Educación matemática
ISSN: 0187-8298
ISSN: 2448-8089
Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A.C.; Universidad de Guadalajara

Henríquez-Rivas, Carolina; Verdugo-Hernández, Paula

Diseño de tareas en la formación inicial docente de matemáticas que involucran las representaciones de una función

Educación matemática, vol. 35, núm. 3, 2023, pp. 178-208
Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A.C.; Universidad de Guadalajara

DOI: https://doi.org/10.24844/EM3503.06

 https://doi.org/10.24844/EM3503.06

Diseño de tareas en la formación inicial docente de matemáticas que involucran las representaciones de una función

Design of tasks in the initial training of mathematics teachers that involve the representations of a function

Carolina Henríquez-Rivas,[1] Paula Verdugo-Hernández[2]

Resumen: En esta investigación presentamos los análisis asociados con el diseño de tareas desarrolladas por futuros profesores de matemáticas de nivel secundario. Para ello, ponemos atención a las experiencias formativas del profesorado y las demandas establecidas en el currículo escolar que deben ser consideradas en el desarrollo de actividades en la formación inicial docente (FID). Presentamos un estudio de casos que caracteriza el trabajo matemático alrededor de tareas diseñadas por futuros profesores, centradas en el concepto de función y que favorecen la habilidad *representar* declarada en el currículo chileno. El estudio se realiza en cursos de didáctica de la FID en dos universidades. Los análisis se sustentan en la teoría *Espacios de Trabajo Matemático*, la que nos permite profundizar en aspectos epistemológicos y cognitivos del trabajo matemático esperado que las tareas promueven. Los resultados muestran dificultades asociadas con las tareas que los profesores diseñan y lo que esperan propiciar para su enseñanza. Concluimos con una discusión sobre posibilidades de mejoras para la formación del profesorado.

Fecha de recepción: 26 de junio de 2022. **Fecha de aceptación:** 10 de junio de 2023.

[1] Campus San Miguel, Departamento de Matemática, Física y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule, chenriquezr@ucm.cl, https://orcid.org/0000-0002-4869-828X.

[2] Campus Linares, Escuela de Pedagogía en Ciencias Naturales y Exactas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Talca, pauverdugo@utalca.cl, https://orcid.org/0000-0001-6162-654X. Código Postal 3580000.

Palabras clave: *Representar, función, Espacio de Trabajo Matemático, formación de profesores.*

Abstract: In this research we present the analyses associated with the design of tasks developed by prospective secondary mathematics teachers. To do so, we pay attention to the formative experiences of teachers and the demands established in the school curriculum that must be considered in the development of activities in initial teacher education (ITE). We present a cases study that characterises the mathematical work around tasks designed by future teachers, focusing on the concept of function and favouring the ability to *represent* declared in the Chilean curriculum. The study is carried out in ITE didactics courses at two universities. The analyses are based on the theory called *Mathematical Working Spaces*, which allows us to delve into epistemological and cognitive aspects of the expected mathematical work that the tasks promote. The results show difficulties associated with the tasks that teachers design and what they hope to promote in their teaching. We conclude with a discussion of possibilities for improvement in teacher training.

Keywords: *Representing, function, Mathematical Working Space, teacher training.*

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se presentan los análisis de tareas diseñadas por futuros profesores asociadas con el concepto de función, que favorecen la habilidad matemática representar, la cual está presente de forma transversal en el currículo escolar chileno. El contexto de desarrollo del estudio se enmarca en una actividad planteada durante la formación inicial docente. Se pretende aportar, especialmente, a la formación del profesorado y a la comunidad de formadores de profesores de matemáticas.

En el ámbito de la Educación Matemática, se han abordado problemáticas sobre las características y propiedades de las funciones (Arce y Ortega 2013; Martínez De La Rosa, 2015; Pino-Fan *et al.*, 2019). En este contexto, Carrión Miranda y Pluvinage (2014) realizaron una investigación con participación de profesores, resaltando el uso de las herramientas tecnológicas. En esta misma línea, Espinoza-Vásquez *et al.* (2018) indagaron en el conocimiento del profesorado acerca del uso de la analogía en el aula. Por su parte, Manrique *et al.* (2019) muestran los efectos de la aplicación de secuencias didácticas en estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, evidenciando los efectos en la apropiación conceptual de los estudiantes.

A lo anterior, se suman estudios como el de Martínez-Fernández *et al.* (2022), quienes profundizan en los tipos de comprensión que poseen futuros profesores de matemáticas, centrados en las conversiones entre sistemas de representación en trigonometría. Asimismo, Torres *et al.* (2022) identifican las estructuras (regularidades identificadas) y las representaciones que usan estudiantes de 2° de educación primaria para expresar la generalización. Estos autores muestran que el número de estructuras y la forma de generalizar, en su mayoría, corresponden a representaciones verbales y/o numéricas.

Otros trabajos abordan dificultades asociadas con el aprendizaje de funciones al momento de coordinar sus distintas representaciones en la resolución de tareas (Hitt, 1998; Adu-Gyamfi y Bossé, 2014). Al respecto, López Hernández *et al.* (2019) analizan las dificultades en estudiantes de Bachillerato sobre las representaciones de las funciones y proponen el diseño de una secuencia didáctica que consideran la realidad aumentada. Con base en la teoría semiótica de Duval (1995), Guzmán (1996) estudia dificultades en estudiantes de ingeniería sobre funciones reales y evidencia que sus respuestas están dadas en un determinado registro. También, Trigueros y Martínez-Planell (2009) estudian sobre la comprensión de funciones de dos variables, considerada de relevancia, dado el papel de las funciones multivariables, y sus representaciones en las matemáticas y sus aplicaciones. En este mismo sentido, Yoon y Thompson (2020) analizan los significados que profesores estadounidenses y surcoreanos otorgan a la notación de funciones y sugieren atender este asunto en la formación del profesorado. De modo similar, Amaya De Armas *et al.* (2021) muestran deficiencias de futuros profesores, sobre las transformaciones de las representaciones de las funciones.

Aunado a lo anterior, se destaca el interés en el análisis de tareas propuestas para fomentar determinados objetivos de aprendizaje sobre diversos aspectos de las funciones, en particular, de sus representaciones. De aquí que, el diseño de tareas juega un rol clave (Ainley y Pratt, 2005; Watson y Mason, 2007), toda vez que crean oportunidades para construir sobre la comprensión actual de los estudiantes (Kieran *et al.* 2013), existiendo un consenso sobre su importancia y diseños apropiados (Margolinas, 2013). En este sentido, Mason y Johnston-Wilder (2006) entienden una tarea como aquella que se le solicita a un estudiante. Más aún, Becker y Shimada (1997) se refieren a una tarea como a materiales o entornos diseñados para promover una actividad matemática compleja.

De la revisión presentada, se observa que la perspectiva semiótica sobre el estudio de las funciones es un tema relevante de investigación en Educación Matemática, con especial consideración en el conocimiento de futuros profesores sobre las representaciones de las funciones. De esta manera, surge interés por investigar el diseño de tareas realizado por futuros profesores de matemáticas y los procesos cognitivos que estas pueden favorecer sobre las representaciones de las funciones. En particular, se pretende aportar al campo disciplinar con atención a la formación inicial docente (FID) de matemáticas, a partir de la perspectiva del rol docente del futuro profesor.

Recursos de contextualización

Para contextualizar la problemática planteada, se consideran dos documentos oficiales referentes en Chile, para el diseño de la enseñanza y la FID: *Bases Curriculares* y *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática.*

De acuerdo con las Bases Curriculares (Ministerio de Educación [Mineduc], 2015), durante el ciclo entre 7° Básico (12-13 años) y 2° Medio (15-16 años), los estudiantes deben desarrollar cuatro habilidades matemáticas: representar, resolver problemas, modelar y, argumentar y comunicar. Sobre la habilidad representar, el documento establece que: "[...] se espera que extraigan información desde el entorno y elijan distintas formas de expresar esos datos (tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, etc.) según las necesidades de la actividad o la situación [...]" (pp. 97-98).

Sobre las funciones, uno de los Objetivos de Aprendizaje (OA) en el eje temático álgebra y funciones de 8° Básico es: "Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: Utilizando tablas. Usando metáforas de máquinas. Estableciendo reglas entre *x* e *y*. Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo" (Mineduc, 2015, pp. 114).

De lo anterior, se espera promover actividades que involucran distintas representaciones asociadas al aprendizaje la noción de función. No obstante, no se establecen OA para coordinar estas representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes, lo que no es una actividad cognitiva espontánea para los estudiantes (Duval, 1995).

En los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática (Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas [CPEIP], 2021), el estudio de funciones se presenta en el Estándar *Números y álgebra*, el cual describe: "[...] analiza las funciones, seleccionando representaciones para estudiar sus componentes, resolviendo problemas que involucren su uso, [...]" (p. 79). De aquí, se destaca la intención por considerar diversas representaciones de las funciones que el futuro profesor debe usar para la enseñanza; sin embargo, dicha intención y sus implicancias no siempre son visibilizadas. Por consiguiente, se considera que las Bases Curriculares y los Estándares Orientadores no proporcionan información suficiente para la coordinación de las diversas representaciones de las funciones.

Lo anterior, debido a que la planificación para la enseñanza depende de la interpretación y relevancia teórica que el profesor le atribuya. Por tanto, se sostiene que las experiencias formativas y los recursos que los profesores poseen, para el diseño de tareas, es un asunto que debe ser estudiado con mayor detalle. Este artículo resalta la relevancia del diseño de tareas en la formación del profesorado y su adaptación para el aula. Por ello, el objetivo de investigación es *caracterizar el trabajo matemático que se puede favorecer con las tareas diseñadas por futuros profesores para la enseñanza de diversas representaciones de las funciones.* Este objetivo permitió estudiar el diseño y resolución esperada de tareas de funciones por futuros profesores, enfatizando la coordinación de representaciones de las funciones y discutir posibles aportes para la FID. En la siguiente sección, se presenta el marco teórico que sustenta la investigación, el cual ha sido usado para estudiar el trabajo matemático desarrollado en tareas específicas (Flores González y Montoya Delgadillo, 2016; Henríquez Rivas *et al.*, 2021b).

2. MARCO TEÓRICO

Para dar sustento teórico a los análisis, se considera la teoría *Espacios de Trabajo Matemático* (ETM). El ETM se define como un marco que contribuye a la comprensión del trabajo de personas (profesor, estudiante o un matemático) que resuelven tareas matemáticas, permitiendo caracterizar los caminos que emergen en su resolución (Kuzniak, 2011; Kuzniak *et al.*, 2022). Esquemáticamente, el ETM consiste en dos planos, *epistemológico* y *cognitivo*, cada uno de los cuales se divide en tres componentes. El plano epistemológico se relaciona con los principios intrínsecos a los objetos matemáticos estudiados. El plano cognitivo tiene que ver con el pensamiento del sujeto que utiliza los objetos matemáticos en la resolución de tareas.

El plano epistemológico está constituido por los componentes: *referencial,* relativo a la parte teórica del trabajo matemático, lo que considera propiedades, teoremas y definiciones; *representamen*, relativo a los objetos matemáticos involucrados; *artefactos*, distingue aquellos de tipo material (considera herramientas tecnológicas para dibujo, construcción o medición) o un sistema simbólico (considera el empleo de objetos de naturaleza semiótica o algoritmos basados en técnicas de cálculo). El plano cognitivo está constituido por los componentes: *visualización*, determinado por la representación semiótica de los objetos matemáticos; *construcción,* basado en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas; *prueba*, definido como todo proceso discursivo de validación, que permite formular argumentaciones organizadas deductivamente, definiciones, hipótesis, conjeturas o el enunciado de contraejemplos (Kuzniak *et al.*, 2016b; Henríquez Rivas *et al.*, 2021a). La articulación entre los planos y sus componentes se realiza mediante tres génesis, *semiótica, instrumental* y *discursiva*, que permiten explicitar la naturaleza del trabajo matemático puesto en juego (Kuzniak, 2011).

De lo anterior, las distintas interacciones que se pueden dar entre dos génesis y sus componentes implicadas, se representan por *planos verticales* (Kuzniak y Richard, 2014), los cuales conectan diferentes fases del trabajo matemático y significados en la ejecución de una tarea (Gómez-Chacón *et al.*, 2016). El plano vertical *semiótico-discursivo,* [Sem-Dis], implica poner en coordinación el proceso de visualización de objetos representados con un razonamiento para probar. El plano vertical *semiótico-instrumental,* [Sem-Ins], involucra el uso de artefactos para la construcción de resultados, bajo ciertas condiciones o en la exploración de objetos mediante el uso de representaciones semióticas, sin necesidad de un objetivo de validación. El plano vertical *instrumental-discursivo,* [Ins-Dis], relaciona una prueba basada en la experimentación, la validación de una construcción o la generalización empírica, con el uso de un artefacto (Kuzniak *et al.*, 2016b). Estas relaciones se ilustran en el siguiente diagrama (figura 1).

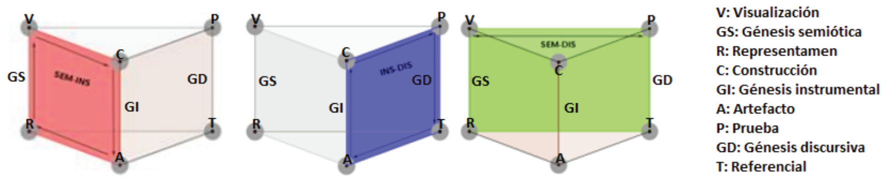


Figura 1. Diagrama de los planos verticales, génesis y componentes en el ETM (adaptado de Kuzniak *et al.*, 2016a).

La caracterización de las interacciones entre los planos verticales, génesis y componentes del ETM puestas en acción por un individuo, cuando resuelve una tarea específica, la entenderemos como *circulación* en el espacio de trabajo (Montoya-Delgadillo *et al.*, 2014).

Existen tres tipos de ETM, este artículo nos referiremos en profundidad a uno de ellos (ETM *idóneo*), estos son: ETM *de referencia*, definido por criterios teóricos con la finalidad de organizar determinados conocimientos, de acuerdo con los principios epistemológicos subyacentes al dominio matemático estudiado; ETM *personal*, relativo al trabajo propio del individuo, sin necesariamente una intención de enseñanza, definido por la forma en la cual el individuo construye su propio trabajo matemático; ETM *idóneo,* relacionado con un individuo (profesor o investigador) que le da sentido a un contenido matemático diseñado para la enseñanza en un lugar y contexto determinado (Flores González y Montoya Delgadillo, 2016; Henríquez Rivas *et al.*, 2021a; Verdugo-Hernández *et al.*, 2022), y se diferencia entre el ETM *idóneo potencial* y el *actual* (Henríquez Rivas *et al.*, 2022).

En este escrito nos enfocaremos en el ETM *idóneo potencial* del futuro profesor, en relación con el diseño y resolución esperada de tareas propuestas para la enseñanza de las funciones y sus representaciones, pero que aún no son implementadas en el aula. El futuro profesor debería diseñar un ETM *idóneo* con el fin de posibilitar a sus eventuales estudiantes la resolución de tareas. En ese sentido, el rol del diseño de tareas, así como la resolución esperada por el futuro profesor, son aspectos claves de este estudio.

Por otra parte, la noción de *tarea* ha sido ampliamente utilizada en investigaciones en ETM y si bien no se trata de una componente explícita del modelo, es entendida como la activadora del trabajo matemático del individuo (Kuzniak, 2011). Tal como señalan Henríquez Rivas *et al.* (2021a), se concibe por tarea como toda secuencia de experiencia matemáticas planificada para los estudiantes, con una intención didáctica. En este contexto, destaca la importancia que se atribuye en atención al diseño de tareas (Watson y Ohtani, 2015). Para el presente estudio, se considera la distinción entre: *tareas clásicas*, como aquellas que tradicionalmente se encuentran en textos universitarios o libros de textos escolares y, que son de uso habitual en la enseñanza; *tareas en contexto cercano para el estudiante,* las cuales implican una situación que en su resolución involucran (de forma explícita o no) la resolución de problemas o a la modelación (Borromeo Ferri, 2010).

3. METODOLOGÍA

Características generales

Se estudian propuestas de enseñanza basadas en tareas sobre la noción de función que privilegian la habilidad representar, con el propósito de caracterizar el ETM *idóneo potencial* de futuros profesores (FP). Las tareas fueron elegidas, diseñadas y analizadas a priori por FP de matemáticas durante su formación inicial docente (FID). El estudio presentado es de tipo cualitativo, precisamente, se adopta un *estudio colectivo de casos de tipo instrumental* (Stake, 2007). La justificación del diseño de estudio obedece a la selección de dos casos representativos, que permiten comprender cómo los FP proponen y analizan tareas en una actividad formativa planteada durante su FID (Stake, 2007; Simons, 2011). La unidad de análisis consiste en el trabajo matemático realizado por los FP en cursos de Didáctica del Álgebra dictados en dos universidades chilenas durante el año 2020. La elección de las dos universidades se debe a razones de disponibilidad de las investigadoras, pues cada una realizó la docencia en estos cursos al momento de la recolección de datos, en el marco de la actividad propuesta.

Los FP participantes del estudio, fueron seleccionados dentro del total de matriculados en cada curso, tres FP de la universidad 1 (U1) y siete FP de la universidad 2 (U2). Al momento de la actividad, los FP se encontraban en una etapa avanzada de su formación, 6° semestre en U1 y 7° semestre en U2, diferencia debida a la ubicación del curso en cada plan formativo. En ambas instituciones, los cursos disciplinarios se desarrollan desde el inicio de la formación y los de didáctica disciplinar se desarrollan a partir del 5° semestre.

La actividad se desarrolló en el horario asignado del curso, lo que implicó tanto horas de trabajo virtual (modalidad dada por el contexto de pandemia por

Covid-19), como horas de trabajo autónomo. En cuanto a la organización de la actividad, los FP de U1 trabajaron de forma individual, mientras que los FP de U2 conformaron grupos de trabajo de dos o tres personas, según su propia afinidad. Por una consideración ética, se solicitó el consentimiento a los FP para la realización del estudio, quienes aceptaron de manera voluntaria y sin relación alguna con la calificación obtenida en el curso.

El equipo de investigadoras estuvo conformado por dos académicas con grado de doctor en didáctica de la matemática (con formación pedagógica), quienes planificaron la actividad en conjunto, la que posteriormente implementaron para los FP en sus respectivas instituciones (U1 y U2). Los FP contaron con el apoyo de las investigadoras durante todo el desarrollo de la actividad. La planificación e implementación de esta actividad involucró tres momentos:

Momento 1: Teórico-práctico. Se desarrollaron cuatro sesiones virtuales teórico-prácticas centradas en el estudio de la habilidad representar del currículo escolar. Para ahondar en el tema, también se estudiaron aspectos de la semiótica en educación matemática.

Momento 2: Ejemplificaciones. Se llevaron a cabo dos sesiones virtuales para analizar tareas que privilegian y sirven para ilustrar la habilidad representar. Estas provienen de una selección planificada por las investigadoras y, luego, presentadas en cada curso. También, fueron discutidos ejemplos elaborados por los FP.

Momento 3: Desarrollo de la actividad. Se desarrolló en 5 semanas, con sesiones virtuales sincrónicas y de trabajo autónomo asincrónico de los FP. En general, la actividad consistió en el diseño y análisis a priori de cinco tareas para la enseñanza del concepto de función. En la primera semana, la actividad consideró la descripción de tres posibles niveles de desempeño asociados con la habilidad representar y la demanda cognitiva implicada en cada nivel, según lo que los FP consideran que los estudiantes (de educación secundaria) podrían realizar al resolver cada tarea. En la segunda y tercera semana, los FP trabajaron en el diseño de tareas en relación con los niveles de desempeño que fueron descritos anteriormente, lo cual implicó la creación o adaptación de estas. En la cuarta y quinta semana, los FP desarrollaron los análisis del trabajo potencial (o esperado) que las tareas promueven. Luego, los FP entregaron la actividad a las profesoras a cargo del curso respectivo (investigadoras). Cabe notar que, para ese momento, los FP tenían conocimientos teóricos que les permitieron la realización de la actividad.

A saber que, para efectos del presente estudio, fueron consideradas las producciones del momento 3 y su respectivo análisis basado en el ETM.

Selección de casos

Para la selección de los casos de estudio, se consideraron casos por cada institución, los que se denominaron FPU1 y FPU2. Esto se basó en los siguientes criterios (Stake, 2007): un caso representativo de la clase para cada institución (Yin, 2018); la disposición de casos de estudio a participar en forma voluntaria en la investigación; lo ilustrativo de los casos en cuanto a la variedad de tipos de tareas diseñadas para abordar la habilidad representar en la enseñanza. En el caso de FPU1, el diseño implicó la creación de tareas y en el caso de FPU2, el diseño consideró la adaptación de tareas de un libro de texto. Además, se consideró las posibilidades que brindan los casos respecto de las dinámicas de trabajo en la formación del profesorado, lo cual nos resulta interesante de mostrar. FPU1 corresponde al trabajo de un FP y mientras que FPU2 corresponde al trabajo colaborativo de dos FP. También se tomó en cuenta la oportunidad de las investigadoras de realizar esta actividad en formación de profesorado y el acceso a la toma de datos. Cabe destacar que se trata de casos de dos universidades ubicadas en diferentes zonas geográficas, lo que implica mostrar también diferencias en las formaciones impartidas (Simons, 2011).

Con respecto a las tareas seleccionadas, se muestran dos tareas asociadas con la denominación *clásica* y *en contexto cercano para el estudiante*, respectivamente, en caso de FPU1. En el caso de FPU2, se presenta una tarea *en contexto cercano para el estudiante*, adaptada de un libro de texto, lo cual fue representativo del trabajo realizado por los FP en U2. De esta manera, los casos seleccionados permiten analizar las singularidades y diversidad del trabajo matemático, a través del ETM *idóneo potencial* de FPU1 y FPU2.

Recolección y análisis de los datos

Las técnicas cualitativas para la recolección de datos consideran la observación participante, notas de campo de las investigadoras en el momento 3 y los materiales escritos en un ordenador con las producciones entregadas por los FP a la profesora a cargo del curso, una vez terminada la actividad.

Para caracterizar el ETM *idóneo potencial* de los FP, de acuerdo con las tareas que diseñaron para la enseñanza, la investigación se llevó a cabo en dos fases:

Fase 1: Diseño de tareas relacionadas con la habilidad representar. Corresponde a la presentación de las tareas diseñadas por FP, sus características en la perspectiva semiótica (Duval, 1995) y el vínculo que establecen (los FP) con el nivel de la habilidad representar.

Fase 2: Trabajo matemático para la enseñanza por el FP. Corresponde al estudio del trabajo *a priori* en relación con una tarea diseñada por el FP, denominado *ETM idóneo potencial del FP* (Henríquez Rivas *et al*., 2022). Esta fase permitió comprender cuál es el trabajo matemático que se pretende propiciar para la enseñanza.

Los análisis del *ETM idóneo potencial* del FP, contemplan elementos de una metodología basada en el ETM (Henríquez Rivas *et al*., 2021a; Kuzniak y Nechache, 2021), para describir las principales acciones en la realización de la tarea. Estas acciones consideran:

1. *Identificación de los episodios de trabajo*. Se identifican los episodios (E) de trabajo que resuelven la tarea, según el desarrollo del FP. Un episodio se relaciona con aquellos momentos en donde se busca evidenciar una o varias acciones al resolver una tarea.
2. *Descripción del trabajo.* Se describe el trabajo de cada episodio a través de una sucesión de acciones realizadas por el FP.
3. *Análisis de la circulación.* Con base en la descripción del trabajo, se analiza e interpreta en términos de la circulación del ETM. Para los análisis se utiliza un protocolo con descriptores y criterios que refieren a las génesis y sus componentes, así como también los planos verticales, como una forma de dar mayor especificidad a los análisis (tabla 1).

Tabla 1. Protocolo para el análisis de la circulación en el ETM

Criterio	Componentes	Descriptor
Génesis semiótica (GS)	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes.
	Visualización	Interpreta y relaciona los objetos matemáticos según actividades cognitivas relacionadas con los registros de representaciones semióticas (identificación, tratamientos, conversiones).
Génesis instrumental (GI)	Artefacto	Utiliza artefacto de tipo material o sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en los procesos dados por las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
Génesis discursiva (GD)	Referencial	Utiliza definiciones, propiedades o teoremas.
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en distintas formas de justificación, argumentación o demostración.
Plano vertical	[Sem-Ins]	Los artefactos se usan en la construcción de resultados bajo ciertas condiciones o para la exploración de representaciones semióticas.
	[Ins-Dis]	El proceso de prueba se basa en una experimentación con el empleo de un artefacto, o bien, en la validación de una construcción.
	[Sem-Dis]	El proceso de visualización de los objetos representados se pone en coordinación con un razonamiento discursivo para probar.

Fuente: elaborado por las autoras (adaptado de Verdugo-Hernández *et al.*, 2022).

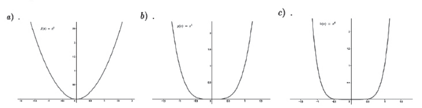
En relación con las estrategias de triangulación (Denzin, 1978), se usa la *triangulación de datos* y *del investigador*, realizada entre los análisis de las fases 1 y 2, dado por la experiencia y formación disciplinar de las investigadoras.

4. RESULTADOS

Caso 1: FPU1

Fase 1. A continuación, se presentan las tareas diseñadas por FPU1. La primera tarea, asociada a un enunciado clásico, se da en un contexto matemático (Ffgura 2A), y abarca dos preguntas (1 y 2), que son frecuentes de encontrar tanto en textos universitarios, como escolares de los últimos niveles de secundaria (*e.g.*, Stewart, 2008). La segunda tarea se asocia a un enunciado dado en un contexto cercano para el estudiante y considera tres preguntas (3, 4 y 5) (figura 2B).

1. ¿Qué es una asíntota? Ejemplifique
2. Observa los gráficos de las funciones x^2, x^4 y x^6, a continuación, explique qué sucede



A. Tarea clásica

Lea el enunciado y responda las preguntas 3-5
Luis después de comer sintió un fuerte dolor de estómago, ya que, la salsa que hizo para los fideos le quedó cruda, el doctor le recomendó un remedio que tiene potencia de que le pasen los dolores de $\frac{1}{4}$ por día.

3. Formule la situación de Luis. (Agregue datos de ser necesario).
4. ¿Qué ocurre si a los tres días no le pasan los dolores a Luis? (Cree un gráfico o una tabla para fundamentar su respuesta).
5. Si la abuelita de Luis le da un remedio casero que tiene una potencia de $\frac{1}{2}$ por día. ¿Cuál remedio es mejor? (Cree un gráfico o una tabla para fundamentar su respuesta).

B. Tarea en contexto cercano para el estudiante

Figura 2. Tareas propuestas por FPU1.

La tarea clásica (figura 2A) se presenta de forma abierta e invita a un trabajo que podría involucrar el uso del lenguaje natural, asociado con la definición de asíntota y de funciones potencia (en este caso, polinomios de grado par) en los números reales, aun cuando esto no es explícito. En el caso de la pregunta 2, se debe conectar el enunciado, a partir de los registros algebraico y gráfico para dar solución. La pregunta 3 solicita representar la situación del enunciado en algún registro semiótico (no es explícito en cuál), quedando abierto al resolutor. En las preguntas 4 y 5, dadas ciertas condiciones establecidas en la respuesta anterior, se solicita responder con un registro gráfico o tabular. En relación al diseño de la segunda tarea (figura 2B), cabe destacar que, la situación planteada se aleja de una tarea real, ya que el enunciado asegura que “el dolor se pasa en $\frac{1}{4}$ por día”, lo cual contradice el hecho de que el dolor no es cuantificable.

En cuanto al nivel de desempeño de la habilidad representar que las tareas privilegian, FPU1 ha catalogado la primera (figura 2A), en el primer nivel de menor demanda cognitiva. Esto, según señala, debido a que se debe distinguir las definiciones y variables que se entregan de manera explícita, conocer los términos matemáticos y su significado, y saber utilizar los conocimientos matemáticos aprendidos desde 1° a 3° Medio (14 a 16 años) que le son útiles para su resolución. Sin embargo, también se podría recurrir a propiedades más profundas a partir de las gráficas, por ejemplo, el hecho de que x^6 es más achatada en el origen que x^4 y esta, a su vez, más que x^2. En cambio, la segunda tarea (figura 2B), la asocia con un nivel de desempeño de mayor demanda cognitiva. Esto lo fundamenta en que los estudiantes deben saber formular el problema adecuadamente, probar posibles respuestas mediante ejemplos, si es necesario, identificar y desarrollar cada paso en la resolución del problema y expresar sus ideas de manera clara y coherente.

Fase 2. Identificación de episodios y descripción del trabajo. Para los análisis del *ETM idóneo potencial* por FPU1, se identificaron ocho episodios (E), asociados con la presentación del trabajo esperado para ambas tareas, tres para la primera tarea y cinco para la segunda.

Solución de pregunta 1). El episodio E1 está dado por la *definición de asíntota,* para lo cual FPU1 declara que se trata de una recta que “se acerca a otra”, pero nunca se intercepta con ella. Luego, el episodio E2 involucra la *ejemplificación de una asíntota*, para lo cual declara en lenguaje natural, que una función exponencial tiene una asíntota con el eje *x*. Si bien FPU1 declaró que esta tarea suponía un nivel de desempeño con menor demanda cognitiva, su respuesta no es del todo correcta. Esto debido a que una recta o bien se intercepta con otra en un punto, o bien en infinitos puntos, o bien nunca; en este último caso, ninguna se acerca siquiera a la otra, incluso podría haber especificado que asíntota le podría haber correspondido a cada función. En el contexto escolar, asíntota es una recta cuyo comportamiento se asemeja al de una curva determinada en el infinito (ya que la función o curva converge a dicha recta). Dado que E2 se asocia con una pregunta abierta, podría dar lugar a variadas respuestas.

Solución de pregunta 2). El episodio E3, de *relación entre diversas representaciones de funciones*, consiste en interpretar expresiones algebraicas, en conexión con sus respectivos gráficos y, explicar el comportamiento de cada función. En este caso, FPU1 declara mediante lenguaje natural que:

> FPU1: ...Se puede observar que el exponente de la función aumenta, por lo que esta crece más rápido. Esto es porque, las imágenes del gráfico de $f(x)$ son menores a las de la función $g(x)$, asimismo con $h(x)$.

Cabe señalar que, en la solución descrita por FPU1, se evidencia que la escritura algebraica asociada a cada función implica la designación de las funciones como $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, cuestión que no está mencionada en el enunciado.

Solución de pregunta 3). En el episodio E4, *formulación de situación en contexto*, el estudiante debe representar la situación propuesta en el enunciado. Para ello, FPU1 propone una respuesta basada en los posibles efectos de un medicamento sobre una infección bacteriana (sin recurrir a datos reales). Precisamente, supone que el efecto del medicamento por día se describe mediante la función exponencial $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$. En el supuesto anterior, es implícito que en el día 0 el dolor es máximo y que disminuirá en el tiempo por acción del medicamento a la razón ¼ con respecto al día anterior, dado que:

$$f(x) = 1, f(1) = (1/4)\, f(0), f(2) = (1/4) f(1),...,$$
$$f(n+1) = (1/4)\, f(n), para\ cada\ n \in N.$$

El desarrollo anterior muestra que la función exponencial propuesta por FPU1 es incorrecta, puesto que el enunciado establece que el dolor disminuye en *"¼ por día"*. En este sentido, destacamos que la función que representa la situación es $g(x) = -(1/4)x + 1$, ya que de este modo el dolor disminuirá efectivamente en ¼ por día:

$$g(0) - g(1) = 1 - 3/4 = 1/4, g(1) - g(2) = 3/4 - 2/4 =1/4,$$
$$g(2) - g(3) = 2/4 - 1/4 = 1/4, g(3) - g(4) = 1/4 - 0 =1/4.$$

Solución de pregunta 4). El episodio E5, *representación gráfica de la situación en contexto* (figura 3), FPU1 privilegia una solución basada en un registro gráfico (el enunciado de la pregunta 4 sugiere también el uso de un registro tabular), con el uso de Geogebra.

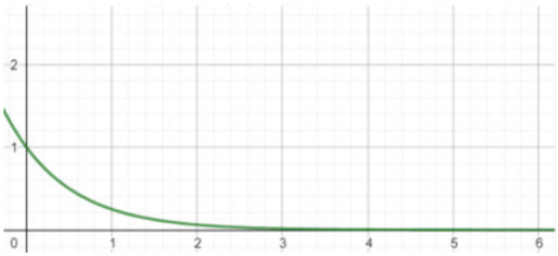


Figura 3. Representación gráfica desarrollada por FPU1 para la solución de la pregunta 4.

En el episodio E6, *justificación intuitiva de la situación,* FPU1 provee una explicación basada en la observación del gráfico realizado en E5, según el contexto de la tarea planteada:

> FPU1: Si a Luis no se le pasan los dolores a los tres días, podemos suponer que el doctor, tal vez, le mintió en la efectividad del remedio... o que simplemente le queda poco tiempo para que pasen los dolores.

Usando la recta $g(x) = -(1/4)x + 1$, observamos que el dolor no se pasa a los 3 días, ya que $g(3) = 1/4$, pero sí al cuarto día, pues $g(4)$. En este sentido, señalamos que, habría que esperar 1 día más, pues el dolor no se pasará completamente a los 3 días.

Solución de pregunta 5). En el episodio E7, *comparación de dos funciones según el contexto*, FPU2 grafica las funciones reales $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ y $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Cabe señalar que, la respuesta de FPU1 es consistente con la que ya había dado anteriormente. En E8, *fundamentación gráfica de la respuesta* (figura 4), FPU1 privilegia (nuevamente) el registro gráfico para fundamentar la solución.

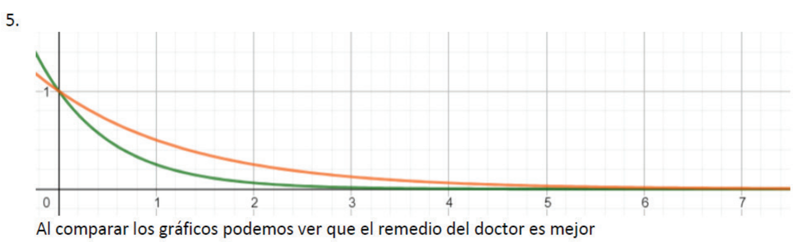


Figura 4. Representación gráfica desarrollada por FPU1 para la solución de la pregunta 5.

De este modo, se destaca que la respuesta correcta de la segunda tarea depende de encontrar la función que describe adecuadamente la situación planteada. En este caso, la función que representa el remedio casero corresponde a la recta $h(x) = -(1/2)x + 1$, ya que así se tendrá que la disminución de dolor es exactamente ½ por día:

$$h(0) - h(1) = 1 - 1/2 = 1/2, h(1) - h(2) = 1/2 - 0 = 1/2.$$

Además, el dolor se pasa en el segundo día, por lo cual el remedio casero es más efectivo que el dado por el médico.

Análisis de la circulación en el ETM idóneo potencial de FPU1. Solución de pregunta 1). En E1 se define en lenguaje natural el concepto de asíntota, lo cual activa la GD en relación con la componente referencial. Luego, en E2 se involucran componentes del plano epistemológico, en este caso, del representamen, debido a la ejemplificación a través de una función exponencial, lo que implica también el referencial, por su definición. Se destaca que, este caso se relaciona con la idea de *dificultad* (Henríquez Rivas y Montoya Delgadillo, 2016), asociada a la componente referencial, pues los objetos y su uso (asíntota, función exponencial) se presentan de forma poco rigurosa en un sentido matemático, lo que impide a FPU1 aprovechar el potencial del trabajo en torno a las génesis y componentes que podrían estar involucradas.

Solución de pregunta 2). En E3 se activa la GS, pues involucra inicialmente coordinar los objetos representados en dos registros (algebraico y gráfico) desde el enunciado. Luego, la visualización de estos para explicar qué ocurre con cada función potencia dada, lo que involucra la activación de la GD y el referencial por la asociación de dichas funciones y sus características (dilatación y contracción). De este modo, en E3 se activa el plano vertical [Sem-Dis], del cual se resalta una explicación intuitiva, similar a la solución de la pregunta 1. Asimismo, hay evidencias de una *dificultad* en el representamen, debido a la coordinación de la notación entre el enunciado y la solución, presentada con falta de rigurosidad.

Solución de pregunta 3). El E4 activa la GS, dado por la expresión algebraica presentada y la visualización en el contexto de la tarea planteada. Se provee una justificación ingenua de dicha expresión, que describe la situación, lo cual activa la GD, debido a que se activan conocimientos del representamen (correctos o no), por ejemplo, la utilización de la función exponencial, con la intención de generar un proceso de prueba. En esta solución se activa el plano vertical [Sem-Dis]. Sin embargo, se reconoce que existe un *bloqueo* (Henríquez Rivas y

Montoya Delgadillo, 2016), asociado a la componente referencial, pues la expresión matemática proporcionada no responde al enunciado planteado, lo que podría estar relacionado con la necesidad de analizar el diseño de la tarea y la definición de la función exponencial involucrada, ya que lleva a un error en la respuesta dada.

Solución de pregunta 4). En E5 la elección del registro semiótico presentado por FPU1 es un gráfico, utilizando un programa computacional para ello. En este sentido, el plano vertical empleado es [Sem-Ins]. Luego, en E6, el trabajo propuesto activa la visualización de dicho gráfico y la prueba experimental con el fin de proveer una justificación, la que no se basa en datos proporcionados o en un análisis más profundo.

Solución de pregunta 5). Finalmente, en E7, FPU1 compara las gráficas de las funciones que propone, lo cual activa el plano vertical [Sem-Ins]. Luego, en E8, la validación de su respuesta se apoya en el registro gráfico del episodio anterior, sin recurrir a un argumento con palabras. Lo anterior, se asocia a una *prueba sin palabras,* planteada por Richard (2004), lo que activaría el plano vertical [Sem-Dis], con una componente referencial ausente. En este caso, al igual que en el análisis de la solución en la pregunta 3, se considera que existe un *bloqueo* en la componente referencial, pues los gráficos de las funciones no responden al enunciado planteado, lo cual evidencia un error en la definición de función.

Caso 2: FPU2

Fase 1. La tarea presentada (figura 5), se asocia a un contexto cercano para el estudiante y corresponde a una adaptación realizada por FPU2 de un libro de texto. Precisamente, la tarea consiste en una aplicación sobre la cuenta de un servicio básico, donde FPU2 cambió la cuenta y las dos preguntas propuestas (i y ii).

En las cuentas de agua, generalmente, se especifica el cargo fijo, los metros cúbicos consumidos y los montos que se van a pagar por agua potable y por servicio de alcantarillado, los cuales dependen de la cantidad de metros cúbicos consumidos.

A partir de las imágenes 1 y 2:

i) Modele la función que representa la relación entre metros cúbicos, suponiendo que se cobra \$17 por m^3, y el monto a pagar para cualquier consumo. Justifique.

ii) Describa la función modelada anteriormente a partir de sus elementos (dominio, recorrido, pendiente, creciente o decreciente, gráfico).

Imagen 1

Imagen 2

Figura 5. Tarea formulada por FPU2.

La primera pregunta es abierta e involucra la conversión del enunciado escrito en lenguaje natural a la escritura de una expresión que modele la situación. La segunda pregunta, implica relacionar la función anterior con sus propiedades, la cual se formula de forma abierta, es decir, que existe la posibilidad de representar los elementos en diversos registros semióticos, además del registro gráfico, el que se solicita explícitamente.

En cuanto al nivel de la habilidad representar que la tarea privilegia, FPU2 clasifican la tarea en términos de su nivel de desempeño, en un nivel de alta demanda cognitiva, lo que justifican, dadas las actividades de *tratamiento* y *conversión* (Duval, 1995), implicadas en la solución. En la justificación señalan:

> FPU2: [...] Logran una cierta autonomía para aplicar tratamiento y/o conversión de actividades semióticas, implicando usar más de dos registros de representación en las soluciones y basadas en la interpretación de una sola fuente de información, razonando e infiriendo. Son también capaces de exponer sus interpretaciones y justificar los resultados.

Fase 2. Identificación de episodios y descripción del trabajo. En cuanto al análisis del *ETM idóneo potencial*, se identifican seis episodios asociados con la solución esperada por FPU2, según las preguntas i) y ii) que han formulado.

Solución de pregunta i). En el episodio E1, *deducción de la expresión algebraica que describe la situación*, se espera a la función $f(x)=17x+643$ como respuesta. El episodio E2, considera la *justificación de la solución*, lo que FPU2 fundamentan en que:

> FPU2: [...] cada metro cúbico de agua tiene un valor de $17, y lo que varía cada mes (variable) es la cantidad de metros cúbicos consumidos. Por otra parte, el cargo fijo tiene un valor de $643 pesos, y este es un valor constante.

Solución de pregunta ii). En el episodio E3, se *interpreta el dominio de la función*. FPU2 señalan que el dominio tiene ciertas condiciones, dado que se trata de metros cúbicos, lo que debe estar definido dentro del conjunto de los números racionales positivos. Luego, el episodio E4 está dado por la *interpretación del recorrido de la función,* para lo cual FPU2 señalan que esta representa el valor de consumo mensual y, como se trata de dinero, este debe estar definido dentro del conjunto de números naturales. Igual que en el dominio de la pregunta más arriba, esta respuesta es correcta, pero imprecisa al momento de querer enseñar funciones reales, debido a que el dominio y recorrido natural de estas es el conjunto de los números reales, sin existir un cuestionamiento al respecto. En ambos episodios, la respuesta se formuló en lenguaje natural. El episodio E5, muestra el *análisis de la pendiente de la función,* para lo cual FPU2 señalan que la pendiente de la función $f(x)=17x+643$ es 17, como esta es positiva, entonces la función es creciente. Finalmente, el episodio E6 está dado por la *representación gráfica de la función* (Figura 6). Para ello, FPU2 utilizan un software (Geogebra); sin embargo, el gráfico presentado no ayuda a interpretar ni evaluar en el contexto de la situación, esto por los valores que se muestran en los ejes

x e y, lo que, si bien es correcto, podrían llevar a una interpretación errónea o confusa de la tarea propuesta.

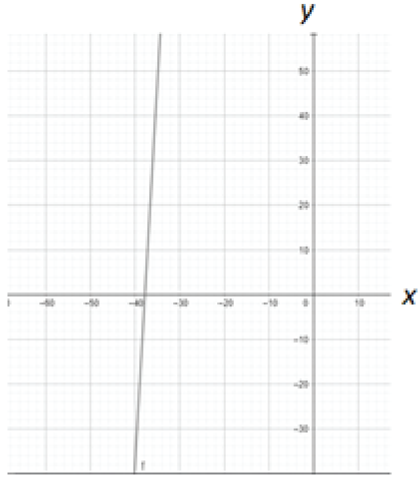


Figura 6. Representación gráfica desarrollada por FPU2.

Análisis de la circulación en el ETM idóneo potencial de FPU2. Solución de pregunta i). En E1 se representa la situación dada en el enunciado a través de la representación en el registro algebraico. Lo anterior involucra la activación del plano [Sem-Ins], dada por la componente representamen del objeto función y la conversión o construcción del registro proporcionado en el enunciado, del lenguaje natural a la representación algebraica. En E2, se activa el proceso de prueba en la justificación de la expresión algebraica que representa la situación en el contexto dado por la tarea. En este caso, se asocia el trabajo al plano vertical [Sem-Dis]. No obstante, en esta justificación, la componente referencial del plano epistemológico, asociada a la función implicada, no aparece explícitamente.

Solución de pregunta ii). Se vincula con propiedades de la función, dado que en E3 y E4 se activan las componentes del referencial en la descripción en lenguaje natural de su dominio y recorrido, junto con la interpretación de estos elementos en el contexto planteado. Lo anterior, implica la activación del plano [Sem-Dis], por el hecho de realizar una consideración teórica acerca de estos elementos. En E5, el trabajo involucra activar la GS dada por la observación del objeto función desde el representamen y la visualización de este en el registro algebraico, donde su pendiente (17 de la función) parece ser un artefacto simbólico que se utiliza sin justificación, es decir, en este episodio se activa el plano [Sem-Ins]. En E6, el trabajo conlleva la activación de las mismas componentes anteriores, es decir, el plano [Sem-Ins] donde la función se representa en un gráfico (construcción), pero en este caso utilizando un artefacto tecnológico (sin su potencial dinámico).

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La caracterización del ETM *idóneo potencial* de FPU1 y FPU2, en relación con las tareas diseñadas, describe las génesis, componentes y planos verticales que son activados. La tabla 2 resume los análisis, según cada tarea.

Tabla 2. Resumen del ETM *idóneo potencial*

FPU	Tarea	Preguntas formuladas en la tarea	Episodio	*Tipificación de las génesis, componentes y planos verticales activados*						
				Génesis semiótica (GS)		Génesis instrumental (GI)		Génesis discursiva (GD)		Plano vertical
				Representamen	Visualización	Artefacto	Construcción	Referencial	Prueba	
FPU1	Clásicas	1	E1, E2	X	X			X**		
		2	E3	X**	X			X	X	[Sem-Dis]
	Contexto cercano para el estudiante	3	E4	X	X			X*	X	[Sem-Dis]
		4	E5, E6	X	X	X (tecnológico)	X		X	[Sem-Ins]
		5	E7, E8	X	X			X*	X	[Sem-Ins] [Sem-Dis]
FPU2	Contexto cercano para el estudiante	i	E1, E2	X	X				X	[Sem-Dis]
		ii	E3, E4, E5, E6	X X	X X	X (simbólico y tecnológico)	X	X		[Sem-Dis] [Sem-Ins]
Nota: * alude a bloqueo en el ETM; ** alude a dificultad en el ETM (Henríquez Rivas y Montoya Delgadillo, 2016).										

Fuente: elaborado por las autoras.

Como se observa en los resultados de FPU1, el énfasis de su trabajo está en la GS y GD, y, en menor medida, la aparición de la GI. Esta última aparece con el uso de un programa para graficar las funciones implicadas, lo cual, a nuestro juicio, podría haber sido mejor aprovechado en la propuesta de FPU1. En el caso de las génesis privilegiadas (GS y GD), se identificaron dificultades asociadas con las componentes referencial y representamen en la tarea clásica, así como bloqueos en la componente referencial asociada a la tarea en contexto cercano para el estudiante. En este sentido, las definiciones (asíntota, función exponencial) y sus usos en el trabajo matemático propuesto por FPU1 son presentadas con deficiencias, falta de rigurosidad matemática, o bien, de forma intuitiva y poco elaborada.

En relación con el párrafo precedente, se destaca que el plano vertical [Sem-Dis] es el que tiene mayor presencia en la propuesta de trabajo matemático para la enseñanza, aunque presenta aspectos por revisar y mejorar por parte de FPU1. Este aspecto se evidencia en E4, en el cual, a pesar de que se intentó crear una pregunta original, motivadora y cercana para los estudiantes, resulta imprecisa, pues parece obviar que $f(0) = 1$ representa el 100% de dolor y que este disminuye a ¼ por día, lo que muestra deficiencias en la interpretación acerca de la función exponencial. En este sentido, consideramos que el ETM *idóneo potencial* de FPU1 presenta escasa reflexión en cuanto al uso de representaciones de la función continua, en relación con el sentido de los valores reales que puede tomar el dominio de esta y, en el contexto de la situación planteada, lo cual sería pertinente de considerar en una perspectiva de enseñanza (Rousse, 2020).

En cuanto al uso de artefactos por PFU1, estos aparecen en el trabajo de E5 y E6. Su uso para fundamentar o argumentar un razonamiento discursivo, que podría activar el plano [Ins-Dis], o bien, para favorecer la habilidad representar en juego, no es privilegiado en el trabajo asociado al diseño para el aprendizaje propuesto. Se constata la necesidad de revisar los enunciados de las tareas, y si bien es valorable la intención de vincular con contextos cercanos a la realidad, estos deben ser mejor planteados, considerando los conceptos involucrados, la diversidad de representaciones disponibles, la rigurosidad matemática, la claridad y su validez de acuerdo al contexto que se quiere presentar.

Por último, desde la perspectiva del ETM sobre el trabajo de FPU1, se evidencia la componente referencial debilitada, con dificultades para integrar los contenidos involucrados, lo cual implica un ETM *idóneo* débil en relación con su nivel formativo, ya que este debería adquirir distintas connotaciones y sentidos para la enseñanza. Al respecto, si bien se trata de un estudio de dos casos, esto podría servir de ejemplo para ser revisado durante las diversas asignaturas de la formación docente, de manera de robustecer los conocimientos disciplinares e integrar la disciplina con una perspectiva didáctica, pues el ETM *de referencia* adquirido en los años de estudio como FP, no le ha permitido integrar dichos saberes para concretar una respuesta en la perspectiva del ETM *idóneo* para la enseñanza.

En este contexto, se destaca que se podrían replantear las tareas propuestas y el trabajo que estas demandan, con la intención de propiciar circulaciones bajo la idea de *trabajo matemático completo* (Kuzniak *et al*., 2016a), de manera que activen un trabajo eficiente y adecuado en términos de génesis y componentes activadas. Se cree que esto ayudaría a favorecer y fortalecer el trabajo asociado a la habilidad representar, que solicita la actividad planteada a los FP.

Para ello, es fundamental un trabajo que cuestione el diseño de tareas y el análisis del ETM *idóneo potencial* que estas demandan. A modo de ejemplo, se podrían diseñar secuencias de tareas que pongan énfasis en las representaciones del concepto función, con apoyo de un software que aproveche el potencial dinámico de estas, para favorecer distintos procesos cognitivos (en alusión a Arzarello *et al*., 2002), lo cual se podría plantear en la formación práctica del profesorado.

De los análisis al trabajo propuesto por FPU2, quien ha presentado una tarea asociada a un contexto cercano para el estudiante, al parecer esto refleja en gran medida el trabajo desarrollado por los estudiantes en esta institución. En este caso, las circulaciones del ETM *idóneo potencial* dan cuenta de la intención por activar de forma más variada las génesis implicadas. En este sentido, se considera que sería provechoso para la formación del profesorado propiciar oportunidades para el diseño de la enseñanza, que considere el uso de herramientas tecnológicas dinámicas asociadas al análisis de funciones y sus diversas representaciones, tal como sugieren los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática (CPEIP, 2021).

En cuanto a la elección y adaptación de la tarea propuesta por FPU2, se destaca la intención por adaptarla de un libro de texto, en la cual se propone favorecer el trabajo alrededor de variados registros de representación implicados en el desarrollo de esta. El énfasis de su trabajo está en la GS y, con menos presencia, las GD y GI. Lo anterior se podría deber a la intención por privilegiar un trabajo semiótico asociado a la habilidad representar. En contraste con el trabajo de FPU1, en este caso no se observan dificultades ni bloqueos asociados al trabajo matemático.

De la misma manera que el caso anterior, se considera que una revisión y atención a la formulación de tareas en la formación del profesorado, en la perspectiva del diseño de tareas en educación matemática –*task design*– (Watson y Ohtani, 2015), sería pertinente y, también, propiciar un trabajo matemático completo, mediante secuencias de tareas, lo que contribuiría a enriquecer la propuesta y a robustecer la habilidad representar involucrada.

En cuanto al trabajo matemático relacionado con la pregunta i), se observa una intención por activar el proceso de prueba cuando el enunciado solicita la justificación de la función que representa la situación dada, pero sin recurrir de forma explícita a la componente referencial del plano epistemológico. En este sentido, se cree que este tipo de trabajo se vería favorecido si las actividades se realizarán en conjunto con otras perspectivas, como la modelación matemática (Borromeo Ferri, 2010), donde el ciclo de modelización considera la traducción del mundo real al de las matemáticas, lo cual ayudaría a hacer emerger los aspectos no considerados en la propuesta de FPU2. Cabe señalar que, el currículo chileno de educación secundaria considera las habilidades representar y modelar (Mineduc, 2015), por lo cual es parte del trabajo de planificación de la enseñanza que el profesor en ejercicio debe considerar.

Con respecto al trabajo matemático relacionado con la pregunta ii), se destaca la activación de los planos verticales, [Sem-Ins] y [Sem-Dis]. Sin embargo, no se evidencia la activación del proceso de prueba y, en E6, el uso de tecnología no aprovecha el potencial dinámico del programa empleado. Esto podría mejorar desde los enunciados de las tareas, en los que se haga alusión explícita a cierto tipo de razonamientos discursivos como la explicación o la argumentación (Duval, 1995), y al uso del software de geometría dinámica, lo que conlleva modificar las tareas para que estas sean presentadas de una forma *abierta* (Arzarello *et al.*, 2002). Asimismo, se observa que en E3, FPU2 realiza una interpretación del dominio de la función que no es cuestionada en un sentido matemático, debido a que sólo considera un dominio de los números racionales y no el conjunto de los números reales. Al respecto, sería pertinente una reflexión sobre el pasaje entre tareas con contextos de dominios discretos y otras de funciones continuas, otorgando significados a la naturaleza de las variables involucradas, lo cual es común observar en libros de texto u otro tipo de manuales de enseñanza (Rousse, 2020).

De los análisis presentados se destaca que, según la propuesta de cada caso hay ciertas similitudes y diferencias. En cuanto a la organización de las tareas que cada FP propone, se observa que estas son distintas y obedecen a dinámicas de trabajo diferentes; mientras que de FPU1 se presentan dos tareas, de las cuales dos preguntas se formulan como *clásicas*, las tres preguntas siguientes se relacionan con una tarea en *contexto cercano para el estudiante*. En el caso de FPU2 se muestra una tarea con 2 preguntas formuladas en *contexto cercano para el estudiante*. De estas, destaca que su elección se basa en que son representativas del trabajo realizado en U1 y en U2. En U1 se observa una intención por la adaptación de tareas clásicas y la creación de tareas en contexto; en U2 el uso de los libros de texto de los estudiantes, ha sido sustento y apoyo para la adaptación de tareas por parte de los FP. Por otra parte, FPU1 ha realizado su propuesta de trabajo de manera individual, mientras que FPU2 han realizado su trabajo de manera colaborativa, lo cual hace suponer que podría haber influido en los errores y dificultades detectados en el primer caso. No obstante, se sostiene que hace falta una mayor reflexión desde el dominio disciplinar y sus implicancias en la enseñanza, lo cual debe ser revisado y atendido en la formación del profesorado.

Además, se reconocen similitudes en cuanto a las génesis activadas y los planos verticales, así como la ausencia del plano vertical [Ins-Dis], lo que se relaciona con la activación del proceso de construcción usando artefactos y su justificación a través de razonamientos discursivos. Asimismo, se observan ciertas deficiencias en cuanto a los fundamentos matemáticos; un referencial débil en el caso de FPU1 con bloqueos y dificultades y, que puede ser mejor gestionado o cuestionado en el caso de FPU2. Si bien se trata de resultados parciales y una organización del trabajo diferente en cada institución (individual y grupal), la cual podría haber condicionado los resultados, estos pueden servir de ejemplo y, como un asunto a revisar en la formación del profesorado, especialmente en la conformación del ETM *de referencia*, y ETM *idóneo* del FP, donde la formación disciplinar y didáctica disciplinar se debe articular en cuanto a su conocimiento especializado en asignaturas implicadas (Carrillo *et al.*, 2018). También, poner atención entre el ETM *idóneo potencial* y el ETM *idóneo actual* (en el aula), pues esto podría permitir confrontar y analizar lo planificado y lo efectivamente desarrollado por profesores. En este sentido, las actividades que articulan teoría y práctica en la formación docente podrían ser un camino a abordar desde la teoría ETM, u otras perspectivas pertinentes.

En ambos casos, se constata que la formación del profesorado debe considerar el uso de artefactos en la perspectiva de la GI; es decir, como mediadores del conocimiento matemático para favorecer su uso aprovechando el potencial dinámico, lo que requiere atención al diseño de tareas y el uso de las herramientas del software. En la perspectiva del ETM, la activación de dicha génesis está en sintonía con lo que establece tanto el currículo (Mineduc, 2015), como los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática (CPEIP, 2021), en los cuales se demanda la integración de habilidades, conocimientos y actitudes asociados a los conceptos matemáticos, y considera el uso de diversos tipos de herramientas para la enseñanza de las matemáticas. Por otra parte, en el contexto de la formación del profesorado de matemáticas, los distintos tipos de ETM y su diferenciación, podría contribuir a mejorar la reflexión de este en su rol de profesor.

Con respecto a las limitaciones del estudio, estas se relacionan con sus alcances, pues se cree que el desarrollo de habilidades matemáticas en la formación inicial docente en una perspectiva que pone al FP en su rol como profesor y actor clave en la gestión del aula, puede ser profundizado en estudios posteriores. Por lo tanto, se considera que las reflexiones de este trabajo pueden contribuir al desarrollo de actividades de formación del profesorado que se articulan con el quehacer del profesorado en el aula. En particular, el desarrollo de las habilidades matemáticas que el currículo escolar promueve (Mineduc, 2015) y cómo desarrollarlas. También, se podría pesquisar cómo el FP se apropia de estas habilidades para la enseñanza de temas matemáticos específicos, por ejemplo, centrados en el diseño de instrumentos de evaluación (Pincheira Haucka y Vásquez Ortiz, 2018), entre otros.

A modo de cierre, se cree que resultaría interesante realizar implementaciones de las tareas propuestas por FP en contextos de aula reales, dados en los espacios de prácticas pedagógicas que están dentro de los planes formativos. Se reconoce que esta podría ser considerada como una limitación en el presente estudio. Si lo anterior fuera considerado para una futura investigación, podría tomarse en cuenta la articulación de cursos de didáctica disciplinar con experiencias de prácticas pedagógicas en la formación inicial docente. En este sentido, tanto el diseño metodológico como el marco teórico, podrían ser utilizados o adaptados para un diseño de caso múltiple, o bien, una metodología mixta con mayor número de FP e instituciones participantes.

Finalmente, se destaca el potencial de este tipo de estudios, ya que contribuyen a reflexionar sobre lo que se realiza en la formación del profesorado, sus alcances y limitaciones, proporcionando elementos de atención y vigilancia para la comunidad de formadores. En este sentido, tanto este trabajo como otros (*e.g.*, Henríquez Rivas *et al.*, 2021a) dan cuenta de cómo los registros semióticos no son del todo aprovechados, pues el FP confunde su ETM *personal* con su ETM *idóneo* y, a su vez, se requiere relacionar esto con el ETM *de referencia* de su formación.

AGRADECIMIENTOS

Carolina Henríquez-Rivas agradece el financiamiento al Proyecto Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Chile, Fondecyt de Iniciación N°11230523.

Paula Verdugo-Hernández agradece el financiamiento al Proyecto Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Chile, Fondecyt de Iniciación N°11230240.

REFERENCIAS

Ainley, J., y Pratt, D. (2005). The significance of task design in mathematics education: Examples from proportional reasoning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103–108). PME.

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA, 8*(2), 61-73. https://doi.org/10.30827/pna.v8i2.6117

Adu-Gyamfi, K. y Bossé, M. J. (2014). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*, 167-192. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9416-x

Amaya De Armas, T., Castellanos, A. G. y Pino-Fan, L. R. (2021). Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Uniciencia, 35*(2), 1-15. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.12

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM Mathematics Education*, *34*(3), 66-72. https://doi.org/10.1007/bf02655708

Becker, J. P. y Shimada, S. (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behavior. *J Math Didakt, 31*, 99–118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrión Miranda, V., y Pluvinage, F. (2014). Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-II), 267–286. https://doi.org/10.12802/relime.13.17413

CPEIP. (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática*. Ministerio de Educación.

Denzin, N. K. (1978). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Method* (2.ª ed.). McGraw-Hill.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Espinoza-Vázquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo Yáñez, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Relime*, *21*(3), 301-324. https://doi.org/10.12802/relime.18.2133

Flores González, M. y Montoya Delgadillo, E. (2016). Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos. *Educación Matemática, 28*(2), 85-117. https://doi.org/10.24844/em2802 .04

Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, *30*(54), 1-22. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Guzmán, I. (1996). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime*. *1*(1), 5-21.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134. https://doi.org/10.1016/s0732-3123(99)80064-9

Henríquez Rivas, C. y Montoya Delgadillo, E. (2016). El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el liceo. *Bolema*, *30*(54), 45−66. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a03

Henríquez Rivas, C., Ponce, R., Carrillo Yáñez, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021a). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 123-142. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210

Henríquez Rivas, C., Guerrero Ortiz, C. y Ávila Barrera, A. (2021b). Trabajo matemático de profesores universitarios: Heurísticas de solución de una tarea. *Educación Matemática, 33*(3), 233-262. https://doi.org/10.24844/em3303.09

Henríquez Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transition stage between personal and reference mathematical work. En A. Kuzniak *et al.* (eds.). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 121-146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_6

Kieran, C., Doorman, M. y Ohtani, M. (2013). Frameworks and principles for task design. En A. Watson, A. y M. Ohtani (Eds.), *Task design in Mathematics education* (pp. 19−74). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_2

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. y Richard, P. (2022). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Kuzniak, A. y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*. 106, 271–289. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016a). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education, 48*, 861-874. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, *17*(4-I), 5-15. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741ª

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016b). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education, 48*, 721-737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

López Hernández, F., Fuchs Gómez, O. y Briones Cortés, R. (2019). Realidad aumentada y Matemáticas: propuesta de mediación para la comprensión de la función. *Campus Virtuales, 8*(2), 63-72.

Manrique, N., Gallo, A. y Prada, R. (2019). Efectos de la aplicación de la ingeniería didáctica en el aprendizaje del concepto de función. *Revista Espacios, 40*(26), 1-12. https://doi.org/10.22463/17948231.1475

Margolinas, M. (2013). *Task Design in Mathematics Education*. Proceedings of ICMI Study 22.

Martínez De La Rosa, F. (2015). Esquemas conceptuales de los estudiantes en relación con algunas características de las funciones. *Suma, 79*, 41-52.

Martín-Fernández, E., Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Conversions Between Trigonometric Representation Systems by Pre-service Secondary School Teachers. *PNA*, *16*(3), 237-263. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.21957

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*. Tarquin Publications.

Mineduc. (2015). *Bases Curriculares*. 7.º Básico a 2.º Medio. Autor.

Montoya-Delgadillo, E. Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Relime, 17*(4-I), 181–197. https://doi.org/10.12802/relime.13.1749

Pincheira Haucka, N. y Vásquez Ortiz, C. (2018). Conocimiento Didáctico-Matemático para la Enseñanza de la Matemática Elemental en futuros profesores de educación básica: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Estudios Pedagógicos, XLIV*(1), 25-48. https://doi.org/10.4067/s0718-07052018000100025

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y. y Castro-Gordillo, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220. https://doi.org/10.11144/javeriana.m11-23.sfpc

Richard, P. (2004). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Peter Lang.

Rousse, S. (2020). Discret et continu au lycée. Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités. Mathématiques générales [math.GM]. Université Sorbonne Paris Cité, 2018. Français.

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Ediciones Morata.

Stake, (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Stewart, J. (2008). Cálculo de una variable. Sexta edición. Cengage Learning Editores S.A.

Torres, M.D., Cañada, M. C. y Moreno A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2° de primaria: estructuras y representaciones. *PNA*, *16*(3), 215-236. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2009). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*(1), 3-19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Verdugo-Hernández, P., Espinoza-Vásquez, G. y Carrillo Yáñez, J. (2022). Análisis de una tarea sobre sucesiones desde el uso de las herramientas y el conocimiento matemático del profesor. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 125-145. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3457

Watson, A. y Ohtani, M. (2015). *Task Design in Mathematics Education. An ICMI study* 22. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_13

Yin, R.K. (2018). *Case study research and applications. Design and methods* (6e ed.). Sage.

Yoon, H. y Thompson, P. (2020). Secondary teachers' meanings for function notation in the United States and South Korea. *Journal of Mathematical Behavior, 60*, 100804. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100804

Watson, A. y Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 205-215. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9059-3

Autor de correspondencia

Paula Verdugo-Hernández

Dirección: Campus Linares, Escuela de Pedagogía en Ciencias Naturales y Exactas,
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Talca,
Código Postal 3580000.
pauverdugo@utalca.cl