



Educación matemática

ISSN: 0187-8298

ISSN: 2448-8089

Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A.C.; Universidad de Guadalajara

Oyarzo Velásquez, Ximena; Burgos Henríquez, Sandra; Prat, Montserrat
Elaboración de un instrumento para identificar prácticas pedagógicas en la enseñanza de la multiplicación
Educación matemática, vol. 35, núm. 2, 2023, pp. 95-115
Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A.C.; Universidad de Guadalajara

DOI: <https://doi.org/10.24844/EM3502.04>

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40576230005>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

UDEM
redalyc.org

Sistema de Información Científica Redalyc
Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso
abierto

Elaboración de un instrumento para identificar prácticas pedagógicas en la enseñanza de la multiplicación

Development of a tool to identify pedagogical practices in teaching multiplication

Ximena Oyarzo Velásquez,¹ Sandra Burgos Henríquez,² Montserrat Prat³

Resumen. Esta investigación se enmarca en un estudio exploratorio de las prácticas pedagógicas en el proceso de enseñanza de la multiplicación, guiado por profesores de enseñanza básica en Escuelas de la comuna de Puerto Montt, Chile. Considerando que los profesores son agentes de cambio para la educación, conocer sus prácticas pedagógicas resulta fundamental para aportar en su formación continua, así como en la formación inicial de los profesores de matemáticas. Este artículo presenta el diseño y la construcción de un instrumento que permite identificar las prácticas pedagógicas de la enseñanza de la multiplicación aplicadas a participantes docentes en activo. El instrumento se diseñó a partir de la revisión realizada de la estructura multiplicativa y de la enseñanza de la multiplicación y, está organizado en cuatro dimensiones: (1) Concepción de la didáctica de la matemática, (2) Metodología para la enseñanza de la multiplicación, (3) Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación y

Fecha de recepción: 16 de noviembre de 2020. **Fecha de aceptación:** 5 de diciembre de 2022.

¹ Universidad Austral de Chile, Sede Puerto Montt, Instituto de Especialidades Pedagógicas, Puerto Montt, Chile, ximena.oyarzo@uach.cl, orcid.org/0000-0002-3479-6903.

² Universidad Austral de Chile, Sede Puerto Montt, Centro de Docencia Superior en Ciencias Básicas, Puerto Montt, Chile, sandraburgos@uach.cl, orcid.org/0000-0002-7113-1919.

³ Blanquerna-Universitat Ramon Llull, Facultat de Psicologia, Ciències de l'Educació i els Esports, Barcelona, España, montserratpm3@ Blanquerna.url.edu, orcid.org/0000-0002-8979-7663.

(4) Percepciones docentes sobre la enseñanza de las matemáticas. La validación del instrumento se realizó a partir del juicio de expertos, lo cual permite ajustarlo para que responda a los objetivos del estudio, los cuales son: (1) identificar las estrategias pedagógicas de enseñanza y aprendizaje de la multiplicación que permite responder a la diversidad en el aula, (2) describir las concepciones que los profesores de Tercero Básico tienen sobre la multiplicación y, (3) caracterizar las prácticas pedagógicas que realizan los profesores de básica en la enseñanza de la multiplicación. La aplicación del instrumento muestra su potencial para la investigación y la intervención educativa.

Palabras clave: *diseño de instrumento, prácticas pedagógicas, profesores de enseñanza básica, enseñanza de la multiplicación, Formación del profesorado.*

Abstract. The research we present is part of an exploratory study of the pedagogical practices involved in the process of teaching multiplication as carried out by primary school teachers at schools in the Puerto Montt commune, Chile. Given that teachers are agents of change in education, an understanding of their pedagogical practices is necessary in order to contribute to their on-going training, as well as the initial training of mathematics teachers. This study presents the design and construction of an instrument that makes possible to identify the pedagogical practices applied by active teachers when teaching multiplication. The design of the instrument is based on the literature review of the multiplication and its teaching organised in four dimensions: (1) Conception of the didactics of mathematics, (2) Methodology for teaching multiplication, (3) Difficulties in the multiplication learning process and (4) Teachers' perceptions about mathematics teaching. The validation of the instrument was carried out by peer review, which enabled its adjustment to meet the goals of the study, which are: (1) Identify the pedagogical strategies for teaching and learning multiplication that allow facing classroom diversity, (2) Describe Third Grade teachers' conceptions about multiplication, and 3) Characterise pedagogical practices carried out by elementary school teachers in multiplication teaching. The application of the instrument has demonstrated its potential for research and educational intervention

Keywords: *instrument design, pedagogical practices, primary education teachers, multiplication teaching, teacher training.*

1. INTRODUCCIÓN

El presente artículo se desprende de un estudio exploratorio cuyo objetivo es identificar las fortalezas y necesidades sobre el proceso de enseñanza de la multiplicación en Escuelas Básicas de la comuna de Puerto Montt (Chile), en el marco de un proyecto DID financiado por la Dirección de Investigación y Desarrollo de la Universidad Austral de Chile (2019). El estudio indaga en la visión de los procesos matemáticos de los docentes, lo que permite no solo conocer la realidad de las aulas, sino que también posibilita una formación continua que se ajuste a la realidad existente. Concretamente, este texto propone un instrumento para el estudio de este fenómeno.

Como formadoras de profesores, docentes de formación permanente y, especialmente, como investigadoras en educación matemática y, conociendo que el dominio de la multiplicación es clave para el aprendizaje de otros contenidos matemáticos (por ejemplo: división, múltiplos y divisores, proporcionalidad, conceptos de área y volumen, o cálculo de la media aritmética, etc.), nos preguntamos sobre la existencia de una visión compartida de la multiplicación por parte de los maestros en servicio que también tenga en cuenta los modos en los cuales se aborda la enseñanza de la multiplicación en la enseñanza básica. De ahí nos cuestionamos: ¿cómo se presenta el proceso de la multiplicación? y ¿cómo se minimizan las barreras para su aprendizaje?, entre otras. Las cuales consideramos son de utilidad para conocer no solamente la realidad de las aulas respecto al aprendizaje de la multiplicación, sino también la propia práctica pedagógica y la mirada de los profesores sobre las dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación que presentan los estudiantes y, así visualizar fortalezas y debilidades en la enseñanza y aprendizaje de dicho concepto.

Con el fin de contribuir a la formación continua tanto de docentes en ejercicio, como en formación, nos proponemos el diseño y construcción de un instrumento *ad hoc* que permita identificar las prácticas pedagógicas utilizadas por profesores en activo para la enseñanza de la multiplicación, y se espera que, más allá de este estudio, con este instrumento se estimule a otros investigadores a potenciar en los docentes reflexiones pedagógicas sobre su práctica educativa.

2. MARCO CONCEPTUAL

Según los Estándares Estatales Básicos Comunes para Matemáticas (CCSSM, por sus siglas en inglés), la competencia matemática requiere de comprensión conceptual, la cual incluye la comprensión, de las operaciones y de las relaciones matemáticas; de la fluidez en los procedimientos, entendida como el uso flexible de la estrategia adecuada para encontrar la respuesta de manera eficiente, y de una disposición productiva hacia las matemáticas, considerándolas como un conocimiento útil (CCSSM, 2010).

Desde esta perspectiva, los docentes deben abordar la enseñanza de la multiplicación en sus aulas siendo conscientes de las conexiones que tiene este concepto con otras áreas de las matemáticas. De este modo, se debe asegurar que los estudiantes inicien su aprendizaje con los conocimientos necesarios para la comprensión de este concepto, con la vista puesta en las posibilidades que un buen aprendizaje conceptual ofrece a sus experiencias matemáticas futuras. Sin embargo, hay estudios que demuestran que la comprensión conceptual de la multiplicación sigue siendo débil y que muchos alumnos aún afrontan la multiplicación desde un punto de vista puramente memorístico (Dubé y Robinson, 2018).

Dado que la conexión más fuerte en la multiplicación es con el valor posicional y las estructuras aditivas, cuando iniciamos la multiplicación con dos cifras es necesaria una adecuada comprensión del valor de posición (Van de Walle *et al.*, 2014). Un buen planteamiento en el aula por parte de los docentes, aunando la comprensión de la multiplicación con una base sólida del valor de posición, haría posible que, una vez introducida la multiplicación con números naturales, la multiplicación con decimales (por ejemplo, 4×7.56 , o 0.34×9.5) no requiera de nuevas habilidades o conocimientos para su comprensión, más allá de la conexión entre el valor posicional y la multiplicación (Van de Walle *et al.*, 2014). Por otra parte, la multiplicación tiene también una fuerte conexión con el álgebra, pues son justamente los patrones, tanto numéricos como geométricos, los que ayudan a entender y elaborar con sentido las tablas de multiplicar.

2.1. LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Comprende conceptos relacionados tanto con la multiplicación como con la división. Estos conceptos se encuentran presentes en diversos ámbitos, siendo necesarios y fundamentales en actividades de tipo social, cultural y científico (Castro y Ruiz, 2011). Autores como Orozco (2018) abordan los puntos

diferenciadores para la estructura multiplicativa, tales como la operación mental, las tablas de multiplicar, los algoritmos y la resolución de problemas. La multiplicación es un contenido matemático de numeración central, en tercer curso de básica en varios países (Castro y Ruiz, 2011; CCSSM, 2010). En Chile, el eje de Números y Operaciones abarca la destreza en el cálculo mental y escrito, construyendo conceptos básicos, con ayuda de metáforas y representaciones donde se involucra la multiplicación (MINEDUC, 2012).

La multiplicación se introduce tradicionalmente en las aulas de primaria como una suma reiterada o repetida de elementos iguales (Castro y Castro, 2010; Fernández, 2007; Flores *et al.*, 2015, entre otros), es decir, se introduce siguiendo la teoría implícita formalizada por Fischbein *et al.* (1985), según la cual cada operación aritmética tiene asociado un modelo implícito, y el de la multiplicación es la adición repetida. En este sentido, para iniciar el proceso de enseñanza de la multiplicación de los números naturales, es necesario asegurar que los alumnos dominen la estructura aditiva (Flores *et al.*, 2015).

Multiplicar, no obstante, va más allá de una adición reiterada. La suma no es una multiplicación, ya que en las situaciones sumativas solo interviene un conjunto de elementos (manzanas y manzanas; libros y libros), mientras que en las situaciones multiplicativas aparecen dos conjuntos claramente definidos, y en relación constante (cajas y manzanas, estanterías y libros) (Fernández, 2007). Así pues, la suma reiterada es diferente a la multiplicación, al requerir la multiplicación de pensamiento jerárquico (Clark y Kamii, 1996).

La idea por desarrollar acerca de la multiplicación puede basarse también en la relación entre las dos estructuras multiplicativas: multiplicación y división. Este es el caso del National Council of Teachers of Mathematics –NCTM (2000), para el cual el aprendizaje de la multiplicación y la división debe iniciarse desde la comprensión de situaciones que impliquen multiplicar, tales como el agrupamiento entre iguales; o bien, que impliquen dividir, distribuyendo objetos reales en partes iguales (NCTM, 2000).

Por lo que respecta a los problemas multiplicativos se expresan habitualmente en la escuela de primaria como una relación ternaria ($a \times b = c$), cuando en realidad se trata de una relación cuaternaria (Vergnaud, 1991). Esta relación cuaternaria, según Vergnaud (1991), puede representarse mediante una tabla de correspondencia que traduce el isomorfismo entre dos tipos de medida o cantidades. Trabajar con este tipo de representación permite dejar a un lado la parte operativa de la multiplicación para trabajar la parte más conceptual.

2.2. EL PROCESO PARA LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN

Para algunos profesores de básica, la enseñanza de la multiplicación se centra en el dominio del algoritmo convencional y su posterior aplicación para resolver problemas. Estos profesores esperan que los alumnos dominen las tablas de multiplicar (hasta el 10), al comienzo de la enseñanza básica, siendo este dominio un prerequisite para la utilización de la multiplicación y de la división (Stare, 2010). No obstante, investigaciones sobre el aprendizaje de la multiplicación señalan que una buena parte de los alumnos de este nivel, e incluso de enseñanza media, presentan dificultades y cometen errores al realizar esta operación de manera algorítmica (Dickson *et al*, 1991; Kamii, 1995). Esto puede deberse a que se enseña explicando y pidiendo a los alumnos que repitan una serie de procedimientos, aparentemente, con el único fin de que sean capaces de reproducirlos, sin traducirse en una comprensión real de ideas y procedimientos matemáticos (Boqué *et al*, 2016; Thompson y Saldanha, 2003; entre otros).

El proceso para el aprendizaje de la multiplicación ha sido abordado por diferentes autores desde diversas perspectivas. Así, autores como Flores *et al*. (2015) establecen etapas para culminar el proceso de aprendizaje de las operaciones multiplicativas: de acción, de uso de modelos, de simbolización, de hechos numéricos y tablas, de uso de algoritmo y de aplicación a la resolución de problemas. Por otro lado, autores como Fernández (2007) establecen, también, etapas en el proceso didáctico de la iniciación a la multiplicación, aunque dando un valor clave en dicho proceso a comprender el significado del concepto “veces” en un contexto multiplicativo.

Desde otra perspectiva, el NCTM (2000) pone el acento en la modelización de problemas o situaciones multiplicativas con diagramas, dibujos o material concreto de modo que los alumnos entiendan qué representan los factores y su producto en contextos y registros distintos. En este sentido, Duval (2006) expone que la actividad matemática se realiza en un contexto de representación semiótica (registros de representación), aunque los estudiantes deben ser capaces de reconocer un mismo objeto matemático, en este caso la multiplicación, en diferentes contextos de representación y saber usarlos. Así pues, es importante conseguir que los alumnos desarrollen la coordinación interna de los distintos contextos de representación de un mismo objeto para que puedan ser elegidos y usados según el propósito de la actividad (Duval, 2006). De manera similar, el CCSSM (2010) establece que en tercero básico, los alumnos deben desarrollar la comprensión del significado de la multiplicación y la división de números enteros mediante

actividades y problemas con grupos, disposiciones y modelos de área de la misma medida. De este modo, se acompaña a los alumnos en la aplicación de propiedades de las operaciones en el cálculo de productos de números enteros, potenciando la aplicación de estrategias que puedan ser desarrolladas por ellos mismos. Al comparar las diferentes estrategias usadas para conseguir la solución, los alumnos aprenden la relación entre ambas estructuras multiplicativas.

Otra de las aproximaciones de la multiplicación consiste en las propuestas que siguen la secuencia Concreto-Representación-Abtracto (CRA) basada en los estadios de Bruner (1966): en activo, icónico y simbólico. La secuencia CRA ha demostrado ser un procedimiento de enseñanza útil, en particular por su uso de múltiples representaciones. Siendo un método efectivo para la enseñanza de la multiplicación y la división en alumnos con dificultades de aprendizaje (Milton *et al*, 2018).

A partir de las distintas perspectivas existentes y propuestas didácticas para el aprendizaje de la multiplicación, puede establecerse que es importante el apoyo de modelos (diagramas, suma repetida de grupos iguales, área, etc.) para iniciar el aprendizaje de la multiplicación desde la comprensión. En ese sentido, se tiene presente que este proceso de aprendizaje no puede iniciarse sin una comprensión del sistema de valor posicional y de las estructuras aditivas. El aprendizaje de la multiplicación requiere también descubrir sus propiedades, mediante estrategias basadas en estas propiedades y resolver problemas con multiplicaciones y divisiones. A todo esto, es preciso añadir el papel del álgebra en el descubrimiento de regularidades, es decir, de patrones, que serán importantes para un adecuado aprendizaje de la multiplicación, por ejemplo, estudiando la regularidad en los dobles, triples, etcétera; los cuales aportan en la comprensión y construcción de las tablas de multiplicar. Todo el proceso requiere de la comunicación matemática como camino para compartir y clarificar ideas, puesto que las conversaciones sobre ideas matemáticas desde distintas perspectivas permiten a los participantes compartir, discutir, perfeccionar o rectificar sus conceptos matemáticos, además, de hacer conexiones y desarrollar un lenguaje que permita expresar sus ideas matemáticas, potenciando así la necesidad de precisión en sus intervenciones (NCTM, 2000).

3. ESTADO DE LA CUESTIÓN

En Chile, desde hace algunos años existen instituciones y normativas que buscan garantizar calidad y equidad en los aprendizajes de todos los niños y

jóvenes (Agencia de Calidad y Superintendencia de Educación, 2011). En este nuevo contexto, los programas de estudio ofrecen una organización temporal de los objetivos de aprendizaje (secuencia recomendada de objetivos, indicadores de logro y evaluación, etc.), los cuales deben cumplirse durante el año escolar, con el fin de conducir la tarea didáctica a los profesores.

El currículum de matemáticas en Chile se estructura en cinco ejes temáticos para la enseñanza básica: Número y operaciones, Geometría, Medida, Patrones y álgebra y, Datos y probabilidad (MINEDUC, 2012, p. 218). Dentro de este plan, la enseñanza de la multiplicación se aborda en el eje de Números y operaciones. La trayectoria curricular se inicia en primero básico, concretamente en el objetivo de aprendizaje que propone “determinar las unidades y decenas en números de 0 al 20, agrupando de a 10, de manera concreta, pictórica y simbólica” (MINEDUC, 2012, p. 45). En segundo básico, el concepto de multiplicación aparece en el currículum de forma concreta en el objetivo de aprendizaje que busca “demostrar que comprenden la multiplicación usando representaciones concretas y pictóricas, expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales...” (MINEDUC, 2012, p. 42). Finalmente, todo parece indicar que la trayectoria curricular de la enseñanza de la multiplicación concluye en tercero básico, cuando se plantea que los estudiantes deben:

Demostrar que comprenden las tablas de multiplicar hasta el 10 de manera progresiva: usando representaciones concretas y pictóricas; expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales usando la distributibilidad como estrategia para construir las tablas hasta el 10 aplicando los resultados de las tablas de multiplicar hasta 10×10 sin realizar cálculos, resolviendo problemas que involucren las tablas aprendidas hasta 10. (MINEDUC, 2012, p. 235)

De esta forma, se podía afirmar que las bases curriculares del sistema educacional chileno no están en la mera repetición y mecanización de algoritmos, definiciones y fórmulas, sino que contemplan una práctica docente que tienda a favorecer la comprensión de conceptos matemáticos. La metodología de trabajo de las matemáticas en este currículum busca la adquisición de los conceptos, presentando situaciones desafiantes que requieren variadas habilidades, destrezas y conocimientos. Al mismo tiempo, esta metodología busca desarrollar las capacidades cognitivas declaradas en los planes y programas, las cuales son visualizar, representar, modelar y resolver problemas, simular y conjeturar, reconocer estructuras y procesos.

4. METODOLOGÍA

El instrumento de recogida de datos es una entrevista semiestructurada, pues permite al investigador-entrevistador clarificar de antemano los temas a tratar, sin abandonar la posibilidad de modificar la secuencia de preguntas en el transcurso de la entrevista, en función de las respuestas que vayan obteniendo de los participantes (Cohen *et al.*, 2018). Para mayor riqueza en el proceso de recogida de datos se cuenta con un protocolo de la entrevista, el cual se preparó por el equipo de investigación que, a la vez, actúa como guía para las investigadoras que entrevistan a los participantes.

Para la investigación de donde emana este artículo, las entrevistas se realizaron individualmente, a cada maestro participante, en un área abierta y tranquila, adyacente a las aulas donde los maestros se desempeñan. Los participantes fueron 17 profesores. Cada una de ellas duró alrededor de 30 a 35 minutos y fueron registradas en audio para su posterior transcripción.

El diseño y construcción del instrumento contempló seis etapas: (1) revisión de estudios acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación; (2) identificación de los aspectos relacionados con el aprendizaje de la multiplicación que debían abordarse en la entrevista; (3) análisis del tratamiento otorgado a la multiplicación y su enseñanza en el currículo; (4) construcción de la versión piloto del instrumento; (5) validación del instrumento y, (6) construcción de la versión final del instrumento. El proceso de diseño del instrumento corresponde a las fases 1, 2 y 3; mientras que las fases 4, 5 y 6 corresponden a su construcción y validación.

4.1. VERSIÓN PILOTO DEL INSTRUMENTO

La entrevista se estructuró a partir de cuatro dimensiones, las cuales fueron inicialmente planteadas a partir de los objetivos del proyecto en el que se enmarca este estudio. Estas son: (i) Concepción de la didáctica de la matemática; (ii) Metodología usada para la enseñanza de la multiplicación; (iii) Resultados del proceso y; (iv) Concepción de la enseñanza de las matemáticas. Una vez establecidas estas dimensiones a partir de los antecedentes de la literatura, se elabora el primer protocolo de preguntas (versión piloto). La tabla 1 muestra la descripción de las dimensiones iniciales y una muestra de las preguntas para cada dimensión planteadas inicialmente.

Tabla 1. Dimensiones y muestra de las preguntas iniciales (versión piloto)

Dimensión	Descripción	Ejemplo de pregunta
Concepción de la didáctica de la matemática.	Se identifica cómo el profesor anticipa las formas de pensar de los estudiantes; cómo interpreta sus producciones y qué lenguaje matemático utiliza, además, cómo identifica y aprovecha las fortalezas y dificultades en el aprendizaje de contenidos matemáticos (Aguilar <i>et al.</i> , 2015).	¿Utiliza en el aula material concreto de matemáticas? ¿Cuál? Puede explicar cómo utiliza el material concreto y en qué contenidos?
Metodología para la enseñanza de la multiplicación.	Se describe cómo el profesor aborda la enseñanza de la multiplicación en el aula de matemáticas. Esto implica conocer el funcionamiento y la dinámica de aula en el proceso de enseñanza de la multiplicación: "un método, un proceso, una rutina o un algoritmo" (Orton, 2003) y la motivación a partir de situaciones de la vida cotidiana, usando material manipulativo.	¿Cómo introduce el tema de la multiplicación?
Resultados del proceso.	Se analizan los procesos de enseñanza-aprendizaje tal como ocurren en las salas de clase, con el fin de comprender los procesos pedagógicos que subyacen a los resultados alcanzados por los estudiantes. (Galton <i>et al.</i> , 1999).	¿Cree usted que hay una diferencia entre la enseñanza de la multiplicación de años atrás y en la actualidad?
Concepción de la enseñanza de las matemáticas.	Se detallan los conocimientos previos relacionados con las ideas acerca de cómo deben enseñarse las matemáticas, y el modelo didáctico que adopta el profesor/a. Se consideran estos conocimientos como constructos cognitivos que se han adquirido y son producto de los procesos de aprendizaje que el profesor ha recorrido en su formación, tal como afirma Llinares (1998).	¿Cuál cree que son sus competencias para enseñar la multiplicación?

Nota: Esta tabla muestra las dimensiones iniciales que se consideraron a partir de los referentes teóricos y de los objetivos del proyecto.

4.2. VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

Para la validación del instrumento se consideró la participación de expertos en Didáctica de las Matemáticas de Chile y España, quienes fueron seleccionados por su conocimiento especializado en la enseñanza de las matemáticas. Para llevar a cabo este proceso, los participantes disponían de la versión piloto del

instrumento. La puesta en común con los expertos permitió identificar algunos aspectos a mejorar en los distintos elementos evaluados:

- La pertinencia de las dimensiones presentadas.
- La coherencia de las preguntas para cada dimensión.
- El protocolo de la entrevista.

El aporte de los expertos respecto a las preguntas del instrumento se organiza en dos bloques. Por un lado, están los aportes referentes a la pertinencia de las dimensiones y de las preguntas que se formulan en cada dimensión, y, por otro lado, las mejoras en el protocolo de la entrevista.

4.2.1. Aportes acerca de la pertinencia de las dimensiones y de las preguntas en cada dimensión.

La discusión sobre el nombre y el contenido de cada dimensión, la pertinencia del contenido de las distintas dimensiones, y la secuencia de preguntas hizo necesario replantear las dimensiones *Resultados del proceso* y *Concepción de la enseñanza de las matemáticas*, al observarse que el contenido de ambas es muy similar. Por lo tanto:

- La dimensión *Resultados del proceso*, pasa a tratar las *Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación*, sobre todo en la comprensión que presentan los estudiantes.
- La dimensión *Concepción de la enseñanza de las matemáticas*, pasa a denominarse *Percepción docente sobre la enseñanza de las matemáticas* para los docentes participantes.

Respecto a las preguntas para cada dimensión:

- En la dimensión *Concepción de la didáctica de la matemática*, se agregó una pregunta para complementar la recogida de la información: ¿Dónde conoció dichos materiales?
- En la dimensión *Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación*, se sugirió agregar preguntas de materiales/estrategias concretas que utilizan los estudiantes relatando acciones pedagógicas que presentan éxito y fracaso en la enseñanza y comprensión de la multiplicación.

En la tabla 2, se observan los cambios respecto al nombre de las dimensiones y al número de preguntas para cada una, proceso que se llevó a cabo después de la validación.

Tabla 2. Evolución de las dimensiones y el número de preguntas

Dimensión fase inicial	Nº preguntas	Dimensiones fase final	Nº preguntas
Concepción de la didáctica de la matemática	5	Concepción de la didáctica de la matemática (CoDiMa)	6
Metodología para la enseñanza de la multiplicación	8	Metodología para la enseñanza de la multiplicación (MeEnMul)	8
Resultados del proceso	10	Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación (DifAprMul)	11
Concepción de la enseñanza de las matemáticas	2	Percepción docente sobre la enseñanza de las matemáticas (PerDoMa)	4

Nota: Esta tabla muestra la evolución de las dimensiones tanto a nivel de contenido como a su peso en la entrevista.

4.2.2. Aportes acerca del protocolo de la entrevista

Las mejoras que se consensuaron después del juicio y discusión con los expertos se concretan en lo siguiente:

- Incluir en el protocolo de la entrevista preguntas acerca del perfil del profesor entrevistado, de manera que dichas preguntas complementen y aporten información para el análisis. Así, se propone incluir preguntas que tengan relación con los estudios realizados, capacitaciones, años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas, tipo de institución en la que imparte/ha impartido docencia el profesor (pública o particular subvencionado), además de su participación en algún cargo en el área de matemáticas.
- Revisar las notas del entrevistador del protocolo de la entrevista, asegurando que no se realicen preguntas que puedan inducir una respuesta que no corresponda con la realidad u opinión del entrevistado. Esto, con el fin de evitar que el profesor responda lo que cree que se espera de él.

4.3. INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS

La entrevista a los profesores del estudio es el instrumento utilizado para la recogida de datos de la investigación. Incluye instrucciones dirigidas al investigador-entrevistador para asegurar un buen proceso de recogida de datos, además las preguntas se organizan a partir de las dimensiones revisadas y refinadas siguiendo los comentarios de los expertos (tablas 3 y 4, respectivamente). Dicha organización responde al imperativo del objetivo principal de la investigación, el cual se plantea “Determinar si las prácticas pedagógicas que emplean los docentes de Tercero Básico para la enseñanza de la multiplicación en establecimientos educacionales de la comuna de Puerto Montt, responden a la diversidad en el Aula” (Proyecto Interno, UACH, p. 9).

Tabla 3. Dimensiones definitivas del instrumento *ad hoc*

Dimensión	Descripción
Concepción de la didáctica de la matemática (CoDiMa)	Se identifica de qué manera el profesor toma decisiones en su sala de clase de matemáticas, qué uso hace de las diferentes estrategias de aprendizaje, qué tipología de ejemplos considera interesantes, y las analogías y recursos didácticos que utiliza.
Metodología para la enseñanza de la multiplicación (MeEnMul)	Se describe la metodología usada por el profesor para enseñar la multiplicación a partir del uso de materiales manipulativos, ya sea mediante un reto o un procedimiento algorítmico.
Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación (DifAprMul)	Se analizan las respuestas de los profesores referidas al papel del error en el proceso de aprendizaje de la multiplicación y conocer su visión sobre las dificultades de sus alumnos en el aprendizaje de esta operación básica.
Percepción docente para la enseñanza de las matemáticas (PerDoMa)	Se describe cómo se ven los propios docentes como profesores de matemáticas, cómo se sienten enseñando matemáticas y qué puntos fuertes creen tener.

Nota: Esta tabla muestra las dimensiones definitivas a partir de las cuales se realiza el estudio.

A continuación se menciona cada dimensión con sus distintos niveles de comprensión:

- Desde una perspectiva general, la dimensión Concepción de la didáctica de la matemática trata sobre la noción que tienen los docentes participantes

acerca de la didáctica de la matemática, lo cual vendría a ser la concepción ontológica que se maneja de la multiplicación, es decir ¿en qué consiste?

- La dimensión Metodología para la enseñanza de la multiplicación indaga sobre el conjunto de métodos que utilizan los profesores. Por lo tanto, se pregunta por el modo en el cual la multiplicación se concibe epistemológicamente, es decir ¿cómo debe ser abordada?
- En la dimensión Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación, se busca visualizar cómo se realiza el proceso de comprensión de la multiplicación, correspondiendo entonces a un nivel concreto, en donde aparecen técnicas y formas de operacionalizar la multiplicación.
- La siguiente dimensión, Percepción docente para la enseñanza de las matemáticas indaga sobre nociones subjetivas o intersubjetivas que los entrevistados puedan tener de la enseñanza de la matemática en sí.

4.4 PROTOCOLO DE LA ENTREVISTA, PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

El protocolo para el investigador-entrevistador incluye la información necesaria que debe conocerse para la identificación del entrevistado y el guión de preguntas. Así, antes de iniciar la entrevista, el investigador-entrevistador debe anotar los datos siguientes: fecha y hora de entrevista, lugar de la entrevista, nombre del entrevistador, nombre del profesor(a), establecimiento educacional. Además, se consigna la siguiente información: duración de la entrevista y observaciones que considerara remarcables de la entrevista (incidentes, comentarios generales, interrupciones, etcétera.).

El investigador-entrevistador toma notas de campo y busca asegurar que todas las entrevistas se desarrollen de manera similar. Por ende, se solicita el uso de grabadora de voz, se propone el texto con el que debe iniciarse la entrevista para su posterior transcripción, además de explicitar el modo de presentación y de despedida que debe seguir el investigador-entrevistador. También se explicitan los detalles de la entrevista que debe conocer el entrevistado para poder dar la autorización para que la entrevista sea grabada. Finalmente, en las preguntas de la entrevista, las notas para el entrevistador sirven para que el proceso de entrevista se desarrolle con fluidez.

Tabla 4. Preguntas del protocolo de la entrevista organizadas por dimensiones

CoDiMa 1. ¿Utiliza material concreto en el aula de matemáticas? 2. Si su respuesta es afirmativa ¿Podría mencionar algunos de ellos? 3. Si su respuesta es afirmativa ¿En qué contenidos utiliza preferentemente el material concreto? 4. Para el eje Números y operaciones ¿utiliza material? ¿de qué tipo? (En general) 5. En el caso de utilizar material concreto en el eje de Números y operaciones, ¿puede explicarme cómo lo utiliza? 6. En el caso de utilizar material concreto en el eje de Números y operaciones, ¿Dónde conoció el material que utiliza? (Curso, libros, colegas, capacitación.)
MeEnMul 1. ¿Cuántas veces ha enseñado el concepto de multiplicación en los últimos 5 años? 2. En el caso de haber introducido la multiplicación en su experiencia docente ¿Cómo introduce este tema? ¿Puede darme un ejemplo?, o ¿puede mostrarme cómo la introduce? 4. Si su respuesta ha sido afirmativa ¿Podría explicar cómo continúa hasta lograr la comprensión de la multiplicación? 5. Si su respuesta ha sido afirmativa ¿Qué materiales, recursos o actividades utiliza para lograr esta comprensión? 6. ¿Han cambiado sus ideas acerca de cómo enseñar el concepto de multiplicación en estos años? 7. Si su respuesta es afirmativa ¿cómo se generó el cambio? ¿Qué cosa específica le hizo cambiar de idea? 8. Si su respuesta ha sido afirmativa ¿Puede recordar alguna experiencia que haya contribuido a dicho cambio?
DifAprMul 1. ¿Cree usted que hay una diferencia entre la enseñanza de la multiplicación hace algunos años atrás y en la actualidad? ¿Puede dar un ejemplo? 2. 3. ¿Cuáles son las dificultades que ha observado en sus estudiantes en el proceso de comprensión de la multiplicación? 4. En el caso de observar dificultades en los estudiantes en la multiplicación, ¿puede describirnos los materiales y/o estrategias que utiliza en cada caso? 5. ¿Cómo han sido los resultados de aprendizaje en la comprensión de la multiplicación? 6. Si ha obtenido resultados exitosos ¿a qué lo atribuye? 7. Si ha tenido fracasos en la comprensión de la multiplicación ¿a qué lo atribuye? ¿Qué estrategia o estrategias utiliza para combatir el error? <i>En los casos donde se evidencia fracaso de los resultados de aprendizajes en la comprensión de la multiplicación</i> 8. ¿Qué estrategias utiliza para potenciar la comprensión de la multiplicación? ¿Puede dar un ejemplo? 9. 10. ¿Qué estrategias utiliza para combatir el error en proceso de aprendizaje de la multiplicación? 11. ¿Cuál cree usted que es el rol del profesor de aula en la enseñanza de la multiplicación en estos casos dónde se presentan dificultades en la comprensión de la multiplicación?
PerDoMa 1. ¿Cómo se siente enseñando matemática? Nos puede responder en una escala de 1 a 7. ¿Por qué? 2. Dentro de los contenidos de matemática, ¿cuál le gusta más enseñar? 3. ¿Cuál o cuáles cree que son sus competencias para enseñar la multiplicación? 4. ¿Cuál o cuáles cree que son sus debilidades en la enseñanza de la multiplicación?

Nota: Esta tabla muestra el instrumento final organizado por dimensiones.

5. RESULTADOS

5.1 RESPECTO DEL INSTRUMENTO (ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA)

El instrumento elaborado abordó temáticas propias del desarrollo profesional docente, identificando conceptos como material didáctico, prácticas pedagógicas, didáctica de la matemática, enseñanza de la multiplicación, dificultades en los resultados de aprendizaje de la multiplicación, percepción docente, entre otras. Todos estos elementos resultaron relevantes para propiciar una reflexión docente. La elaboración del instrumento se piensa como una oportunidad de ofrecer a la comunidad educativa y académica un instrumento confiable, el cual produjo resultados estables y consistentes y que, al mismo tiempo, permitió identificar y analizar prácticas pedagógicas de los profesores de matemáticas en enseñanza básica.

En un primer estudio, el instrumento fue aplicado a 17 profesores de enseñanza básica, pudiéndose observar su potencial como instrumento para su uso en el contexto nacional (Chile), como base para el desarrollo de futuras investigaciones en el campo de desarrollo docente y su práctica pedagógica en el área de Matemática. A pesar del potencial mostrado por el instrumento, no se pudo legitimizar, de momento, debido a la muestra de profesores de este primer estudio, por lo que se trata de un instrumento válido para el contexto de esta investigación.

A partir de los resultados preliminares obtenidos en la aplicación del instrumento, se tuvo una primera aproximación por medio de la recogida de la información. Tales resultados, si bien aún parciales, aportaron una visión inicial.

5.2 EN RELACIÓN CON LAS DIMENSIONES CONSIDERADAS EN EL INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS

En el análisis a las respuestas dadas por los profesores de la dimensión CoDiMA acerca del uso de materiales didácticos en las aulas, observamos entre otros aspectos que:

- El material didáctico al que se refirieron los profesores fue muy diverso, desde palitos de helado o plastilina, hasta ábacos o regletas. Así pues, para futuras investigaciones es necesario definir qué se entiende como material didáctico en el estudio.
- Los profesores utilizaron el material principalmente con alumnos con dificultades. Así indicaron, por ejemplo, “lo uso cuando los alumnos no entienden”.

- Los profesores no detallaron cómo se utiliza el material en sus aulas, así indicaron que “presento el material y doy instrucciones” o “los alumnos manipulan el material”.
- Los profesores indicaron que conocieron el material en textos escolares, capacitaciones del método Singapur, en conversaciones con los compañeros, etcétera.

En el análisis de la dimensión MeEnMul, observamos, entre otros aspectos, que:

- La mayoría de los profesores introdujeron la multiplicación como una suma reiterada y, en ningún caso se refirieron a estructura de matriz o de área;
- el aprendizaje de las tablas de multiplicar fue considerado esencial, por parte de los profesores, en el aprendizaje de la multiplicación, y
- los profesores conocen materiales manipulativos para introducir y reforzar la multiplicación, pero parecieron no sentirse cómodos con su uso en las salas de clase.

Respecto a las respuestas de los profesores a la dimensión DifAprMul acerca de las dificultades que presentaron los alumnos en el aprendizaje de dicha operación, vemos entre otros aspectos que:

- Concibieron como una de las principales dificultades la falta de memorización de las tablas de multiplicar. No se plantearon las dificultades desde una perspectiva conceptual, sino procedimental.

Finalmente, respecto a las respuestas dadas por los profesores del estudio a la dimensión PerDoMa, la cual aborda cómo se sienten los profesores como docentes de matemáticas, se observa, entre otros, que:

- Buena parte de los profesores, concretamente 12 de los 17, se puntuaron con 7 (8 profesores) o 6 (4 profesores). Justificaron sus respuestas con argumentos como: “me encantan las matemáticas”, “considero que soy buena profesora”, o similares.
- La mayoría de los entrevistados eligieron la numeración como el contenido matemático que preferían enseñar (10 de 17); mientras que la geometría fue el contenido elegido en segundo lugar (5 de 17).

- Indicaron que para la enseñanza de la multiplicación les gustaba trabajar “con material concreto” aunque no especificaron a qué se referían exactamente.
- Respecto a sus puntos débiles sobre la enseñanza de la multiplicación son variados, pero principalmente tienen que ver con la falta de estrategias en un sentido didáctico.

6. REFLEXIONES FINALES

El instrumento elaborado ha permitido observar el potencial que implica tener una herramienta que permita explorar el conocimiento matemático-didáctico de los profesores de matemáticas de primaria sobre la enseñanza de la multiplicación. En el proceso ha sido imprescindible la revisión de la literatura existente sobre la enseñanza de la multiplicación. El juicio de expertos ha permitido ajustar y mejorar el instrumento de manera que recogiera convenientemente el objetivo planteado en este estudio en específico.

Las diversas etapas seguidas en el proceso determinaron el diseño y construcción del instrumento, consolidando teóricamente las dimensiones definitivas: (1) Concepción de la didáctica de la matemática; (2) Metodología para la enseñanza de la multiplicación; (3) Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación y; (4) Percepción docente para la enseñanza de las matemáticas.

Asimismo, la primera aplicación del instrumento ha posibilitado observar su potencial para abordar el estudio que nos propusimos llevar a cabo, los datos obtenidos, aunque preliminares, mostraron las posibilidades del instrumento, permitiendo identificar las metodologías que siguen los profesores para enseñar la multiplicación o, la visión sobre las dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación de los profesores participantes.

Así, consideramos interesante destacar algunos de los resultados obtenidos en el contexto de nuestro estudio. Vemos que los profesores participantes muestran ideas preconcebidas acerca de lo que son las matemáticas y de cómo deben enseñarse, por ejemplo: tienen la idea que las matemáticas son una actividad individual, que parece depender casi en exclusiva del propio alumno y de su esfuerzo para aprenderse las tablas de multiplicar. Es interesante observar el papel principal que otorgan a las tablas de multiplicar y a su memorización, mientras que en ningún caso explican cómo representar la multiplicación de manera que sea conceptual y más fácil el proceso de memorización.

Por otro lado, consideramos interesante reflexionar sobre la visión de los profesores de este estudio acerca del uso de materiales didácticos en las clases de matemáticas. Vemos que a pesar de indicar que usan materiales didácticos en sus aulas, y en particular para la multiplicación, los profesores del estudio no explicitan el uso que hacen de dichos materiales. Asimismo, los profesores centran su uso en los alumnos que presentan barreras para la participación y el aprendizaje, se desconoce si debido a su propia experiencia como alumnos de matemáticas, a una visión de las matemáticas como una materia que debe abordarse desde el lápiz y el papel, o a una falta de estrategias para la enseñanza de la multiplicación más allá de la escritura matemática.

Para finalizar, señalar que el instrumento permite explorar la concepción de los docentes acerca de la didáctica de la matemática, de las metodologías para su enseñanza y de las dificultades para su aprendizaje; y, por ende, la visión de los docentes acerca de la enseñanza de las matemáticas. A partir de la exploración que nos ofrece el instrumento, consideramos interesante seguir con el estudio invitando a los profesores participantes a un grupo de discusión donde profundizar en los aspectos más relevantes obtenidos.

Se espera que el instrumento y la investigación que se presenta genere interés a partir de las respuestas de los profesores participantes, además de una oportunidad para la reflexión desde la formación inicial de los futuros profesores (estudiantes de pregrado) y de los profesores en ejercicio docente. En síntesis y dado que el instrumento fue diseñado pensando en su capacidad para el estudio de prácticas pedagógicas, se espera que se haya aportado para reflexionar en el desarrollo profesional docente de los profesores de matemáticas de educación básica.

REFERENCIAS

- Agencia de Calidad y Superintendencia de Educación (2011). Ley N° 20529/2011. *Diario Oficial de la República de Chile*, <http://www.leychile.cl/N?i=1028635yf=2011-08-27yp=>
- Aguilar, M., Aragón, E., y Navarro, J. I. (2015). Las dificultades de aprendizaje de las matemáticas (DAM). Estado del arte. *Revista de Psicología y Educación*, 10(2), 13-42.
- Boqué, M. C., Alguacil, M., y Pañellas, M. (2016). Creencias de los futuros maestros acerca de la docencia de las matemáticas. *International Journal of Developmental and Educational Psychology INFAD Revista de Psicología*, 1(1), 407-418.
- Bruner, J. (1966). *The culture of education*. Harvard University Press

- Castro, E. y Castro, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *UNO- Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 54, pp. 31-40.
- Castro, E. y Ruiz, F.J. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En Isidoro Segovia Alex y Luis Rico Romero (coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 99-122). Pirámide.
- Clark, F. B. y Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 41-51.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (eight edition). Routledge.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM). http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf
- Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. MEC: Labor.
- Dubé, A. K. y Robinson, K. M. (2018). Children's understanding of multiplication and division: Insights from a pooled analysis of seven studies conducted across 7 years. *British Journal of Developmental Psychology*, 36(2), 206-219.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.
- Fernández, J. A. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica. *Revista Iberoamericana de educación*, 43, 119-130.
- Fischbein, E., Deri, M. Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.16.1.0003>
- Flores, P., Castro, E., y Fernández, J. A. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En Pablo Flores y Luis Rico (coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp.205-230). Pirámide.
- Galton, M., Hargreaves, L., Comber, C., Wall, D., y Pell, T. (1999). Changes in patterns of teacher interaction in primary classrooms: 1976-96. *British Educational Research Journal*, 25(1), 23-37.
- Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Aprendizaje Visor.
- Llinares, S. (1998). La investigación sobre el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula*, 10, 153-179.
- Milton, J. H., Flores, M. M., Moore, A. J., Taylor, J. L. J., y Burton, M. E. (2018). Using the Concrete-Representational-Abstract Sequence to Teach Conceptual Understanding of Basic Multiplication and Division. *Learning Disability Quarterly*, 42(1), 32-45.
- MINEDUC. (2012). *Bases Curriculares de enseñanza básica*. Ministerio de Educación. Santiago. Chile.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. SAEM Thales.
- Orozco, M. (2018). La estructura multiplicativa. Universidad del Valle. <https://studylib.es/doc/8049339/la-estructura-multiplicativa-mariela-orozcohormaza>

- Orton, A. (2003). *Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica el aula* (cuarta edición). Ediciones Morata.
- Proyecto Interno (2018). *Estudio exploratorio sobre la práctica pedagógica de la enseñanza de la multiplicación en las escuelas básicas de la comuna de Puerto Montt*. Universidad Austral de Chile, Sede Puerto Montt.
- Stare, A. R. (2010). *A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino*. (Disertación doctoral no publicada). Universidade de São Paulo.
- Thompson, P. W. y Saldanha, L. A. (2003). Fractions and Multiplicative Reasoning. En J. Kilpatrick, G. Martin, y D. Schifter (Eds.), *Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-114). <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.630.5632&rep=rep1&type=pdf>
- Van de Walle, J. A., Karp, K., y Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. Pearson.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas Editorial.

Autor de correspondencia

XIMENA OYARZO

Dirección: Instituto de Especialidades Pedagógicas, Universidad Austral de Chile,
Sede Puerto Montt, Puerto Montt, Chile
ximena.oyarzo@uach.cl