



Educación matemática

ISSN: 0187-8298

ISSN: 2448-8089

Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A.C.; Universidad de Guadalajara

Gomes, Paula; Quaresma, Marisa; Ponte, João Pedro da
Conhecimento sobre tarefas e sobre os alunos num estudo de aula com professoras de matemática
Educación matemática, vol. 35, núm. 1, 2023, pp. 113-141
Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A.C.; Universidad de Guadalajara

DOI: <https://doi.org/10.24844/EM3501.05>

Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40576229006>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais informações do artigo
- Site da revista em [redalyc.org](https://www.redalyc.org)

UDEM [redalyc.org](https://www.redalyc.org)

Sistema de Informação Científica Redalyc
Rede de Revistas Científicas da América Latina e do Caribe, Espanha e Portugal
Sem fins lucrativos acadêmica projeto, desenvolvido no âmbito da iniciativa
acesso aberto

Conhecimento sobre tarefas e sobre os alunos num estudo de aula com professoras de matemática

Knowledge about tasks and students in a lesson study with mathematics teachers

Paula Gomes,¹ Marisa Quaresma,² João Pedro da Ponte³

Resumo. A partir de um estudo de aula baseado numa abordagem exploratória, analisamos o desenvolvimento do conhecimento de professoras de Matemática do ensino secundário sobre a elaboração de tarefas e a antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos, no planeamento da aula e na reflexão sobre o trabalho dos alunos. A investigação é qualitativa/interpretativa. Os dados foram recolhidos por observação participante (com diário de bordo e gravações áudio/vídeo), recolha documental e entrevista. Os resultados sugerem que, nas sessões de planeamento, as discussões sobre a redação e sequenciação das questões da tarefa, influenciadas pela antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos, criaram oportunidades para as professoras desenvolverem o seu conhecimento sobre a elaboração de tarefas, as estratégias que os alunos podem seguir e formas de os apoiar. Desenvolveram também o seu conhecimento sobre a condução da realização de tarefas exploratórias,

Fecha de recepción: 10 de julio de 2020. **Fecha de aceptación:** 8 de julio de 2021.

¹ Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, paula.gomes@campus.ul.pt, orcid.org/0000-0002-8270-6618.

² Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, mq@campus.ul.pt, orcid.org/0000-0002-0861-6016.

³ Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, jpponte@ie.ulisboa.pt, orcid.org/0000-0001-6203-7616.

nomeadamente a seleção e sequenciação de respostas para a discussão coletiva. Nas reflexões pós-aula, ampliaram ainda o seu conhecimento sobre os alunos e a sua aprendizagem, discutindo estratégias e dificuldades não antecipadas e procurando razões para essas dificuldades.

Palavras-chave: *Tarefa exploratória, conhecimento didático, estudo de aula, ensino secundário.*

Abstract: From a lesson study based on an exploratory approach, we analyze the development of secondary school mathematics teachers' knowledge on task design and anticipating students' strategies and difficulties, in the lesson planning and reflection on students' work. The research is qualitative/interpretative. Data were collected by participant observation (with researcher's journal and audio/video recordings), document collection, and interview. The results suggest that in the planning sessions, discussions about the wording and ordering of questions in the task, influenced by anticipation of students' solving strategies and difficulties, created opportunities for teachers to develop their knowledge about task design, the strategies students might follow and ways to support them. The teachers developed their knowledge of how to teach exploratory tasks, namely the selection and sequencing of students' answers for the whole-class discussion. In the post-lesson reflections, they expanded their knowledge about students and their learning by discussing strategies and unanticipated difficulties and seeking for reasons for those difficulties.

Keywords: *Exploratory task; didactic knowledge; lesson study; secondary school.*

1. INTRODUÇÃO

Contrastando com outros processos de desenvolvimento profissional centrados no trabalho do professor, o foco do estudo de aula está nas aprendizagens dos alunos. Um estudo de aula envolve trabalho colaborativo de um grupo de professores no planeamento, observação e reflexão sobre uma aula, a aula de investigação. O planeamento detalhado dessa aula é uma parte importante do estudo de aula e inclui a escolha das tarefas a propor aos alunos (Doig *et al.*, 2011; Fujii, 2018, 2019), centrais na aprendizagem da Matemática. O professor

tem um papel fundamental na seleção das tarefas, mas essa seleção e a condução da sua realização colocam-lhe diversos desafios (Barber, 2018; Chapman, 2013), nomeadamente, a identificação de tarefas que os alunos possam resolver usando diferentes representações e diferentes estratégias, que permitam conexões entre diferentes conceitos e procedimentos (Barber, 2018; Ponte *et al.*, 2019) e que sejam pontos de partida adequados para a introdução de novos conceitos e procedimentos (Ponte, 2005).

A elaboração da tarefa é influenciada pela antecipação de estratégias de resolução e de dificuldades dos alunos, outro aspeto que integra o planeamento da aula (Fujii, 2015, 2019). Por um lado, antecipar as possíveis estratégias e dificuldades dos alunos ajuda o professor a selecionar as questões a colocar na tarefa e a pensar na forma de as redigir. Por outro lado, ajuda-o a pensar em formas de apoiar os alunos durante a aula, sem diminuir o grau de desafio da tarefa. No entanto, vários estudos referem que antecipar de uma forma aprofundada as representações e estratégias que os alunos podem usar para resolver uma tarefa reveste-se de assinalável complexidade para os professores (e.g., Groves *et al.*, 2016; Lee y Takahashi, 2011).

O conhecimento sobre a elaboração de tarefas e a capacidade de antecipar possíveis estratégias e dificuldades dos alunos integram o conhecimento didático do professor (Ponte, 2012) e podem ser desenvolvidos com a sua participação em estudos de aula (e.g., Barber, 2018; Cajkler *et al.*, 2015; Ni Shuilleabhain y Seery, 2017; Ponte *et al.*, 2018; Quaresma y Ponte, 2017; Verhoef *et al.*, 2015). No entanto, a nível internacional a maioria dos trabalhos envolvendo professores em serviço, refere-se a estudos de aula com professores do ensino básico. O ensino da Matemática a nível secundário (15-18 anos) é perspectivado de modo bem distinto em termos curriculares, pois alunos têm já outro desenvolvimento matemático e outros interesses (Speer *et al.*, 2015) e a prática dos professores assume contornos próprios (Verhoef *et al.*, 2014). Por isso, é importante verificar até que ponto o conhecimento dos professores deste nível de ensino sobre estas questões pode ser desenvolvido através de estudos de aula. Assim, esta investigação tem por objetivo analisar o desenvolvimento do conhecimento sobre elaboração de tarefas e a antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos, nas sessões de planeamento e de reflexão sobre o trabalho dos alunos na aula, por parte de professoras do ensino secundário, enquanto participantes num estudo de aula inspirado numa abordagem exploratória do ensino da Matemática.

2. O ESTUDO DE AULA

Num estudo de aula, um grupo de professores identifica um problema de aprendizagem dos alunos, trabalha colaborativamente para planejar detalhadamente uma aula de investigação que possa ajudar a ultrapassar esse problema e reflete sobre as aprendizagens dos alunos nessa aula. Este trabalho, centrado no aluno, diferencia o estudo de aula de outros processos de desenvolvimento profissional que se centram no trabalho do professor (Cajkler *et al.*, 2015).

Uma parte das sessões de planeamento é dedicada à elaboração da tarefa a propor aos alunos durante a aula de investigação. Os professores antecipam estratégias e dificuldades dos alunos, tendo em conta a forma como eles podem responder e as representações que podem usar, e pensam em formas de os ajudar a ultrapassar essas dificuldades. Esse trabalho influencia o planeamento da aula e a forma como os professores redigem as questões da tarefa e permite-lhes ver a Matemática através dos olhos dos alunos (Fujii, 2018).

A aula é lecionada por um dos professores, enquanto os outros observam, focando-se no trabalho dos alunos. Essa observação, em tempo real, é outra característica que distingue o estudo de aula de outros processos formativos e proporciona ao professor uma oportunidade de desenvolvimento do conhecimento profissional (Murata, 2011). A discussão entre os participantes, depois da aula, baseada nas observações do trabalho dos alunos, permite-lhes partilhar e refletir sobre esse trabalho, procurando fazer inferências sobre as aprendizagens dos alunos.

Num estudo de aula, a tarefa proposta assume um lugar central durante a aula de investigação, quando os professores observam o trabalho dos alunos e o comparam com o que planearam, e depois da aula quando discutem o trabalho e as aprendizagens dos alunos a partir das suas observações (Fujii, 2015). Várias investigações sobre estudos de aula mencionam alterações no plano de aula ou no enunciado da tarefa, resultantes da observação do trabalho dos alunos e da discussão pós-aula. Por exemplo, Adler e Alshwaikh (2019) referem que os professores alteraram uma tarefa usada numa aula de investigação e que tinha sido inicialmente proposta pelos formadores, tendo em conta as respostas dos seus alunos. Na segunda versão da tarefa, tiveram o cuidado de não introduzir uma grande diversidade de questões, para não se afastarem do objetivo da aula. Noutro trabalho, Verhoef *et al.* (2015) referem que, depois de observarem e refletirem sobre as aulas, os professores reformularam as tarefas selecionadas, tendo em conta o objetivo da aula e as aprendizagens que os

alunos deveriam realizar, promovendo trabalho colaborativo entre alunos e incluindo breves discussões coletivas no início das aulas.

3. TAREFAS E PLANIFICAÇÃO

Uma tarefa é um ponto de partida e o objeto para a atividade do aluno num determinado contexto (Christiansen y Walther, 1986), sendo a escolha das tarefas uma parte importante do planeamento da aula de investigação (Doig *et al.*, 2011; Fujii, 2018). Se a tarefa for bem escolhida, potencia a discussão de ideias matemáticas importantes (Fujii, 2018) e a aprendizagem dos alunos (Brodie, 2010; Christiansen y Walther, 1986).

3.1. TAREFAS DE NATUREZA EXPLORATÓRIA

Tanto a atividade do aluno como o papel do professor durante a aula estão relacionados com a abordagem curricular subjacente, o que influencia a seleção e elaboração da tarefa e todo o trabalho dos professores, desde o planeamento à reflexão pós-aula. À semelhança de outros estudos de aula já realizados em Portugal com professores em serviço (e.g., Quaresma y Ponte, 2017), no estudo de aula a que se refere este artigo, as professoras procuraram seguir uma abordagem de ensino-aprendizagem exploratória (Ponte, 2005). Nessa abordagem são valorizados os momentos de reflexão e discussão com toda a turma, com base no trabalho desenvolvido pelos alunos, “como momentos de excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas” (Ponte, 2005, p. 16).

Sobre as tarefas que são propostas aos alunos, Ponte (2005) refere que elas podem ser analisadas por duas dimensões: a estrutura (aberta ou fechada) e o grau de desafio (reduzido ou elevado). No ensino exploratório, predomina o trabalho dos alunos em tarefas de exploração, que o autor define como tarefas relativamente abertas e acessíveis, para as quais o aluno não tem uma solução imediata e em que pode começar a trabalhar a partir do seu conhecimento prévio. O aluno pode resolver essas tarefas usando diversas representações matemáticas e seguindo várias estratégias (Ponte *et al.*, 2018), que depois tem oportunidade de apresentar e discutir com os seus colegas.

Várias investigações (Ponte *et al.*, 2015; Quaresma y Ponte, 2017) referem que quando os professores propõem tarefas de cunho exploratório, os alunos

conseguem ser autônomos na sua resolução e envolvem-se mais no processo de aprendizagem, resultando em aprendizagens mais significativas. Além disso, estas investigações fazem referência ao estudo de aula como uma oportunidade para os professores planearem e realizarem aulas exploratórias, permitindo-lhes repensar as suas práticas, o seu papel e o papel do aluno em sala de aula.

3.2. TRABALHO DO PROFESSOR NA ELABORAÇÃO DE TAREFAS

O professor tem um papel fundamental na seleção das tarefas (Barber, 2018; Chapman, 2013) e deve planear cuidadosamente o modo como vai conduzir a aula e o trabalho dos alunos, pois a aprendizagem é condicionada pela forma como as tarefas são interpretadas e realizadas na aula (Chapman, 2013). O complexo trabalho dos professores na elaboração e planeamento das tarefas que vão propor aos alunos vai muito além do que é visível em sala de aula, como se da parte submersa de um iceberg se tratasse. Uma parte desse trabalho é a elaboração do enunciado da tarefa, que pode ser criado pelos professores ou adaptado de manuais escolares ou de outros materiais curriculares. Além de propor tarefas para promover a aprendizagem dos alunos sobre um determinado conteúdo (Ponte y Quaresma, 2016), os professores podem apresentar tarefas para os levar a aplicar conhecimentos que já adquiriram, ou para verificar se dominam ou não certos conhecimentos (Ponte *et al.*, 2015).

As tarefas seleccionadas pelos professores devem poder ser resolvidas recorrendo a diversas representações matemáticas e seguindo diversas estratégias (Doig *et al.*, 2011; Fujii, 2019; Stein *et al.*, 2008), e devem permitir estabelecer conexões entre diferentes conceitos e procedimentos (Barber, 2018). Vários autores referem que é fundamental que as tarefas sejam desafiantes (e.g., Quaresma y Ponte, 2016; Stein *et al.*, 2008; Stein y Smith, 2009), sendo muito importante que o grau de desafio seja adequado aos alunos a quem a tarefa se destina. Por isso, quando elaboram as tarefas, os professores precisam de atender aos conhecimentos prévios dos alunos (Fujii, 2016, 2018; Stein y Smith, 2009), pois a mesma questão pode ser um simples exercício, se eles dispõem de um processo imediato para a resolver, e, para outros, pode ser um difícil problema, o que pode desmotivá-los e desinteressá-los (Brodie, 2010; Jaworski y Potari, 2009).

Antes de propor as tarefas aos alunos, o professor precisa de as resolver. Isso permite-lhe perceber se as tarefas que seleccionou são motivadoras e matematicamente desafiantes e se se ajustam às características dos seus alunos (Fujii, 2016, 2018; Jaworski y Potari, 2009; Stein y Smith, 2009) e permite-lhe pensar em

estratégias que os alunos podem seguir e em erros e dificuldades que podem emergir (Fujii, 2019).

Para potenciar discussões que vão ao encontro dos objetivos da aula, alguns autores referem discussões entre os professores participantes em estudos de aula sobre a escolha dos números que aparecem na tarefa (e.g., Doig *et al.*, 2011; Fujii, 2016), sobre a redação do enunciado das questões e as condições que são escolhidas (Adler y Alshwaikh, 2019) e sobre a seleção e sequenciação de exemplos e questões, com crescente grau de dificuldade (Lim *et al.*, 2016).

3.3 ANTECIPAÇÃO DE ESTRATÉGIAS E DIFICULDADES

Para além da formulação das tarefas, a forma como elas são apresentadas pelo professor e o modo como ele conduz a sua realização influenciam o trabalho e as aprendizagens dos alunos (Stein y Smith, 2009). Assim, selecionada a tarefa, a planificação da aula é determinante para as aprendizagens que os alunos podem fazer durante essa aula (Fujii, 2018; Lee y Takahashi, 2011), embora o professor não consiga prever tudo o que pode vir a acontecer. Vários autores referem diversos aspetos a incluir num plano de aula, entre os quais as tarefas a propor, a antecipação das estratégias e dificuldades dos alunos e as questões e comentários a usar para lhes responder (e.g., Groves *et al.*, 2016; Jesus *et al.*, 2020).

Além de desenvolver a capacidade de ver a Matemática através dos olhos dos alunos (Fujii, 2018), antecipar estratégias e dificuldades dos alunos ajuda o professor a clarificar o valor matemático da tarefa, a identificar resoluções que vão ao encontro dos objetivos da aula e a sequenciá-las para o momento de discussão com toda a turma (Doig *et al.*, 2011; Groves *et al.*, 2016; Vale *et al.*, 2019). Isso pode levar o professor a alterar o enunciado da tarefa, se necessário, adequando-o ao trabalho que pretende realizar com os alunos (Fujii, 2018, 2019), e ajuda-o a assegurar-se que os objetivos da aula são atingidos (Jesus *et al.*, 2020; Fujii, 2019). Além disso, antecipar possíveis erros dos alunos ajuda o professor a analisar se devem ser explorados, de acordo com os objetivos da aula (Alshwaikh y Adler, 2017), consciente de que podem surgir uma diversidade de estratégias e que algumas delas podem não ser adequadas à realização da tarefa.

Antecipadas possíveis dificuldades dos alunos, quando planifica os momentos de trabalho autónomo, o professor precisa de pensar em formas de os ajudar a ultrapassá-las (Jesus *et al.*, 2020; Fujii, 2019; Vale *et al.*, 2019). O professor deve pensar nas questões ou comentários que pode fazer para apoiar os alunos durante a resolução da tarefa, seja para ajudar os que têm mais dificuldades ou para levar

os que completaram a tarefa original a fazer generalizações ou demonstrações das suas respostas (Vale *et al.*, 2019). Nas suas interações com os alunos, o professor deve levá-los a questionar os seus argumentos e a procurar estratégias alternativas de resolução e deve ter o cuidado de não lhes indicar a estratégia a seguir ou os procedimentos a realizar, para não reduzir a complexidade da tarefa (Brodie, 2010; Stein y Smith, 2009). Além disso, para manter um alto nível de exigência cognitiva de uma tarefa, nas suas intervenções, o professor deve incentivar “justificações, explicações e significados através de questões, comentários e *feedback*” (Stein y Smith, 2009, p. 27). Sobre essas intervenções, no seu trabalho, Barber (2018) refere que antes de participar no estudo de aula, quando os alunos não davam as respostas que a professora esperava, ela explicava-lhes a resposta. No entanto, ao longo do estudo de aula, a professora reconheceu a importância de questionar os alunos e focou-se em perguntas que podia fazer para os ajudar a explicar e a justificar as suas respostas.

Embora seja uma parte importante da elaboração de tarefas num estudo de aula (Fujii, 2015), vários autores dão conta dos desafios que se colocam aos professores quando tentam antecipar estratégias e dificuldades dos alunos, pondo-se no papel destes. Por exemplo, no seu trabalho, Groves *et al.* (2016) referem a dificuldade que os professores tiveram na antecipação de respostas dos alunos e a necessidade que sentiram de propor tarefas parecidas, ou até a mesma tarefa que usariam na aula de investigação, a outras turmas. As reflexões que fizeram sobre esse trabalho ajudaram os professores a antecipar as respostas dos alunos e a preparar as suas intervenções durante a aula de investigação para ajudar os alunos a explicar o modo com pensaram. Também Ni Shuilleabhain e Seery (2017) relatam que, depois de observarem as aulas e refletirem sobre elas, os professores foram ganhando confiança para anteciparem as dificuldades dos alunos e para incluírem no plano de aula questões e comentários que os ajudassem a ultrapassar essas dificuldades e a explicar o seu raciocínio.

4. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Esta investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan y Biklen, 1994), partindo do trabalho de três professoras num estudo de aula, que decorreu na sua escola, com o objetivo de analisar o desenvolvimento do seu conhecimento sobre tarefas e sobre antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos. As participantes, Sofia, Branca e Luz (pseudónimos), todas com mais de

25 anos de serviço, disponibilizaram-se para participar no estudo de aula, no ano letivo de 2019/2020, quando lecionavam a disciplina de Matemática A a turmas do 11.º ano de escolaridade (alunos com 16/17 anos). As professoras reuniam-se com frequência para discutir e planear o trabalho com os seus alunos, e partilhavam semanalmente o espaço da sua sala com um colega, realizando uma prática de coadjuvação na disciplina de Matemática. A primeira autora do artigo, também professora na mesma escola, assumiu o papel de formadora e conduziu o estudo de aula, assumindo igualmente o papel de participante. A formadora e as professoras já tinham trabalhado juntas em outros momentos, incluindo outros processos formativos.

A recolha de dados foi feita por observação participante, com elaboração de um diário de bordo, recolha documental, gravação áudio das sessões (Sx), gravação vídeo das aulas de investigação e entrevista semiestruturada em grupo focal, no fim do estudo de aula. A análise de dados teve em conta o quadro teórico e foi feita com apoio do software NVivo, procurando identificar evidências de aprendizagens das professoras sobre a elaboração das tarefas e a antecipação das estratégias e dificuldades dos alunos. Neste artigo é analisado o trabalho nas sessões de planeamento de uma tarefa (realizado em quatro sessões), a discussão pós-aula e a entrevista em grupo focal. Para a análise do desenvolvimento do conhecimento das professoras foi considerado o quadro proposto por Ponte (2012), nomeadamente o conhecimento da prática letiva e o conhecimento dos alunos e da sua aprendizagem.

5. O ESTUDO DE AULA COM PROFESSORAS DO ENSINO SECUNDÁRIO

O estudo de aula decorreu entre novembro de 2019 e fevereiro de 2020 e teve 19 sessões, com duração variável entre 20 e 125 minutos. No início do estudo de aula, as professoras decidiram planear uma aula de investigação, com dois tempos de 45 minutos, no domínio “Funções reais de variável real”, transversal ao currículo do ensino secundário, baseando-se na sua experiência e nas dificuldades que os seus alunos costumam ter. A tabela 1 apresenta um resumo das sessões do estudo de aula.

Tabela 1. Resumo das Sessões do Estudo de Aula

Sessão (S)	Resumo
1	Seleção do tópico: “estudo do sinal de funções racionais dadas por expressões da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios”
2 a 5	Planeamento da aula de investigação (AI1) - identificar os conhecimentos que seria de esperar os alunos terem - partilhar o modo como abordaram alguns conceitos nas suas aulas e planear tarefas para propor aos alunos antes da aula de investigação (introdução da noção de assíntota ao gráfico de uma função, por exemplo) - elaborar tarefas para propor aos alunos antes da aula de investigação (uma sobre a função raiz quadrada e outra sobre a determinação dos zeros de uma função racional) - analisar um artigo sobre estratégias e erros de alunos na resolução de equações e inequações (Tsamir y Almog, 2001) - elaborar a tarefa para a aula de investigação - antecipar representações que os alunos poderiam usar, estratégias que poderiam seguir e dificuldades que poderiam emergir - pensar em formas de apoiar os alunos durante o trabalho autónomo - planejar a aula, incluindo a introdução da tarefa, o trabalho autónomo dos alunos e a discussão coletiva
6	Aula de investigação (AI1.1)
7	Reflexão pós-aula (AI1R1) - analisar o trabalho dos alunos, as representações e as estratégias que usaram, comparando-os com o que planearam - discutir sobre a necessidade, ou não, de alterar o enunciado da tarefa ou o plano de aula
8	Aula de investigação (AI1.2)
9	Reflexão pós-aula (AI1R2) – idêntica a AI1R1
10 a 12	Planeamento de uma nova aula de investigação (AI2) sobre o tópico “aplicar a noção de derivada ao estudo de funções” – idêntica a AI1, com discussões sobre o planeamento da unidade curricular como, por exemplo, o modo como uma das professoras introduziu, nas suas aulas, o conceito de derivada de uma função num ponto.
13	Aula de investigação (AI2.1)
14	Reflexão pós-aula (AI2R1) – idêntica a AI1R1
15	Aula de investigação (AI2.2)
16	Reflexão pós-aula (AI2R2) – idêntica a AI1R1
17	Aula de investigação (AI2.3)
18	Reflexão pós-aula (AI2R3) – idêntica a AI1R1
19	Balanço do trabalho no estudo de aula. Entrevista em grupo focal

No planeamento das aulas, uma parte significativa das sessões foi dedicada à elaboração de tarefas em que os alunos pudessem trabalhar com alguma autonomia, explicando as suas ideias e justificando os seus raciocínios, assim como à antecipação de possíveis erros e dificuldades dos alunos, pensando em perguntas que os poderiam ajudar a avançar no seu trabalho. Entre as sessões, particularmente durante o planeamento da segunda aula de investigação, as professoras trocaram e-mails onde registaram várias observações sobre o enunciado da tarefa que foram discutidas nas sessões seguintes.

Seguindo a abordagem exploratória, as aulas foram estruturadas em três fases (Ponte, 2005; Stein *et al.*, 2008): (i) apresentação da tarefa, pelo professor, certificando-se que os alunos a compreendem; (ii) trabalho autónomo dos alunos, em pares ou em pequenos grupos, acompanhado pelo professor que vai respondendo às questões dos alunos, com o cuidado de não uniformizar estratégias de resolução nem dar respostas que reduzam o nível de exigência da tarefa; e (iii) discussão coletiva de resoluções dos alunos previamente selecionadas pelo professor, valorizando a apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados, com uma síntese e sistematização das aprendizagens matemáticas realizadas.

6. RESULTADOS

Os resultados deste estudo são apresentados em quatro pontos. Na análise dos três primeiros pontos damos atenção ao trabalho das professoras durante as sessões de planeamento de uma tarefa e na reflexão pós-aula, referindo discussões sobre o enunciado da tarefa elaborada, erros e dificuldades antecipadas, assim como discussões sobre o trabalho dos alunos na aula de investigação e resoluções não antecipadas durante o planeamento. Por fim, apresentamos as perspetivas das professoras sobre o trabalho no estudo de aula.

6.1 ELABORAÇÃO DA TAREFA - INEQUAÇÕES COM FUNÇÕES RACIONAIS

A tarefa foi pensada para introduzir o tópico “estudo do sinal de funções racionais dadas por expressões da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios”, e foi dividida em duas partes. As professoras pensaram começar pela resolução da condição $\frac{x^2-4}{x-2} > 0$. No entanto, se os alunos simplificassem a fração, isso poderia afastá-los dos objetivos da aula. Decidiram então propor a resolução de uma

inequação em que o numerador e o denominador fossem polinómios de grau 1 (figura 1). Quanto à redação da questão, as professoras pensaram pedir aos alunos para apresentarem a representação gráfica a par da representação algébrica para potenciar o confronto das duas, como tinham feito numa outra tarefa. Depois de alguma discussão, decidiram não orientar o trabalho dos alunos, e explorar diferentes respostas durante a discussão coletiva, como referiu Branca: “É interessante o confronto... até se uns fizerem analiticamente e outros graficamente, tentar perceber porque é que não são coincidentes... ou são...” (S5).

$$\text{Resolve, em } \mathbb{R}, \text{ a condição } \frac{x+3}{x-2} > 0$$

Figura 1. Enunciado da Primeira Questão da Tarefa

Depois de ser discutida a primeira parte da tarefa, era dada aos alunos uma segunda parte (Figura 2). Os alunos já deveriam saber resolver as duas primeiras condições e poderiam usá-las para responder à questão seguinte.

1. Determina, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução de cada uma das seguintes condições:

1.1. $x - 3 > 0$

1.2. $x^2 - 4 > 0$

1.3. $\frac{x^2-4}{x-3} > 0$

1.4. $\frac{3x-x^2}{x^2+x-2} \leq 0$

Figura 2. Enunciado da Segunda Parte da Tarefa

As professoras sequenciaram as questões para que os alunos comesçassem por um caso mais simples, o quociente de dois polinómios de grau 1, aumentando gradualmente o grau de dificuldade, como podemos ver nesta conversa entre elas:

Branca: Eu acho que era mais interessante começar por esta $\frac{x+3}{x-2} > 0$.

Sofia: (...) $\frac{x^2-4}{x-3} > 0$ já é um exemplo mais elaborado. Aqui [$\frac{x+3}{x-2} > 0$] são duas de primeiro grau, são mais simples de resolver, não é? Acho que aquele já podem ser um passo seguinte.

Branca: Este é um primeiro passo para ver exatamente qual o método que eles...

- Sofia: Se estiver $x - 3 > 0$, e se tiverem (...) $x^2 - 4 > 0$ (...) E então já tem que entrar o sinal de um e o sinal do outro... E isso já remete para uma coisa do género do que fizeram na anterior, com a variante de ter uma quadrática. (...) Depois (...) a 1.4, que no fundo é duas parábolas. Aqui é duas de primeiro grau, depois era ...
- Branca: Uma de primeiro e uma de segundo (...)
- Luz: Ai duas de segundo.
- Sofia: (...) E, portanto, já trabalhámos uma série de situações. (S4)

Decidiram incluir uma outra questão, idêntica à 1.3, que tinha dois casos particulares, como refere Sofia: “aquelas situações em que é tudo positivo, por exemplo $\frac{x^2+4}{x-2} < 0$, ou $\frac{-x^2-4}{x-2} < 0$, para eles perceberem que também têm que pensar um bocadinho e não se pôr logo a resolver. Depois é também ter a perceção de que $x^2 + 4$ é sempre positivo, e $-x^2 - 4$ é sempre negativo” (S3). Deste modo, as professoras elaboraram esta tarefa para que os alunos compreendessem os procedimentos envolvidos na resolução de inequações fracionárias, não apenas para as aquelas condições em particular, mas para os aplicarem a outras condições.

As discussões sobre a elaboração da tarefa, potenciaram uma análise por parte das professoras da redação do enunciado das questões, para suscitar respostas com diferentes representações, e das condições que colocariam no enunciado da tarefa, permitindo trabalhar diversas situações, sem se afastarem dos objetivos da aula. Além disso, discutiram como iriam sequenciar as questões, tendo em atenção as dificuldades que os alunos poderiam ter. Esse trabalho aponta, assim, para o desenvolvimento do conhecimento das professoras sobre os alunos e a forma como aprendem e sobre a prática letiva.

6.2 ANTECIPAÇÃO DE ESTRATÉGIAS E DIFICULDADES

Enquanto elaboravam a tarefa, as professoras foram antecipando estratégias e dificuldades dos alunos, usando a sua experiência e apoiando-se num artigo (Tsamir y Almog, 2001) que apontava possíveis respostas em questões análogas às que colocaram nesta tarefa (figura 1 e figura 2).

As professoras esperavam que os alunos resolvessem esta tarefa algébrica ou graficamente e a discussão sobre estratégias que eles poderiam seguir foi uma oportunidade para discutir a seleção e sequenciação das respostas a explorar durante a discussão coletiva:

Sofia: Temos que... organizar os momentos de discussão, os momentos de... meter a pitada quando for necessário... a ideia que também está aí subjacente [Guerreiro *et al*, 2016]... a ideia de ver vários tipos de resoluções, e depois levá-los ao quadro por grau de complexidade ou de completude, digamos assim, não é? Do mais completo para o mais incompleto. Podemos também fazer assim. Ver como é que eles conseguem apresentar...

(...)

Paula: Até pode ser que haja alguma resolução que tenha alguma incorreção e que valha a pena explorar...

Branca: Isso é que é interessante. Isso é que poderá ser interessante. Uma resolução algébrica que esteja errada, explorar aquele erro... exatamente. E depois passar então ao gráfico, não é? E depois pôr então a algébrica correta. (S3)

Depois de mais alguma discussão, as professoras decidiram começar a discussão coletiva da primeira parte da tarefa pela representação gráfica, seguida de representações algébricas incompletas (considerar apenas o numerador e o denominador positivos, por exemplo) ou com erros (considerar apenas o numerador positivo ou usar incorretamente conectores lógicos) e de uma representação algébrica correta. Por fim, seria apresentada uma resolução com recurso a uma tabela, onde os alunos podiam estudar o sinal do numerador e do denominador da fração e, a partir daí, concluir sobre o sinal do quociente, tal como já tinham feito, no 10.º ano, para determinar o sinal de funções polinomiais de grau superior a dois. Caso os alunos não usassem alguma destas representações, gráfica, algébrica, ou recorrendo a uma tabela, as professoras desafiariam os alunos mais rápidos a resolver a tarefa usando outras representações. Para a discussão das questões 1.3 e 1.4 da segunda parte da tarefa, as professoras pensaram começar novamente pela representação gráfica, seguida de uma resolução com recurso a uma tabela.

A discussão sobre possíveis representações e estratégias de resolução dos alunos levou as professoras a alterar o enunciado da tarefa (não incluir uma fração racional que pudesse ser simplificada). Levou-as também a refletir sobre as representações e as estratégias que poderiam selecionar para a discussão com toda a turma e como poderiam sequenciá-las. Além da representação gráfica, valorizaram a utilização de uma tabela onde os alunos pudessem estudar o sinal do numerador e do denominador da fração e, a partir daí, concluir sobre o sinal do quociente, por ser uma estratégia que se pode usar no estudo

do sinal de funções racionais ou em outras situações, para determinar sinais do quociente ou do produto.

As professoras anteciparam vários erros e dificuldades dos alunos. Entre eles, na primeira parte da tarefa, anteciparam que, na representação algébrica, os alunos poderiam considerar apenas que o numerador e o denominador teriam de ser ambos positivos. Para os ajudar a chegar à resposta correta, Sofia sugeriu: “Aqui podemos dizer: (...) vejam lá, se substituírem o x por -4 , fica $\frac{-1}{-6}$. É, ou não, solução?” (S4). Outra possibilidade seria os alunos confrontarem a representação algébrica com a gráfica: “indo por aí, [o aluno] percebe: «Espera aí. Isto não podia ser. Faltam-me aqui soluções»” (Sofia, S4). “Exatamente. Falta aqui qualquer coisa”, continuou Branca. Para os alunos que usassem uma tabela para resolver a condição, e tivessem dificuldade em fazê-lo, as professoras registaram no plano de aula um comentário que remetia para o trabalho com funções polinomiais que já tinham feito no 10.º ano, e escreveram uma questão que poderia ajudar os alunos: como podemos organizar a informação quando queremos determinar o sinal de uma função polinomial de grau 3 como, por exemplo, $h(x) = (x^2 - 4)(x - 3)$?

Apoiando-se no seu conhecimento sobre os alunos e no conhecimento de práticas anteriores, ampliado pela análise do artigo de Tsamir e Almog (2001), as professoras anteciparam possíveis erros e dificuldades dos alunos, as representações que poderiam surgir e as estratégias que eles poderiam seguir. Com base nessas discussões, repensaram o enunciado da tarefa e aprofundaram o seu conhecimento sobre a condução da realização de tarefas exploratórias, pensando em formas de ajudar os alunos, incentivando-os a explicarem as suas resoluções e a confrontarem várias representações. Esse trabalho trouxe-lhes também um novo olhar para a seleção e sequenciação de respostas para o momento de discussão coletiva, incluindo resoluções incompletas ou com erros, e foi uma oportunidade para as professoras ampliarem o seu conhecimento dos alunos e da prática letiva.

6.3 REFLEXÕES PÓS-AULA

A reflexão começou por uma comparação entre o trabalho dos alunos e o que tinha sido antecipado. Sobre o confronto entre a representação gráfica e algébrica, as resoluções foram ao encontro do que as professoras anteciparam. Em ambas as aulas de investigação, vários alunos perceberam que a sua resolução algébrica não estava correta quando a confrontaram com a representação

gráfica. Isto foi referido por Sofia: “houve um aluno que disse assim: «Então, mas agora, a solução que obtivemos não corresponde ao gráfico»” (A1R2). Além disso, vários alunos tiveram dificuldade em escrever o conjunto-solução da condição a partir da representação gráfica: “desenharam a hipérbole, sem atender ao zero. E depois não conseguiam tirar o conjunto-solução” (Sofia, A1R2). As professoras discutiram essa questão e refletiram sobre a causa que poderia estar por detrás dessa dificuldade:

Branca: Tinha as assíntotas, tinha o zero, tinha o outro ponto do y, mas depois aquilo, para o desenho... estava difícil. (risos)

Sofia: Quando nós estamos a estudar a função racional, a partir das assíntotas, fazes a divisão e identificas... fazes um esboço. Não estás com muita preocupação com os zeros. A ideia é um esboço, mesmo. Esta é uma situação diferente. Antes não tínhamos essa... era um esboço junto das assíntotas. Isto é uma novidade, porque surge como necessidade...

O facto de alguns dos alunos não conseguirem ver os dois ramos de hipérbole, na representação gráfica de $f(x) = \frac{x^2-4}{x-3}$ na calculadora gráfica, por não ajustarem a janela de visualização, levou-os a questionar as suas resoluções, sabendo que não poderiam obter diferentes conjuntos-solução. As professoras valorizaram esse trabalho dos alunos:

Branca: Eu acho que aquela questão que surgiu, que é muito interessante... aquela de eles não verem a outra parte da função (...) era na 1.3. (...) Um aluno disse: “Isto não bate certo com o conjunto-solução, porque isto chega aqui e depois é sempre negativo.” E eu: “Ai sim? Então é a assíntota, onde é que está?”

Sofia: (...) Na janela standard $[-10,10] \times [-10,10]$ eles não viam. (...). Eles resolveram analiticamente. Fizeram o quadro. Mas depois foram à calculadora. Foram confirmar. E só lhes aparecia o primeiro ramo. [Aluno] “Ó professora, mas isto não bate certo com o conjunto-solução.”

As professoras identificaram outras resoluções, com erros, que foram ao encontro do que anteciparam, como a apresentada na figura 3.

$$x^2 - 4 > 0 \quad (=) \quad x^2 > 4 \quad (=) \quad x > \pm 4 \quad (=) \quad x > \pm 2$$

Figura 3. Resposta de um Grupo de Alunos à Questão 1.2

Como referiu Branca, “o problema é que depois não sabem o que é isto [$x > \pm 2$]” (S3). Embora esta questão já tivesse sido trabalhada, tanto no 10.º como no 11.º ano, as professoras acharam que esta poderia ser uma oportunidade para explorar este erro, muito frequente, e discutiram sobre qual pode ser a sua causa:

- Branca: É verdade que eles vão ter o 2 e o -2 , mas têm que explorar graficamente qual é o intervalo que interessa. Isto é importante porque a gente faz sempre a exploração da parábola. Mas... explorar o erro deles, a ver se interiorizavam.
- Luz: Eles têm interiorizada a equação. (...) A equação é mais ou menos e, pronto, acabou.
- Sofia: O que eles fazem é estender a resolução da equação para as inequações. (S3)

Nesta discussão, as professoras refletiram sobre as razões que podem levar os alunos a cometer este erro e referiram que pode estar relacionado com a analogia que eles estabelecem entre a resolução da equação $x^2 - 4 = 0$ e a da inequação associada.

Estas reflexões sobre as razões que podem estar por detrás de erros dos alunos, assim como sobre o confronto de diferentes representações, criaram oportunidades para o desenvolvimento do conhecimento das professoras sobre os alunos e a sua aprendizagem e do conhecimento sobre a prática letiva.

As professoras refletiram também sobre as dificuldades dos alunos que tentaram fazer a resolução algébrica com conectores lógicos, nas questões 1.3 e 1.4 na primeira aula (AI1.1). Depois de determinarem os zeros dos polinómios do numerador e denominador, muitos alunos tiveram dificuldade em determinar o conjunto-solução da condição:

- Sofia: O que aconteceu na aula foi que os alunos, quando foram resolver a condição $\frac{x^2-4}{x-3}$, muitos deles foram pelo processo algébrico. (...) Depois perderam-se um bocadinho aí, porque também é mais difícil, porque têm que interetar uma união com...

Branca: A maioria fez até por aí. E só se perdeu, mesmo os que fizeram bem, que não se perderam nessa, só se perderam na 1.4, que já tinha *mais* condições. Aí é que abandonaram (...)

Sofia: (...) Era melhor quando fosse a discussão da tarefa 1, dizer que aquele procedimento era mais prático e era o que íamos privilegiar, para depois eles nas questões seguintes não se perderem.

Branca: Exatamente. Que foi o que aconteceu depois na 1.4. Exatamente (...) Escreveram a condição e depois começaram a olhar para aquilo... é melhor fazer o quadro. (...) mas acho que até não é mau, porque eles próprios perceberam a importância do quadro.

Nas aulas que lecionaram a outras turmas depois desta reflexão, as professoras deram maior ênfase à utilização da tabela na discussão coletiva da primeira parte da tarefa, enriquecendo o leque de estratégias que os alunos podem usar neste tipo de tarefa.

Depois da segunda aula (A11.1), as professoras discutiram a forma como um aluno explicou a sua resolução à turma e como outra aluna apresentou uma outra estratégia (baseada na representação gráfica) para identificar os sinais do numerador e denominador da fração:

Sofia: Mas eu acho que o Guilherme explica bem! Eu acho que eles perceberam bem. Quando foi ao quadro (...)

Luz: Mas ele disse ali uma coisa que era importante: porque é que foram calcular os zeros. Ele primeiro não disse, mas depois aquilo saiu assim... e eu acho que isso é que fez uma grande luz!

Sofia: Fez, fez.

Paula: Porque foi no grupo tinha havido a discussão... onde a Joana disse: "Mas, eu ainda não percebi porque é que são zeros".

Sofia: E ele lembrou-se! Deixa lá explicar, porque, já que surgiu esse problema no grupo...

Branca: Explicou para os outros.

Luz: Ele até disse que era para ver... ele até fez os gestos! Onde é que a função estava... acima ou abaixo.

Sofia: E depois como deu ênfase... ah! Aqui é não definida porque qualquer número a dividir por zero... depois andou lá a fazer "positivo com negativo"... andou a explicar ali com todo o detalhe...

- Luz: Aquela miúda (...) foi fazer os desenhos das retas com os declives, e eu acho que isso também consolidou o que ele já tinha dito.
- Sofia: Exato, exato. Ele fez por substituição. No fundo, estava a tentar explicar os mais e os menos por substituição. E depois ela foi lá fazer o bonequinho na reta para dar outra perspetiva de... dos mais e dos menos. E eu acho que é isso! (A11R2)

Tal como tinham planeado, as professoras selecionaram uma resolução com recurso a uma tabela para o momento de discussão coletiva, onde incentivaram os alunos a explicar e a justificar as suas resoluções. As professoras valorizaram a clareza dessa explicação e confrontaram diferentes estratégias, baseadas nas representações algébrica e gráfica, para responder à questão. Este trabalho permitiu-lhes aprofundar o seu conhecimento dos alunos e da forma como pensam, do modo como comunicam e das diferentes estratégias que podem seguir.

As professoras também refletiram sobre aspetos do trabalho dos alunos que as surpreenderam. Por um lado, contrariamente ao que esperavam, na representação algébrica muitos alunos escreveram que o numerador e o denominador teriam de ser ambos positivos ou ambos negativos, usando corretamente conectores lógicos: “Muitos disseram logo «ou os dois positivos, ou os dois negativos». E outra coisa: a muitos grupos, nem sequer faltou os parêntesis” (Sofia, A11R2). Por outro lado, os alunos apresentaram resoluções que não estavam previstas. Numa delas, os alunos resolveram a primeira tarefa por tentativas, e a resolução foi selecionada pela professora para iniciar o momento de discussão coletiva. As professoras mostraram-se surpreendidas com a resolução e com o modo como os alunos escolheram valores que faziam variar o sinal do numerador e do denominador da fração:

A ideia de ir por tentativas, mas não são tentativas quaisquer! Como é que ele disse? [na discussão coletiva, o aluno disse “o alcance da expressão”] $x = 2$ era impossível... e depois o $x = 3$ (...) um número superior a 2 e [outro número, -4] inferior a -3 . (...) por tentativas, tendo o primeiro membro da inequação (Sofia, A11R2).

Na mesma tarefa, um grupo de alunos apresentou outra resolução não prevista e que as professoras acharam surpreendente (figura 4).

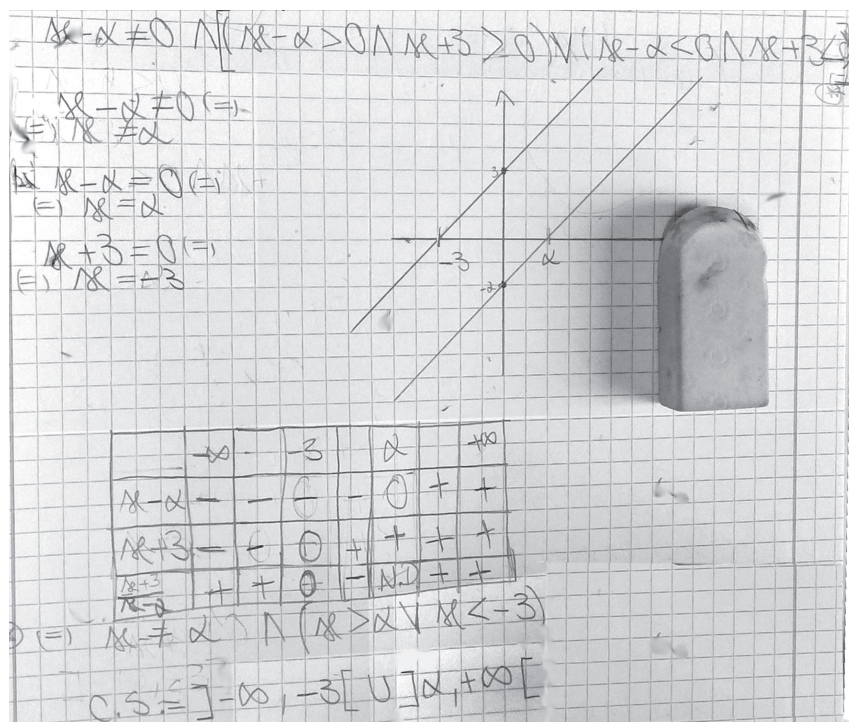


Figura 4. Resolução de um Grupo de Alunos Usando Várias Estratégias

Os alunos começaram por escrever a condição com conectores lógicos, tentaram escrever o sinal do quociente a partir da análise das representações gráficas do numerador e do denominador da fração e concluíram a resolução com uma tabela que resumia a informação, permitindo-lhes escrever o conjunto-solução da condição.

Sofia: Ela, para ver o sinal, não resolveu de forma algébrica, mas começou a pensar que tinha de ser os dois positivos ou os dois negativos, e para ajudar na resolução disso, representou as retas $y = x + 3$ e $y = x - 2$...

Paula: (...) Começaram a escrever $(x + 3 > 0$ e $x - 2 > 0)$ ou $(x + 3 < 0$ e $x - 2 < 0)$, ou têm que ser os dois positivos ou negativos... (...) chegaram aqui e pensaram... "como é que nós sabemos os sinais?" (...) depois, o problema era: "como é que eu passo esta condição do $x + 3 > 0$ e $x - 2 > 0$... como é que eu aqui, a partir do gráfico, vejo..."

Branca: Partiram para o gráfico... para perceber (...) Olha, está interessante!

Sofia: Como é que se organiza a informação?

Paula: (...) Começaram a fazer uma tabela (...) puseram o $x + 3$, puseram o $x - 2$, e ficou só assim. Depois tinham menos infinito, tinham menos três, tinham logo a seguir o dois sem ter aqui nada, e depois tinham ali o mais infinito. (...) Estavam a pôr os sinais... para tentar ver se isto as ajudava a resolver...

Luz: Analiticamente não viram bem. "Ah, deixa cá fazer o gráfico para se ver melhor..."

Branca: (...) Elas foram pensando nas várias hipóteses e misturaram tudo... (A1R2)

Assim, além de analisarem os erros e dificuldades dos alunos, as professoras refletiram também sobre respostas que as surpreenderam, o que lhes trouxe novo conhecimento sobre as estratégias que os alunos podem seguir. Refletiram também sobre as explicações e as justificações dos alunos, mostrando-se mais uma vez surpreendidas, tanto pela escolha dos números na resolução por tentativas, como pelas estratégias seguidas por outro grupo, o que lhes permitiu aprofundar o seu conhecimento sobre os alunos e a sua aprendizagem e o conhecimento da prática letiva.

Estas reflexões proporcionaram o desenvolvimento do conhecimento das professoras, em especial na análise das respostas que anteciparam e nas respostas que as surpreenderam, aprofundando o seu conhecimento sobre a forma como os alunos comunicam as suas estratégias, e sobre o modo como o confronto de várias representações e estratégias pode promover a aprendizagem dos alunos. Perceberam também a vantagem que existe em antecipar diversas estratégias de resolução no momento de planificação da aula, tendo em vista a valorização da discussão coletiva.

6.4 PERSPETIVAS DAS PROFESSORAS SOBRE O TRABALHO DESENVOLVIDO NO ESTUDO DE AULA

Esta seção apresenta reflexões das professoras, na entrevista em grupo focal, sobre o planeamento e a condução de tarefas exploratórias no ensino secundário, incluindo a sua perspetiva sobre aspetos que diferenciam o estudo de aula de outros processos de formação.

Como constrangimento para o trabalho com tarefas exploratórias, as professoras apontam a gestão da planificação ao longo do ano letivo, considerando que é necessário muito tempo para a planificação e realização de tarefas de

cariz exploratório em sala de aula. Todavia, valorizam a sua utilização como potenciadoras da aprendizagem dos alunos:

Branca: Imagina que nós em vez de perdermos uma hora perdíamos um quarto de hora, chegávamos ali, explicávamos num instantinho... OK, está dado, passamos à frente. Ganhámos tempo no nosso entender, não é? Mas, se calhar para eles...

Luz: Sim, é diferente.

Sofia: Ficou de uma forma mais enraizada, mais consolidada...

Refletindo sobre o trabalho dos alunos em tarefas de exploração, as professoras referem que desse trabalho resultam aprendizagens mais significativas, reconhecendo a importância de seguir uma abordagem menos centrada no professor e que dê aos alunos um papel mais ativo na sua aprendizagem:

Sofia: Eu acho que [o trabalho que fizemos no estudo de aula] ajuda a... a organizar as aulas no sentido de dar um papel mais ativo ao aluno. Esta questão da exploração, da introdução do tema, por uma tarefa de exploração... dá maior destaque o papel do aluno, não é? Não estás a dizer o aluno como é que as coisas se fazem, é o aluno que cria, se envolve num meio, num ambiente, próprio onde as coisas da naturalmente surgem. (...) muitas vezes quando somos nós a dizer, eles vêem aquilo, mas aquilo não lhes diz muito, não é? Aqui já trabalharam, já tiveram as mãos na massa, não é... e leva muito mais tempo a mexer naquilo, e depois quando as coisas surgem têm mais significado. E acho que a aprendizagem fica mais consolidada (...) compreendida de uma forma mais profunda.

Luz: E a permitir-lhes também decidir qual é a maneira mais... mais... clara de mostrar uma mensagem... (...) Obriga-os também a isso, a fazer a sua síntese, eles a fazer a sua síntese.

Embora reconheçam a importância dar voz aos alunos para explicarem as suas resoluções, as professoras apontam a heterogeneidade da turma como um desafio para identificar o momento apropriado para iniciar a discussão coletiva:

Sofia: Estávamos no ponto de se fazer a discussão. Só que há uns que ainda não tiveram tempo de pensar, há outros que já acabaram e já querem continuar a tarefa e já estão noutra... quando chegas à discussão das primeiras, já os outros (...) iam mais era para a discussão do que vem a seguir.

Sobre a antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos, as professoras referem que lhes permitir pensar em formas de os apoiar enquanto trabalham na tarefa:

- Sofia: E a situação também de prever algumas dificuldades também permite antecipar perguntas...
- Luz: Até a maneira como fazemos uma pergunta, exatamente... já...
- Sofia: Que devemos direccionar aos alunos de forma a não... a ideia de não matar a tarefa, não é, não matar o mais interessante que é serem eles a chegar lá, mas permitir que eles repensem... uma outra perspectiva para desbloquear... eles às vezes estão bloqueados e precisamos de fazer ali um desbloqueio.

As professoras valorizam a observação do trabalho dos alunos durante a aula, por lhes permitir comparar o que foi planeado com o que aconteceu na aula e considerar possíveis alterações no enunciado, se necessário:

- Sofia: E observar o comportamento dos alunos, e introduzir mudanças nos materiais, tem uma mais-valia muito grande, claro. Porque tu percebes logo quais são os constrangimentos daquela tarefa. Uma coisa é a pessoa... quando idealiza... está ali a pensar... mas há questões que não tem presentes. Só depois da prática é que percebe essas limitações, não é? E tu poderes logo introduzir na tarefa essas alterações, traz muito mais-valias no aperfeiçoamento da tarefa, não é? Para depois (...) se quiseres voltar a aplicar, então já... já estará mais adaptada aos alunos.

A “adaptação” da tarefa a que se refere Sofia não diz respeito apenas a alterações no enunciado, mas também à forma de conduzir a sua realização. Referindo-se à condução de uma tarefa de cariz exploratório depois do estudo de aula, as professoras falam sobre a importância de planear a introdução da tarefa, tendo em conta os alunos a quem se destina, a forma como estes se envolvem e como reagem ao que lhes é proposto:

- Luz: Eu agora vou experimentar esta [tarefa para trabalhar as transformações do gráfico de funções quadráticas], que nós fizemos no ano passado, nesta turma 10.º ano. (...) Palpita-me que vai ser diferente (...) Porque têm mais dificuldades... Até o simples facto de trabalhar em grupo (...) Isto às vezes também é uma condicionante para que as coisas corram bem.

Paula: Mas tu própria, que já tens a experiência, se fosses planejar a aula de raiz (...) Também já seria diferente?

Luz: Já pensava nisso... é completamente diferente...

Sofia: A própria introdução da tarefa, pode ser mais pormenorizada, por exemplo. Se eles têm mais dificuldade em comunicar, podes fazer ali uma preparação mais detalhada... antes de começar, não é? (...) Para eles se sentirem mais à-vontade e a trabalhar de forma autónoma.

Assim, a participação no estudo de aula levou as professoras a reconhecer que antecipar estratégias e dificuldades dos alunos ajuda o professor a conduzir a realização da tarefa, o que influencia o trabalho e as aprendizagens dos alunos, apontando para um aprofundamento do conhecimento dos alunos e da sua aprendizagem e da prática letiva.

Contrastando com outras ações de formação que frequentaram, onde elaboraram tarefas, mas não as planearam com tanto detalhe, nem observaram aulas ou refletiram sobre elas, as professoras destacaram a natureza prática no estudo de aula, reconhecendo-o como uma oportunidade para elaborarem e planearem tarefas de natureza exploratória e para as proporem aos seus alunos. Para além disso, valorizaram a observação das aulas e a reflexão sobre o trabalho dos alunos, o que não fizeram em outras formações:

Sofia: [O estudo de aula] põe-nos um trabalho prático com construção de materiais que depois têm uma aplicação direta nas aulas, numa relação muito próxima com a prática do aluno e com a prática letiva...

Deste modo, o trabalho das professoras no estudo de aula, desde o planeamento à reflexão pós-aula, seguindo uma abordagem exploratória, trouxe-lhes um olhar diferente sobre a elaboração e a condução das tarefas, sobre as dificuldades dos alunos e sobre as estratégias que podem seguir. Em particular, as professoras valorizam a proximidade entre o trabalho no estudo de aula e a sua prática letiva, na sua escola, com os seus alunos, com momentos de partilha e reflexão entre os professores participantes.

7. CONCLUSÃO

O trabalho do professor no planeamento e condução de tarefas exploratórias envolve vários desafios. Neste artigo referimos o desenvolvimento do conhecimento de um grupo de professoras sobre a elaboração de tarefas e a antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos num estudo de aula, durante o planeamento da aula de investigação e durante a reflexão que fizeram depois de observar as aulas que lecionaram.

Para elaborarem a tarefa, para além do seu conhecimento da prática anterior, as professoras usaram o conhecimento desenvolvido nas sessões realizadas, onde se inclui a elaboração de tarefas de natureza exploratória. Focaram-se nas aprendizagens que os alunos deveriam fazer, sem se afastarem do objetivo da aula, tendo em conta as estratégias e dificuldades que anteciparam. As professoras deram particular atenção à redação das questões e à ordem pela qual estas apareceriam no enunciado da tarefa, sequenciando-as com grau de dificuldade crescente, como é referido em Lim *et al.* (2016). Como preparação para a discussão coletiva, as professoras discutiram o modo como poderiam sequenciar as representações e as estratégias dos alunos, para os incentivar a explicarem e justificarem as suas respostas e para promoverem o confronto de diferentes estratégias de resolução. As estratégias e dificuldades que anteciparam levaram as professoras a repensar e, em alguns casos, a reformular a redação das questões e ajudaram-nas a pensar em formas de apoiar os alunos, sem diminuir o grau de dificuldade da tarefa, tal como aponta Fujii (2018). Estas discussões tiveram grande relevância para o desenvolvimento do conhecimento das professoras sobre as estratégias que os alunos podem seguir e sobre a condução da realização de tarefas de cariz exploratório.

As reflexões pós-aula proporcionaram a comparação entre o trabalho que as professoras planearam e o que os alunos fizeram em sala de aula. Alguns alunos usaram representações e estratégias que as professoras tinham antecipado, mas outros usaram estratégias não antecipadas e que as surpreenderam. As professoras discutiram também dificuldades que os alunos manifestaram e procuraram razões para essas dificuldades. Puderam assim desenvolver o seu conhecimento dos alunos e do seu processo de aprendizagem. Além disso, introduziram alterações na condução da tarefa e fizeram uma apreciação global a seu respeito, desenvolvendo o seu conhecimento sobre tarefas.

As professoras tiveram também oportunidade de discutir o papel do aluno e do professor em sala de aula. Embora refiram que o tempo necessário ao

trabalho com tarefas exploratórias pode condicionar a sua utilização em aula (o que também é referido por Barber, 2018), reconhecem que vale a pena dar ao aluno um papel mais ativo na sua aprendizagem, pois daí podem resultar aprendizagens mais significativas. Na entrevista em grupo focal, as professoras discutiram como poderiam conduzir a realização de tarefas exploratórias noutras aulas, tendo em conta as características dos alunos, o que vai ao encontro do referido por Ni Shuilleabhain e Seery (2017) e sugere o desenvolvimento do seu conhecimento da prática letiva (Ponte, 2012).

Deste modo, o trabalho colaborativo na fase de planeamento do estudo de aula permitiu que as professoras do ensino secundário dedicassem bastante tempo a discutir aspetos centrais da abordagem exploratória, levando-as a considerar as potencialidades desta abordagem curricular para este nível de ensino. Esta valorização das potencialidades da abordagem exploratória foi reforçada nas suas reflexões sobre as aulas realizadas. No entanto, apesar de reconhecerem a importância de ouvir mais os alunos, as professoras referiram que foi difícil identificar o momento apropriado para terminar o momento de trabalho autónomo e iniciar a discussão com toda a turma. Isto tende a levar à realização de discussões pouco aprofundadas ou mesmo à sua ausência. Na verdade, a condução de discussões coletivas é um dos desafios dos professores em aulas exploratórias (Guerreiro *et al.*, 2016; Jesus *et al.*, 2020). Deste modo, o modo de condução destas discussões é uma questão a que deve ser dada mais atenção em futuros trabalhos de investigação relativos a estudos de aula.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de uma bolsa atribuída a Paula Gomes (SFRH/BD/145118/2019).

REFERÊNCIAS

Adler, J., y Alshwaikh, J. (2019). A case of lesson study in South Africa. En R. Huang, A. Takahashi, y J. P. da Ponte (Eds.), *Theory and practice of lesson study in mathematics* (pp. 318–342). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4>

- Alshwaikh, J., y Adler, J. (2017). Researchers and teachers as learners in lesson study. En M. K. Mhlolo, S. N. Matoti, y B. Fredericks (Eds.), *SAARMSTE Book of Long Papers* (pp. 2-14). Free State: Central University of Technology.
- Barber, K. (2018). Developing teachers' mathematical-task knowledge and practice through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 7(2), 136-149. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-09-2017-0042>
- Bogdan, R., y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8>
- Cajkler, W., Wood, P., Norton, J., Pedder, D., y Xu, H. (2015). Teacher perspectives about lesson study in secondary school departments: A collaborative vehicle for professional learning and practice development. *Research Papers in Education*, 30(2), 192-213. <https://doi.org/10.1080/02671522.2014.887139>
- Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 1-6. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9234-7>
- Christiansen, B., y Walther, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen, A. G. Howson, y M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). D. Reidel.
- Doig, B., Groves, S., y Fujii, T. (2011). The critical role of task development in lesson study. En L. C. Hart, A. Alston, y A. Murata (Eds.), *Lesson study, research and practice in mathematics education* (pp. 181-199). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_15
- Fujii, T. (2015). The critical role of task design in lesson study. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 273-286). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_9
- Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, A. Ní Shúilleabháin, y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1-21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_1
- Fujii, T. (2019). Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of lesson study. En R. Huang, A. Takahashi, y J. P. da Ponte (Eds.), *Theory and practice of lesson study in mathematics* (Vol. 48, Issue 4, pp. 681-704). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4_33
- Groves, S., Doig, B., Vale, C., y Widjaja, W. (2016). Critical factors in the adaptation and implementation of Japanese lesson study in the Australian context. *ZDM – Mathematics Education*, 48(4), 501-512. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0786-8>
- Guerreiro, A., Ferreira, R. A. T., Menezes, L. L., Martinho, M. H., Guerrero, A., Ferreira, R. A. T., Menezes, L. L., y Martinho, M. H. (2016). Comunicação na sala de aula: a perspectiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetike*, 23(2), 279-295. <https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646539>

- Jaworski, B., y Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: Using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 219–236. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9190-4>
- Jesus, C. C., Costa Trindade Cyrino, M. C., Oliveira, H. M. (2020). Mathematics teachers' learning on exploratory teaching: Analysis of a multimedia case in a community of practice. *Acta Scientiae*, 22(1), 112–133. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5566>
- Lee, Y. A., y Takahashi, A. (2011). Lesson plans and the contingency of classroom interactions. *Human Studies*, 34(2), 209–227. <https://doi.org/10.1007/s10746-011-9181-1>
- Lim, C. S., Kor, L. K., y Chia, H. M. (2016). Revitalising mathematics classroom teaching through lesson study (LS): A Malaysian case study. *ZDM – Mathematics Education*, 48(4), 485–499. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0779-7>
- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. En Lynn C. Hart, A. Alston, y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics* (pp. 13–24). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1
- Ni Shuilleabhain, A., y Seery, A. (2017). Enacting curriculum reform through lesson study: A case study of mathematics teacher learning. *Professional Development in Education*, 44(2), 222–236. <https://doi.org/10.1080/19415257.2017.1280521>
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.
- Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83–98). Graó.
- Ponte, J. P., y Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 51–66. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9681-z>
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., y Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, 24(2), 111–134. <http://hdl.handle.net/10451/22628>
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., y Baptista, M. (2018). Designing lesson studies to support teachers' professional development. *Educational Designer*, 3(11), 1–32. https://www.educationaldesigner.org/ed/volume3/issue11/article45/pdf/ed_3_11_ponte.pdf
- Ponte, J. P., Wake, G., y Quaresma, M. (2019). Lesson study as a learning context in mathematics education. En G. Lloyd (Ed.), *International handbook of mathematics teacher education* (pp. 103–126). Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004419230_005

- Quaresma, M., y Ponte, J. P. (2016). Comunicação, tarefas e raciocínio: aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula. *Zetetike*, 23(2), 297–310. <https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646540>
- Quaresma, M., y Ponte, J. P. (2017). Participar num estudo de aula: A perspetiva dos professores. *Boletim GEPEM*, 71(2), 98–113. <https://doi.org/10.4322/gepem.2017.039>
- Speer, N. M., King, K. D., y Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(2), 105–122. <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9277-4>
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Stein, M. K., y Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, 105(4), 22–28.
- Tsamir, P., y Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 513–524. <https://doi.org/10.1080/00207390110038277>
- Vale, C., Widjaja, W., Doig, B., y Groves, S. (2019). Anticipating students' reasoning and planning prompts in structured problem-solving lessons. *Mathematics Education Research Journal*, 31(1), 1–25. <https://doi.org/10.1007/s13394-018-0239-5>
- Verhoef, N. C., Coenders, F., Pieters, J. M., van Smaalen, D., y Tall, D. (2015). Professional development through lesson study: Teaching the derivative using GeoGebra. *Professional Development in Education*, 41(1), 109–126. <https://doi.org/10.1080/19415257.2014.886285>
- Verhoef, N., Tall, D., Coenders, F., y van Smaalen, D. (2014). The complexities of a lesson study in a Dutch situation: Mathematics teacher learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12, 859–881. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9436-6>

Autor de correspondencia

PAULA GOMES

Dirección: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade
1649-013 Lisboa, Portugal

Teléfono: +351933372455