

The logo for CienciaUAT, featuring the text "CienciaUAT" in a bold, orange, sans-serif font. The text is contained within a white rectangular box with rounded corners and a thin orange border.

CienciaUAT

ISSN: 2007-7858

ISSN: 2007-7521

Universidad Autónoma de Tamaulipas

Suárez-Domínguez, Edgardo Jonathan; Palacio-Pérez, Arturo;  
Pérez-Sánchez, Josué Francisco; Izquierdo-Kulich, Elena  
Efecto del patrón de flujo sobre las pérdidas de presión para  
flujo bifásico a través de lechos porosos bajo perspectiva fractal  
CienciaUAT, vol. 14, núm. 2, 2020, Enero-Junio, pp. 146-159  
Universidad Autónoma de Tamaulipas

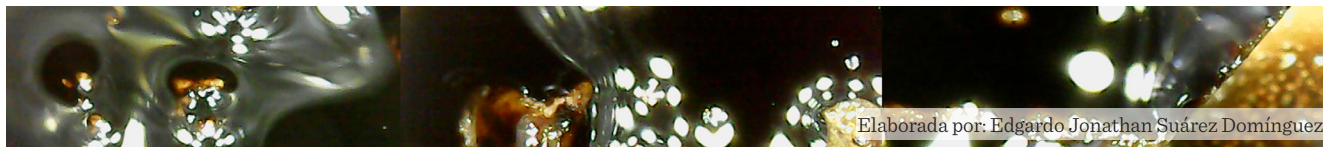
DOI: <https://doi.org/10.29059/cienciauat.v14i2.1308>

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=441970371004>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

UAEH The logo for redalyc.org, featuring the text "redalyc.org" in a red, sans-serif font. The text is preceded by a small red square icon.

Sistema de Información Científica Redalyc  
Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso  
abierto



Elaborada por: Edgardo Jonathan Suárez Domínguez

# Efecto del patrón de flujo sobre las pérdidas de presión para flujo bifásico a través de lechos porosos bajo perspectiva fractal

## Flow pattern effect on the pressure drop of biphasic flow through porous media from a fractal dimension perspective

Edgardo Jonathan Suárez-Domínguez<sup>1\*</sup>, Arturo Palacio-Pérez<sup>2</sup>, Josué Francisco Pérez-Sánchez<sup>1,3</sup>, Elena Izquierdo-Kulich<sup>4</sup>

### RESUMEN

La descripción del comportamiento de un flujo bifásico, a través de lechos porosos, por medio de modelos, basados en las ecuaciones de fenómenos de transporte, se dificulta debido a la irregularidad geométrica de los canales que se forman entre las partículas sólidas que constituyen el lecho. Los modelos deterministas desarrollados para flujos monofásicos requieren del ajuste de constantes empíricas y no pueden extrapolarse a flujos bifásicos, donde el patrón de flujo generado en el sistema influye significativamente sobre el comportamiento del flujo total y las pérdidas de presión por fricción. Por lo anterior, en este trabajo se presenta un modelo para describir el comportamiento del flujo bifásico en función del patrón de flujo y de la morfología, las dimensiones y las condiciones de operación del lecho poroso, cuya obtención se basó en un formalismo, empleando conjuntamente las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento, la geometría fractal y el cálculo diferencial fraccional. El modelo predice que, para una misma composición del flujo bifásico, el patrón de flujo influye significativamente sobre las pérdidas de presión por fricción, habiendo un incremento cuando una de las fases se encuentra dispersa en el seno de la otra. Por otro lado, el incremento de la dimensión fractal de los poros causa a su vez un incremento de las pérdidas de presión por fricción. El modelo presenta limitaciones asociadas a las consideraciones establecidas durante su obtención, de tal manera que sólo es válido cuando los efectos de la tensión superficial son más significativos que los gravitatorios, despreciándose los efectos de esos últimos sobre el patrón de flujo, así como para el estado estacionario.

**PALABRAS CLAVE:** reservorio fractal, lecho poroso, flujo complejo, ecuación fraccional de transporte, predicción de caída de presión.

### ABSTRACT

The description of the behavior of a biphasic flow through porous beds by means of models based on the equations of transport phenomena is made difficult due to the geometric irregularity of the channels that are formed between the solid particles that make up the bed. Deterministic models developed for single-phase flows require the adjustment of empirical constants and cannot be extrapolated to biphasic flows, where the flow pattern generated in the system significantly influences the behavior of the total flow and the frictional pressure losses. Therefore, in this paper, we present a model to describe the behavior of the biphasic flow in relation to the flow pattern and the morphology, dimensions, and operating conditions of the porous bed, whose obtainment was based on a hierarchy that used the equations for conservation of momentum, fractal geometry and fractional differential calculus jointly. The model predicts that, for the same composition of the biphasic flow, the flow pattern significantly influences friction pressure losses, with an increase when one of the phases is dispersed within the other. On the other hand, the increase in the fractal dimension of the pores, in turn, causes an increase in pressure loss due to friction. The model has limitations associated with the considerations established during its collection, since it is only valid when the effects of surface tension are more significant than the gravitational effects, the effects of the latter being disregarded on the flow pattern, as well as for the stationary state.

**KEYWORDS:** fractal reservoir, porous bed, complex flow, fractional equation of transport, pressure drop prediction.

\*Correspondencia: edgardo.suarez@uat.edu.mx/ Fecha de recepción: 31 de mayo de 2019/ Fecha de aceptación: 4 de octubre de 2019/ Fecha de publicación: 31 de enero de 2020.

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Tamaulipas, Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo, Centro Universitario sur, Circuito Universitario s/n, Tampico, Tamaulipas, México, C. P. 89000. <sup>2</sup>Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Ingeniería, Coyoacán, Ciudad de México, México. <sup>3</sup>Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, Centro de Investigación en Petroquímica, Altamira, Tamaulipas, México. <sup>4</sup>Universidad de la Habana, Facultad de Química, Departamento de Química-Física, Vedado, La Habana, Cuba.

## INTRODUCCIÓN

El flujo a través de lechos porosos es un proceso que se asocia con diferentes operaciones unitarias que se llevan a cabo en la industria (Pesavento y col., 2017), tales como los procesos continuos de adsorción (Flury y Aramrak, 2017), reacciones químicas heterogéneas o catalizadas por sólidos (Ledesma-Durán y col., 2017), filtración e intercambio iónico, entre otras (Bear, 2018). Este fenómeno se puede observar en la naturaleza, asociado al movimiento de las aguas subterráneas, y en los procesos de extracción de petróleo crudo desde yacimientos porosos (Kokubun y col., 2018). En dicho contexto, los estudios con soluciones analíticas que se han llevado a cabo, para describir y modelar el comportamiento de estos procesos, asumen que el flujo es monofásico. Sin embargo, pueden presentarse situaciones en las cuales se genera un flujo bifásico, como cuando se extraen crudos pesados con agua en su composición, o se emplean productos químicos para disminuir la viscosidad e incrementar la eficiencia de la explotación de los yacimientos.

La presencia de las partículas en el lecho causa una pérdida de presión significativa, debido a la tensión de corte en la pared de estas, de aquí que los valores de flujo monofásico que se puedan lograr para una fuerza directora aplicada son mucho menores que los que se logran en un tubo (Hjelmeland y Larrondo, 1986). El área superficial del sólido que se encuentra en contacto con el fluido depende de forma compleja de la morfología de las partículas, de la distribución de tamaños, de la disposición espacial entre las mismas, y de la porosidad del lecho (Valdes-Perez y col., 2012). Estos factores se consideran habitualmente a través del ajuste de parámetros empíricos de los modelos que se emplean para predecir el comportamiento del flujo (Mahzari y col., 2018). Debido a la tensión de corte, es de esperar que el incremento en el área superficial por unidad de volumen del sólido, conlleve a un incremento de las pérdidas de presión por fricción, de ahí la importancia de disponer

de modelos fenomenológicos que permitan tomar en cuenta de forma explícita tales efectos. La descripción es aún más compleja en el caso de flujo bifásico, donde además de los factores antes mencionados, influyen los patrones de flujo que se puedan presentar en estos sistemas (Huang y col., 2018).

El objetivo de este trabajo consistió en obtener un modelo para predecir el comportamiento del flujo bifásico y las pérdidas de presión por fricción, que tome en cuenta de forma explícita el efecto de la morfología del lecho y los patrones de flujo que se pueden presentar.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Consideraciones establecidas para la obtención del modelo

Para la obtención del modelo se establecen las siguientes consideraciones: 1) el área de flujo se visualiza formada por un conjunto de poros circulares con un perímetro irregular, los cuales, se caracterizan a través de un valor de radio promedio  $R$  y dimensión fractal  $f$ , y que se encuentran delimitados por las partículas; 2) el régimen de flujo es laminar; 3) estado estacionario y; 4) se considera que el fluido está compuesto por dos líquidos newtonianos e incompresibles inmiscibles entre sí, donde en dependencia de los efectos de tensión superficial y de mezclado entre ambos se pueden generar 2 patrones de flujo básicos. El primero es una emulsión muy útil en el caso de aplicación de técnicas EOR (Perazzo y col., 2018), en la cual, uno de los líquidos se encuentra en forma dispersa en el seno del otro, y el segundo es un patrón de flujo anular, en el cual, uno de los fluidos presenta una mayor afinidad por las paredes del sólido, de tal manera que se mueve en contacto con estas, mientras que el otro fluido se mueve por el centro de los poros.

La dimensión fractal de dichos canales se determina mediante una observación de la morfología del lecho en un tamaño equivalente al radio de las partículas que forman el le-



cho, y se calcula mediante una fotografía y el empleo de un programa de tratamiento de imágenes. En este sentido, aunque todos los canales son de hecho de formas y tamaños diferentes, se va a considerar un tamaño promedio  $R$  y un valor de dimensión fractal promedio  $f$ , que son parámetros que dependen de numerosos factores, entre los que se pueden mencionar el tamaño y forma de las partículas, el empacamiento que se establezca entre estas y la porosidad del lecho.

### Análisis de la morfología del lecho

En la Figura 1 se muestran las fotografías de 2 lechos porosos, uno compuesto por sólidos redondeados por procesos de meteorización (A) y el otro por rocas trituradas (B). En cada una de estas imágenes se observa en un recuadro rojo la sección considerada para la caracterización de la morfología de los poros. En la Figura 2 se muestran las imágenes correspondientes a los contornos de los poros, donde los valores de dimensión fractal y porosidad se determinaron mediante el empleo del programa ImageJ v1.40g, en el cual, cada imagen a color se convierte en una imagen de 8 bits; a partir de esta, se obtiene una imagen binaria del patrón, a la que se le determina la dimensión fractal vertical y horizontal de las imágenes

(Rasband, 2018), siendo para las partículas redondas  $f = 1.0424$  y para las partículas trituradas  $f = 1.1256$ .

Debido a que el perímetro de los poros presenta una morfología irregular, el valor del área del poro se determina mediante la integral fraccional de orden igual a la dimensión fractal:

$$a = k^{1-f} \int_0^{2\pi} D_r^{-f}[r] d\theta \quad (1)$$

Donde:

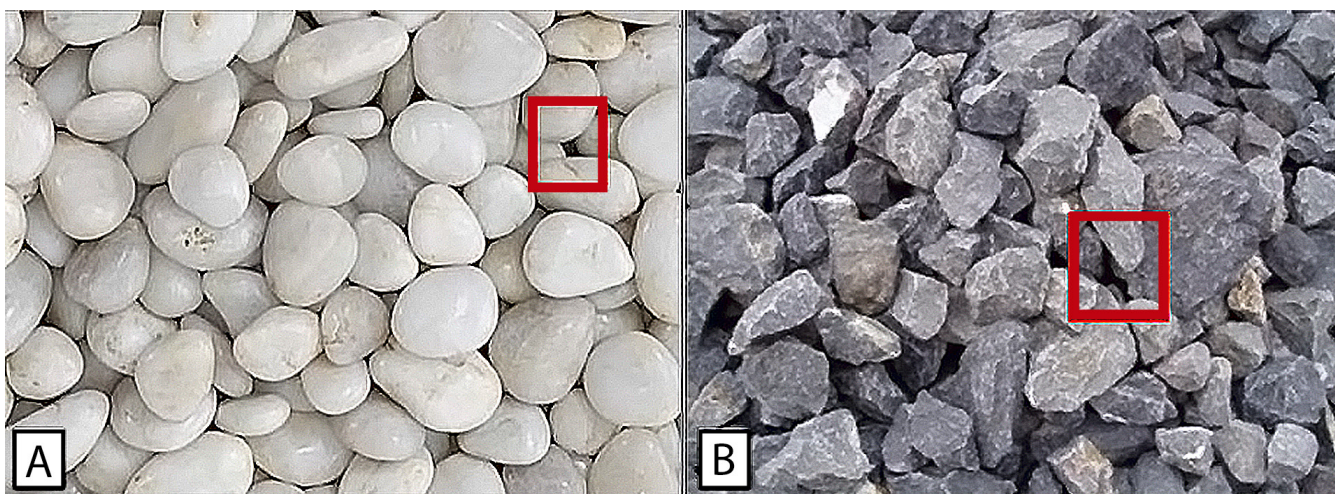
$k$  (m) es un parámetro relacionado con la precisión de la medición del tamaño del poro,  $\theta$  es el ángulo determinado en coordenadas polares para cada punto del círculo irregular que conforma el poro,  $D_r^{-f}$  es el operador que representa la integral fraccional, la cual se determina con el radio en coordenadas radiales ( $r$ ) a lo largo del tiempo ( $t$ ), como:

$${}_0D_r^{-f}[f(r)] = \frac{1}{\Gamma(f)} \int_0^x (r-t)^{f-1} f(t) dt \quad (2)$$

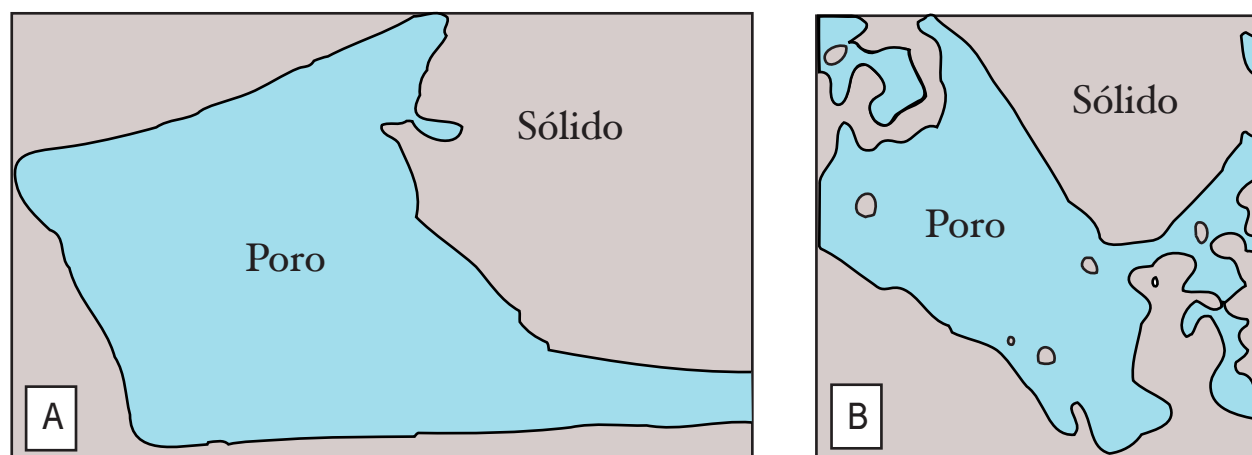
y  $\Gamma(f)$  es la función gamma dada a través de un parámetro matemático ( $x$ ):

$$\Gamma(f) = \int_0^\infty e^{-x} x^{f-1} dx \quad (3)$$

La solución de la integral fraccionaria (2), trasladándolo a valores geométricos, es:



■ Figura 1. Imágenes de lechos de partículas. A: partículas redondeadas; B: partículas trituradas.  
Figure 1. Images from the particle beds. A: rounded particles; B: crushed particles.



■ Figura 2. Morfología de los poros correspondientes a un lecho de partículas pulidas (A) y partículas trituradas (B).

Figure 2. Morphology of the pores from (A) a bed of polished particles and (B) a bed of crushed particles.

$$a = k^{1-f} \frac{2\pi}{\Gamma(f+2)} R^{f+1} \quad (4)$$

Donde:

$R$  representa al radio del poro (m). En esta descripción de la morfología del poro, el radio  $R$  se considera una variable determinista, mientras que el perímetro del canal es una variable aleatoria que se caracteriza a través de la dimensión fractal.

Es importante señalar que la dimensión fractal ( $f$ ) tiene un valor diferente numéricamente al de tortuosidad, utilizado también para caracterizar un medio poroso, donde una dimensión fractal alta se relaciona con una tortuosidad alta (Valdéz-Cepeda y Olivares-Sáenz, 1998).

Algunos autores han correlacionado los diversos valores de tortuosidad, constricción y porosidad (Berg, 2014). En este trabajo, la dimensión fractal permite funcionar como la variable dominante, aunque en un futuro podrían considerarse los elementos en conjunto, a partir de una modelación con CFD.

**Determinación del perfil de velocidad y las pérdidas de presión por fricción cuando el**

**patrón de flujo se corresponde con una emulsión**

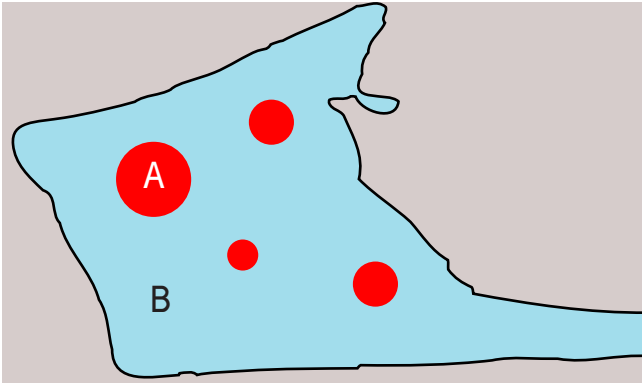
En la Figura 3, se muestra una representación del patrón de flujo correspondiente al caso, en el cual se tiene un sistema de fluido bifásico con formación de una emulsión, donde A corresponde a la fase dispersa (gotas de líquido) y B corresponde al medio de dispersión.

En el caso de los flujos en tubos, las emulsiones se visualizan como un flujo en una sola fase, cuya viscosidad se afecta por la presencia de la fase dispersa (Suárez-Domínguez y col., 2018). En este caso, la viscosidad de la emulsión  $\mu_E$  (Pa·s) se puede estimar a través de la relación:

$$\mu_E = \mu_B \left( 1 + \left( \frac{\mu_B + \frac{5}{2}\mu_A}{\mu_B + \mu_A} \right) v \right) \quad (5)$$

Donde:

$\mu_A$  (Pa·s) es la viscosidad de la fase dispersa,  $\mu_B$  (Pa·s) es la viscosidad del medio de dispersión y  $v$  representa la fracción en volumen de la fase dispersa. En este caso, se utiliza la ecuación 5, que da una expresión para la viscosidad efectiva de una emulsión que ha sido probada para crudos del norte



■ Figura 3. Patrón de flujo bifásico, que se establece en el sistema cuando ambos fluidos forman una emulsión, en donde A es la fase dispersa y B es el medio de dispersión.

Figure 3. Biphasic flow pattern for an emulsified system where A is the dispersed phase (drops of liquid) and B is the dispersive medium.

de México. Sin embargo, pueden considerarse otro tipo de ecuaciones (Mendoza y Santa-maria-Holek, 2010) en dependencia del caso analizado.

Para estimar el flujo que pasa a través de un canal irregular, se parte de la estimación del comportamiento de la velocidad con respecto a la distancia  $r$  desde el centro del canal, para lo cual, se parte de la ecuación de cantidad de movimiento para el sistema de coordenadas cilíndricas, donde, a partir de las consideraciones establecidas, se obtiene la ecuación diferencial parcial:

$$0 = \Phi + \mu_E \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (6)$$

Donde:

$\Phi$  (Pa/m) es el gradiente de presión, sujeta a las condiciones de contorno:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (7a)$$

$$v(R) = 0 \quad (7b)$$

La solución analítica exacta de esta ecuación está dada por:

$$v(r) = \frac{1}{4\mu_E} \Phi (R^2 - r^2) \quad (8)$$

Donde:

La distancia  $R$  desde el centro hasta la pared del canal varía aleatoriamente, debido a la morfología irregular del área de flujo del canal. Por esta razón, para obtener el valor del flujo  $q$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) se integra la velocidad con respecto al área de flujo, para lo cual se toma en cuenta el carácter irregular de esta área, aplicando una integral fraccional de orden  $f$ :

$$q = \int_0^{2\pi} D_r^{-f} [v(r)r] d\theta \quad (9)$$

$$q = \frac{\Phi\pi}{2\mu_E} \frac{f(f+5)}{\Gamma(f+4)} k^{1-f} R^{f+3} \quad (10)$$

Donde:

$f$  es la dimensión fractal del perímetro del canal y cuantifica el carácter irregular y aleatorio de la distancia  $r$ , y que puede considerarse como una buena aproximación del medio. El flujo total  $Q$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) se estima como el producto del flujo  $q$  y el número de canales de flujo  $n$ , el cual se determina como el área disponible para el flujo dividido por el área de un canal:

$$n = \frac{\varepsilon A_t}{a} = \frac{\varepsilon A_t}{k^{1-f} \frac{2\pi}{\Gamma(f+2)} R^{f+1}} \quad (11)$$

Donde:

$\varepsilon$  es la porosidad del lecho, de tal manera que:

$$Q = \frac{\Phi}{\mu_E} \varepsilon \frac{f(f+5)\Gamma(f+2)}{a\Gamma(f+4)} A_t R^2 \quad (12)$$

y definiendo la velocidad  $V_0$  como la relación entre el flujo total y el área total del lecho se obtiene:

$$V_0 = \frac{\Phi}{\mu_E} \frac{f(f+5)\Gamma(f+2)}{4\Gamma(f+4)} \varepsilon R^2 \quad (13)$$

El valor de  $R$  depende de la porosidad del lecho y del tamaño de partículas. Para estimar el valor de  $R$ , las ecuaciones (5) y (13) se expresan en función de las variables no dimensionales:

$$\Phi = \frac{R}{R_p} \quad (14a)$$

$$\kappa = \frac{k}{R_p} \quad (14b)$$

Donde:

$R_p$  (m) es el radio promedio de las partículas, de tal manera que el área promedio  $a$  del canal de flujo y la velocidad  $V_0$  se estiman a través de las relaciones:

$$a = \frac{2}{\Gamma(f+2)} (\kappa)^{1-f} (\varphi)^{f+1} \pi R_p^2 \quad (15)$$

$$V_0 = \frac{\Phi}{\mu_E} \frac{f(f+5)\Gamma(f+2)}{4\Gamma(f+4)} \varepsilon \varphi^2 R_p^2 \quad (16)$$

Tomando en cuenta de que existe una relación entre el área de los poros y el área ocupada por las partículas observada en las escalas macroscópica y microscópica se asume:

$$\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)} = \frac{a}{\pi R_p^2} \quad (17)$$

Donde:

El término de la izquierda de la ecuación (17) representa la relación macroscópica entre el área disponible para el flujo y el área ocupada por las partículas, mientras que en el lado derecho se presenta la relación microscópica entre el área estimada del canal de flujo y el área por una partícula. A partir de las ecuaciones (15) y (17) se obtiene:

$$\varphi^2 = \frac{\varepsilon^{\frac{2}{f+1}}}{(1-\varepsilon)^{\frac{2}{f+1}}} (\kappa)^{2\frac{f-1}{f+1}} \left(\frac{\Gamma(f+2)}{2}\right)^{\frac{2}{f+1}} \quad (18)$$

Sustituyendo la ecuación (18) en la ecuación (16) se obtiene:

$$V_0 = \frac{\Phi}{\mu_E} K_0 \frac{\varepsilon^{\frac{2}{f+1}}}{(1-\varepsilon)^{\frac{2}{f+1}}} d_p^2 \quad (19)$$

$$K_0 = \frac{f(f+5)\Gamma(f+2)}{16\Gamma(f+4)} \left(\frac{\Gamma(f+2)}{2}\right)^{\frac{2}{f+1}} (\kappa)^{2\frac{f-1}{f+1}} \quad (20)$$

Donde:

$d_p$  (m) representa el diámetro promedio de las partículas y el valor de la precisión  $k$ , que debido a la escala posible de medición (Mandelbrot, 1989) se selecciona de tal manera que:

$$\kappa \leq 0.1 d_p \quad (21)$$

A partir de la ecuación (19) se despeja el gradiente de presión:

$$\Phi = \frac{V}{d_p^2 K_0} \frac{\mu (1-\varepsilon)^{\frac{2}{f+1}}}{\varepsilon^{\frac{2}{f+1}+1}} \quad (22)$$

Debido a la morfología irregular de los canales de flujo, hay que considerar que la distancia longitudinal recorrida por el flujo es mayor que la distancia de la línea recta que une a los puntos de entrada y de salida del sistema, de tal forma que, el gradiente de presión se representa a través de la derivada fraccional de la longitud del lecho, lo que permite obtener la ecuación diferencial fraccional:

$${}_0D_z^f(P) = -\frac{V}{d_p^2 K_0} \frac{\mu (1-\varepsilon)^{\frac{2}{f+1}}}{\varepsilon^{\frac{2}{f+1}+1}}, \quad P(0) = P_0 \quad (23)$$

cuya solución está dada por:

$$P(z) = P_0 - \frac{V_0}{d_p^2 K_0} \frac{\mu_E (1-\varepsilon)^{\frac{2}{f+1}}}{\varepsilon^{\frac{2}{f+1}+1}} \frac{z^f}{\Gamma(f+1)} z_0^{1-f} \quad (24)$$

Donde:

$z_0$  representa la precisión en la medición de la longitud del lecho. A partir de la relación anterior se obtiene que las pérdidas de presión por fricción  $\Delta P$  (Pa), para un lecho poroso de longitud  $L$ , pueden estimarse a través de la relación:

$$\Delta P = \frac{V_0}{d_p^2 K_0} \frac{\mu_E (1-\varepsilon)^{\frac{2}{f+1}}}{\varepsilon^{\frac{2}{f+1}+1}} \frac{z_0^{1-f}}{\Gamma(f+1)} L^f = \quad (25)$$

$$\mu_B \left(1 + \left(\frac{\mu_B + \frac{5}{2}\mu_A}{\mu_B + \mu_A}\right)v\right) \frac{V_0}{d_p^2 K_0} \frac{\mu_E (1-\varepsilon)^{\frac{2}{f+1}}}{\varepsilon^{\frac{2}{f+1}+1}} \frac{z_0^{1-f}}{\Gamma(f+1)} L^f$$

donde debe cumplirse que:

$$z_0 \leq 0.1 L \quad (26)$$

La ecuación (25) permite estimar el comportamiento de las pérdidas de presión por fricción, para flujo bifásico en lecho poroso, cuando los líquidos se disponen entre sí formando una emulsión.



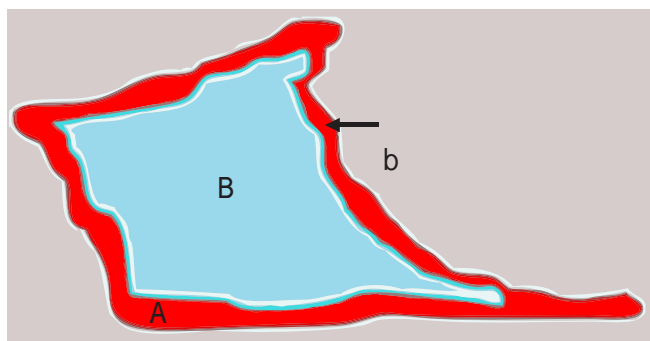
### Determinación del perfil de velocidad y las pérdidas de presión por fricción, cuando el patrón de flujo se corresponde con un flujo bifásico anular

En la Figura 4 se muestra el patrón de flujo correspondiente al caso, en el cual, se tiene un sistema bifásico, donde el fluido A se encuentra en contacto con las paredes de los poros, y el fluido B se mueve por el centro, de tal manera que, se establece un patrón de flujo anular. Este caso se propone como similar al correspondiente, cuando existe una mayor afinidad del agua con el sólido y este se encuentra adsorbida en él.

Para determinar el perfil de velocidad que se establece en el sistema, se parte de la ecuación de cantidad de movimiento, tomando en cuenta las condiciones establecidas, de tal manera que, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$0 = \Phi + \mu_B \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_B}{dr} \right) : 0 \leq r \leq b \quad (27a)$$

$$0 = \Phi + \mu_A \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_A}{dr} \right) : b \leq r \leq R \quad (27b)$$



■ Figura 4. Flujo bifásico anular, donde el fluido A se encuentra en contacto con las paredes de los poros, y el fluido B se transporta por el centro.  $b$  representa la posición de la interfase entre ambos fluidos inmiscibles. Figure 4. Annular biphasic Flow, where fluid A is in contact with pores' walls and fluid B moves through the center.  $b$  represents the interphase position between both immiscible liquids.

sujeto a las condiciones frontera:

$$\left( \frac{dv_B}{dr} \right)_{r=0} = 0 \quad (28a)$$

$$v_B(b) = v_A(b) \quad (28b)$$

$$\left( \mu_B \frac{dv_B}{dr} \right)_{r=b} = \left( \mu_A \frac{dv_A}{dr} \right)_{r=b} \quad (28c)$$

$$v_A(R) = 0 \quad (28d)$$

y cuya solución exacta está dada por:

$$v_B(r) = \frac{1}{4} \frac{\Phi}{\mu_A} (R^2 - b^2) + \frac{1}{4} \frac{\Phi}{\mu_B} (b^2 - r^2) : 0 \leq r \leq b \quad (29a)$$

$$v_B(b) = v_A(b) \quad (29b)$$

El valor del flujo total se obtiene a través de la integral fraccional con respecto al área de flujo, tomando en cuenta la morfología fractal del poro, por lo que es necesario el empleo de la integración de orden fraccional. En este caso, se tiene para el fluido B, que se mueve por el centro del poro:

$$q_B = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Gamma(f)} \int_0^b [(b-r)^{f-1} v_B(r)] r dr d\theta = \quad (30)$$

$$k^{1-f} R^{3+f} \frac{\Phi}{2} \frac{\pi}{\mu_B} \left( \left( \frac{(1-\lambda)}{\Gamma(f+2)} - \frac{6}{\Gamma(f+4)} \right) \alpha^{3+f} + \frac{\lambda}{\Gamma(f+2)} \alpha^{1+f} \right)$$

Donde:

$\alpha$  representa la posición no dimensional de la interfase y  $\lambda$  cuantifica la relación entre las viscosidades de ambos fluidos:

$$\alpha = \frac{b}{R} \quad (31a)$$

$$\lambda = \frac{\mu_B}{\mu_A} \quad (31b)$$

mientras que para el fluido que se encuentra en contacto con la pared:

$$q_A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Gamma(f)} \int_0^R [(R-r)^{f-1} v_A(r)] r dr d\theta = \quad (32)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\Gamma(f)} \int_0^b [(b-r)^{f-1} v_A(r)] r dr d\theta =$$

$$k^{1-f} R^{3+f} \frac{1}{2} \frac{\pi \Phi}{\mu_A} \left( \frac{(1-\alpha^{1+f})}{\Gamma(f+2)} - \frac{6(1-\alpha^{3+f})}{\Gamma(f+4)} \right)$$

de tal forma que, el flujo total que pasa a través de un canal está dado por la suma de ambos fluidos y se escribe de la forma siguiente:



$$q = \frac{\pi \Phi f(f+5)}{2\psi \Gamma(f+4)} k^{1-f} R^{3+f} \quad (33)$$

El parámetro  $\psi$  (Pa·s) representa la viscosidad global del sistema (Tan y col., 2015), y su valor depende de las viscosidades y disposición de cada uno de los fluidos con respecto a la pared del poro, de la morfología de este, caracterizada a través de la dimensión fractal y de la posición no dimensional de la interfase, y se determina de acuerdo con la relación:

$$\psi = \frac{f(f+5)\mu_A}{\Gamma(f+4) \left( \frac{1}{\lambda} \left( \frac{(1-\lambda)}{\Gamma(f+2)} - \frac{6}{\Gamma(f+4)} \right) \alpha^{3+f} + \frac{\lambda}{\Gamma(f+2)} \alpha^{1+f} \right) + \left( \frac{(1-\alpha^{1+f})}{\Gamma(f+2)} - \frac{6(1-\alpha^{3+f})}{\Gamma(f+4)} \right)} \quad (34)$$

La posición no dimensional de la interfase se encuentra estrechamente relacionada con la composición del sistema, y si esta se expresa en base a la fracción en volumen del fluido que se mueve por el centro del poro se obtiene:

$$v_B = \frac{q_B}{q} = \frac{\left( \frac{(1-\lambda)}{\Gamma(f+2)} - \frac{6}{\Gamma(f+4)} \right) \alpha^{3+f} + \frac{\lambda}{\Gamma(f+2)} \alpha^{1+f}}{\left( \left( \frac{(1-\lambda)}{\Gamma(f+2)} - \frac{6}{\Gamma(f+4)} \right) \alpha^{3+f} + \frac{\lambda}{\Gamma(f+2)} \alpha^{1+f} \right) + \left( \frac{(1-\alpha^{1+f})}{\Gamma(f+2)} - \frac{6(1-\alpha^{3+f})}{\Gamma(f+4)} \right)} \quad (35)$$

La ecuación (33) es análoga a la ecuación (10), por lo que siguiendo las mismas deducciones que llevan de la ecuación (10) a la ecuación (25), se obtiene la expresión para predecir las pérdidas de presión por fricción en este sistema:

$$\Delta P = \frac{v_0}{d_p^2} \frac{\psi}{K_0} \frac{(1-\epsilon)^{\frac{2}{f+1}}}{\epsilon^{\frac{2}{f+1}+1}} \frac{z_0^{1-f}}{\Gamma(f+1)} L^f \quad (36)$$

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Predicciones teóricas

Los patrones de flujo bifásico que se generan, para el caso de flujo laminar en tubos, dependen de la diferencia de densidad entre los líquidos y la tensión interfacial, entre otros factores (Kleinstreuer, 2017; Wopara e Iyuke, 2018); y se encuentran además estrechamente relacionados con la forma en que se realiza el inyectado de un fluido en el seno del otro. De esta manera, se pueden disminuir significativamente las pérdidas de presión por fricción asociadas al transporte de un

fluido de alta viscosidad, inyectando otro de menor viscosidad y densidad semejante en la pared del tubo (Suárez-Domínguez, 2017), lo cual se puede lograr mediante un dispositivo de inyección apropiado.

La situación es mucho más compleja en el caso de los lechos porosos, debido a la cantidad y aleatoriedad de los canales de flujo que se establecen, los cuales tienen un radio significativamente pequeño (Basu y col., 2019). Dentro de cada canal del lecho poroso, es prácticamente imposible generar un patrón de flujo determinado mediante un dispositivo de inyección, como en el caso de los tubos, aunque la adición de un agente emulsionante o desemulsionante puede facilitar que se transporte una emulsión o se genere un flujo bifásico anular, respectivamente. Por otra parte, debido al pequeño radio de los canales de flujo, los efectos de tensión interfacial, en la interfase y en la superficie del sólido, son mucho más importantes que en el caso del flujo en tubos, e influyen en la generación del patrón de flujo que se forme en el sistema, de ahí la importancia del uso de agentes tensoactivos en estos sistemas (Kamal, 2016). Desde el punto de vista práctico, lo importante es determinar, para un sistema bifásico específico, cuál de los patrones de flujo favorece la disminución de las pérdidas de presión por fricción, y actuar en consecuencia (Wang y col., 2019).

Para obtener las predicciones teóricas se consideraron dos líquidos inmiscibles entre sí, el líquido 1 con viscosidad de 5 Pa·s y el líquido 2 con viscosidad de 0.1 Pa·s, donde el líquido menos viscoso se encuentra en menor proporción, y puede presentarse en forma de fase dispersa en el seno del fluido menos viscoso, formando una emulsión, y puede estar como fase completamente separada o puede existir una separación parcial de las fases, en la cual, parte del fluido 1 se encuentra como fase dispersa, y la otra parte como fase separada. Se consideró un medio poroso hipotético, con las dimensiones

y condiciones de operación:  $dp = 0.01$  m,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $L = 100$  m y  $Vo = 10^{-4}$  m/s<sup>-1</sup>.

Se encontraron diferentes comportamientos al analizar teóricamente como varía la caída de presión por fricción  $\Delta P$  (Pa), con respecto a la fracción en volumen del fluido menos viscoso, considerando como parámetro la dimensión fractal de los poros, sin considerar la forma de la figura geométrica de las rocas, ni el tipo de superficie que presentan (lisa o rugosa), para los siguientes casos: *Caso A*: el flujo menos viscoso se presenta como una fase dispersa en el seno del fluido menos viscoso de poro; *Caso B*: separación total de las fases, en la cual, el fluido menos viscoso se transporta por el centro del poro; *Caso C*: separación total de las fases, donde el fluido menos viscoso se transporta en contacto con la pared; *Caso D*: se considera que una fracción del flujo menos viscoso se transporta en contacto con la pared del tubo, mientras que la otra parte se encuentra como fase dispersa (separación parcial de las fases). En este sentido, el parámetro de control, para generar cada uno de estos casos, es el patrón de flujo bifásico que se supondrá, derivado de la observación de los casos presentados en campo.

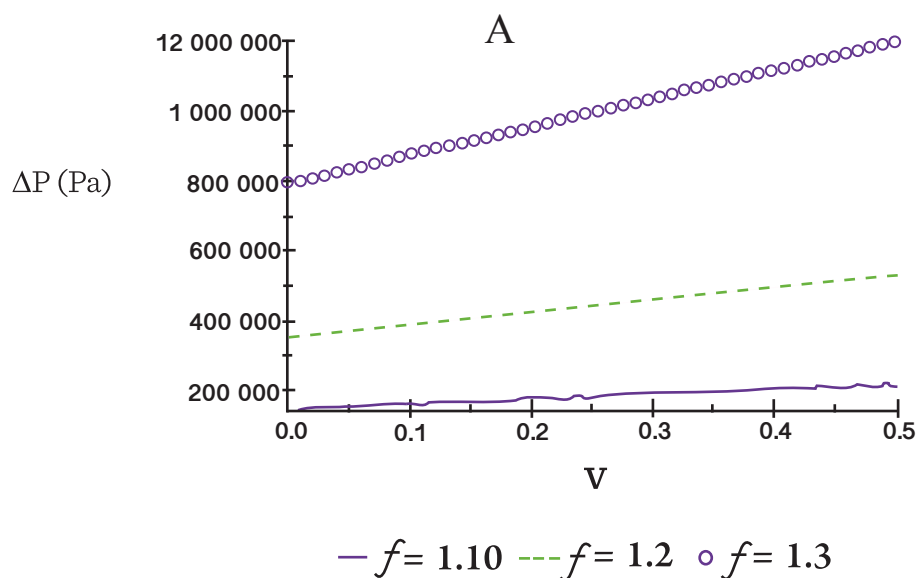
En la Figura 5, se muestra el comportamiento de las pérdidas de presión por fricción, con respecto a la fracción en volumen del fluido menos viscoso, el cual se presenta en forma de fase dispersa en el seno del fluido más viscoso (*Caso A*). Contrariamente a lo que suele ocurrir durante la mezcla de líquidos miscibles, donde la viscosidad de la mezcla disminuye con la fracción en volumen del líquido menos viscoso, la viscosidad de una emulsión se incrementa con la fracción en volumen de la fase dispersa, lo que se manifiesta en el incremento de las pérdidas de presión por fricción para una velocidad de flujo requerida. Esto se explica debido a que las gotas dispersas distorsionan el patrón de flujo del medio de dispersión (Ismail y col., 2015), de tal manera que se incrementa la disipación de la

energía producto del rozamiento entre las capas de flujo.

En las Figuras 6 y 7, se muestran los comportamientos predichos para el caso en que se establezca un flujo bifásico anular, en el cual existe una separación total de las fases, donde se ha considerado que el fluido menos viscoso se transporta por el centro de los poros (Figura 6, *Caso B*) y en contacto con la pared del poro (Figura 7, *Caso C*). En ambos casos, las pérdidas de presión por fricción disminuyen con el incremento de la fracción en volumen del fluido menos viscoso, y esta disminución es mucho más significativa cuando el fluido se transporta en contacto con la pared del poro. Dichos resultados son esperados si se toma en cuenta que las pérdidas de presión por fricción son directamente proporcionales a la tensión de corte en la pared del poro (Hassanean y col., 2016; Mucharam y col., 2017), la cual, a su vez, es directamente proporcional a la viscosidad del fluido que se encuentra en contacto con esta.

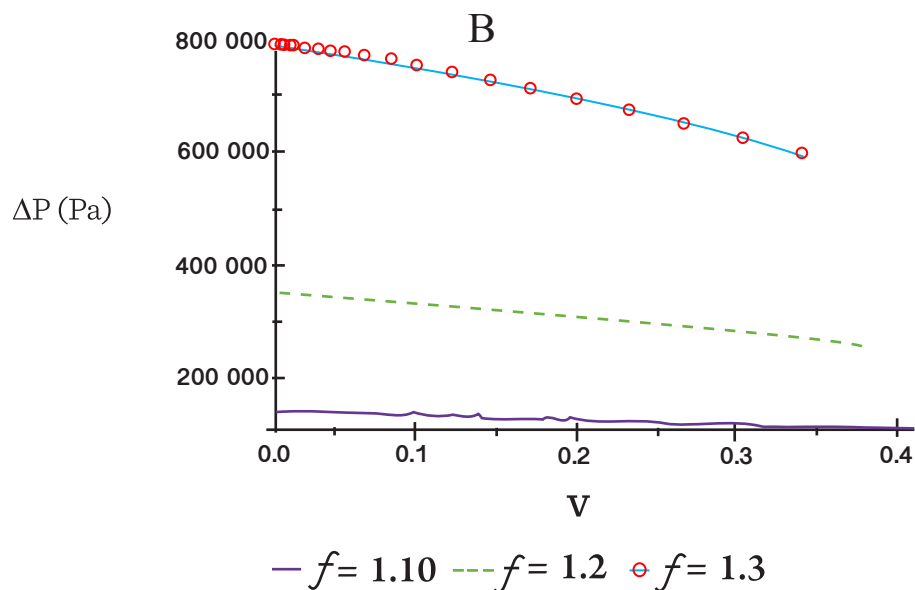
En la Figura 8 se aprecia un gráfico en 3 dimensiones, donde las superficies mostradas representan la variación de las pérdidas de presión por fricción con respecto a la fracción del fluido menos viscoso que se encuentra en forma dispersa ( $V_d$ ), y la fracción que se encuentra en contacto con la pared del tubo ( $V_s$ ), por lo que se corresponde con un patrón combinado de flujo bifásico anular, donde el fluido que se transporta por el centro es una emulsión (*Caso D*). Esta situación se corresponde con una separación parcial de las fases, similar a lo observado por Piroozian y col. (2017).

Como también se aprecia en la Figura 9, que representa el comportamiento de las pérdidas de presión por fricción, con respecto a la fracción en volumen total del fluido menos viscoso, considerando como parámetro la fracción de este, que se encuentra presente en la fase dispersa, se predice que las pérdidas de presión por fricción se in-



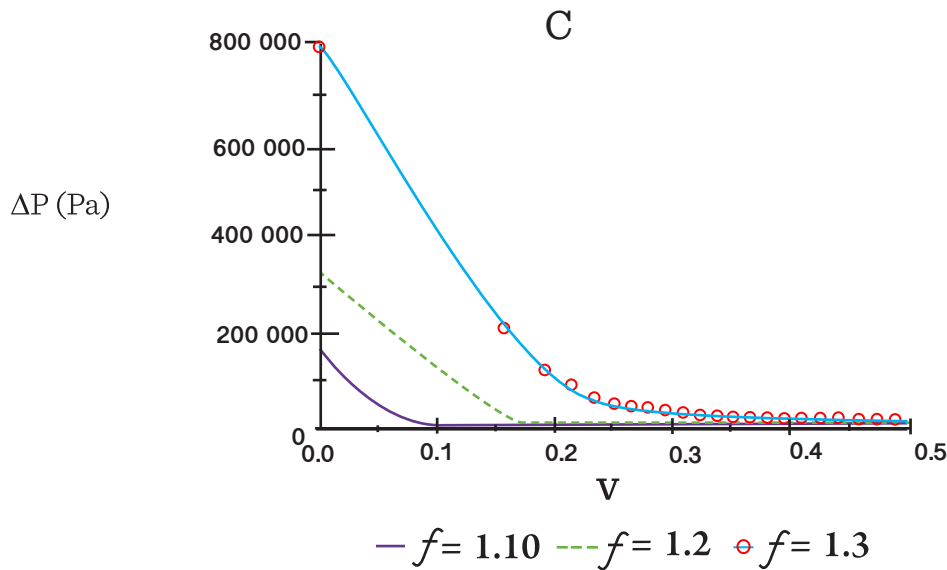
■ Figura 5. Comportamiento de las pérdidas de presión por fricción con respecto a la fracción en volumen de la fase dispersa (fluido menos viscoso) cuando el patrón de flujo bifásico corresponde a una emulsión (*Caso A*, ec. 25).

Figure 5. Frictional pressure losses behavior with respect to the volume fraction of the dispersed phase (less viscous liquid) when the biphasic flow pattern corresponds to an emulsion (*Situation A*, eq. 25).



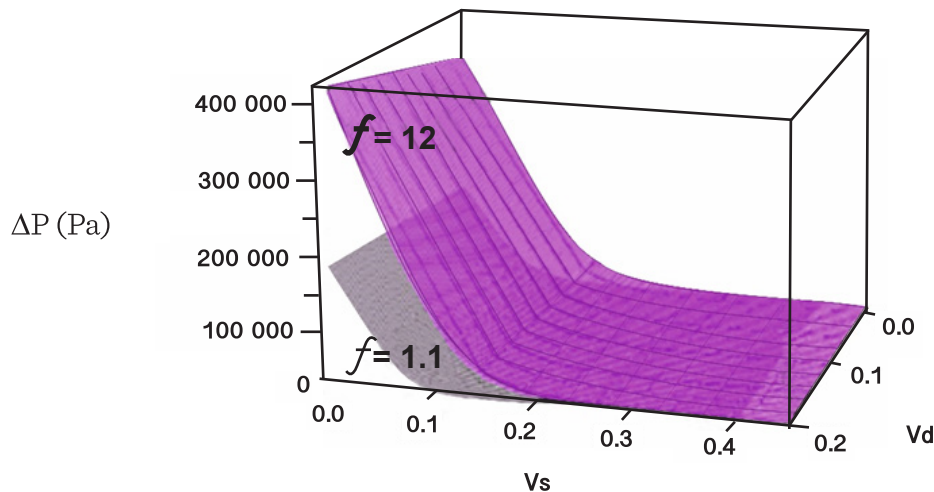
■ Figura 6. Comportamiento de las pérdidas de presión por fricción con respecto a la fracción en volumen del fluido menos viscoso, cuando existe una separación total de las fases y el fluido menos viscoso se transporta por el centro del poro (*Caso B*, ec. 35 y 36).

Figure 6. Frictional pressure losses behavior with respect to the volume fraction of the dispersed phase, when there are complete phases separation and the less viscous liquid moves through the pore center (*Situation B*, eqs. 35 and 36).



■ Figura 7. Comportamiento de las pérdidas de presión por fricción con respecto a la fracción en volumen del fluido menos viscoso cuando existe una separación total de las fases y el fluido menos viscoso se transporta en contacto con la pared del poro (*Caso C*, ec. 35 y 36).

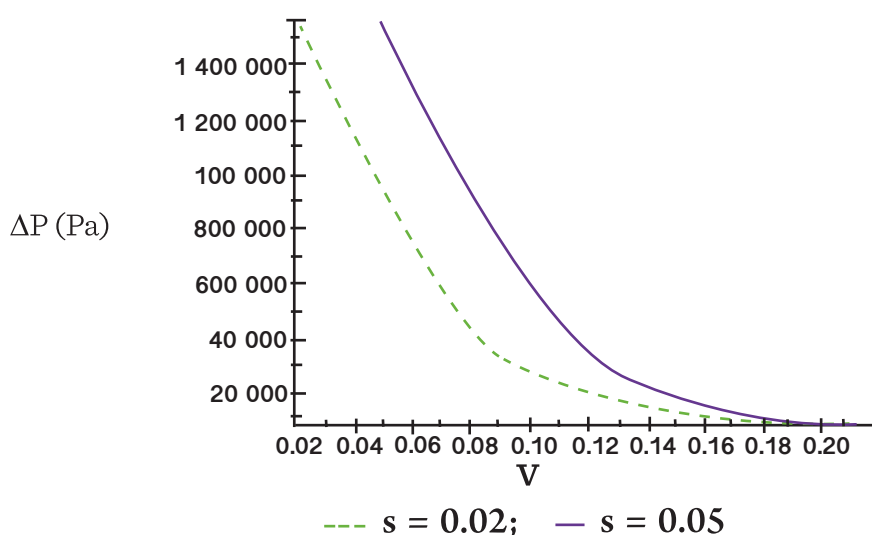
Figure 7. The behavior of the frictional pressure losses with respect to the dispersed phase volume fraction when there are complete phases separation and the less viscous fluid moves in contact with pore walls (*Situation C*, eqs. 35 and 36).



■ Figura 8. Comportamiento de las pérdidas de presión por fricción con respecto a la fracción en volumen del fluido menos viscoso, cuando existe una separación parcial de las fases y una fracción fluido menos viscoso se transporta en contacto con la pared del tubo, mientras que la otra se mantiene como fase dispersa (*Caso D*, ec. 35 y 36), donde  $V_d$  es la fracción en la fase dispersa y  $V_s$  es la fracción en contacto con la pared.

Figure 8. Frictional pressure losses behavior with respect to the volume fraction of the dispersed phase, when there are partial phases separation and a fraction of the less viscous liquid moves in contact with the pore wall while the other fraction remains emulsified (*Situation D*, eqs. 35 and 36). Here,  $V_d$  is the dispersed phase fraction and  $V_s$  is the fraction in contact with the wall.





■ Figura 9. Comportamiento de las pérdidas de presión por fricción con respecto a la fracción en volumen total ( $v_B$ ) del fluido menos viscoso, cuando existe una separación parcial de las fases (*Caso D*, ec. 35 y 36), tomando como parámetro la fracción en la fase dispersa ( $s$ ) para un valor de dimensión fractal  $f=1.1$ .

Figure 9. The behavior of the frictional pressure losses with respect to the total volume fraction of the dispersed phase ( $v_B$ ) when there is partial phases separation (*Situation D*, eqs. 35 and 36), taking as parameter the dispersed phase fraction ( $s$ ) for a fractal dimension value of 1.1.

crementan con la fracción en volumen de la fase dispersa, y la disminución de la fracción del fluido menos viscoso, que se ha separado de la emulsión y tiende a transportarse en contacto con la pared del tubo.

Con respecto al efecto de la dimensión fractal del poro, se observa que en todos los casos las pérdidas de presión por fricción se incrementan con este parámetro. Esto se debe a que el incremento de la dimensión fractal causa un incremento en el área superficial de la pared de los poros (Rahner y col., 2018) a través de los cuales, se mueve el fluido, lo que incrementa las fuerzas de rozamiento entre el fluido y las paredes del sólido, con el consiguiente incremento de la disipación de energía.

El modelo presenta limitaciones que se encuentran asociadas a las consideraciones que fueron establecidas durante su obtención, de tal manera que, es válido cuando los efec-

tos de tensión superficial son más significativos que los gravitatorios, por lo que la acción de estos últimos sobre el patrón de flujo puede ser despreciada y cuando el flujo se encuentra en estado estacionario.

## CONCLUSIONES

Partiendo de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento, y aplicando el formalismo de la geometría fractal y el cálculo diferencial fraccionario, se presenta un modelo para describir el comportamiento del flujo bifásico, como función de las dimensiones y condiciones de operación del lecho poroso, la morfología del mismo y el patrón de flujo, el cual puede emplearse para predecir el efecto de estos parámetros sobre las pérdidas de presión por fricción. En este caso, se obtuvo que, para una misma composición del flujo bifásico, el patrón de flujo que se genera en el sistema influye de forma significativa sobre las pérdidas de presión por fricción, las cuales se

incrementan si una de las fases se presenta de forma dispersa en el seno de la otra. Por otra parte, se predice que el incremento de las irregularidades de las partículas, que se manifiesta en el incremento de la dimensión fractal de los poros, causa a su vez un incremento significativo de las pérdidas de presión por fricción.

## AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se realizó con apoyo del fondo SENER-CONACYT sector HIDROCARBUROS, bajo proyecto número 282278. El autor EJSJ agradece el apoyo PRODEP como NPTC y PROFEXCE.

## REFERENCIAS

- Basu, M., Zahoor, A., and Khan, R. A. (2019). Review of Fluid Flow and Heat Transfer through Microchannels. *Journal of Scientific and Technical Advancements*. 5(1):17-20.
- Bear, J. (2018). *Modeling Phenomena of Flow and Transport in Porous Media*. Springer: Cham. 1-98 P p
- Berg, C. F. (2014). Permeability description by characteristic length, tortuosity, constriction and porosity. *Transport in porous media*. 103(3): 381-400.
- Flury, M. and Aramrak, S. (2017). Role of air-water interfaces in colloid transport in porous media: A review. *Water Resources Research*. 53(7): 5247-5275.
- Hassanean, M. H., Awad, M. E., Marwan, H., Bhran, A. A., and Kaoud, M. (2016). Studying the rheological properties and the influence of drag reduction on a waxy crude oil in pipeline flow. *Egyptian Journal of Petroleum*. 25(1): 39-44.
- Hjelmeland, O. S. and Larrondo, L. E. (1986). Experimental investigation of the effects of temperature, pressure, and crude oil composition on interfacial properties. *SPE Reservoir Engineering*. 1(04): 321-328.
- Huang, S., Yao, Y., Zhang, S., Ji, J., and Ma, R. (2018). A Fractal Model for Oil Transport in Tight Porous Media. *Transport in Porous Media*. 121(3): 725-739.
- Ismail, A. S. I., Ismail, I., Zoveidavianpoor, M., Mohsin, R., Piroozian, A., Misnan, M. S., and Sari-man, M. Z. (2015). Review of oil-water through pipes. *Flow Measurement and Instrumentation*. 45:357-374.
- Kamal, M. S. (2016). A review of gemini surfactants: potential application in enhanced oil recovery. *Journal of Surfactants and Detergents*. 19(2): 223-236.
- Kleinstreuer, C. (2017). *Two-Phase Flow: Theory and Applications*. CRC EE.UU: Press. 69-99 Pp.
- Kokubun, M. A. E., Radu, F. A., Keilegavlen, E., Kumar, K., and Spildo, K. (2018). Transport of polymer particles in an oil-water flow in porous media: enhancing oil recovery. *Transport in Porous Media*. 126(2): 501-519.
- Ledesma-Durán, A., Hernández, S. I., and Santamaría-Holek, I. (2017). Effect of Surface Diffusion on Adsorption-Desorption and Catalytic Kinetics in Irregular Pores. II. Macro-Kinetics. *The Journal of Physical Chemistry C*. 121(27): 14557-14565.
- Mahzari, P., Taura, U., and Sohrabi, M. (2018). An improved methodology for estimation of two-phase relative permeability functions for heavy oil displacement involving compositional effects and instability. *Computational Geosciences*. 22(4): 975-991.
- Mandelbrot, B. B. (1989). Multifractal measures, especially for the geophysicist. In C. H. Scholz and B. B. Mandelbrot (Eds.), *Fractals in geophysics* (pp. 5-42). Basel: Birkhäuser.
- Mendoza, C. I. and Santamaria-Holek, I. (2010). Rheology of concentrated emulsions of spherical droplets. *Applied Rheology*. 20(2): 16-23.
- Mucharam, L., Rahmawati, S., and Ramadhani, R. (2017). Drag reducer selection for oil pipeline-based laboratory experiment. *Modern Applied Science*. 12(1): 112.
- Perazzo, A., Tomaiuolo, G., Preziosi, V., and Guido, S. (2018). Emulsions in porous media: From single droplet behavior to applications for oil recovery. *Advances in colloid and interface science*. 256: 305-325.
- Pesavento, F., Schrefler, B. A., and Sciumè, G. (2017). Multiphase flow in deforming porous media: A review. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 24(2): 423-448.

Piroozian, A., Hemmati, M., Ismail, I., Manan, M. A., Rashidi, M. M., and Mohsin, R. (2017). An experimental study of flow patterns pertinent to waxy crude oil-water two-phase flows. *Chemical Engineering Science*. 164: 313-332.

Rahner, M. S., Halisch, M., Fernandes, C. P., Weller, A., and dos-Santos, V. S. S. (2018). Fractal dimensions of pore spaces in unconventional reservoir rocks using X-ray nano-and micro-computed tomography. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. 55: 298-311.

Rasband, W. S. (2018). ImageJ, U. S. National Institutes of Health, Bethesda, Maryland, USA. [En línea]. Disponible en: <https://imagej.nih.gov/ij/>, 1997-2018. Fecha de consulta: 2 de julio de 2019.

Suárez-Domínguez, E. J. (2017). Estudio del transporte estratificado de un líquido de alta viscosidad y otro de baja viscosidad, Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México. [En línea]. Disponible en: <http://132.248.52.100:8080/xmlui/handle/132.248.52.100/14368>. Fecha de consulta: 26 de septiembre de 2019.

Suárez-Domínguez, E. J., Pérez-Sánchez, J. F., Palacio-Pérez, A., and Izquierdo-Kulich, E. (2018). New mixing rule for analysis of the influence of a formulation on an extraheavy oil crude viscosity. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*. 17(1): 99-106.

Tan, X. H., Li, X. P., Zhang, L. H., Liu, J. Y., and Cai, J. (2015). Analysis of transient flow and starting pressure gradient of power-law fluid in fractal porous media. *International Journal of Modern Physics C*. 26(04): 1550045.

Valdes-Perez, A., Pulido, H., Cinco-Ley, H., and Galicia-Muñoz, G. (2012). Discretization of the resistivity, capillary pressure and relative permeability for naturally fractured reservoirs. In *Proceedings: Thirty-Seventh Workshop on Geothermal Reservoir Engineering*. [En línea]. Disponible en: <https://pangea.stanford.edu/ERE/pdf/IGAstandard/SGW/2012/Valdesperez1.pdf>. Fecha de consulta: 25 de julio de 2019.

Valdéz-Cepeda, R. D. and Olivares-Sáenz, E. (1998). Geometría fractal en la ciencia del suelo. *Terra Latinoamericana*. 16(3): 277-288.

Wang, W., Fan, D., Sheng, G., Chen, Z., and Su, Y. (2019). A review of analytical and semi-analytical fluid flow models for ultra-tight hydrocarbon reservoirs. *Fuel*. 256: 115737.

Wopara, O. F. and Iyuke, S. E. (2018). Review of studies on pore-network modeling of wettability effects on waterflood oil recovery. *Journal of Petroleum and Gas Engineering*. 9(2): 11-22.