientaciones y sugerencias para aplicar la RIEB* (pp. 15 -50). Graó/Colofón.
- Stanton, M., y Moore–Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270–277. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00135.x>
- Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124–144. <https://doi.org/10.1007/bf03217065>
- Stump, S. (2001a). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), 207–227. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(01\)00071-2](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00071-2)
- Stump, S. (2001b). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, 101(2), 81–89. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18009.x>
- Susac, A., Bubic, A., Kazotti E., Planinic, M., y Palmovic, M. (2018). Student understanding of graph slope and area under a graph: A comparison of physics and non physics students, *Physical Review Physics Education Research*, 14, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020109>
- Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.
- Teuscher, D., y Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand the concepts? *Mathematics Teacher*, 3(7), 519–524. <https://doi.org/10.5951/MT.103.7.0519>
- Van Steenbrugge, H., Valcke, M., Desoete, A. (2013). Teachers' views of mathematics textbook series in Flanders: Does it (not) matter which mathematics textbook series

schools choose? *Journal of Curriculum Studies* 45(3), 322–353. <https://doi.org/10.1080/00220272.2012.713995>

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. En J. M. Barbier (Ed.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 275–292). PUF.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133–169.

CRISÓLOGO DOLORES FLORES

Dirección: Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas
cdolores2@gmail.com; cdolores@uagro.mx; <https://cdolores.mx>