



Ingenius. Revista de Ciencia y Tecnología  
ISSN: 1390-650X  
ISSN: 1390-860X  
[revistaingenius@ups.edu.ec](mailto:revistaingenius@ups.edu.ec)  
Universidad Politécnica Salesiana  
Ecuador

## ESTUDIO CINEMÁTICO Y DINÁMICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE UN MONOPLAZA DE COMPETENCIA ELÉCTRICO FORMULA STUDENT

---

Arévalo, Christian; Medina, Ayrton; Valladolid, Juan

ESTUDIO CINEMÁTICO Y DINÁMICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE UN MONOPLAZA DE COMPETENCIA ELÉCTRICO FORMULA STUDENT

Ingenius. Revista de Ciencia y Tecnología, núm. 20, 2018

Universidad Politécnica Salesiana, Ecuador

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=505555586009>

DOI: <https://doi.org/10.17163/ings.n20.2018.09>

Artículo científico

ESTUDIO CINEMÁTICO Y DINÁMICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE UN MONOPLAZA DE COMPETENCIA ELÉCTRICO FORMULA STUDENT

*Christian Arévalo*  
Universidad Politécnica Salesiana, Ecuador  
carevalom@est.ups.edu.ec

DOI: <https://doi.org/10.17163/ings.n20.2018.09>  
Redalyc: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=505555586009>

*Ayrton Medina*  
Universidad Politécnica Salesiana, Ecuador

*Juan Valladolid*  
Universidad Politécnica Salesiana, Ecuador

Recepción: 13 Abril 2018  
Aprobación: 19 Junio 2018

**RESUMEN:**

El nivel de competitividad que genera la Formula Student ha desencadenado en una serie de estudios y avances tecnológicos con el fin de mejorar cada vez más el rendimiento de los monoplazas para que se desenvuelvan con éxito ante las exigencias de la competencia. En este documento se detalla el estudio del sistema de suspensión de un monoplaza de competencia eléctrico Formula Student. Este estudio involucra un análisis de la cinemática y dinámica del sistema de suspensión en el cual se realiza una determinación analítica del movimiento, cargas y vibraciones por medio de software de simulación y de cálculos matemáticos. Con el estudio se busca evaluar el rendimiento de la suspensión en función del reglamento de la competencia, con el fin de establecer parámetros que mejoren el sistema de suspensión y a la vez el desempeño del monoplaza en términos de confort y seguridad.

**PALABRAS CLAVE:** monoplaza, suspensión, dinámica, cinemática.

**ABSTRACT:**

The level of competitiveness generated by the Formula Student, has generated a series of studies and technological advances in order to improve the performance of the single seaters, so that its operation is successful according to the requirements of the competition. This document details the study of the suspension system of a Formula Student electric competition single seater. This study involves an analysis of the kinematics and dynamics of the suspension system in which an analytical determination of movement, loads and vibrations is carried out by means of simulation software and mathematical calculations. The aim of the study is to evaluate the performance of the suspension according to the regulations of the competition, to establish parameters that improve the suspension system and at the same time the performance of the car in terms of comfort and safety.

**KEYWORDS:** Single seater, Suspension, Dynamics, Kinematics.

**INTRODUCCIÓN**

Fórmula Student es una competencia estudiantil organizada por la SAE (Society of Automotive Engineers o Sociedad de Ingenieros Automotrices) cuyo objetivo principal es fomentar la mejor formación de jóvenes ingenieros [1], desafiando a los estudiantes universitarios a diseñar, construir y probar el rendimiento de un vehículo tipo formula que cumpla exitosamente con las pruebas estipuladas en el reglamento respectivo [2], para luego competir con otros estudiantes de todo el mundo. Los avances tecnológicos y el nivel de competitividad que genera la Formula Student, han motivado al equipo UPS Racing Team de la Universidad Politécnica Salesiana desarrollar dos monoplazas, el primero fue un monoplaza a combustión para la competencia del 2014 en UK, mientras que el segundo fue un vehículo eléctrico para la competencia de Formula Student Electric de UK en 2017.

De acuerdo con los resultados del año pasado [3], en los eventos dinámicos el monoplaza eléctrico ha tenido inconvenientes con algunos sistemas mecánicos y eléctricos; entre los sistemas mecánicos está la falta de ajustes en los reglajes y la amortiguación de la suspensión, así como un fallo localizado en un miembro del brazo de control inferior de la suspensión posterior. Considerando que la suspensión desempeña un papel muy importante en el rendimiento de los vehículos en términos de seguridad y confort, se presenta la necesidad de realizar estudios de la suspensión que permitan establecer mejoras ya sea en la puesta a punto o en el diseño con el fin de que el monoplaza pueda ser competitivo.

El principal diseño de suspensión en competición es el paralelogramo deformable (doublé A-arm o double wishbone), que puede disponer de tres formas de accionamiento del conjunto muelle-amortiguador como es el directo, por medio de varilla de empuje (push-rod) o varilla de tracción (pull-rod) [4]. Estos sistemas de suspensión son de diseño sencillo, de fácil ajuste, resistentes, de buena adaptabilidad y pueden llegar a ser ligeros si son hechos con materiales compuestos, razón por la cual son muy utilizados por los monoplazas de Formula 1 y de Formula Student [5].

La suspensión debe incorporar un buen diseño cinemático para mantener el neumático lo más perpendicular posible al pavimento, una amortiguación óptima y tasas de elasticidad adecuadas para mantener el neumático en el suelo en todo momento. Además, los componentes tienen que ser resistentes para que no fallen bajo las cargas estáticas y dinámicas [6], [7], [8], [9].

El objetivo de este trabajo es realizar el estudio dinámico y cinemático del sistema de suspensión del vehículo eléctrico Formula Student, mediante programas de simulación cinemática y de cálculos matemáticos para determinar el rendimiento de la suspensión y establecer mejoras o soluciones a los problemas que se presentan durante el estudio.

## MÉTODOS Y MATERIALES

### Vehículo de estudio

El vehículo que se utiliza para realizar el estudio de la suspensión es un monoplaza de competencia eléctrico Formula Student, como se muestra en la Figura 1.



FIGURA 1  
Monoplaza de competencia eléctrico Formula Student.

Las dimensiones del monoplaza se muestran en la Tabla 1.

**TABLA 1**  
Dimensiones del monoplaza eléctrico

Especificación	Dimensión
Ancho de vía delantero	1200 mm
Ancho de vía posterior	1180 mm
Distancia entre ejes	1600 mm
Peso con piloto	345 kgf
Distribución peso delantero	45 %
Distribución de peso posterior	55 %
Altura del centro de gravedad	300 mm

### Características del sistema de suspensión

Las características del sistema de suspensión se muestran en la Tabla 2.

**TABLA 2**  
Características del sistema de suspensión

Especificación	Detalle
Tipo de sistema de suspensión (Frontal/posterior)	Paralelogramo deformable
Sistema de accionamiento muelle – amortiguador. (Frontal/posterior)	Push-rod
Barra estabilizadora (Frontal/posterior)	Tipo espadines
Amortiguadores (frontal/posterior)	Ohlins TTX25
Rigidez del muelle (frontal/delantero) (N/mm)	150/200
Recorrido total de la suspensión bote/rebote (mm)	30/30
Material	Fibra de carbono y aluminio 7075 T6
Neumáticos	19.5 x 7.5-10 (Hoosier), R25
Llantas	7 in x 10 in (Braid), offset: +35

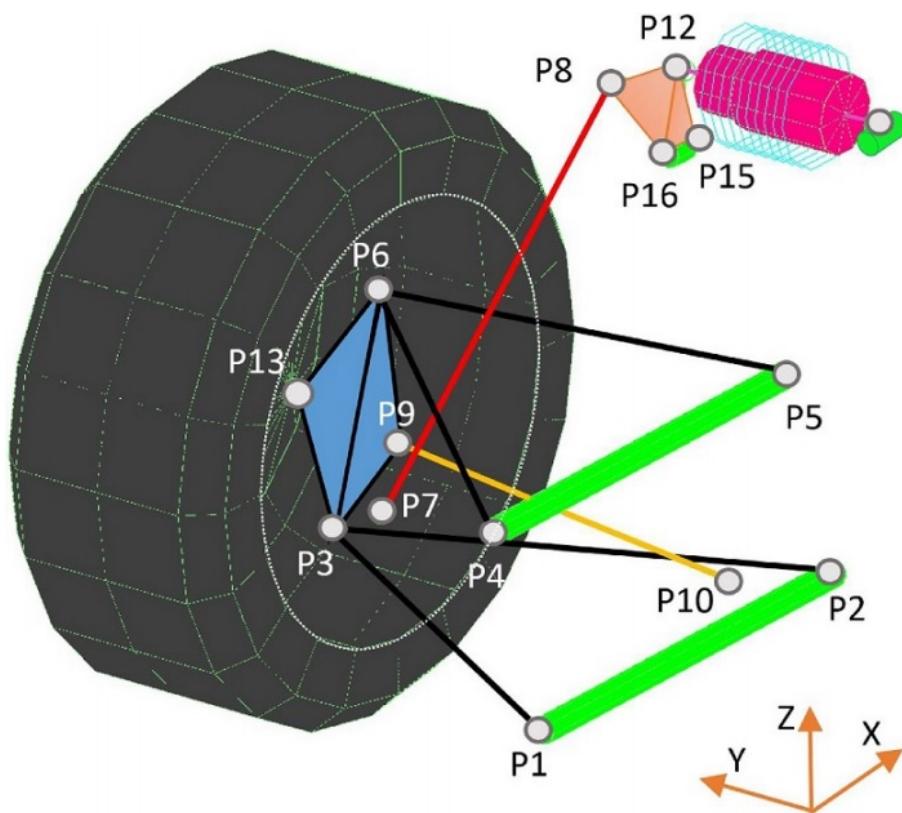
## Parámetros geométricos

Se determinan las coordenadas de los puntos de conexión de cada elemento de la suspensión, como se muestra en la Tabla 3. Los puntos de conexión además de permitir definir los parámetros geométricos de la suspensión son necesarios para el programa de simulación de la cinemática y para el cálculo 3D de las fuerzas en los miembros de la suspensión.

TABLA 3  
Coordenadas de los puntos de conexión de los elementos de la suspensión

Pts.	Suspensión delantera			Suspensión posterior		
	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
P1	1443,9	212	227,59	15	250	203,59
P2	1732	212	227,59	335	250	203,59
P3	1730	520	218,83	148,83	555	219
P5	1446,6	256	377,59	15	290	347,59
P4	1732	256	377,59	335	290	347,59
P5	1760	520	400,83	171,17	529	401
P6	1710	480,74	244,78	148,83	513	241,8
P8	1710	295,72	509,03	148,83	308	628,68
P9	1790	520	218,83	220	549,14	259,83
P10	1750	190	227,59	220	258,5	234,2
P11	1710	61,21	534,99	148,83	70,51	660,02
P12	1710	238,98	534,99	148,83	245,98	660,2
P13	1760	520	310	160	541,98	310
P14	1760	590	310	160	600	310
P15	1699	238,38	468,88	159,83	245,98	596,42
P16	1721	238,38	468,88	137,83	245,98	596,42

En la Figura 2 se muestra la ubicación de los puntos de conexión de los elementos de la suspensión.



- Mangueta
- Brazo de suspensión
- Push rod
- Balancín
- Resorte
- Rueda
- Amortiguador
- Brazo de acoplamiento
- Chasis
- (Dirección/Chasis)

**FIGURA 2**  
Localización de los puntos de conexión de los elementos de la suspensión.

En la Tabla 4 se muestran los parámetros geométricos determinados basados en las dimensiones de la rueda, ancho de vía, la distancia entre ejes y las coordenadas de los puntos de conexión de la suspensión según [6], [7].

TABLA 4  
Parámetros geométricos del sistema de suspensión

Parámetro	Suspensión frontal	Suspensión posterior
Altura del centro de balanceo (mm)	44,84	70,02
Ángulo de avance (°)	7	9
Ángulo de salida (°)	8,13	0
Ángulo de caída (°)	0	0
Mechanical Trail (mm)	28,32	70,02
Scrub radius (mm)	24,56	0
Antihundimiento / (%)	0	0
Antilevantamiento		

Se realiza un análisis de los resultados del FSAE TIRE TEST CONSORTIUM [10], referentes al neumático Hoosier® 19,5 x 7,5-10, que dispone el monoplaza de estudio. El análisis se efectúa con fin de determinar el rango de ángulos de caída aceptables, el comportamiento del neumático y una predicción de las fuerzas máximas que puede soportar. En la Figura 3 se muestra que la máxima fuerza lateral se presenta para un ángulo de caída de  $-1^{\circ}$  a  $-1,3^{\circ}$ , mientras que la máxima fuerza longitudinal se realiza para una caída de  $0^{\circ}$ . El neumático no sufre una caída brusca en la adherencia tras alcanzar el pico máximo, por lo que se puede establecer un rango de caída efectivo de  $1$  a  $-3^{\circ}$ .

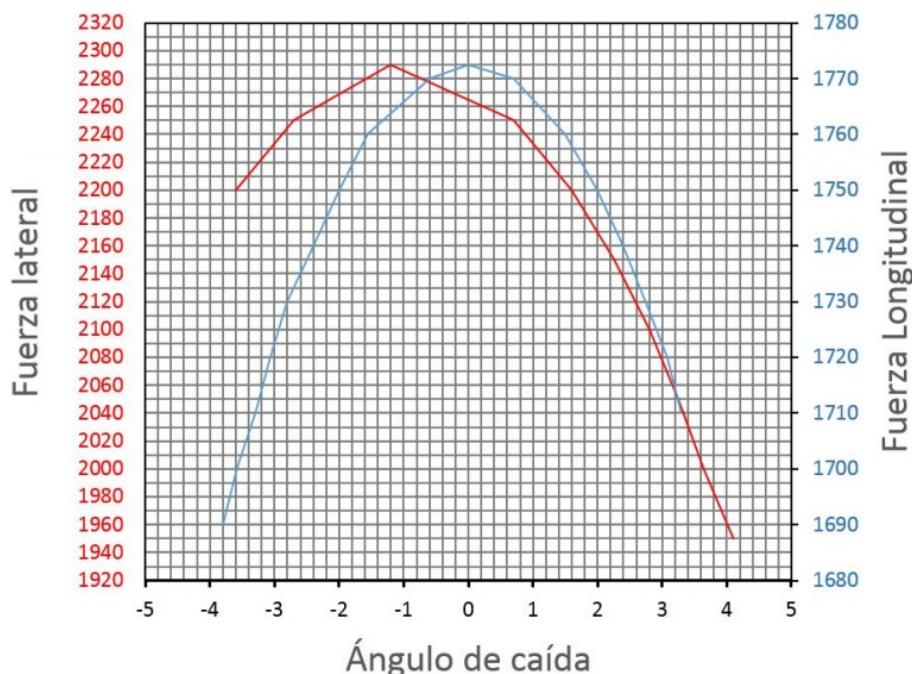


FIGURA 3

Ángulo de caída a diferentes fuerzas laterales y longitudinales, para un peso normal de 1000 N.

## RESULTADOS Y ANÁLISIS CINEMÁTICO

Utilizando Lotus Suspension Analisys se realiza un análisis cinemático del sistema de suspensión. El programa permite conocer el comportamiento de la suspensión con la geometría establecida frente a varios estados en pista como bote y rebote, balanceo y giro de la dirección [11]. Los parámetros que se analizan son aquellos que caracterizan el comportamiento de la suspensión [12], como:

- El centro de balanceo
- El ángulo de caída
- El ángulo de avance
- El toe (convergencia /divergencia)

Para la simulación se insertan en el programa las dimensiones del monoplaza y las coordenadas de los puntos de conexión de cada elemento de la suspensión. Lotus crea un modelo tridimensional del tipo de suspensión a analizar como se muestra en la Figura 4.

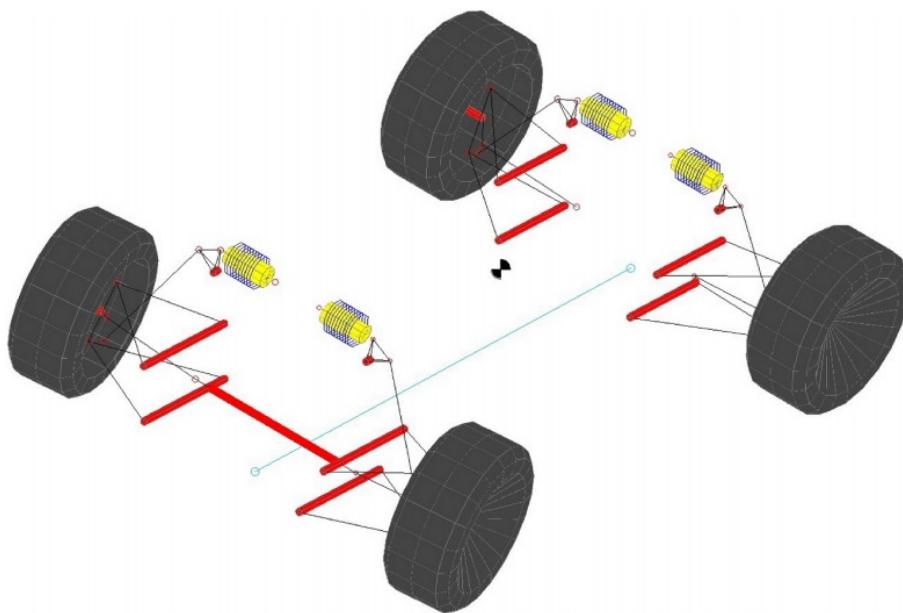


FIGURA 4  
Sistema de suspensión simulado en Lotus Suspension Analysis.

Se analiza la elevación o el rebote de la suspensión en dirección vertical, lo que trata de simular es el paso del monoplaza por un bache u obstáculo de 30 mm de altura. Para este análisis se considera solo la rueda derecha del eje frontal y posterior, debido a que las ruedas izquierdas presentan un comportamiento similar.

La Figura 5 muestra que las ruedas delanteras en la situación de bote tienen una ganancia de caída negativa máxima de  $-1,13^\circ$ , y en rebote una caída positiva máxima de  $0,9^\circ$ . Las ruedas posteriores en la situación de bote tienen una ganancia de caída negativa máxima de  $-1,63^\circ$ , y en rebote una caída positiva máxima de  $1,41^\circ$ . El comportamiento del ángulo de caída es favorable según [13], debido a que cuando el vehículo pase por una curva, la rueda más cargada tendrá una ganancia de caída negativa y la rueda descargada una ganancia de caída positiva, mejorando el agarre lateral y a su vez la tracción. Con el fin de conseguir el máximo de las prestaciones del neumático y reducir el ángulo de caída positivo se puede establecer un ángulo de caída estático para la rueda delantera y posterior de  $-1^\circ$  y  $-1,5^\circ$  respectivamente. Las ruedas al disponer de una caída estática, con la máxima compresión se acercan a una caída negativa de  $-2,6^\circ$ , manteniéndose dentro de un rango efectivo de  $1^\circ$  y  $-3^\circ$ , según el análisis de los neumáticos. De acuerdo con la recomendación de Carroll Smith [9], se puede reducir el ajuste de caída estática mejorando el agarre del neumático tanto en curvas como en trayectorias rectas.

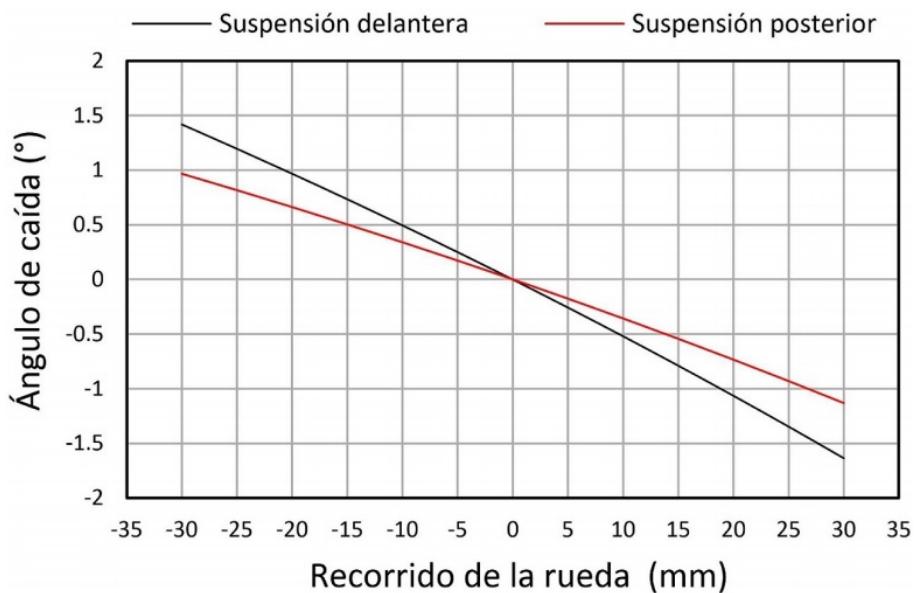


FIGURA 5  
Variaciones del ángulo de caída con bote y rebote de la rueda.

De acuerdo con la Figura 6, el ángulo de avance delantero se hace positivo con el bote de la rueda y negativo con el rebote, mientras que el ángulo de avance posterior tiene una orientación positiva tanto en bote como rebote. El ángulo de avance contribuye a la ganancia del ángulo de caída durante un giro. Según los resultados, el ángulo de avance provocará durante las curvas que la rueda externa tenga una ganancia de caída negativa y la caída de la rueda interna tienda a ser positivo.

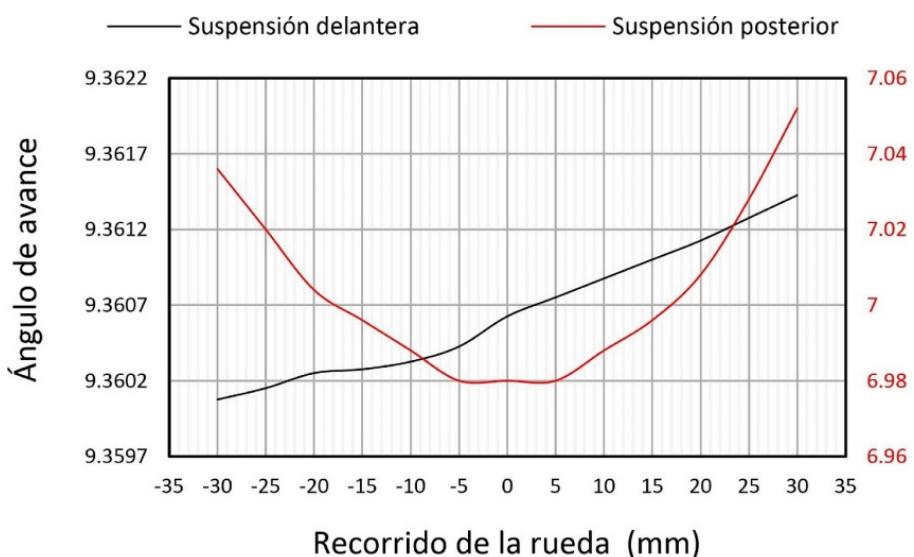


FIGURA 6  
Variaciones del ángulo de avance con bote y rebote de la rueda.

En la Figura 7 se muestra que el máximo recorrido vertical del centro de balanceo con el bote y rebote es de 80,344 mm y 86,4 mm para la suspensión delantera y posterior respectivamente. El centro de balanceo se mantiene en todo momento encima del plano del suelo, algo muy deseable según [14]. La altura del centro de balanceo al centro de gravedad y el efecto anti balanceo de los elementos elásticos, permiten que el ángulo de balanceo del chasis sea de 1° a una aceleración lateral de 1 G, sin considerar la deformación de los neumáticos.

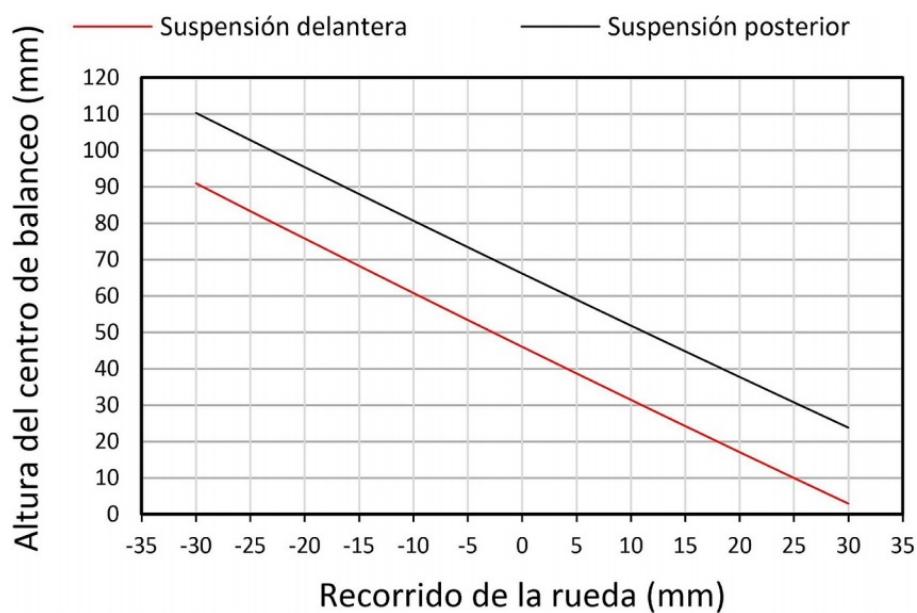


FIGURA 7  
Variaciones de la altura del centro de balanceo con bote y rebote de la rueda.

El toe posterior máximo es 0,1393 grados con rebote de la rueda y toe delantero máximo es 0,0328 grados con bote de la rueda, como se muestra en la Figura 8. Un toe ligeramente positivo reduce la resistencia al rodamiento y un toe negativo mejora la maniobrabilidad en curvas, sin embargo, el toe excesivo eleva el desgaste de los neumáticos. Los valores bajos se deben a que el efecto de *bump steer* es nulo, el cual se ha conseguido con una correcta geometría de los tirantes de dirección.

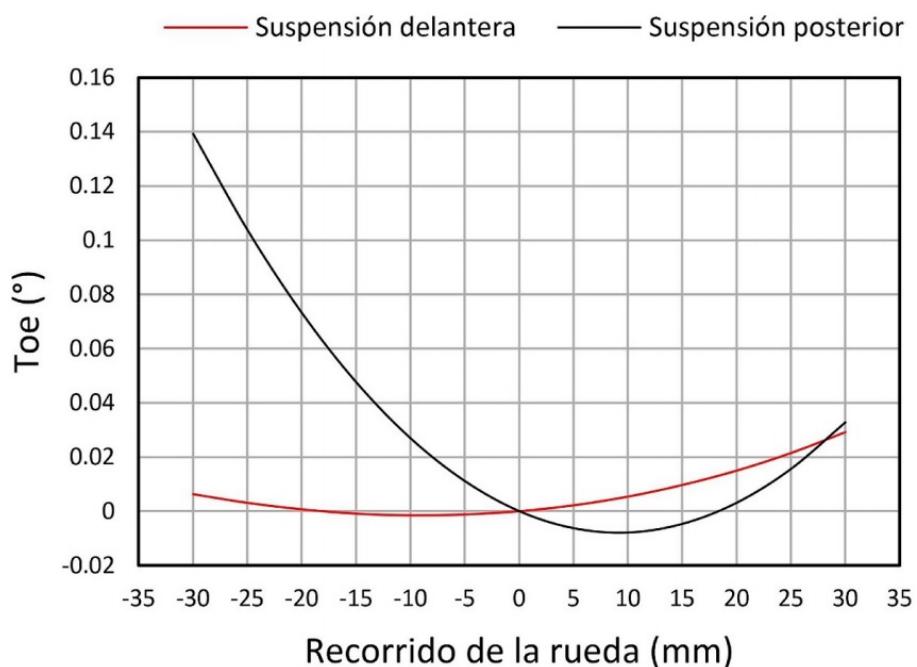


FIGURA 8  
Variaciones del toe con bote y rebote de la rueda.

Se simula el paso del coche en curva, el cual hace que la suspensión se incline por efecto de la aceleración centrífuga, la fuerza lateral se traduce en ángulo de balanceo del chasis. De acuerdo con la Figura 9, cuando

el balanceo del chasis es positivo la rueda es externa a la curva y si es negativo la rueda es interna a la curva. Con un balanceo de  $3^\circ$  del chasis, el ángulo de caída máximo para la rueda externa e interna del eje delantero es de  $1,28$  y  $-1,52$  grados respectivamente, mientras que en el eje posterior el máximo ángulo de caída es de  $1,83^\circ$  para la rueda exterior y  $-2,01$  para la rueda interior. En función de los resultados, las ruedas externas a la curva tienen una ganancia de caída negativa, permitiendo una mejora en la adherencia de los neumáticos.

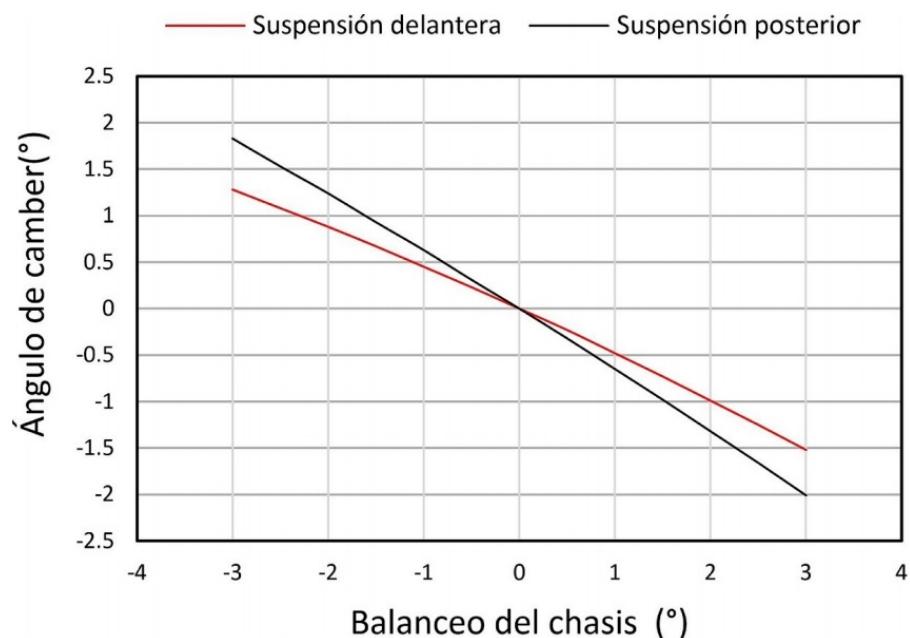


FIGURA 9  
Variaciones del ángulo de caída con balanceo del chasis.

En la Figura 10 se observa que los centros de balanceo posterior y delantero tienen un recorrido lateral de  $186,44$  mm y  $119,05$  mm respectivamente, con un balanceo máximo de  $3^\circ$  del chasis. Considerando el efecto en la reducción del balanceo de los elementos elásticos (muelles y barra estabilizadora), así como una aceleración lateral de  $1\text{ G}$ ; el chasis tendrá  $1^\circ$  de balanceo, donde la migración lateral del centro de balanceo será de  $63,57\text{ mm/G}$  y  $40,25\text{ mm/G}$  en la suspensión delantera y posterior respectivamente.

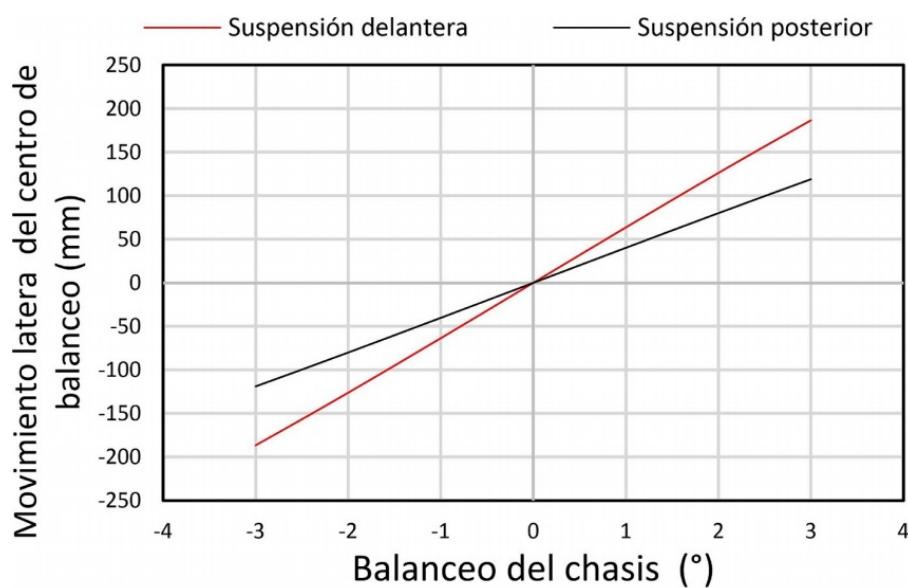


FIGURA 10  
Movimiento lateral del centro de balanceo con balanceo del chasis.

La Figura 11 muestra el comportamiento de la rueda delantera derecha con el giro de la dirección. Cuando la rueda es interna a la curva y con el ángulo de giro máximo tiene una caída negativa de  $-2,75$  grados. Si la rueda es externa a la curva, con el giro máximo se genera una caída positiva de  $5,33^\circ$ .

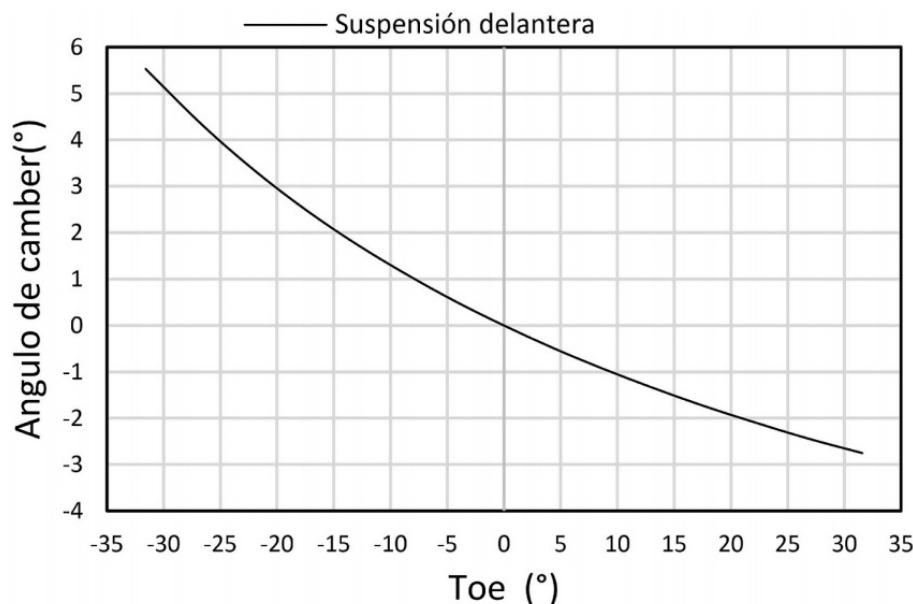


FIGURA 11  
Variaciones del ángulo de caída con el giro de la dirección.

## RESULTADOS Y ANÁLISIS DINÁMICO

Se realizan los cálculos de las fuerzas que se generan en los miembros del sistema de suspensión cuando el vehículo está sometido a diferentes escenarios de carga dinámica. Es importante considerar tantos escenarios como sea posible porque las fuerzas generadas variarán para cada miembro en función del caso de carga. Se

establecen cinco escenarios de carga diferentes a las que el vehículo se somete en un entorno típico de carretera [15].

- Aceleración lineal
- Frenado lineal
- Paso por curva
- Aceleración en curva
- Frenado en curva
- Paso por obstáculo

Para cada escenario de carga se calculan las fuerzas que se generan en el sistema referencial, X en dirección longitudinal al vehículo, Z en dirección perpendicular al suelo y Y en dirección transversal al vehículo. Las fuerzas que se generan en el parche del neumático en las direcciones X y Z debido a la aceleración y frenado como se muestra en la Figura 12, vienen definidas por las ecuaciones 1-6:

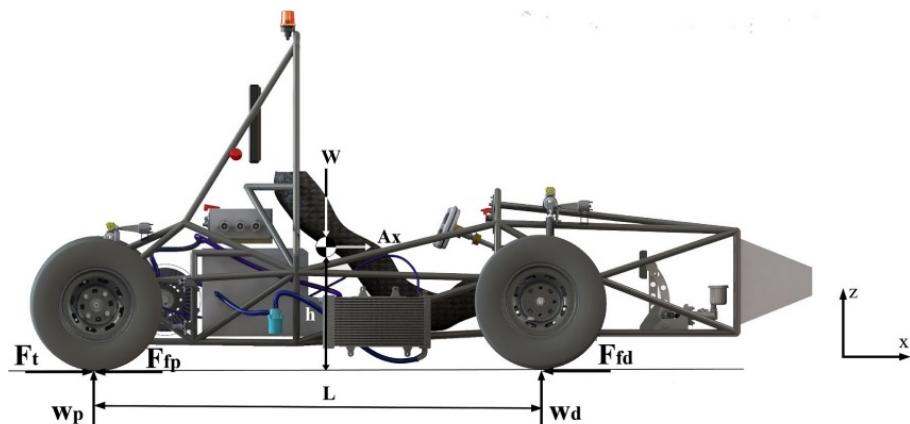


FIGURA 12

Fuerzas presentes en el parche del neumático durante la aceleración y frenado.

$$Ax = \frac{v_f - v_o}{t} \quad (1)$$

$$F_t = \frac{\mu \times W \times b}{1 - \frac{h}{L} \times \mu} \quad (2)$$

$$F_{fp} = \mu \times \left( W_e - \frac{W \times Ax \times h}{l} \right)$$

$$F_{fd} = \mu \times \left( W_e - \frac{W \times Ax \times h}{l} \right) \quad (4)$$

$$W_d = W_{ed} + \frac{W \times Ax \times h}{l} \quad (5)$$

$$W_p = W_{ep} - \frac{W \times Ax \times h}{l} \quad (6)$$

Donde:

Ax = aceleración longitudinal (m/s<sup>2</sup>)

v<sub>o</sub> = velocidad inicial (m/s)

v<sub>f</sub> = velocidad final (m/s)

Ft = fuerza de tracción (N)

W = peso del vehículo (N)

l = distancia entre ejes (m)

h = altura del centro de gravedad (m)

μ = coeficiente de adherencia

W<sub>ed</sub> = peso estático sobre del eje delantero (N)

W<sub>ep</sub> = peso estático sobre del eje posterior (N)

W<sub>d</sub> = peso dinámico sobre el eje delantero (N)

W<sub>p</sub> = peso dinámico sobre el eje posterior (N)

F<sub>fd</sub> = fuerza de frenado en el eje delantero (N)

F<sub>fp</sub> = fuerza de frenado en el eje posterior (N)

b = distancia del eje posterior al centro de gravedad (m)

Las fuerzas que se generan en el parche del neumático en las direcciones Y y Z debido al paso por curva como se muestra en la Figura 13, se determinan por las ecuaciones 7, 8, 9.

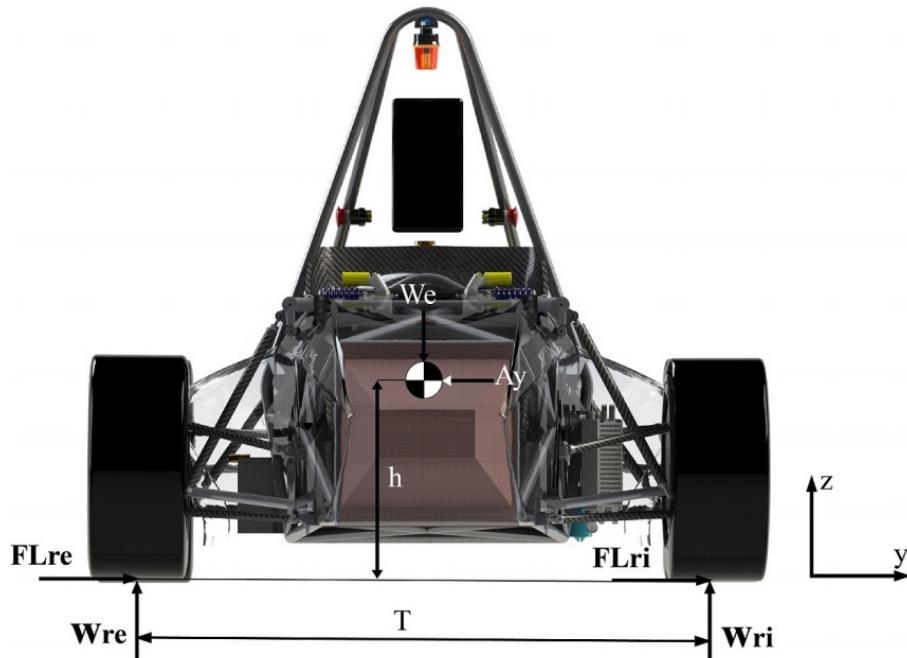


FIGURA 13  
Fuerzas presentes en el parche del neumático en paso por curva.

$$Fl = \frac{m \times v^2}{4 \times r} \quad (7)$$

$$Fl = \frac{m \times v^2}{4 \times r} \quad (8)$$

$$Wp = We_p - \frac{W \times Ax \times h}{l} \quad (9)$$

Donde:

$m$  = masa del vehículo (kg)

$v$  = velocidad del vehículo (m/s)

$r$  = radio de curvatura (m)

$Ay$  = aceleración lateral (m)

$W_e =$  peso estático sobre el eje (N)

$W_{re} =$  peso dinámico sobre la rueda exterior (N)

$W_{ri} =$  peso dinámico sobre la rueda interior (N)

$T =$  ancho de vía (m)

$h =$  altura del centro de gravedad (m)

Las fuerzas que se generan en el parche del neumático en la dirección Z debido al paso por obstáculo se determinan mediante la ecuación 10:

$$F_{eje} = 0,2m_{eje} \times a_z \quad (10)$$

Donde:

$F_{eje}$  = fuerza en el eje (N)

$a_z$  = aceleración vertical ( $m/s^2$ )

$m_{eje}$  = masa del eje (kg)

Con los escenarios de carga establecidos, se procede a determinar las fuerzas que se generan en los miembros de la suspensión. En la suspensión frontal y posterior hay un total de seis miembros, en donde dos miembros son del brazo de control superior (BCS), dos miembros del brazo de control inferior (BCI), uno de la barra push-rod (PR) y uno del brazo de acoplamiento (BA). Para este análisis se supone que la carga actúa en el centro de rueda. El centro de rueda se considera como base del cuerpo rígido y el punto (0, 0, 0) como se muestra en las Figuras 14 y 15.

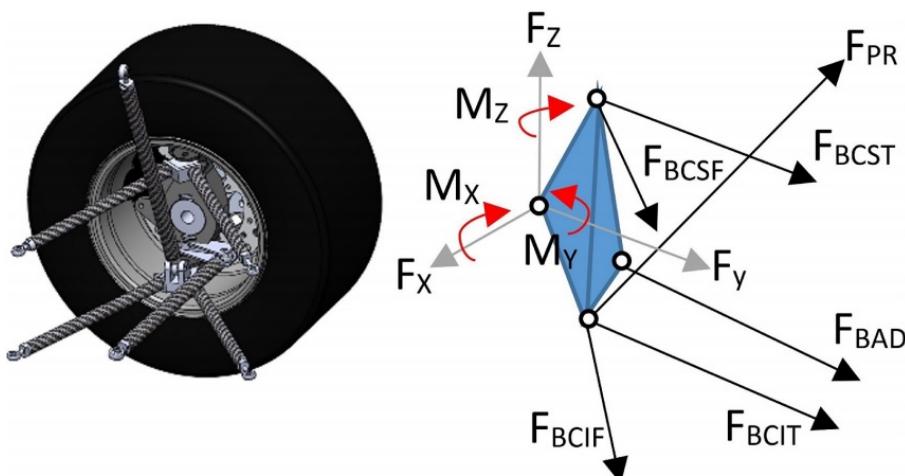


FIGURA 14

Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas en los miembros de la suspensión delantera.

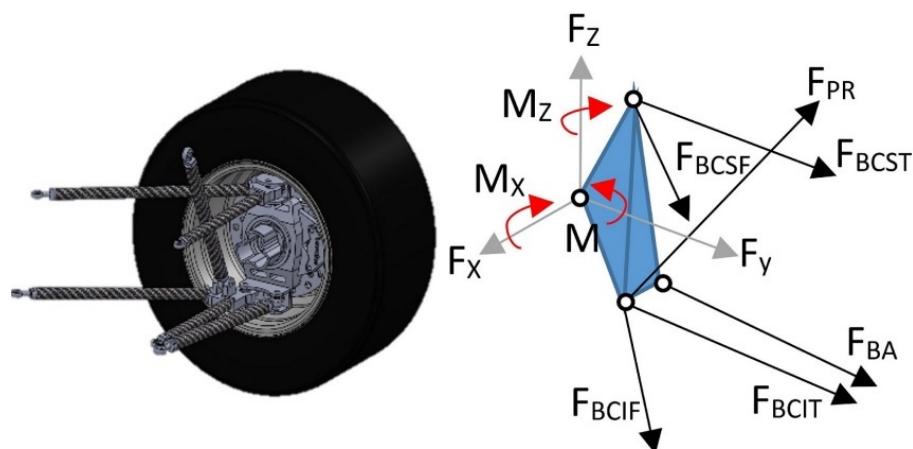


FIGURA 15

Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas en los miembros de la suspensión posterior.

Por medio de un sistema de vectores y matrices se determinan cómo se distribuyen estas fuerzas a lo largo de cada uno de los elementos de suspensión [16]. Con un equilibrio de fuerzas y momentos con respecto a los ejes coordinados X, Y y Z del centro de rueda se determinan seis ecuaciones. El sistema de ecuaciones se resuelve por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} [A]x &= B \\ x &= [A]^{-1}B \end{aligned} \tag{11}$$

$x$  representa la fuerza desconocida en cada uno de los miembros de suspensión.

$$x = \begin{pmatrix} F_{PR} \\ F_{BCSF} \\ F_{BCST} \\ F_{BCIF} \\ F_{UCST} \\ F_{BA/BAD} \end{pmatrix} \tag{12}$$

B representa las fuerzas y momentos en X, Y y Z generados en el centro del parche del neumático y resuelto sobre el centro de la rueda.

$$B = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (13)$$

La matriz A queda determinada por los vectoresunitarios obtenidos de la sumatoria de fuerzas y momentosen las direcciones X, Y y Z de cada miembro.El vector fuerza ( $\vec{F}$ ) es igual al producto punto entreel vector unitario (u) y la magnitud de la fuerza ( $|F|$ ),como muestra la ecuación 15. El momento ( $\vec{M}$ ) es igualal producto cruz entre el vector fuerza () y el vectorde brazo de momento ( $\vec{r}$ ), como se puede observar enla ecuación 15.

$$\vec{F} = |F| \times \vec{u}$$
$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \quad (14)$$

$$\vec{M} = |F| \times \vec{u} \times \vec{r} \quad (15)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} u_{PRx} & u_{BCSFx} & u_{BCSTx} & \dots \\ u_{PRy} & u_{BCSFy} & u_{BCSTy} & \dots \\ u_{PRz} & u_{BCSFz} & u_{BCSTz} & \dots \\ (u_z r_y - u_y r_z)_{PR} & (u_z r_y - u_y r_z)_{BCSF} & (u_z r_y - u_y r_z)_{BCST} & \dots \\ (u_z r_x - u_x r_z)_{PR} & (u_z r_x - u_x r_z)_{BCSF} & (u_z r_x - u_x r_z)_{BCST} & \dots \\ (u_y r_x - u_x r_y)_{PR} & (u_y r_x - u_x r_y)_{BCSF} & (u_y r_x - u_x r_y)_{BCST} & \dots \\ \dots & u_{BCIFx} & u_{BCITx} & u_{BAx} \\ \dots & u_{BCIFy} & u_{BCITY} & u_{BAy} \\ \dots & u_{BCIFz} & u_{BCITz} & u_{BAz} \\ \dots & (u_z r_y - u_y r_z)_{BCIF} & (u_z r_y - u_y r_z)_{BCIT} & (u_z r_y - u_y r_z)_{BA} \\ \dots & (u_z r_x - u_x r_z)_{BCIF} & (u_z r_x - u_x r_z)_{BCIT} & (u_z r_x - u_x r_z)_{BA} \\ \dots & (u_y r_x - u_x r_y)_{BCIF} & (u_y r_x - u_x r_y)_{BCIT} & (u_y r_x - u_x r_y)_{BA} \end{bmatrix} \quad (16)$$

En las Tablas 5 y 6 se muestran las máximas fuerzas de tensión y compresión en los miembros del sistema desuspensión, como resultado de los diferentes escenarios de carga. Las máximas fuerzas de tensión en los miembros de los brazos de suspensión son de -4313 N y -5131 N en la parte delantera y posterior respectivamente, y las máximas fuerzas de compresión son de 4165 N y 5119 N. Las barras push-rod delantera y posterior trabajan solo a compresión donde las fuerzas son de 5358 N y 8544 N para la parte delantera y posterior respectivamente.

TABLA 5  
Resultados de las fuerzas en los miembros de la suspensión delantera

Escenarios de carga	Fuerzas en los miembros de la suspensión delantera					
	FPR	FBCSF	FBCST	FBCIF	FBCIT	FBAD
Aceleración (N)	487	109	82	-272	-178	-58
Frenado (N)	1149	4162	-2726	-2021	3350	-2623
Curva (N)	1092	-1160	-1459	1063	957	825
Aceleración y curva (N)	296	-1339	-1594	1508	1248	918
Frenado y curva (N)	2495	1013	4165	146	-4313	-1109
Paso por obstáculo (N)	5358	1203	906	-2990	-1954	-629
Máxima fuerza (N)	5358	4162	4165	-2290	-4313	-2623

TABLA 6  
Resultados de las fuerzas en los miembros de la suspensión posterior

Escenarios de carga	Fuerzas en los miembros de la suspensión posterior					
	FPR	FBCSF	FBCST	FBCIF	FBCIT	FBAD
Aceleración (N)	1494	-3942	2874	4775	-5131	-776
Frenado (N)	754	2582	-1333	-2437	988	482
Curva (N)	2239	998	-2225	-155	1297	-625
Aceleración y curva (N)	2090	-3168	238	5119	-2503	52
Frenado y curva (N)	956	-1772	-949	3553	-153	-268
Paso por obstáculo (N)	8544	1646	1986	-2593	-2915	521
Máxima fuerza (N)	8544	-3942	2874	5119	-5131	776

Se realizan ensayos de compresión y tracción para determinar si los miembros soportan las máximas cargas calculadas. En la prueba de tracción se mide la fuerza de unión entre los injertos de aluminio y el tubo de fibra de carbono [17]. El injerto es un elemento de aluminio pegado con un adhesivo de alta resistencia al tubo de fibra de carbono, permitiendo el anclaje al chasis o a la mangueta por medio de rótulas. Los tubos son de dos diámetros externos, de 18,1 mm y 21,3 mm con un espesor de 1,15 mm, El tubo de mayor diámetro es utilizado para la barra push-rod y los brazos de acoplamiento. El tubo de menor diámetro es utilizado para los brazos de suspensión.

TABLA 7  
Resultados de los ensayos de compresión y tracción de los miembros de la suspensión

Diámetro de tubo (mm)	Fuerza de tracción (KN)	Fuerza de compresión (KN)
18,1	2,9	13,59
21,3	8,93	13,88

Según resultados de la Tabla 6, se puede decir que los miembros de los brazos de suspensión podrían fallar en tensión ya que de acuerdo con el ensayo de tracción la fuerza de unión máxima es de 2,9 KN, y la fuerza de tensión máxima en un miembro del brazo de suspensión es de -5,13 KN. Para el caso de compresión los miembros están sometidos a pandeo, por lo tanto, es necesario realizar un cálculo de pandeo crítico ( $P_{cr}$ ) y del factor de seguridad ( $F_s$ ) definidos por las ecuaciones 18 y 19. El cálculo permitirá predecir con más exactitud un caso de falla por compresión [18].

$$P_{cr} = \frac{C\pi^2 El}{l^2} \quad (17)$$

$$F_s = \frac{P_{cr}}{C} \quad (18)$$

Donde:

C = constante de condición de extremos articulados

P = fuerza axial ( $N/m^2$ )

E = módulo de elasticidad del material ( $N/m^2$ )

I = momento de inercia ( $m^4$ )

l = longitud de la barra (m)

De acuerdo con los resultados de la Tabla 7, los miembros de los brazos de suspensión, push-rod y brazo de acoplamiento no fallarían por efectos de pandeo ya que según el cálculo tienen factores de seguridad mayores que 2 y soportan fuerzas de compresión mayores a 13 KN.

TABLA 8  
Resultados del cálculo de pandeo crítico y factor de seguridad  
de los miembros de la suspensión que trabajan a compresión

Diámetro del tubo (mm)	Pandeo crítico (N)	Fuerza axial (N)	Factor de seguridad
18,1	14 181,35	5119	2,77
21,3	18 769,27	8544	2,19

Dado que una de las tareas más importantes del sistema de suspensión es absorber las irregularidades del camino sin perder tracción en los neumáticos, la gran mayoría de los autos están equipados con amortiguadores y resortes que cumplen con ello. En esta sección mediante un modelo de 2 grados de libertad del sistema de suspensión de 1/4 de vehículo [19], se realiza el análisis de las frecuencias de la suspensión, haciendo una interacción entre el camino y el vehículo. En la Figura 16 se muestra el modelo de la suspensión de un cuarto de vehículo de 2 grados de libertad, en donde incluye la constante elástica del neumático, así como la masa no suspendida. La posición de la masa suspendida es X1, de la masa no suspendida es X2 y X0 sirve para modelar las irregularidades del terreno.

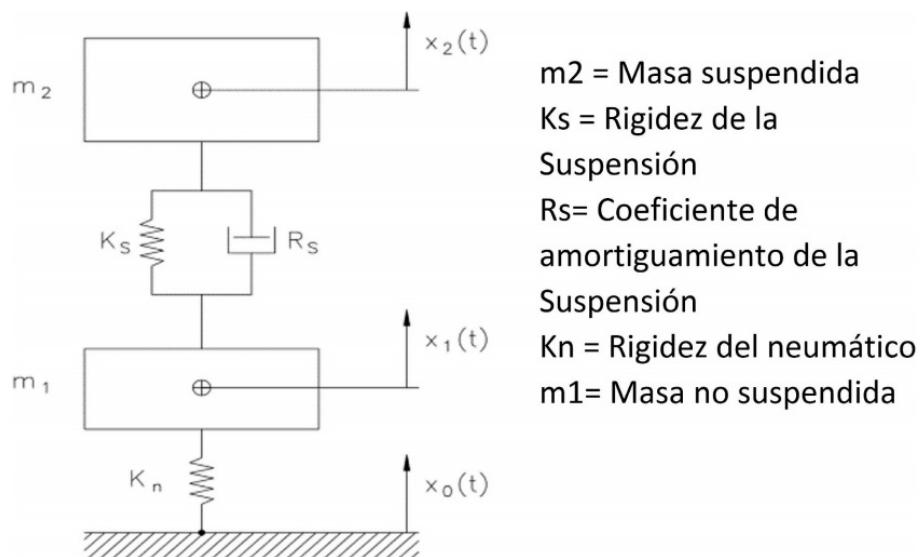


FIGURA 16  
 Modelo completo de un cuarto de vehículo [11].

La función de transferencia de 2 grados de libertad viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{x_2(s)}{x_0(s)} = \frac{R_s \cdot K_n \cdot s \cdot K_s \cdot K_n}{(m_1 \cdot s^2 + R_s \cdot s + K_s + K_n)(m_2 \cdot s^2 + R_s \cdot s + K_s) - (R_s \cdot s - K_s)^2} \quad (19)$$

Con el modelado definido se establecen los parámetros iniciales necesarios que permitan realizar el estudio como se muestra en la Tabla 9.

TABLA 9  
Parámetros del modelo de un cuarto de vehículo

Parámetro	Suspensión frontal	Suspensión posterior
$m_2$ : masa suspendida (kg)	61,1	74,75
$K_s$ : rigidez de la suspensión (N/m)	26 220,47	34 960,62
$R_s$ : coeficiente de amortiguamiento de la suspensión (Ns/m)	.....	.....
$K_n$ : rigidez del neumático (N/m)	102 917,699	132 322,756
$m_1$ : masa no suspendida (kg)	10,9	13,25
$M_R$ : motion ratio	1,3	1,4
$K_w$ : rigidez de la rueda (N/m)	15515,071	17837,051
$f_{m2}$ : frecuencia natural de la masa suspendida (Hz).	2,36	2,3
$f_{m1}$ : frecuencia natural de la masa no suspendida (Hz)	16,62	16,81
$C_{cr}$ : coeficiente de amortiguación crítico (Ns/m)	2487,28	3233,274

La fuerza desarrollada por un amortiguador ( $F_a$ ) está representada por la ecuación:

$$F_d = R_s \cdot v_p \quad (20)$$

Donde:

$R_s$ = coeficiente de amortiguación [Ns/m]

$v_p$ = velocidad en el pistón del amortiguador [m/s]

Usando el software matemático Matlab se analizala transmisibilidad del sistema de suspensión a diferentes coeficientes de amortiguamiento para alta y bajavelocidad que provee el amortiguador TTX 25 [20]. Por medio de la ecuación 21 y la gráfica de la Figura17 se determinan las pendientes o coeficientes de amortiguación para los diferentes ajustes del amortiguador como se muestra en la Tabla 10.

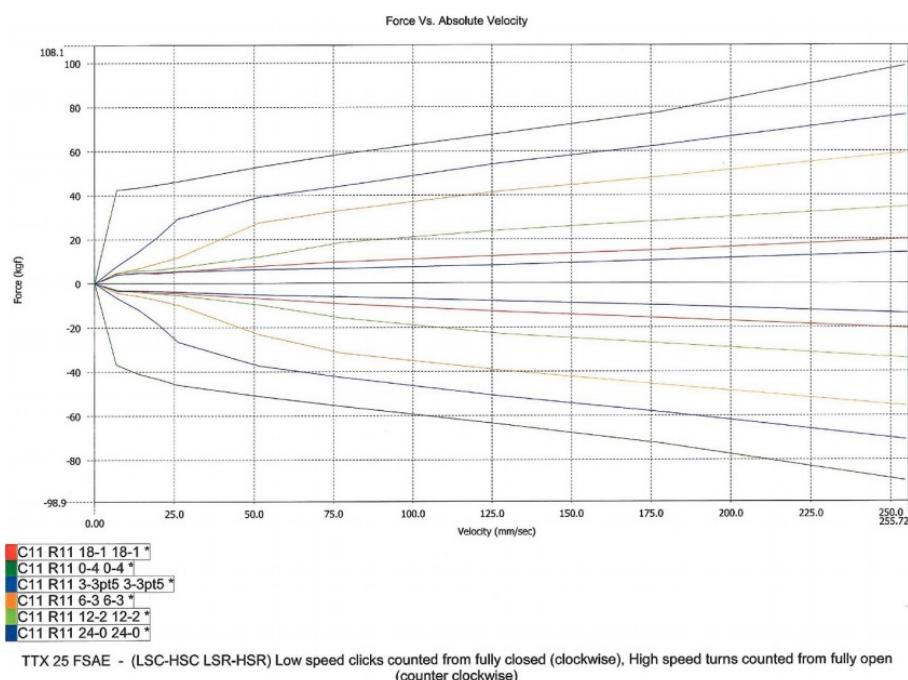


FIGURA 17  
Fuerza desarrollada por el amortiguador TTX25 para diferentes ajustes. [21]

Para maximizar el área de tracción, se requiere la menor transmisibilidad posible. En las gráficas de las Figuras 18 y 19 se muestra la respuesta del modelo de segundo grado de la suspensión frontal y posterior. Se puede observar que si a bajas frecuencias de entrada se aumenta el factor de amortiguación, la transmisibilidad se reduce al máximo, lo que significa que el neumático no perderá tracción. Después del punto de intersección, los factores de amortiguamiento bajos resultan con una menor transmisibilidad, atenuando el movimiento en el chasis [22].

TABLA 10  
Coeficientes de amortiguación para diferentes ajustes del amortiguador

<b>Ajuste del amortiguador</b>	<b>Bajas velocidades Pendiente [KN*s/m]</b>	<b>Altas velocidades Pendiente [N*s/m]</b>
C11 R11 0-4	52,788	2223
C11 R11 3-3pt5	11,77	1962
C11 R11 6-3	5,282	1831
C11 R11 12-2	2,354	882,9
C11 R11 18-1	3,678	689,1
C11 R11 24-0	3,678	567,5

De acuerdo con el análisis de transmisibilidad es necesario un alto factor de amortiguamiento ( $\xi$ ) a bajas velocidades y un valor bajo para altas velocidades en el amortiguador. El amortiguador TTX25, para la suspensión delantera necesita un valor muy cercano de  $\xi = 0,73$ , el cual se logra con el ajuste C11 R11 6-3 para baja velocidad. Para altas velocidades el ajuste C11 R11 24-0 provee un  $\xi = 0,22$ . En la suspensión posterior se necesita un valor de  $\xi = 0,68$ , el cual se logra con el ajuste C11 R11 0-4 para baja velocidad. Para altas velocidades el ajuste C11 R11 18-1 provee un  $\xi = 0,22$ .

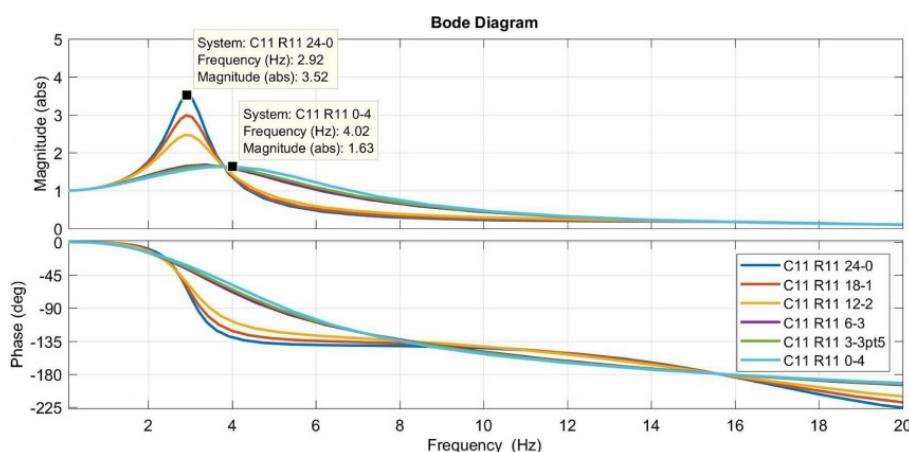


FIGURA 18  
Transmisibilidad del modelo de segundo grado de la suspensión delantera.

Como el sistema se mueve tanto a compresión como extensión, según [23] es mejor tener un factor de amortiguamiento menor a compresión y mayor a extensión con relación al valor deseado para lograr evitar resonancia en el sistema (ver Figura 20).

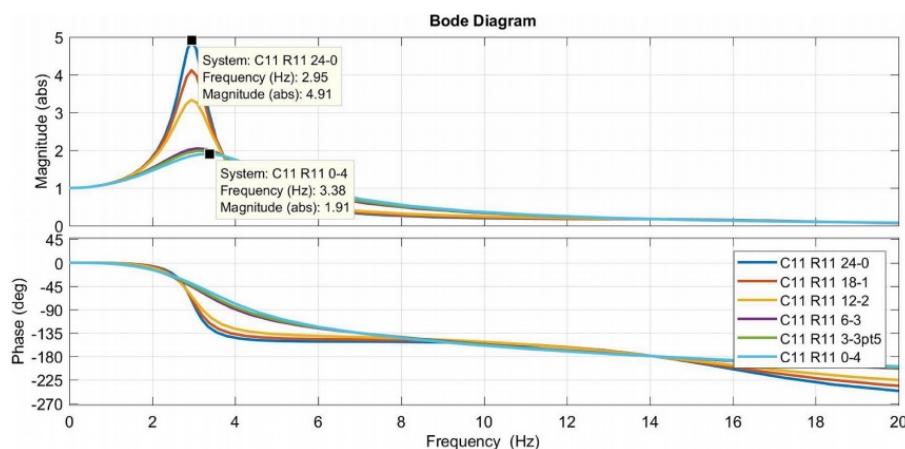


FIGURA 19  
Transmisibilidad del modelo de segundo grado de la suspensión posterior.

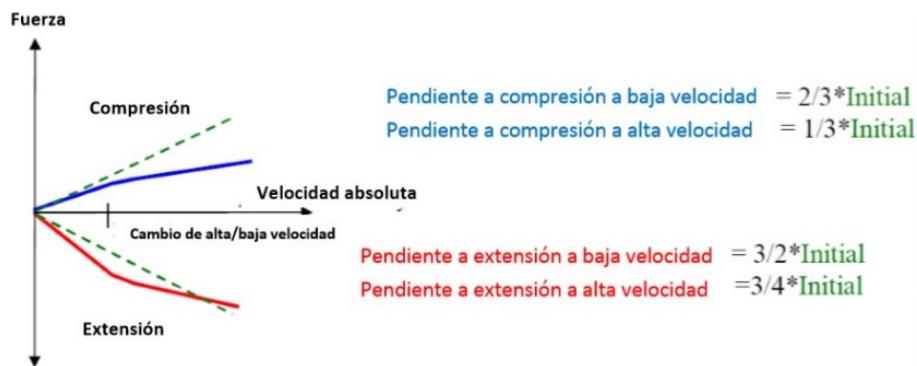


FIGURA 20  
Ajuste de la pendiente para altas velocidades y bajas velocidades. [23]

De acuerdo con el análisis realizado se establece utilizar el doble del factor de amortiguamiento de compresión para la extensión. De esta forma, se logra conseguir una buena adherencia de la rueda, una menor transmisibilidad y mejor maniobrabilidad. Las calibraciones que cumplen con estos requisitos se muestran en las Tablas 11 y 12.

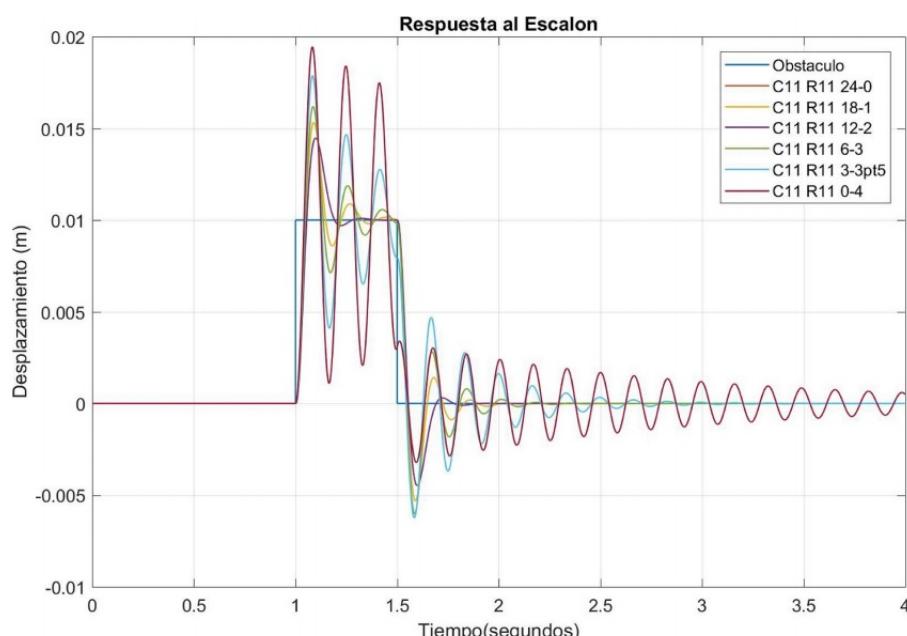
TABLA 11  
Factor de amortiguamiento de la suspensión delantera

Ajuste del amortiguador	Compresión		Extensión	
	Baja velocidad	Alta velocidad	Baja velocidad	Alta velocidad
C11 R11 12-2	0,92	0,34	.....	.....
C11 R11 6-3	.....	.....	2,08	0,72

**TABLA 12**  
Factor de amortiguamiento de la suspensión posterior

<b>Ajuste del amortiguador</b>	<b>Compresión</b>		<b>Extensión</b>	
	<b>Baja velocidad</b>	<b>Alta velocidad</b>	<b>Baja velocidad</b>	<b>Alta velocidad</b>
C11 R11 12-2	0,72	0,27	.....	.....
C11 R11 6-3	.....	.....	1,63	0,56

Las Figuras 21 y 22 muestran la respuesta del sistema de la suspensión delantera y posterior respectivamente ante un desplazamiento vertical como entrada. Se puede observar que las calibraciones del factor de amortiguamiento de baja velocidad en compresión atenúan en el menor tiempo posible las oscilaciones con respecto a otras calibraciones.



**FIGURA 21**  
Respuesta del sistema de suspensión delantera ante un desplazamiento vertical como entrada.

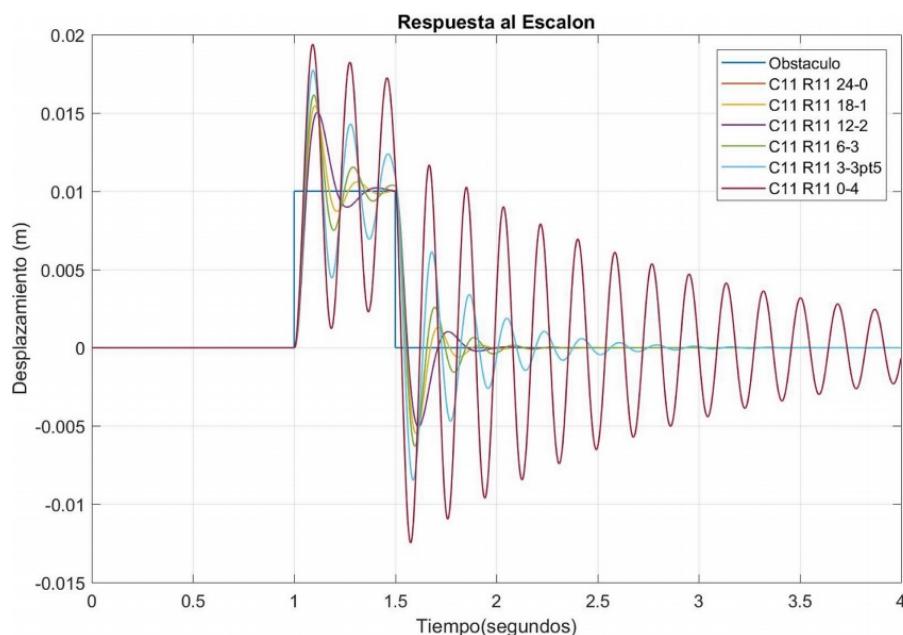


FIGURA 22

Respuesta del sistema de suspensión posteriormente un desplazamiento vertical como entrada.

## CONCLUSIONES

Esta investigación ayuda a tener una visión más amplia de los sistemas de suspensión que utilizan los vehículos de competencia FSAE. Con el estudio de la cinemática se determinó el comportamiento de la suspensión del monoplaza bajo diferentes escenarios en pista, como el paso por curva o por un obstáculo. En función de los resultados se puede decir que la configuración que dispone la suspensión del monoplaza, permite un buen control direccional del vehículo (efecto bump steer nulo) y una ganancia de caída negativa adecuada de la rueda con el recorrido de la suspensión o el balanceo del chasis, dotando de un buen agarre lateral a los neumáticos, sin embargo, con el giro de la dirección hay una ganancia de caída positiva excesiva en las ruedas delanteras, que afectaría el agarre lateral en curvas muy cerradas. Con los ajustes adecuados en los ángulos de avance, salida, caída estática y convergencia, se podría asegurar las condiciones requeridas u óptimas de estabilidad del vehículo y de la dirección, permitiendo mayores aceleraciones, mejor frenado y pasos por curva más rápidos. De acuerdo con el estudio de las fuerzas en los miembros de la suspensión ante cargas dinámicas, se determinó que los brazos de suspensión sometidos a cargas de tensión pueden fallar en los casos críticos, el problema está en la fuerza de unión entre los injertos de aluminio. Con el modelo de segundo grado de un cuarto de vehículo y con la ayuda de Matlab, se realizó un análisis de transmisibilidad que permitió definir las características que el amortiguador debe tener para garantizar máxima área de contacto, lo que produce una mayor tracción.

## REFERENCIAS

- [1] IMechE. Formula student. Institution of Mechanical Engineers. [Online]. Available: <https://goo.gl/Mkjf9n>
- [2] S. International. (2017) Formula sae rules. [Online]. Available: <https://goo.gl/pSeNqe>
- [3] Formula Studente Germany. (2017) Formula student electric - world ranking list. Mazur Events+Media. [Online]. Available: <https://goo.gl/2Q75AE>

- [4] A. Staniforth, Competition Car Suspension: Design, Construction, Tuning, Haynes, Ed., 1999. [Online]. Available: <https://goo.gl/2jhg7s>
- [5] Rapid-Racer. (2016) Suspension. [Online]. Available: <https://goo.gl/5Dpwjr>
- [6] W. F. Milliken and D. L. ;illiken, Race Car Vehicle Dynamics, S. International, Ed., 1995. [Online]. Available: <https://goo.gl/iuhFqJ>
- [7] T. Pashley, How to Build Motorcycle-engined Racing Cars, V. P. Ltd, Ed., 2008. [Online]. Available: <https://goo.gl/XdxRGM>
- [8] M. Royce and S. Royec, Learn & Compete: A Primer for Formula SAE, Formula Student and Forumula Hybrid Teams, R. Graphic, Ed., 2012. [Online]. Available: <https://goo.gl/9rxtrG>
- [9] C. Smith, Tune to Win, C. S. Consulting, Ed., 1978. [Online]. Available: <https://goo.gl/KaTkxq>
- [10] Milliken Research. (2018) Formula sae tire test consortium. Milliken Research Associates Incorporated. [Online]. Available: <https://goo.gl/ErGrP5>
- [11] G. P. Pillajo Quijia, "Estudio cinemático del comportamiento de la suspensión de un prototipo de formula sae student eléctrico del equipo upm racing," Master's thesis, Universidad Politécnica de Madrid. España, 2012. [Online]. Available: <https://goo.gl/aTb5mt>
- [12] P. De la fuente aguilera, "Análisis de la suspensión del vehículo monoplaza eléctrico UPM-03e del equipo UPM racing," Universidad Politécnica de Madrid. España., 2016. [Online]. Available: <https://goo.gl/PvvCV3>
- [13] S. Juvanteny Gimenez, "Estudio y diseño del sistema de suspensión para un prototipo de fórmula SAE," Tesis de grado. Universidad Politécnica de Cataluña. España, 2015. [Online]. Available: <https://goo.gl/q93zhh>
- [14] E. I. Efler Herranz, "Diseño de la suspensión trasera de un vehículo formula student," Tesis de grado. Universidad Politécnica de Madrid. España, 2016. [Online]. Available: <https://goo.gl/YkgNnv>
- [15] E. D. Flickinger, "Design and analysis of formula sae car suspension members," Master's thesis, California State University, Northridge. USA, 2014. [Online]. Available: <https://goo.gl/tcUw5g>
- [16] L. Borg, "An approach to using finite element models to predict suspension member loads in a formula sae vehicle," Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University. USA, 2009. [Online]. Available: <https://goo.gl/i8bV4B>
- [17] A. C. Cobi, "Design of a carbon fiber suspension system for fsae applications," Bachelor thesis. Massachusetts Institute of Technology. USA, 2012. [Online]. Available: <https://goo.gl/h1tQU3>
- [18] R. G. Budynas and J. K. Nisbett, Diseño en ingeniería mecánica de Shigley, 9th ed., M. Mc Graw-HILL, Ed., 2012. [Online]. Available: <https://goo.gl/dumukn>
- [19] F. Aparicio Izquierdo, Teoría de los vehículos automóviles, E. T. S. d. I. I. Universidad Politécnica de Madrid, Ed., 1995. [Online]. Available: <https://goo.gl/M2EHoy>
- [20] J. Hurel, E. Teran, F. Flores, and B. Flores, "Modelo físico y matemático del sistema de suspensión de un cuarto de vehículo," in 15th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology. USA, 2017. [Online]. Available: <https://goo.gl/7yrFEK>
- [21] "OHLINS. (2017) Ttx25 mkii., "OHLINS. Advanced Suspension Technology. [Online]. Available: <https://goo.gl/Kra2dB>
- [22] A. Espejel Arroyo, "Rediseño de un sistema de suspensión para un auto de competencia mediante adams/car y Matlab," Tesis de grado. Universidad Nacional Autónoma de México, 2015. [Online]. Available: <https://goo.gl/sTxBg9>
- [23] M. Giariffa and S. Brisson, "Tech tip: Spring & dampers, episode four. a new understanding," OPTIMUMUG. Vehicle dynamics solutions, Tech. Rep., 2017. [Online]. Available: <https://goo.gl/kVkg6o>