Educación matemática
ISSN: 0187-8298
ISSN: 2448-8089

Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A.C.

Medrano, Ana; Xolocotzin, Ulises; Flores-Macías, Rosa del Carmen

Un análisis de la producción de representaciones al solucionar problemas de álgebra temprana en estudiantes de primaria

Educación matemática, vol. 34, núm. 3, 2022, pp. 10-41
Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A.C.

DOI: https://doi.org/doi.org/10.24844/EM3403.01

 https://doi.org/10.24844/EM3403.01

Un análisis de la producción de representaciones al solucionar problemas de álgebra temprana en estudiantes de primaria

An analysis of the representation's production when solving early algebra problems in elementary school

Ana Medrano,[1]
Ulises Xolocotzin,[2]
Rosa del Carmen Flores-Macías[3]

Resumen: El estudio de las representaciones externas en Álgebra Temprana suele enfocarse en el uso de símbolos y notaciones formales. Por tanto, se sabe poco del papel que otras representaciones externas pueden jugar en el desarrollo del pensamiento algebraico. Este artículo analiza representaciones como dibujos, esquemas, o símbolos idiosincráticos, producidos espontáneamente por estudiantes de tercero de primaria (n=27) durante un programa de álgebra temprana con componentes de aritmética generalizada y pensamiento funcional. El programa fue evaluado con un diseño pre test–post test. Hubo aumentos significativos en el rendimiento de los estudiantes en problemas de aritmética generalizada y pensamiento funcional. La sofisticación de las representaciones producidas por estudiantes aumentó en los problemas funcionales, pero no en los problemas de aritmética generalizada. Se encontró que la producción de representaciones más sofisticadas se asoció con mejores rendimientos en problemas funcionales, pero no en problemas de aritmética

Fecha de recepción: 1 de octubre de 2020. **Fecha de aceptación**: 5 de julio de 2022.

[1] Universidad Nacional Autónoma de México, medrano.unam@gmail.com, orcid.org.0000-0003-0529-9972.

[2] Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, ulises.xolocotzin@cinvestav.mx, orcid.org.0000-0002-9896-2093.

[3] Universidad Nacional Autónoma de México, rosadelcarmenf@yahoo.com, orcid.org.0000-0002-1443-4892.

generalizada. Se discute cómo la producción de representaciones externas puede apoyar la adquisición de ideas algebraicas y se concluye delineando algunas implicaciones teóricas y prácticas del estudio.

Palabras clave: *producción de representaciones, análisis de representaciones, álgebra temprana, cognición matemática, solución de problemas.*

Abstract: The study of external representations in early algebra usually focuses on formal symbolic aspects. Therefore, little is known about the role those other representations might play in the development of algebraic thinking. This article analyses representations like drawings, schemes, and idiosyncratic symbols spontaneously produced by third-grade elementary students (n=27) during an early algebra program with generalized arithmetic and functional thinking components. The program was evaluated through a pre-test, posttest design. There was a significant increase in the students' generalized arithmetic and functional thinking performance. The sophistication of the representations produced by the students increased for the functional problems but not for the generalized arithmetic problems. During the program, the levels of representations remained stable. It was found that the production of more sophisticated representations was associated with a better performance in functional problems but not on generalized arithmetic problems. The notion of how the production of external representations can support the acquisition of algebraic ideas is discussed. Conclusions are drawn by highlighting some theoretical and practical implications of the study.

Keywords: *Representation production, Representation analysis, early algebra, mathematical cognition, problem solving*

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en Álgebra Temprana han demostrado que los estudiantes de primaria pueden empezar a pensar algebraicamente siempre y cuando tengan un apoyo instruccional adecuado a sus conocimientos (Cai y Knuth, 2011; Carraher *et al.*, 2006; Kieran *et al.*, 2016; Schliemann *et al.*, 1998, 2011). Algunas, enfatizan en brindar al estudiante esquemas preestablecidos que les sirvan como herramienta de análisis del problema (Fuchs *et al.*, 2004, 2010; Xin, 2008). Otras, en el análisis de los razonamientos y elementos formales en las producciones de los estudiantes (Carraher *et al.*, 2006; Schliemann *et al.*, 1998; 2011). Plantear para la escuela primaria que el aprendizaje de ideas algebraicas en el contexto de la solución de problemas sea el hilo rector del aprendizaje de la matemática no solo es viable, sino deseable, se favorece que el estudiante desarrolle formas de pensamiento y conocimientos más precisos y profundos sobre conceptos y símbolos matemáticos que le evitan conflictos en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. Kaput (2008) propone tres dominios algebraicos para el desarrollo del pensamiento algebraico: a) modelamiento; b) aritmética generalizada, y c) pensamiento funcional. Específicamente, en este trabajo nos referiremos a los dos últimos dominios. Posteriormente, Blanton *et al.* (2015) detallan los conocimientos en estos dominios y les denominan ideas algebraicas.

En el dominio aritmética generalizada, la instrucción se enfoca en que los estudiantes de primaria conciban desde una perspectiva algebraica ideas que han aprendido desde una perspectiva aritmética, como son: la igualdad (Kieran, 1981; 1992; Molina, 2009) las propiedades de las operaciones básicas (Fujii y Stephens, 2001; Molina, 2011; Molina y Castro, 2021) o la traducción de problemas contextualizados a una expresión o notación matemática (Fuchs *et al.*, 2010; Xin, 2008). En el dominio pensamiento funcional, la instrucción enfatiza la idea de función como referente para aprender a identificar y expresar patrones de generalización y comprender los conceptos de variable y variación (Carraher *et al.*, 2006; Blanton *et al.*, 2015; Brizuela *et al.*, 2015a). En ambos dominios, la enseñanza se basa en la solución de problemas que enfrentan los personajes de una narración (word-problems, en inglés) o bien en problemas solo numéricos.

Las investigaciones y propuestas educativas que se adhieren a la propuesta de álgebra temprana han considerado como evidencia de aprendizaje, principalmente, la forma como los estudiantes comprenden y razonan los problemas con base en representaciones (i.e., tablas, esquemas, ecuaciones) diseñadas ex profeso por el investigador (Blanton, 2005; Fuchs *et al.*, 2010; Xin, 2008). Si bien esta evidencia ha sido crítica para comprender el desarrollo del pensamiento algebraico, ha quedado de lado el análisis de las representaciones idiosincráticas de los estudiantes. En el presente trabajo se propone enseñar al estudiante a producir sus propias representaciones como base para solucionar los problemas, a la par que dialoga y razona con compañeros y maestro. Igualmente, se retoman las diferentes representaciones producidas como fuente de análisis, porque se asume que la actividad de representar es crucial para la comprensión de ideas algebraicas y, reflejan los conocimientos y aprendizajes de los estudiantes.

2. LA PRODUCCIÓN DE REPRESENTACIONES EXTERNAS DURANTE EL PROCESO DE APRENDIZAJE

Para acotar nuestro objeto de estudio, primero distinguiremos entre representación externa y proceso de representación, este último es inherente a las formas de pensamiento y conocimiento del estudiante. De acuerdo con Vergnaud y Récopé (2000), mediante el proceso de representación el estudiante simula y anticipa la realidad para organizar y dirigir su actividad. Así mismo, organiza a la par que produce la acción y la actividad. Es en el proceso de representación en el que los conceptos y principios matemáticos son reconocidos, las interpretaciones se realizan, las acciones son generadas y las predicciones hechas. En el proceso de representación de un problema el estudiante pone en juego sus conocimientos matemáticos para comprender los rasgos relevantes de un problema y las relaciones que están comprendidas en él, así interpreta qué es lo que el problema plantea, y al solucionarlo aplica conocimientos ya existentes o construidos en la solución y da un significado a los signos y símbolos y operaciones.

La representación externa que el estudiante produce al solucionar un problema es parte de este proceso de representación. Siguiendo a Piaget (1969), la reflexión sobre un problema no resulta del problema mismo, sino de las acciones que se tienen sobre este. Una de estas acciones es la representación externa, el estudiante le otorga un significado funcional, puesto que es un medio para manipular las relaciones del problema y llegar a una solución. Al producir una representación externa, el estudiante emplea signos y símbolos matemáticos convencionales, simbolizaciones icónicas, elementos diagramáticos o dibujos, que sirven para simular el problema desde sus ideas y perspectiva que puede ser o no correcta.

Dado su carácter gráfico y la posibilidad del estudiante de explicar su significado, las representaciones externas en matemáticas son un medio para comprender elementos del proceso de representación del estudiante, es decir, a qué conocimientos asocia el problema, qué conflictos enfrenta, cómo los resuelve, que significado da a símbolos y operaciones matemáticas o qué relaciones identifica (Flores Macías, 2003). Diferentes autores han planteado argumentos que resaltan el valor de la representación en la enseñanza: Kosslyn *et al.* (1977)

probaron que las representaciones externas muestran parte de cómo un estudiante representa internamente la información que recibe; Karmiloff-Smith (1990) encontró que las representaciones externas reflejan procesos de cambio conceptual durante la construcción de conocimientos nuevos; Cox y Brna (1994) muestran que aunque las representaciones externas no son un modelo exacto del problema, ayudan a los estudiantes a realizar inferencias correctas. Blanton y Kaput (2011) encuentran que cuando los estudiantes producen dibujos, tablas, o diagramas (por ejemplo, decidir cuántas columnas y renglones debe tener una tabla o cómo dibujar las relaciones que presenta) aprenden a interactuar con aspectos específicos de un problema. En suma, la investigación muestra que el estudiante en el proceso de producción e interacción con sus representaciones externas (sean estas idiosincráticas o formales), pone en juego conceptos y operaciones matemáticas que considera pertinentes para analizar las relaciones implicadas en el problema, encontrar una solución y desarrollar su conocimiento. Por esta razón es importante incorporarlas a la enseñanza.

Específicamente, algunos estudios demuestran la importancia de enseñar álgebra temprana, alentando la producción de representaciones externas como una herramienta para comprender los problemas y manipular las relaciones que expresan. En general, en estos estudios la enseñanza se dirige a grupos de alumnos de primaria; se basan en la presentación de una situación problemática (narrativa o numérica) que primero se analiza para identificar su significado y posteriormente se debate su solución; se enseña el empleo de representaciones como tablas, gráficas, ecuaciones, etc. para facilitar la comprensión y se promueve que los estudiantes las produzcan para transitar a la comprensión de ideas algebraicas con la mediación del profesor o del investigador. La enseñanza se realiza en varias sesiones distribuidas semanalmente.

Carraher *et al.* (2006) enseñaron el concepto de función y número negativo en contextos aritméticos, encontraron que los estudiantes usan letras que guardan una relación con el concepto que se trabaja, así como dibujos. Brizuela y Earnest (2008) promovieron que los estudiantes comprendieran la idea de función a través de la producción de representaciones que escalaban en complejidad, primero dibujo de las relaciones del problema, luego tablas y finalmente gráficos. Schliemann *et al.* (2011) analizaron la comprensión que logran los estudiantes de las relaciones de equivalencia con cantidades determinadas e indeterminadas, plantean una situación problemática que implica transformaciones sucesivas que se relejan en sus representaciones, algunos estudiantes llegan a manejar los problemas con cantidades indeterminadas. Merino *et al.*

(2013) evaluaron las ideas de patrón y generalización (dominio del pensamiento funcional), encontraron que los estudiantes principalmente recurrían a representaciones verbales, especialmente cuando lo que se preguntaba era más complejo, pero aquellos que empleaban preferentemente las pictóricas tenían más aciertos que fallos. Brizuela *et al.* (2015a) y Brizuela *et al.* (2015b) analizan el tránsito entre la concepción de la literal como incógnita a la concepción como variable en problemas con cantidades variables y covariación, el estudio se realizó con un grupo de estudiantes, en un caso particular encontraron que la estudiante transitaba de emplear letras cuyo valor asoció a la posición alfabética a su empleo como literales con un valor matemático. Finalmente, Martinez y Brizuela (2006) analizaron la utilidad del uso de tablas para establecer relaciones funcionales, para establecer vínculos en su conocimiento, llegando, incluso a inventar sus propios símbolos.

Los estudios anteriores, muestran que las representaciones externas tienen un papel central en el proceso de comprensión de las ideas algebraicas pues son una herramienta que guía la comprensión cada vez más compleja de los problemas hasta llegar a una representación algebraica; igualmente, en su análisis muestran evidencia de cómo los estudiantes razonan y lo que han aprendido. Sin embargo, estos estudios no han hecho un análisis de las diferencias individuales en las formas de representación y si estas varían en complejidad y forma de empleo. Tampoco, cómo estas están relacionadas con el desempeño en la solución de problemas. Ni han analizado el papel de las representaciones externas en más de un dominio. De forma que queda por conocer cómo diferentes estudiantes representan ideas algebraicas en diferentes dominios y si hay un vínculo entre las representaciones externas para diferentes dominios algebraicos.

Con base en los antecedentes citados, proponemos analizar el papel que tienen las representaciones producidas por los estudiantes (dibujos, marcas, diagramas, operaciones, etc.) en el aprendizaje de ideas algebraicas durante una situación instruccional que integra los dominios algebraicos de aritmética generalizada y pensamiento funcional (Kaput, 2008).

Consideramos que el estudio de las representaciones externas de un grupo completo de estudiantes puede aportar información sobre las diferencias en la comprensión de ideas algebraicas, así como para diseñar propuestas instruccionales para alumnos cuyas experiencias de aprendizaje han sido exclusivamente con la aritmética, situación común en las escuelas mexicanas.

3. OBJETIVO Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El objetivo del estudio es analizar los efectos de un programa para promover el pensamiento algebraico en estudiantes de primaria, basado en la producción de representaciones externas que a su vez son evidencia del aprendizaje de ideas algebraicas en los dominios de aritmética generalizada y pensamiento funcional. En ese sentido, el estudio se dirigió a responder las siguientes preguntas de investigación: ¿cuáles son los efectos de un programa de promoción del pensamiento algebraico sobre el desempeño de en la solución problemas de álgebra temprana?, y ¿cuáles son los efectos de un programa de promoción del pensamiento algebraico sobre la producción de representaciones externas valoradas a partir de las ideas algebraicas representadas?

4. MÉTODO

4.1 Participantes

El muestreo fue por conveniencia. Participó un grupo de tercer grado de primaria del ciclo escolar 2018–2019, integrado por 18 niñas y 9 niños con una edad promedio de 8.5 años. El grupo no contaba con instrucción previa en álgebra o álgebra temprana. Pertenecía a una escuela pública, ubicada en una zona urbana de nivel socioeconómico medio bajo del Estado de México.

Las autoridades de la escuela decidieron el grupo participante, previo conocimiento del protocolo de estudio. Tanto los padres de familia como los estudiantes dieron su consentimiento informado para participar.

Se aseguró la confidencialidad de los participantes procesando la información de forma anónima.

4.2 Diseño del estudio

Para evaluar el impacto del PPPA, el estudio consideró un diseño cuasi experimental intra sujetos con tres momentos: pretest – intervención – post test (Clark-Carter, 2002). La variable independiente fue la participación en el PPPA, y las dos variables dependientes fueron el desempeño algebraico y el nivel representacional. A continuación, se describen.

4.3 Programa integral de promoción del pensamiento algebraico (PPPA)

El PPPA integra problemas de dos dominios del álgebra temprana: aritmética generalizada y pensamiento funcional. El objetivo es promover el pensamiento algebraico en estudiantes de tercer grado de primaria, considera una secuencia de tareas que lleva a la solución de diez problemas, cinco de cada dominio. Estos problemas se presentan en dos cuadernillos de trabajo que el estudiante resuelve en clase (Medrano, 2022).

Los problemas que conforman el PPPA fueron seleccionados de la literatura del álgebra temprana porque su efectividad ya había sido reportada en investigaciones previas y, sirven para que los estudiantes desarrollen ideas y conceptos que son clave para pensar algebraicamente. La tabla 1 enlista las ideas algebraicas que se abordan en cada problema del PPPA y las publicaciones de donde fueron retomados. Los problemas de aritmética generalizada incluyen: igualdad como equivalencia, desigualdad, incógnita y literales con cantidades determinadas e indeterminada. Los problemas de pensamiento funcional incluyen: variable, variación, covariación, correspondencia y generalización con cantidades determinadas e indeterminadas.

Los problemas de aritmética generalizada y pensamiento funcional pueden llegar a abordar las mismas ideas (ver tabla 1), pero lo hacen desde perspectivas complementarias (por ejemplo, la idea de incógnita difiere en su significado dependiendo del problema, puede ser una cantidad determinada o una indeterminada). Al igual que en las investigaciones de donde retomamos los problemas del PPPA, la estrategia instruccional se basó en la producción y análisis de las representaciones externas por parte de los estudiantes. La secuencia inició en el dominio de aritmética generalizada seguido por el dominio de pensamiento funcional.

La enseñanza se basó en el principio de Piaget (1969) de que la reflexión sobre un problema es el resultado de las acciones que se tienen sobre este y en las ideas de Vygotsky (1980) sobre la importancia de que los estudiantes utilicen diferentes herramientas (símbolos y lenguaje) al aprender.

Tabla 1. Ideas algebraicas de los problemas del programa integral en promoción del pensamiento algebraico (PPPA) y el estudio de donde se retomaron. Los problemas se enlistan de acuerdo con el orden en que fueron trabajados

Ideas algebraicas Problemas PPPA	Equivalencia igualdad	Desigualdad	Incógnita	Literales	Variable	Variación	Covariación	Generalización	Cantidad determinada	Cantidad indeterminada	Referencia
Aritmética Generalizada											
1	X	X							X		(Molina, 2011)
2	X	X	X	X					X	X	(Blanton, Stephens, et al., 2015)
3	X	X	X						X	X	(Carraher *et al.*, 2006)
4	X	X	X		X					X	(Schliemann *et al.*, 2011)
5	X	X	X		X	X			X	X	(Schliemann *et al.*, 2011)
Pensamiento Funcional											
6	X	X			X	X	X			X	Elaboración propia
7			X		X	X	X	X	X	X	(Brizuela *et al.*, 2015b)
8					X	X	X	X		X	(Brizuela *et al.*, 2015b)
9					X	X	X	X		X	(Carraher *et al.*, 2008)
10					X	X	X	X		X	(Brizuela y Schliemann, 2004)

Durante la enseñanza, la docente (primer autor y líder del proyecto) utilizó el cuestionamiento como forma de andamiaje para que los estudiantes reflexionaran sobre su entendimiento del problema, y proporcionó apoyos graduados para el análisis y reflexión sobre las ideas y habilidades matemáticas. Las preguntas se centraron en las representaciones externas, los estudiantes explicaron el significado de los elementos que las conformaban, las diferencias y generalidades entre las diferentes representaciones a un mismo problema, y cómo fueron usadas para solucionar las tareas planteadas de cada problema.

En clase, el análisis de cada problema comenzó pidiendo a alguno de los estudiantes que lo leyera en voz alta. Posteriormente, se preguntaba al grupo sobre la información que presenta el problema, sus elementos y el tipo de relación que se establece entre ellos. Por ejemplo, ¿qué dice el problema?, ¿de qué habla?, ¿de quién habla el problema?, ¿qué nos pide que hagamos?, ¿qué nos está preguntando? Los estudiantes eran invitados a responder cada una de las preguntas que se hacían. Ya que identificaban la información relevante del problema, lo resolvían de forma individual en su cuadernillo. Las hojas de trabajo tenían las siguientes instrucciones al inicio de cada problema: "Resuelve los siguientes ejercicios. Realiza los dibujos, anotaciones y operaciones que necesites".

Una vez que los estudiantes solucionaban individualmente los problemas, algunos compartían al grupo tanto sus representaciones como su proceso de solución. Después de poner en el pintarrón diferentes representaciones del mismo problema, la docente dirigía una actividad grupal para identificar los elementos que componían cada una de las representaciones, así como las relaciones entre estos elementos. Para ello, primero se pedía que cada estudiante explicara su representación al grupo y después, la docente cuestionaba al grupo sobre las representaciones, por ejemplo, ¿en qué se parecen los trabajos de sus compañeros?, ¿en qué son diferentes? Para una descripción más detallada, ver Medrano (2022).

4.4 Mediciones de la variable dependiente

4.4.1 Desempeño algebraico

Definimos la variable desempeño algebraico como la capacidad de responder correctamente a los problemas diseñados para promover las mismas ideas algebraicas que el PPPA pretende promover, como son: el significado del signo de igualdad, la noción de equivalencia, incógnita y variable, y el uso de literales.

Para medir el desempeño algebraico se diseñó un instrumento llamado "Evaluación de Habilidades Algebraicas" (EHA). La tabla 2 muestra los diez problemas del EHA, así como sus respectivas ideas algebraicas, estos problemas coinciden en las ideas algebraicas trabajadas durante el PPPA y su contenido algebraico. Ocho problemas fueron retomados de la literatura de álgebra temprana (problemas 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 y 10); un problema se retomó de la literatura en enseñanza del álgebra (problema 4); y uno se elaboró ad-hoc para incluir un problema de composición y descomposición de un conjunto ya que forma parte del currículum mexicano de primaria (problema 5). Los estudiantes respondieron la EHA en el momento pre y en el momento post de la investigación. La suma de problemas resueltos correctamente en cada dominio se empleó para los análisis estadísticos.

4.4.2 Nivel representacional

Esta medida evaluó las representaciones externas elaboradas por los estudiantes ante cada problema presentado en los dos momentos del estudio (pre y post) y en el PPPA. El análisis de las representaciones externas se centró en el uso de las cinco ideas algebraicas de interés, a saber: igualdad, variable, literales, reversibilidad de la expresión matemática e identificación de las relaciones matemáticas.

Para determinar el nivel representacional, primero identificamos diferencias cualitativas en las representaciones externas que los estudiantes produjeron para cada problema considerando las cinco ideas algebraicas de interés. Posteriormente, identificamos regularidades y diferencias en un nivel intra - individual como inter - individual. La codificación resultó en un esquema de cuatro categorías ordinales: "No respuesta", "Explica la relación con operación", "Explica la relación sin operación", e "Introduce literal", con un índice de confiabilidad de $\alpha = .76$. Las cuatro categorías de análisis abarcan toda la gama de representaciones externas que elaboraron los estudiantes en el pre test, PPPA y post test. Las categorías se diferencian entre sí en función del uso y representación de las cinco ideas algebraicas de interés y proveen un referente para analizar la evolución y tránsito entre dichas ideas algebraicas al resolver problemas de álgebra temprana. En las líneas que siguen se describen.

No respuesta (0): El estudiante indica que el problema no se puede realizar, que no sabe qué hacer, o no responde. No logra identificar las relaciones expresadas en el problema. No es posible acceder al significado y empleo que el estudiante da al signo de igualdad o al de las literales. Consideramos que a partir de este tipo de respuesta se puede inferir que los niños enfrentan una carencia o limitación de conocimientos que les impide comprender las relaciones implicadas en los problemas, hecho que les imposibilita actuar sobre el problema.

Explica la relación con operación aritmética (1): La representación externa del estudiante enfatiza la operatividad de las relaciones implicadas en el problema mediante el uso de una operación aritmética. El signo de igualdad se usa en relación con las operaciones matemáticas y las cantidades determinadas, lo que consideramos como un indicador de que el estudiante lo comprende como un operador. No hay evidencia de que entienda la bidireccionalidad de las expresiones matemáticas de este tipo. Los estudiantes emplean dibujos que representan las cantidades enunciadas en el problema o el número mismo. En el caso del dibujo, este puede ser la base del razonamiento que el estudiante usa para explicar las relaciones implicadas en el problema y obtener un resultado numérico, o también para identificar una operación aritmética determinada, como, por ejemplo, los signos de $+$ o $-$. Los estudiantes que elaboran este tipo de representaciones solo usan cantidades determinadas. Cuando el problema no presenta este tipo de cantidades, los estudiantes transforman las relaciones implicadas, aunque difieran del problema, es decir, la operación que realizan puede corresponder a una interpretación correcta o incorrecta de las relaciones implicadas. Las literales no están presentes en esta categoría.

Explica la relación sin operación (2): La representación externa muestra la comprensión y manejo de las relaciones implicadas en el problema con base en su análisis neto. El signo de igualdad se usa como una relación de equivalencia y es evidente el empleo de cantidades determinadas e indeterminadas. Es decir, el signo de igualdad es el elemento matemático que permite que el estudiante establezca una equidad entre ambos miembros de la expresión matemática, asimismo, este uso permite concebir la bidireccionalidad de la expresión. En estas representaciones los estudiantes emplean dibujos para representar los objetos o situaciones de las que se hablan en el problema sin necesariamente hacer evidente las relaciones enunciadas en él. A partir de los dibujos explican sus razonamientos para solucionar el problema, llegando a establecer relaciones aritméticas sin emplear los algoritmos. Los estudiantes operan con cantidades indeterminadas aludiendo que los objetos referidos en el problema pueden tener cualquier valor siempre y cuando se respete la relación expresada. Aunque no usan literales para señalar una incógnita o variable dentro de sus representaciones externas, los razonamientos alrededor de ellas evidencian un acercamiento a dichos conceptos.

Introduce literal (3): La representación externa incorpora literales; el signo de igualdad es usado como una relación de equivalencia entre ambos miembros de la ecuación, la bidireccionalidad de las expresiones matemáticas es aceptada, pero, además, se emplean literales para explicar las relaciones implicadas en el problema y estas pueden aludir tanto a una incógnita como a una variable. En este tipo de representaciones los estudiantes emplean bosquejos para representar los objetos o situaciones de las que se hablan en el problema, incorporando letras; este hecho hace evidentes las relaciones y, en cierta forma, es un acercamiento a la esquematización de una ecuación formal. En esta categoría se trabaja tanto con cantidades determinadas como indeterminadas.

La figura 1 muestra un ejemplo de cada una de las categorías. Las representaciones externas que se ejemplifican fueron realizadas por diferentes estudiantes para las primeras tareas del problema 6 de la EHA que dice:

> Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardó equitativamente en dos cajas pequeñas. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño y explícala.
> Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño.
> Al día siguiente contaron sus conchitas, pero no pudieron encontrar las bolsas. ¿Piensas que Raúl tiene el mismo número de conchitas de mar que Andrés o piensas que uno de ellos tiene más conchitas?" Explica tu respuesta.

Tabla 2. Problemas que conforman la Evaluación de Habilidades Algebraicas, con las ideas algebraica que emplean y la referencia de donde se retomaron. Los problemas se muestran considerando su secuencia de aparición

Ideas algebraicas Problemas EHA	Equivalencia igualdad	Desigualdad	Incógnita	Incluye literales	Variable	Variación	Covariación	Generalización	Cantidad determinada	Cantidad indeterminada	Referencia
Aritmética Generalizada											
1	X	X							X		(Blanton, Stephens, *et al.*, 2015)
2	X	X	X						X		(Molina, 2011)
3	X	X	X	X					X		(Molina, 2011)
4	X	X	X						X		(Schmittau, 2005)
5	X	X	X						X		Elaboración propia
Pensamiento Funcional											
6	X	X			X	X				X	(Schliemann *et al.*, 2011)
7	X	X	X		X	X			X	X	(Brizuela y Schliemann, 2004)
8	X	X			X	X	X		X	X	(Schliemann *et al.*, 2011)
9					X	X	X	X		X	(Brizuela *et al.*, 2015b)
10					X	X	X	X		X	(Carraher *et al.*, 2006)

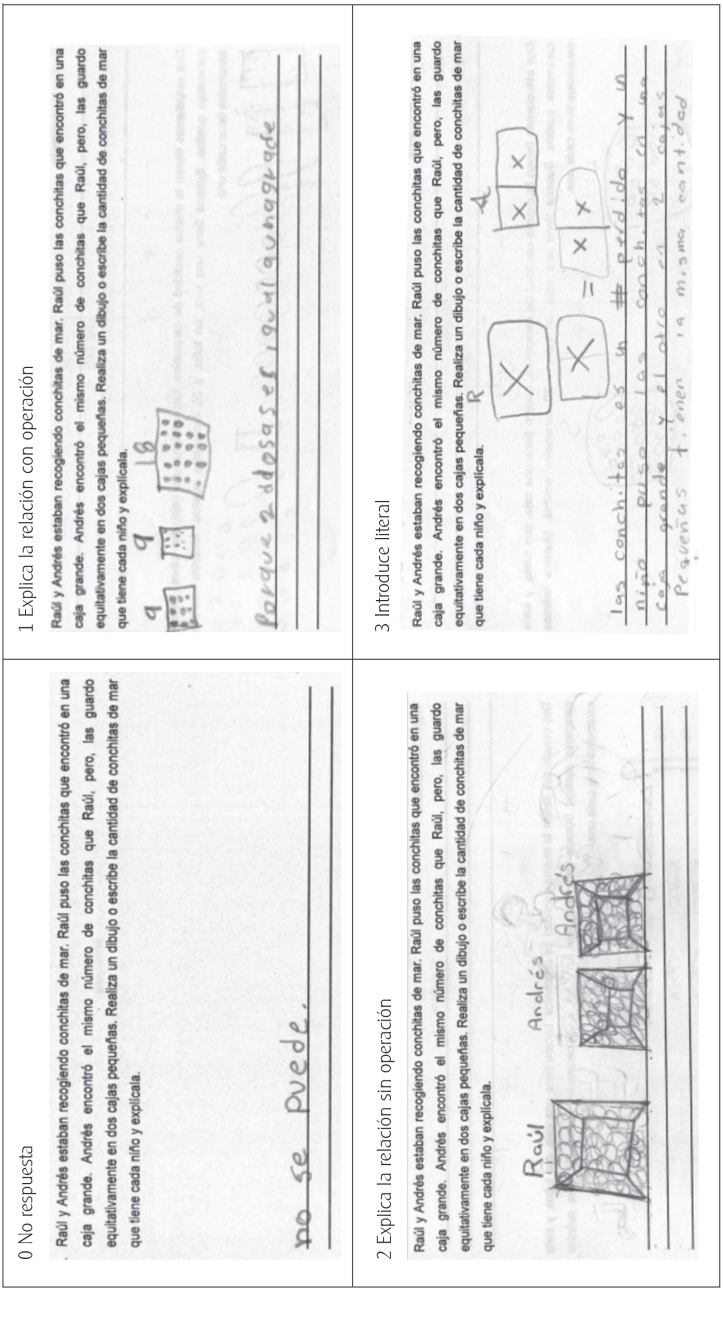

Figura 1. Ejemplos de las categorías de análisis de las representaciones externas que realizaron los estudiantes al solucionar los problemas.

4.4.2.1 Puntajes ponderados del nivel representacional

Para hacer el análisis cuantitativo, asignamos puntajes de 0, 1, 2, y 3 a las categorías "No respuesta", "Explica la relación con operación", "Explica la relación sin operación", e "Introduce literal". En la figura 1 se observa que el puntaje incrementa conforme la representación externa se acerca a una expresión simbólica, la cual, además de incorporar literales, denota nociones de equivalencia, variable y reversibilidad.

Para los análisis estadísticos, se emplearon los puntajes ponderados de cada uno de los participantes. Para la ponderación se calculó el porcentaje de representaciones clasificadas en cada categoría ordinal. Cada porcentaje se multiplicó por el valor asignado a cada categoría (0, 1, 2 o 3). Después, se sumaron los productos obtenidos y se dividieron entre 300, que era el máximo posible que un estudiante podía obtener si producía únicamente representaciones en la categoría más alta "Introduce literales".

El siguiente ejemplo ilustra la ponderación. En los 5 problemas de aritmética generalizada, un estudiante produjo cuatro representaciones categorizadas como "Explica la relación sin operación" (80%) y una representación categorizada como "Introduce literal" (20%). Para calcular el puntaje ponderado de la categoría "Explica la relación sin operación", multiplicamos 80 por 2, que es el puntaje que corresponde a la categoría "Explica la relación sin operación", y 20 por 3, que es el puntaje que corresponde a la categoría "Introduce literal". Se suman los dos productos obtenidos y se divide entre 300 (160 + 60 = 220 entre 300), lo que da el puntaje ponderado de 0.73 para dicho estudiante.

Una de las ventajas de los puntajes ponderados sobre los puntajes crudos es que son más sensibles a la variabilidad y frecuencia de las categorías de análisis. Esta sensibilidad permite una medición más precisa de las diferencias individuales entre participantes.

4.5 Procedimiento

4.5.1 Momento pretest

En la primera sesión de trabajo, la investigadora líder aplicó de manera grupal la evaluación de habilidades algebraicas (EHA). Los estudiantes tuvieron una hora para responderla. Las respuestas y representaciones de los estudiantes conformaron los datos del momento pretest de las variables desempeño algebraico y nivel representacional.

4.5.2 Intervención con el PPPA

La intervención con el PPPA se realizó durante el segundo semestre del ciclo escolar y duró diecisiete sesiones que se llevaron a cabo los lunes, miércoles y viernes de cada semana. La docente trabajó cada uno de los diez problemas que conformaron el PPPA en un promedio de dos sesiones, de sesenta minutos cada una y dirigió las sesiones con dinámicas grupales y trabajo individual. Las representaciones generadas por los estudiantes conformaron los datos para el análisis de cambio en el nivel representacional durante el PPPA.

4.5.3 Momento post test

Al día siguiente de haber concluido el PPPA, la investigadora líder aplicó por segunda ocasión la EHA a todo el grupo. Al igual que en el momento pre, dio a los estudiantes una hora para responderla. Las respuestas y representaciones generadas por los estudiantes conformaron los datos del momento post de las variables desempeño algebraico y nivel representacional.

5. RESULTADOS

De manera general se observó que en los tres momentos del estudio los estudiantes produjeron diferentes tipos de representaciones externas, las cuales denotan diferencias en el desarrollo de su aprendizaje. En la figura 2 se muestra la distribución de las cuatro categorías de análisis, en los momentos pre, PPPA y post en los dos dominios algebraicos aritmética generalizada y pensamiento funcional. Se aprecia el predominio de la categoría “no respuesta” en el momento pre para ambos dominios. Durante el PPPA aparece la categoría “introduce literales” y disminuye la categoría “no respuesta” y se nota que la frecuencia de ocurrencia de las categorías varía en función del dominio algebraico. Finalmente, en el momento post, se advierte una variabilidad en todas las categorías de análisis de las representaciones externas, resaltando que la categoría “explica la relación con operación” tiene una mayor frecuencia en el dominio aritmética generalizada, mientras que la categoría “introduce literales” tiene una mayor frecuencia en el dominio pensamiento funcional.

5.1 Análisis pre-post del desempeño algebraico

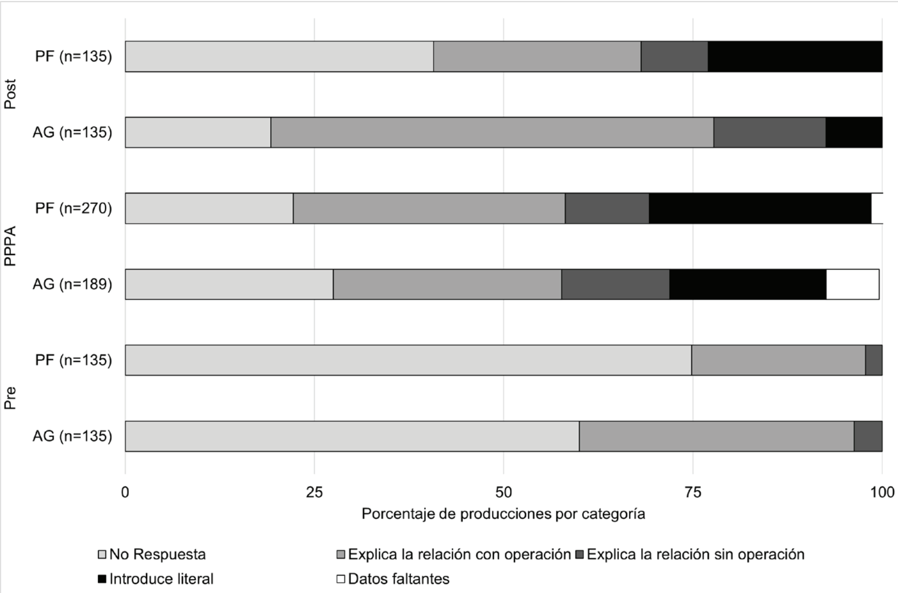

Figura 2. Porcentaje de las cuatro categorías de análisis del nivel representacional. El porcentaje se presenta en función del momento (pretest, PPPA y post test) y del dominio aritmética generalizada (AG) y pensamiento funcional (PF).

Para los análisis estadísticos usamos el software JASP (JASP team, 2020). Primero, presentamos los resultados de desempeño algebraico y después, los resultados de nivel representacional.

Para el análisis estadístico de desempeño algebraico se usó la suma de problemas resueltos correctamente en cada dominio, independientemente del nivel representacional. Analizamos la diferencia pre-post de la variable desempeño algebraico con un modelo de análisis de varianza de medidas repetidas (ANOVA por sus siglas en inglés). Estos modelos sirven para evaluar el efecto de uno o más factores en diseños que, como el de este estudio, son intra-sujetos, lo que quiere decir que las variables se miden en los mismos sujetos en diferentes momentos (Clark-Carter, 2002). Utilizamos un análisis de varianza para medidas repetidas con un diseño 2 x 2, incluyendo los factores intra-sujetos momento (pretest/post test) y dominio (aritmética generalizada/pensamiento funcional).

El efecto principal del factor dominio indicó que los estudiantes obtuvieron un mejor desempeño en los problemas de aritmética generalizada que en los problemas de pensamiento funcional $[F\,(1,26) = 86.667, p < .001, \eta^2 = .30]$. También encontramos efectos principales del factor momento $[F\,(1,26) = 58.602,$ $p < .001,\, \eta^2 = .18]$, indicando que los estudiantes reportaron puntajes más altos de rendimiento en el momento post que en el momento pre. No encontramos efectos de la interacción momento x dominio $[F\,(1, 26) = 1.81, ns]$, lo que indica que los puntajes de aritmética generalizada y pensamiento funcional se comportaron de maneras similares en el momento pre y en el momento post. Estos resultados se ilustran en la figura 3.

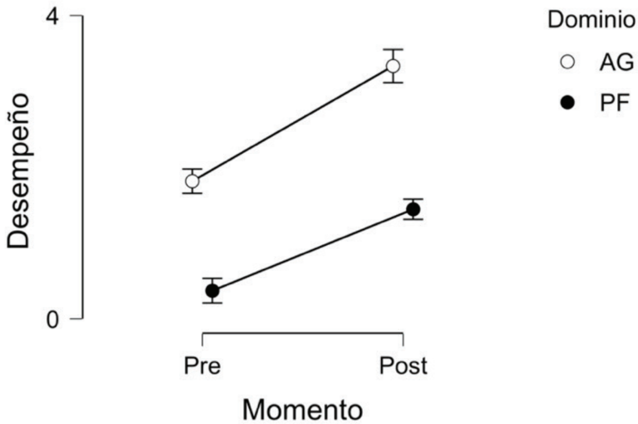

Figura 3. Desempeño algebraico en los dominios aritmética generalizada (AG) y pensamiento funcional (PF), en los momentos pretest y post test.

5.2 Análisis pre-post del nivel representacional

Para el análisis pre-post de la variable nivel representacional usamos un análisis de varianza de medidas repetidas con diseño 2 x 2, incluyendo los factores intra-sujetos momento (pre/post) y dominio (aritmética generalizada/pensamiento funcional) y los puntajes ponderados de nivel representacional como variable dependiente. Encontramos efectos principales del factor momento $[F\,(1, 26)$ $= 60.025, p < .001, \eta^2 = .28]$ y del factor dominio $[F\,(1, 26) = 5.521, p <$ $.05, \eta^2 = .02]$. A pesar de ser significativos, estos efectos no son directamente interpretables ya que estuvieron moderados por la interacción significativa momento x dominio $[F\ (1, 26) = 19.799, p < .001, \eta^2 = .09]$.

Para examinar correctamente las interacciones en un modelo de análisis de varianza, se utilizan análisis post-hoc. Este procedimiento determina un criterio de significancia más exigente que el convencional $p < .05$ para reducir la probabilidad de encontrar falsos positivos cuando se hacen muchos tests al mismo tiempo. En nuestro caso, hicimos los análisis post-hoc con correcciones Bonferroni para evaluar los efectos de los niveles del factor momento dentro de cada nivel del factor dominio. No hubo cambios del pre al post en el dominio aritmética generalizada $(t = 2.30, ns)$, mientras que en el dominio pensamiento funcional; el desempeño en el post fue más alto que en el pre $(t = 8.62, p_{bonf} < .001)$ Estos resultados se ilustran en la figura 4.

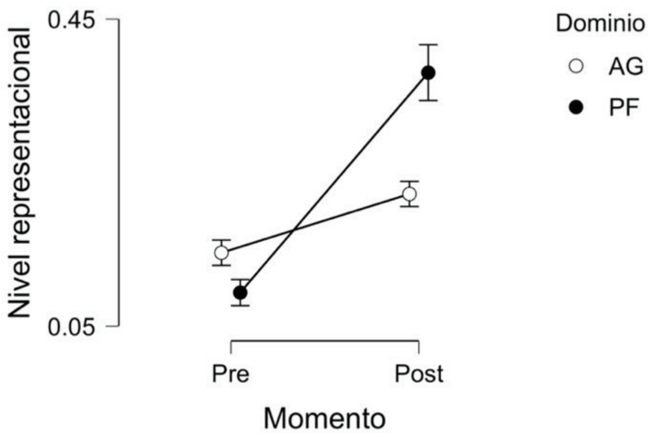

Figura 4. Nivel representacional en los dominios aritmética generalizada (AG) y pensamiento funcional (PF), en los momentos pre y post.

5.3 Cambios en el nivel representacional durante el PPPA

Para observar los cambios en el nivel representacional a lo largo del PPPA, hicimos un análisis de varianza de medidas repetidas. En el modelo de análisis incluimos el número de sesión como único factor intra-sujetos (16 sesiones) y los puntajes crudos de nivel representacional como variable dependiente. Encontramos efectos significativos del factor sesión $[F\ (15, 315)$

$= 5.888, p < .001, \eta 2 = .219]$, lo que nos indicó la presencia de cambios significativos en el nivel representacional de los estudiantes de una sesión a otra. Sin embargo, el análisis de varianza, por sí solo, no puede indicar específicamente en cuáles sesiones se dieron estos cambios. Para esto, hicimos 120 comparaciones entre pares de sesiones, usando correcciones Bonferroni. Con estas correcciones, los cambios en nivel representacional de una sesión a otra tuvieron que ser muy grandes para ser significativos.

La figura 5 muestra la trayectoria del nivel representacional a lo largo de las sesiones del PPPA. El único incremento significativo entre sesiones consecutivas se observó entre la sesión 2 y la sesión 3, $[M_{dif} = 1.227, p < .001]$, indicando que los estudiantes pasaron del nivel 0 "no respuesta" al nivel 1 "explica la relación sin operación". En promedio, a lo largo de las sesiones, los estudiantes se mantuvieron entre el nivel 1 "explica la relación con operación" y el nivel 2 "Explica la relación sin operación". En algunas sesiones hay niveles representacionales que tienden a ser más bajos que en las otras sesiones, por ejemplo, en las sesiones 6, 11, 14 y 15.

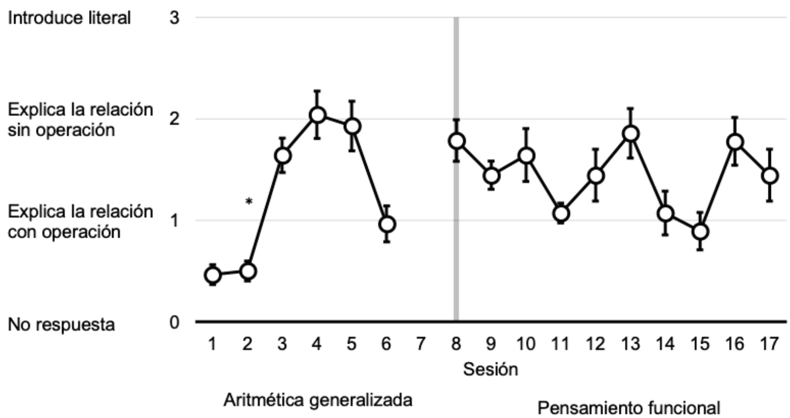

Figura 5. Media del nivel representacional a lo largo de las sesiones del Programa de Promoción del Pensamiento Algebraico (PPPA). Las barras indican el error estándar.

Nota: La sesión 7 fue omitida porque 8/27 estudiantes no asistieron.

5.4 Correlaciones entre desempaño algebraico y nivel representacional

Para analizar la relación entre la producción de representaciones y el desempeño algebraico, hicimos una serie de análisis de correlación de Pearson entre el desempeño algebraico en el momento post y el nivel representacional alcanzado durante el PPPA. Excluimos el nivel representacional del momento pre porque, a diferencia de los puntajes de los momentos PPPA y post, no son atribuibles a los efectos del estudio. Para evaluar la magnitud de los coeficientes de correlación obtenidos, usamos los criterios empíricos de Gignac y Szoradai (2016), que consideran coeficientes $r = .10$, $r = .30$ y $r = .50$ como pequeños, medianos y grandes respectivamente.

En cuanto a la variable desempeño algebraico; la correlación entre el desempeño algebraico post en aritmética generalizada y el desempeño algebraico post en pensamiento funcional fue grande $(r = .517, p < .001)$. Esto indica que los estudiantes que pudieron resolver problemas de aritmética generalizada también resolvieron problemas de pensamiento funcional. Los resultados fueron distintos en cuanto al nivel representacional. El nivel representacional en aritmética generalizada no correlacionó con el nivel representacional en pensamiento funcional $(r = .31, ns)$. Esto indica, por ejemplo, que un estudiante que produjo representaciones sofisticadas al resolver problemas de pensamiento funcional, incluyendo literales, no necesariamente produjo representaciones del mismo nivel al resolver problemas de aritmética generalizada.

La relación entre nivel representacional y desempeño algebraico fue distinta para cada dominio. El nivel representacional en aritmética generalizada no correlacionó con el desempeño en el mismo dominio aritmética generalizada $(r = -.11, ns)$, pero sí tuvo una correlación pequeña con el desempeño en el otro dominio, pensamiento funcional $(r = .275, p < .001)$. Por otro lado, el nivel representacional en pensamiento funcional correlacionó medianamente tanto con el desempeño en el mismo dominio pensamiento funcional $(r = .497, p < .001)$ como en el desempeño en el otro dominio aritmética generalizada $(r = .414, p < .001)$. Este patrón de correlaciones sugiere que la habilidad para producir representaciones externas de ideas algebraicas se asocia con otras habilidades que sirven para resolver problemas en el dominio de pensamiento funcional, pero no en el dominio de aritmética generalizada.

6. DISCUSIÓN

Investigamos los efectos de un programa integral de promoción del pensamiento algebraico temprano sobre el aprendizaje de ideas algebraicas específicas de los dominios de aritmética generalizada y pensamiento funcional tomado como referente las representaciones externas producidas por los estudiantes. Ubicamos la contribución de nuestro estudio principalmente en tres aspectos: efectos de la propuesta psicoeducativa del PPPA; el análisis categórico para evaluar el desarrollo de las representaciones externas; la integración sistemática de los dominios aritmética generalizada y pensamiento funcional en el PPPA.

6.1 Efectos del PPPA

En los apartados que siguen discutimos los resultados en función de nuestras preguntas de investigación.

6.1.1 Efectos en el desempeño algebraico

El modelo ANOVA confirma que el uso de problemas contextualizados (word-problems) es una estrategia instruccional efectiva para introducir ideas algebraicas de los dominios aritmética generalizada y pensamiento funcional. Los estudiantes desarrollan habilidades como, por ejemplo, el cálculo, el manejo de diferentes representaciones simbólicas (palabras, los dibujos y los números), y la identificación efectiva de relaciones entre cantidades determinadas e indeterminadas. Además, la efectividad de los problemas que seleccionamos para el PPPA dependió directamente de desarrollar la instrucción poniendo al centro el proceso de andamiaje mediante el cuestionamiento y la discusión grupal de las representaciones externas producidas por los estudiantes.

El modelo ANOVA también indicó que los estudiantes obtuvieron mejores resultados de desempeño en aritmética generalizada que en pensamiento funcional. Nuestra interpretación es que los estudiantes transfirieron sus conocimientos aritméticos previos al dominio aritmética generalizada con lo que lograron un mejor desempeño. Consideramos que esto se debe a que algunas de las estrategias que los estudiantes aprenden en sus clases regulares de aritmética les fueron útiles para trabajar con problemas con incógnitas en un elemento de la ecuación, p. ej., [3 + $\square$ = 12] o para solucionar problemas que implican una combinación como el problema 2 del PPPA: “Pablo tiene cierta cantidad de chocolates de cereza y 18 chocolates de almendra. Juntos son 34 chocolates, ¿cuántos chocolates son de cereza?". Sin embargo, hay que hacer notar que no implican necesariamente la comprensión de las relaciones de reversibilidad y equivalencia por ello uno de los planteamientos instruccionales del PPPA es proporcionar andamios que permitan a los estudiantes comprender la relación entre sus estrategias aritméticas y las ideas algebraicas.

De esta manera, la discusión y reflexión sobre su representación externa de los estudiantes los lleva del pensamiento aritmético a una zona de desarrollo próximo al pensamiento algebraico (Vygotsky, 1980). En esta zona pueden construir ideas como la reversibilidad entre operaciones y el signo de igualdad como equivalencia para resolver problemas como el problema 2 del PPPA. Por ejemplo, invirtiendo la estructura de problema transformando la relación de adición del problema [$\square$ + 18 = 34], a una substracción [34 −8 = c] para encontrar el valor faltante. Que el estudiante reconozca la relación entre su estrategia y las ideas algebraicas de reversibilidad y equivalencia es importante para dar un sentido algebraico a lo que hace.

Finalmente, nuestra interpretación de la correlación positiva fuerte entre los desempeños de los dominios aritmética generalizada y pensamiento funcional, sugiere que la experiencia en el dominio aritmético generalizada proporciona un andamio para transitar al dominio del pensamiento funcional. Siguiendo el ejemplo previo, aquellos estudiantes que construyeron la idea de reversibilidad entre las operaciones al resolver problemas como el problema 2 del PPPA, pudieron haber aplicado esa misma idea al trabajar con las primeras partes del problema 1 del dominio pensamiento funcional del PPPA: "¿Cuántos ojos hay en dos perros, en cinco perros y en diez perros?".

6.1.2 Efectos en el nivel representacional

Los resultados son coincidentes con las ideas de autores como Karmiloff-Smith (1990), Flores Macías (2003) y Martinez y Brizuela (2006), quienes explican que la producción de representaciones externas juega un rol funcional para la comprensión de ideas en el aprendizaje matemático pues incide sobre el proceso de representación interno.

El análisis de los cambios en el nivel representacional a lo largo del PPPA indicó progresos rápidos y estables. Los estudiantes solo necesitaron tres sesiones para pasar de una habilidad casi nula para producir representaciones externas de problemas algebraicos, evidenciada en la alta frecuencia de la categoría "no respuesta", a un desempeño en las categorías 1 "explica la relación con una operación aritmética" y 2 "explica la relación sin operación". No obstante algunas oscilaciones, los estudiantes tienden a mostrar un desempeño estable en el nivel representacional alcanzado. Esto puede ser un indicador de que el estudiante identifica coincidencias en las ideas implicadas en la solución de problemas y establece generalizaciones entre ellos. Enseguida explicamos algunas implicaciones de este desarrollo.

El modelo ANOVA en el nivel representacional reveló efectos diferenciados por dominio, ya que hubo efectos positivos en pensamiento funcional, pero no en aritmética generalizada. Nuestra interpretación de este resultado se basa en los efectos del PPPA sobre el desempeño de los estudiantes, específicamente en el patrón de correlaciones entre el desempeño y el nivel representacional; al parecer, si no existen referentes aritméticos que interfieran, la creación de representaciones externas se facilita y, aunque en principio sean muy rudimentarias en el proceso de interacción con los problemas se vuelven más complejas (Blanton *et al.*, 2015).

En la sección anterior propusimos que el desempeño en aritmética generalizada fue mejor que en pensamiento funcional porque los problemas de aritmética generalizada estaban más cerca de los conocimientos previos de los estudiantes. A esta premisa agregamos el hecho de que, las características de ciertos problemas del dominio aritmética generalizada inducen la producción de representaciones externas menos sofisticadas, por ejemplo, aquellas que involucran una operación aritmética, ya sea por la presencia de cantidades determinadas o por las mismas relaciones implicadas. Consideramos que, por estas razones los problemas de aritmética generalizada no impulsan de manera general la producción de representaciones sofisticadas, por ejemplo, aquellas que involucran literales. En cambio, podemos decir que los problemas de pensamiento funcional, por las relaciones que presentan, indujeron procesos profundos de cambio conceptual pues no se contaba con referentes aritméticos para resolverlos. Por tanto, los estudiantes necesitaron producir representaciones externas más sofisticadas para resolverlos (Pittalis *et al.*, 2020).

Nuestra interpretación de que el nivel representacional de los estudiantes haya influido en la capacidad de resolver problemas de aritmética generalizada, pero no en la capacidad de resolver problemas de pensamiento funcional es consistente con el patrón de correlaciones entre desempeño y nivel representacional. El desempeño en aritmética generalizada no correlacionó ni con el nivel representacional del mismo dominio ni con el nivel representacional de pensamiento funcional. Es decir, el desempeño en aritmética generalizada fue independiente del nivel representacional de los estudiantes. En cambio, el desempeño en pensamiento funcional correlacionó fuertemente tanto con el nivel representacional del mismo dominio, como con el nivel representacional de aritmética generalizada.

6.1.3 Sobre las diferencias en la producción de representaciones

No todos los estudiantes lograron conceptuar de la misma manera las ideas clave que el PPPA busca desarrollar, tales como variables, igualdad como equivalencia, literales, reversibilidad e identificación de las relaciones implicadas en el problema. Este hecho nos permite señalar que identificar las relaciones matemáticas, representarlas externamente y solucionar el problema, son acciones muy diferentes que llevan a poner en juego ideas algebraicas relacionadas pero distintas. El estudiante puede identificar las relaciones del problema, calcular una solución, pero no sabe cómo representarla con un dibujo o una operación.

La producción de representaciones externas con letras (a manera de literales) parece ser una buena herramienta en la comprensión de la dinámica de las relaciones entre variables. Entre más ajena sea la posibilidad de solucionar el problema con los antecedentes aritméticos del estudiante, más útil es una representación externa que recurre a letras para explicar relaciones, como ocurre en el dominio del pensamiento funcional y las cantidades covariantes (Pinto y Cañadas, 2021).

Con base en lo anterior consideramos que la producción de representaciones externas muestra un desarrollo gradual del proceso de representación matemático (i.e. aritmético o algebraico), desarrollo que debe ser considerado y valorado por sí mismo, sin alinear dicho proceso con los criterios de desempeño convencionales. Por esta razón, una de nuestras conclusiones es que no solo vale la pena, sino que es necesario hacer más investigaciones que se den a la tarea de "leer" la producción de representaciones externas de los estudiantes, ya que, como lo sugieren nuestros hallazgos, los procesos de representación pueden jugar un papel esencial dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de ideas algebraicas.

Estos resultados nos permiten sostener que, más allá de saber que la producción de representaciones externas favorece la solución de problemas algebraicos (lleve o no a una respuesta correcta), como ya se ha argumentado (Brizuela *et al.*, 2015a; Brizuela y Earnest, 2008; Carraher *et al.*, 2006; Merino *et al.*, 2013), es pertinente conocer su papel en diferentes dominios para crear situaciones de enseñanza en el aula, así como considerar las diferencias cualitativas de las representaciones externas en función de los problemas algebraicos. Lo anterior se evidencia en las correlaciones obtenidas, por ejemplo, la categoría "explica la relación con operación" resultó ser más efectiva para el dominio aritmética generalizada; mientras que, la categoría "introduce literal" parece favorecer el desempeño correcto de problemas en ambos dominios algebraicos.

6.1.4 Implicaciones para el trabajo docente

Los resultados presentados permiten señalar que la integración secuenciada de los dominios de aritmética generalizada y pensamiento funcional, como se hizo en el PPPA, es un acercamiento viable para la enseñanza de ideas algebraicas en estudiantes de tercer grado de primaria. Esta secuencia instruccional puede ser retomada y/o modificada por los docentes y puesta en marcha dentro de su salón de clases, ya que los datos muestran que es sensible a diferencias individuales y diferentes niveles de pensamiento.

Si bien la propuesta está accesible a cualquier docente (Medrano, 2022), los docentes necesitan trascender la idea de que la primaria es para aprender aritmética basada en estrategias como la repetición y el ensayo y error o encontrar el resultado correcto, además de ahondar en su propio conocimiento algebraico. A partir de este cambio, creemos que lo siguiente es apropiarse de un referente para comprender las producciones y diferentes formas de pensamiento de cada uno de sus estudiantes.

Quizá el eje algebraico *AG* sea un buen punto de partida pues guarda mayor relación con las tareas prototípicas de la enseñanza de la aritmética en la primaria. Lo que cambia es el enfoque, el análisis y representación que se realiza del problema y con ello la comprensión de las relaciones implicadas en los problemas. A diferencia de lo que pasa con las situaciones del eje algebraico *AG*, los problemas que se engloban en el eje algebraico *PF* requiere formas de razonamientos distintas, tanto para el profesor como para los estudiantes.

No obstante, que sea relativamente más sencillo incursionar en la enseñanza del álgebra temprana con eje algebraico *AG*, se recomienda tener siempre presente qué formas de pensamiento o conocimientos son más accesibles a los estudiantes y de qué manera sirven para promover su desarrollo en el pensamiento algebraico.

7. CONCLUSIONES

Nuestro trabajo se adhiere a las iniciativas que pretenden promover ideas algebraicas desde los primeros años de educación matemática formal. Los resultados indican que el dominio de aritmética generalizada favorece que el estudiante cuestione sus conocimientos aritméticos y los transcienda para la comprensión de conceptos algebraicos más sofisticados como los del pensamiento funcional. También indican que la construcción de representaciones idiosincráticas involucra procesos cognitivos que pueden jugar un papel central en el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que cada tipo de representación externa contiene conocimientos cada vez más complejos. Los datos sugieren que la producción de representaciones espontáneas son parte necesaria para que los estudiantes transiten a la producción y comprensión de las representaciones externas formales. Así mismo, las representaciones del estudiante aportan evidencia para la comprensión de la trayectoria que siguen los estudiantes en el proceso de comprender ideas algebraicas.

Específicamente, brindan información sobre las diferencias al interior de las representaciones externas, así como, su papel diferencial en el proceso del desarrollo de ideas algebraicas. Adicionalmente, estos resultados resaltan la idea de que la integración intencional de dos dominios algebraicos, aunada al uso de una propuesta instruccional basada en el andamiaje y la discusión centrada en la producción de representaciones externas, podría: a) recuperar los conocimientos previos de los estudiantes que han tenido una enseñanza enfocada en la aritmética; b) generar andamiajes exitosos entre el dominio aritmética generalizada y pensamiento funcional; y c) proporcionar un contexto útil, mediante la solución de problemas (word-problems), para promover la producción de representaciones, razonar y justificar sobre los elementos contenidos en las representaciones externas y generalizar con relaciones y cantidades (Blanton y Kaput, 2011).

Mediante el sistema de categorización del nivel representacional, nuestro estudio profundiza en el conocimiento que se tiene sobre la producción de representaciones externas de diferente naturaleza en el área del desarrollo del pensamiento algebraico. El nivel representacional permite valorar de diferente manera las ideas algebraicas de uso del signo de igualdad, variable, literales, reversibilidad de la expresión matemática e identificación de las relaciones. Mostrando, incluso, que las representaciones externas influyen de forma diferencial en el desempeño de los estudiantes al solucionar problemas de dos dominios algebraicos.

Futuras investigaciones deberán orientarse a analizar la viabilidad de que docentes se apropien de la propuesta del PPPA y de la categorización de las representaciones externas como una forma de dar seguimiento al aprendizaje de sus estudiantes. El presente estudio tiene la limitante de que la líder del proyecto (conocedora del tema) fungió como docente.

Finalmente, destacamos la importancia de permitir la libre producción de representaciones externas al trabajar problemas de álgebra temprana porque así se permitiría que los estudiantes utilicen diferentes procedimientos, aspecto que, según los datos reportados es parte necesaria para que los estudiantes transiten a la producción y comprensión de las representaciones externas formales. Este punto hace evidente mirar al docente como una parte fundamental dentro del proceso de cambio en la enseñanza y el aprendizaje de ideas algebraicas; y evidencia la necesidad de que cuente con espacios de formación en los que analice y reflexione sobre sus conocimientos matemáticos e ideas sobre lo que para él significa enseñar álgebra temprana.

AGRADECIMIENTOS

La primera autora agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de México el apoyo otorgado para la presente investigación mediante la beca nacional otorgada al becario con el número de registro 478960.

REFERENCIAS

Blanton, M. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Educa*tion, *36*(5), 412–446. https://doi.org/10.2307/30034944

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M., y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5–23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Angela G, Isler, I., y Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Brizuela, B. M., Blanton, M., Murphy, G. A., Newman-Owens, A., y Sawrey, K. (2015 a). Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicologia*, *36*(1), 138–165. https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., y Murphy, G. A. (2015 b). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 34–63. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939

Brizuela, B., y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the "best deal" problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273–302). LEA.

Brizuela, B., y Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 33–40.

Cai, J., y Knuth, E. J. (Eds.). (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Carraher, D. W., Martinez, M., y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 3–22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87–115. https://doi.org/10.2307/30034843

Clark-Carter, D. (2002). *Investigación cuantitativa en psicología: del diseño experimental al reporte de investigación*. Oxford University Press.

Cox, R., y Brna, P. (1994). Supporting the use of external representations in problem solving: The need for flexible learning environments. *Journal of Artificial Intelligence in Education*, *6*(2–3), 239–302.

Flores Macías, R. (2003). *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación* [Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Aguascalientes]. https://www.researchgate.net/publication/299508269

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Finelli, R., Courey, S. J., y Hamlett, C. L. (2004). Expanding schema-based transfer instruction to help third graders solve real-life mathematical problems. *American Educational Research Journal*, *41*(2), 419–445. https://doi.org/10.3102/00028312041002419

Fuchs, L. S., Powell, S. R., Cirino, P. T., Schumacher, R. F., Marrin, S., Hamlett, C. L., Fuchs, D., Compton, D. L., y Changas, P. C. (2014). Does calculation or word-problem instruction provide a stronger route to prealgebraic knowledge? *Journal of Educational Psychology*, *106*(4), 990–1006. https://doi.org/10.1037/a0036793

Fuchs, L. S., Zumeta, R. O., Schumacher, R. F., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Hamlett, C. L., y Fuchs, D. (2010). The effects of schema-broadening instruction on second graders' word-problem performance and their ability to represent word problems with algebraic equations: A randomized control study. *Elementary School Journal*, *110*(4), 440–463. https://doi.org/10.1086/651191

Fujii, T., y Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, y V. Jonker (Eds.), *12th ICMI Study Conference* (vol. 1, pp. 258–264). The University of Melbourne.

JASP Team (2020). *JASP* (Version 0.14.1)[Computer software]. JASP Team.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). National Council of Teachers of Mathematics.

Karmiloff-Smith, A. (1990). Constraints on representational change: Evidence from children's drawing. *Cognition*, *34*(1), 57–83. https://doi.org/10.1016/0010-0277(90)90031-E

Kieran, C, Pang, J., Schifter, D., y Fong, Ng, S. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390–419). Macmillan.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kosslyn, S. M., Heldmeyer, K. H., y Locklear, E. P. (1977). Children's drawings as data about internal representations. *Journal of Experimental Child Psychology*, *23*(2), 191–211. https://doi.org/10.1016/0022-0965(77)90099-6

Martinez, M., y Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(4), 285–298. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.11.003

Medrano, A. (2022). Promoción del pensamiento algebraico en estudiantes de primaria [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad Nacional Autónoma de México.

Merino, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24–40.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135–156. https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. En M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, y J. P. Ponte, (Eds.), *EIEM 2011 - Ensino e aprendizagem da álgebra. Actas do Encontro de investigação em Educação Matemática* (pp. 27–51). EIEM.

Molina, M., y Castro, E. (2021). Third grade students' use of relational thinking. *Mathematics*, *9*(2), 1–15. https://doi.org/10.3390/math9020187

Piaget, J. (1969) *Psicología y Pedagogía*. Ariel.

Pinto, E., y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 113–134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: the Relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *51*(5), 631–674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., y Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética* (R. Biekofsky, Trad.) (1st ed.). Paidós. (Obra original publicada en 2007).

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., y Jones, W. (1998). *Solving algebra problems before algebra instruction*. National Science Foundation.

Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking A vygotskian perspective. *ZDM Mathematics Education*, *37*(1), 16–22. https://doi.org/10.1007/BF02655893

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Vergnaud, G., y M. Récopé (2000). De Revault d'allonnes à une théorie du schème aujourd'hui. *Psychologie Française*, *45*(1), 35–50.

Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Xin, Y. P. (2008). The effect of schema-based instruction in solving mathematics word problems: An emphasis on prealgebraic conceptualization of multiplicative relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(5), 526–551. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.5.0526

Autor de correspondencia

Ana Medrano

Dirección postal: Suchil #109, B-302. El Rosario, Coyoacán. C.P. 04380. México, CDMX.
medrano.unam@gmail.com