



Revista de Economía del Rosario

ISSN: 0123-5362

ISSN: 2145-454X

luis.gutierrez@urosario.edu.co

Universidad del Rosario

Colombia

Calixto Rodríguez, Luis Carlos

¿Cuál es el costo fiscal de la dualidad en el sistema pensional colombiano?

Revista de Economía del Rosario, vol. 22, núm. 2, 2019, Julio-, pp. 231-311

Universidad del Rosario

Colombia

DOI: <https://doi.org/10.12804/revistas.urosario.edu.co/economia/a.8145>

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=509560746003>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

UAEH  redalyc.org

Sistema de Información Científica Redalyc

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## ¿Cuál es el costo fiscal de la dualidad en el sistema pensional colombiano?

Recibido: noviembre, 24 de 2018 - Aprobado: marzo, 27 de 2019

Doi: <http://dx.doi.org/10.12804/revistas.urosario.edu.co/economia/a.8145>

Luis Carlos Calixto Rodríguez\*

---

### Resumen

El sistema pensional colombiano ha cambiado su funcionamiento mediante la implementación de las leyes 100/1993 y 797/2003, lo cual permitió la dualidad de esquemas entre el de prima media y el de capitalización individual. Dichas leyes no tuvieron el comportamiento de la variable fundamental del ingreso base de liquidación. Este trabajo estima el ingreso base de liquidación recomendado para no generar impacto fiscal y los impactos fiscales de mantener dualidad en el sistema pensional colombiano.

*Palabras clave:* sistema pensional, prima media, capitalización individual, déficit pensional.  
*Clasificación JEL:* H55, H63, J01, J31.

---

\* Magíster en Economía. Profesor, Facultad de Economía, Universidad Externado de Colombia, Bogotá. Correo electrónico: [luis.calixto90@hotmail.com](mailto:luis.calixto90@hotmail.com)

---

Para citar este artículo: Calixto Rodríguez, L. C. (2019). ¿Cuál es el costo fiscal de la dualidad en el sistema pensional colombiano? *Revista de Economía del Rosario* 22(2), 231-311. Doi: <http://dx.doi.org/10.12804/revistas.urosario.edu.co/economia/a.8145>

## What is the fiscal cost of duality in the Colombian pension system?

### Abstract

The Colombian pension system has changed its operation through the implementation of laws 100/1993 and 797/2003, which allowed the duality of schemes between the average premium scheme and singular capitalization. These laws did not have the behavior of the essential variable of the base settlement income. The work estimates the recommended base settlement income not to generate fiscal impact and those of maintaining the pension system's duality.

*Keywords:* Pensional system, funding fund, pension deficit.

*JEL Classification:* H55, H63, J01, J31.

## Qual é o custo fiscal da dualidade no sistema de pensões colombiano?

### Resumo

O sistema de pensões colombiano tem mudado o seu funcionamento através da implementação das leis 100/1993 e 797/2003, o que permitiu a dualidade de esquemas entre o esquema de prêmio médio e de capitalização individual. Ditas leis não tiveram o comportamento da variável fundamental do ingresso base de liquidação. Este trabalho estima o ingresso base de liquidação recomendado para não gerar impacto fiscal e os impactos fiscais de manter dualidade no sistema de pensões colombiano.

*Palavras-chave:* sistema de pensões, prêmio médio, capitalização individual, déficit de pensões. *Classificação JEL:* H55, H63, J01, J31.

## Introducción

En la década de los noventa, el sistema pensional colombiano tuvo un cambio de esquema. Antes de 1993 funcionaba el esquema de prima media (PM) manejado por el Instituto de Seguro Social (ISS), la Caja Nacional de Prevención (CAJANAL) y las cajas de prevención departamentales; posteriormente, pasó a trabajar conjuntamente con el esquema de capitalización individual (CI). Esto permitió compartir el funcionamiento del sistema pensional de forma sustituta, con el propósito de generar impactos positivos en el crecimiento de la economía por medio de direccionamientos correctos del ahorro en inversión para que el ingreso nacional colombiano creciera.

Razones como pensiones privilegiadas, cambios demográficos y mercado laboral débil justificaban el ingreso del esquema de capitalización individual en el sistema pensional, el cual ofrecía mayor crecimiento económico, mejor distribución de los ingresos para las pensiones basados en el argumento de igualdad y la disminución del déficit pensional. En la transición de esquemas, el Estado colombiano debía cumplir con las responsabilidades adquiridas, como como los bonos pensionales, con la particularidad que ya no recibía flujos porque sus afiliados habían hecho la transferencia al esquema de CI. El segundo error fue que los esquemas debieron funcionar de forma paralela y complementaria con el enfoque de pilares y no paralela y sustituta. El tercer error son los factores que hacen que el esquema de capitalización individual no funcione de la manera adecuada, como la baja tasa de interés, la informalidad y el bajo nivel promedio salarial.

El panorama actual da a entender que el Gobierno nacional no puede desligarse de la responsabilidad contractual del sistema pensional y debe cumplir con las pensiones de los trabajadores; por su parte, el esquema de CI no ha cumplido con su tarea asignada de disminuir la carga contractual del Gobierno nacional y el déficit pensional ha aumentado. Por lo tanto, este trabajo trata de estimar el costo de mantener dos esquemas en funcionamiento por medio de la estimación de un salario recomendable periodo a periodo, el cual no genera costo fiscal. Este trabajo se divide en cuatro partes. La primera parte del trabajo es teórica y se divide en dos secciones. En la primera se contextualiza todo lo referente a un sistema y esquema pensional, desde sus inicios hasta los parámetros que se deben tener en cuenta en cada uno de ellos. La segunda describe el modelo teórico tanto para un esquema de CI como de PM. La tercera parte del trabajo es práctica y muestra una revisión bibliográfica empírica de los modelos que se han desarrollado, seguido de la modelación que se desarrolló en la primera parte. La cuarta parte reúne

tanto la parte teórica como la empírica para dar recomendaciones al actual sistema pensional colombiano.

## **1. Revisión bibliográfica de los aspectos analíticos**

El individuo ahorra durante su vida laboral para tener una protección en la vejez y para ello entran en juego los conocidos sistemas de seguridad social que funcionan por esquemas públicos y privados. Los sistemas de protección social fueron creados por William Beveridge en Inglaterra y por Otto Bismarck en Alemania. Beveridge creía que la sociedad estaba en la responsabilidad de proteger al individuo ante la incapacidad de la vejez, de desempleo o de enfermedad, a las cuales era propenso en esa etapa de la vida.

El esquema de Beveridge, según Merchan (2002), debe cumplir con los principios de universalidad, integralidad, obligatoriedad y solidaridad. El principio de universalidad y de integralidad explica que todos los miembros de una sociedad deben estar cubiertos en todas las posibles incapacidades anteriormente nombradas. El principio de obligatoriedad implica que el Estado debe cumplir con dichas responsabilidades consecuentemente con lo que estipula el principio de universalidad. Y el principio de solidaridad expone que la sociedad debe proteger al individuo sobre las incapacidades que se le acontezcan. El segundo sistema expuesto por Bismarck explica que los únicos individuos que pueden pertenecer al sistema de seguridad social son los asalariados; este sistema tiene como característica que es financiero, donde sus beneficios están definidos según sus contribuciones y cada persona es responsable de su situación de seguridad social.

Con los sistemas de seguridad social de Bismarck y Beveridge se crean los esquemas con los cuales funcionan los sistemas pensionales. El sistema de Beveridge se asemeja al esquema de Prima Media (PM) y el sistema de Bismarck se asemeja al esquema de Capitalización Individual (CI), ya que como se explicó, en el sistema de Beveridge el Estado garantiza la seguridad social de los trabajadores y en el Bismarck, la seguridad social es responsabilidad de cada individuo. Lindbeck y Persson (2003) explican el funcionamiento de estos dos esquemas y describen que pueden ser combinaciones de tres principales dimensiones. La primera dimensión es de contribución definida versus beneficio definido; la segunda es de fondos y sin fondos y la tercera, de vital importancia por su impacto a las finanzas públicas, es la de sostenibilidad actuarial.

De la primera dimensión se entiende como contribución definida una tasa fija de contribución, que se determina de manera exógena con respecto al salario, mientras que beneficio definido corresponde a un desembolso

que se determina según el nivel de ahorro al momento de pensionarse. La segunda dimensión se refiere al financiamiento. En los esquemas sin fondos la generación actual de trabajadores paga un impuesto para garantizar las pensiones de los actuales pensionados y los esquemas con fondos las pensiones dependen del nivel de ahorro de cada afiliado. Por último, la dimensión actuarial se puede ver desde dos perspectivas. La primera es una perspectiva macro, que establece si el sistema es estable financieramente a largo plazo, y la segunda perspectiva es micro, y se refiere a las contribuciones y beneficios a nivel individual.

De la combinación de las dimensiones, nacen los esquemas de PM y de CI que tienen en común tres variables: el ingreso base de cotización (IBC), el tiempo de ahorro y desahorro y el ingreso base de liquidación (IBL). El esquema de PM se caracteriza por un acuerdo intergeneracional con fundamentos de solidaridad, donde los trabajadores de hoy respaldan las pensiones de los trabajadores de ayer y los trabajadores de mañana respaldarán las pensiones de los trabajadores presentes. Como se trata de un esquema solidario, todas las cotizaciones se introducen en un fondo común para responder por las pensiones. Mientras que el esquema de CI se caracteriza por ser una cuenta individual donde cada trabajador cotiza una proporción del salario junto con la cotización del empleador. La finalidad del esquema es obtener un fondo suficiente que permita tener una pensión desde el monto en que se retira de trabajar hasta la esperanza de vida y se logra mediante la tasa de rentabilidad a la cual están expuestas los ahorros de los cotizantes.

El esquema de CI y el de PM son vulnerables a diferentes situaciones. Las variables que hacen que el esquema de PM sea vulnerable son los cambios demográficos y la informalidad en el mercado laboral, y las variables que hacen vulnerable al esquema de CI son las tasas de rentabilidad. Cerda (2004) explica que los cambios demográficos son variables exógenas al modelo y no hay ningún parámetro que permita modificar la composición demográfica, y como las tendencias poblacionales indican que las poblaciones envejecen, aumentan la tasa de dependencia y la responsabilidad contractual del Estado por el aumento creciente en la esperanza de vida.

El segundo factor que hace vulnerable al esquema de PM es la formalidad del mercado laboral. Hay dos aspectos que aumentan la informalidad laboral, estos son los bajos salarios y los costos salariales tanto para el trabajador como para el empleador. Estos elementos incentivan a la desvinculación de la protección a la vejez y a no tener una pensión. Para un esquema de PM la informalidad implica no recibir un flujo constante de recursos que le podría ayudar a financiar las actuales pensiones.

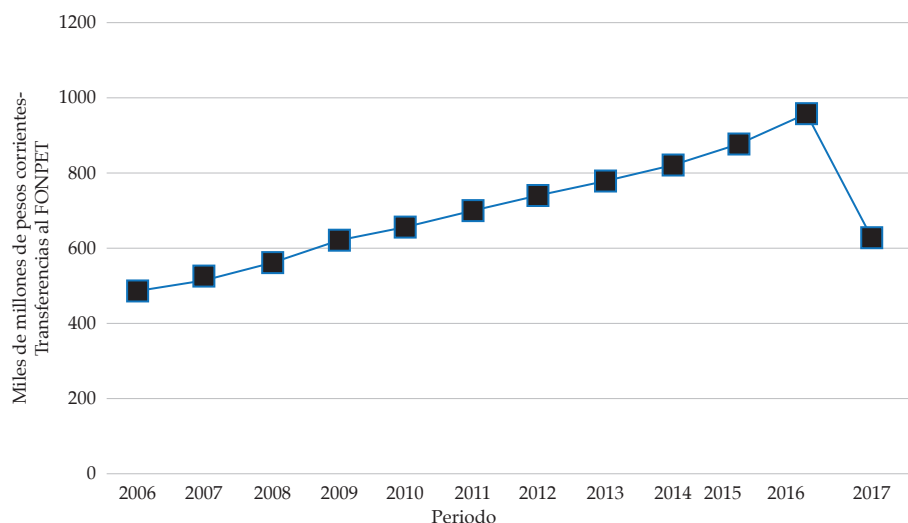
Si aumenta la tasa de dependencia y la esperanza de vida y disminuye la tasa de natalidad y fertilidad, la pirámide poblacional cambia piramidal a una rectangular, y en el peor de los casos a una pirámide invertida. De llegar a presentarse estos cambios, las formas que tiene el Estado para que el esquema de PM sea sostenible es reasignar recursos, aumentar los impuestos referentes a la seguridad social o realizar cambios estructurales o coyunturales al sistema pensional. Estas reformas estructurales implican cambiar los parámetros actuales del esquema, realizar una transición total o parcial entre esquemas.

El cambio del sistema pensional en sus esquemas genera opiniones tanto de apoyo como de rechazo. Las posturas en favor del cambio de esquemas tienen por argumentos que si el ahorro aumenta, aumenta la inversión, aumentan el stock de capital y por lo tanto, aumenta el nivel de producción y consumo que genera una mayor riqueza. De igual forma, uno de los aspectos positivos de dichos cambios es que el sistema pensional no estaría sujeto a los cambios demográficos y liberaría al Estado de las responsabilidades pensionales con su creciente déficit.

Luego, el esquema de CI se presenta como una solución para generar impactos positivos en la economía y dejar en manos del mercado el funcionamiento de un sistema con responsabilidad estatal. Las administradoras de fondos de pensión también argumentan que las transferencias que hace el Gobierno nacional a los gobiernos territoriales relacionados a las pensiones son significativas y anualmente superan el medio billón de pesos. La siguiente figura muestra el comportamiento de transferencias que hace el Gobierno nacional a entidades territoriales para la sostenibilidad pensional

Al igual que un esquema de PM, el esquema de CI tiene vulnerabilidades que se presentan con la tasa de interés y la informalidad. Es vulnerable a la tasa de interés, porque si la tasa real es negativa los ahorros de los afiliados en los fondos pensionales no se capitalizan. La informalidad afecta el constante flujo de ahorro y, por lo tanto, los afiliados no pueden tener un ahorro constante y creciente, por lo que su capitalización y ahorro acumulado son pequeños con respecto al ahorro que deberían tener al momento de pensionarse.

El informe de SURA (2015) explica detalladamente que uno de los posibles caminos para disminuir el impacto fiscal de las pensiones en Colombia es la implementación de pilares pensionales paralelos y no sustitutos como funciona actualmente. En el informe se afirma que actualmente las pensiones en Colombia se manejan bajo esquemas sustitutos, donde los esquemas pensionales de PM y CI ofrecen el mismo esquema de pensiones a todos los afiliados pensionales, cuando en la realidad se deberían ofrecer diferentes esquemas pensionales según los ingresos de liquidación de los afiliados.



**Figura 1.** Transferencias históricas del Gobierno Nacional a las entidades territoriales – FONPET, 2006-2017

Fuente: SICODIS – DNP.

### 1.1. Marco de referencia de los esquemas pensionales

Los esquemas pensionales se caracterizan por presentar dos flujos. El primer flujo es el ahorro que se realiza periodo a periodo, el cual se acumula durante la vida laboral, y la rentabilidad, que permite obtener un fondo de ahorro que respalde su pensión. El ahorro depende del IBC y de la tasa de cotización. De este primer flujo es preciso caracterizar tres aspectos. El primer aspecto es que el ahorro acumulado en cualquier periodo durante la etapa laboral debe estar invertidos en rentabilidades no menores a los niveles del costo de vida para que el ahorro no pierda capacidad adquisitiva en el tiempo. Estas rentabilidades se denominan rentabilidades reales porque tienen en cuenta la rentabilidad nominal y la inflación. Si la rentabilidad real es negativa, los ahorros pierden capacidad adquisitiva en el tiempo. Al contrario, si la rentabilidad real es positiva, los ahorros aumentan y su consumo durante su pensión también lo hace.

El segundo aspecto es que el IBC depende del crecimiento salarial real, el cual puede tomar valores positivos como negativos al igual que la rentabilidad real. Cuando el crecimiento salarial real toma valores positivos es porque el aumento salarial es mayor al nivel de costo de vida y su IBC le permite tener un mayor ahorro. En caso contrario, el aumento de inflación es



mayor al aumento salarial y su ahorro, que depende del IBC, disminuye. El tercer aspecto es que debe existir un aporte mínimo que aumente el stock de ahorro para la etapa pensional. En economías que están sujetas a un salario mínimo (SM), la cotización mínima depende del SM y de la tasa de cotización. El cuarto aspecto es la tasa de cotización que puede estar compuesto por aportes realizados por el empleado y el empleador o aportes realizados únicamente por el empleador.

Para determinar el primer flujo se tienen en cuenta otros supuestos. El primer supuesto es que el mercado laboral se encuentra en pleno empleo, es decir, que toda aquella persona que quiera trabajar lo hace y tiene un salario, del cual cotiza a cualquiera de los esquemas pensionales. El segundo supuesto es la formalidad del trabajo. La principal consecuencia de la formalidad hace que tanto el empleador como el empleado coticen un porcentaje a la seguridad social y en este caso a la protección de la vejez. El tercer supuesto tiene en cuenta tres tasas importantes que son la tasa de rentabilidad real, el crecimiento salarial real y la inflación. La inflación determina el aumento de las pensiones mayores a un SM, el incremento salarial real y la tasa de rentabilidad real. El crecimiento salarial real determina el aumento anual de los salarios y el aumento salarial únicamente se debe a los crecimientos del costo de vida. De esta manera, se supone que la persona no altera su canasta básica de consumo y siempre tiene la misma. Finalmente, la tasa de rentabilidad real sirve para determinar el crecimiento que se genera por tener el ahorro acumulado en un sistema financiero durante la vida laboral y con los saldos restantes que quedan después del pago de cada pensión.

El segundo flujo son los pagos de las pensiones. Las pensiones son un pago periódico que se realiza con relación al stock de ahorro alcanzado durante la etapa laboral y los años en los cuales se quiere disfrutar la pensión. Según esta relación, se determina un flujo de pensión, que es igual al pago de la pensión periódica y se reajusta según las condiciones legales vigentes, ya sea por el crecimiento salarial mínimo o por la inflación. Después de cada pago de pensión, queda un stock de ahorro el cual gana una rentabilidad. Esta rentabilidad sirve para aumentar el stock de ahorro que queda después de pagar la pensión y permite que el pensionado aumente sus años de pensión. De igual forma las pensiones dependen del crecimiento salarial real o de la inflación según lo establezca la ley.

## 2. Modelo teórico

### 2.1. Esquema de capitalización individual (CI)

En un esquema de CI, el afiliado cotiza durante toda su vida laboral un porcentaje de su IBC, que en este caso depende de la tasa de cotización. Este aporte se acumula en una cuenta de ahorro individual y el fondo de ahorro para la pensión es afectado por la tasa de rentabilidad real, la tasa de cotización y el crecimiento salarial real. El fondo de ahorro que es una variable endógena depende de los parámetros exógenos del modelo que son el Ingreso Base de Cotización (IBC) y las tres tasas anteriormente nombradas junto con la tasa de cotización. Igualmente, decide cuál es el crecimiento salarial real, pero en este caso lo hace con el fin de que el consumo no se vea afectado por la inflación y siempre se pueda alcanzar una canasta básica. La tasa de rentabilidad real se determina por las interacciones del mercado financiero y el mercado real.

La variable exógena que afecta de manera significativa el esquema de CI y en este caso el fondo de ahorro es la tasa de rentabilidad real, que debe ser positiva para que el ahorro acumulado no pierda capacidad adquisitiva. En la siguiente sección se modela de manera teórica el funcionamiento del esquema de CI, desde la formación del fondo de ahorro hasta el desahorro en la etapa pensional.

Las variables del modelo son,

$C_i$ : Cotización efectiva del periodo  $i$ .

$\tau$ : Tasa de cotización efectiva.

$a$ : Porcentaje de los costos de administración.

$Y_1$ : Salario inicial anual del primer periodo del trabajador/afiliado.

$Y_i$ : Salario anual del  $i$ -ésimo periodo del trabajador/afiliado.

$r_i$ : Tasa de rentabilidad real en el periodo  $i$ .

$W_i$ : Tasa de crecimiento salarial para el SM en el periodo  $i$ .

$\pi_i$ : Inflación para el periodo  $i$ .

$\bar{W}$ : Tasa de crecimiento salarial de largo plazo para el SM.

$\bar{r}$ : Tasa de interés de largo plazo.

$\bar{\pi}$ : Inflación de largo plazo.

$F_i$ : Fondo hasta el periodo  $i$ .

$R_{t+i}$ : Pensión mínima requerida en el periodo  $t+i$ .

$PR$ : Pensión mínima requerida.

$Z_i$ : Saldo restante después de pagar la pensión anual mínima del periodo  $i$ .

$L_i$ : Rentabilidad efectiva del saldo después de pagar la pensión el periodo.

### 2.1.1. Ahorro acumulado durante $t$ periodos de trabajo

Durante la etapa laboral, todo trabajador cotiza un porcentaje del IBC para respaldar la vejez y recibir una pensión hasta su fallecimiento. Estas cotizaciones están compuestas por una parte que se capitaliza y otra que sirve para el pago de los costos de administración y fondos de solidaridad. La cotización en cualquier periodo de la etapa laboral es igual a:

$$C_i^* = (\tau + a)Y_i$$

Donde  $\tau$  es el porcentaje que se capitaliza,  $a$  es el porcentaje que sirve para los costos de administración y los fondos de solidaridad y  $Y_i$  es el salario anual del periodo  $i$ . De la ecuación anterior se establece que la cotización efectiva es solo la parte que se capitaliza y que para cualquier periodo del tiempo es igual a:

$$C_i = \tau Y_i$$

El fondo acumulado del primer periodo es igual a:

$$F_i = Y_1 \tau (1 + r_1)$$

Es importante anotar y hacer una reflexión del papel que juegan los costos de administración en la cotización efectiva y por lo tanto en la capitalización periodo a periodo del fondo. Si los costos de administración se hicieran no sobre el capital aportado, sino sobre los rendimientos que se generan en el fondo, realmente se estaría pagando la administración que hacen los fondos sobre el dinero que manejan. Como trabajan los fondos, reciben una renta porque los costos de administración son un valor exógeno a su administración. Luego, si los costos de administración se cobrasen de los rendimientos, el fondo de ahorro pensional se capitalizaría más rápido porque periodo a periodo ahorraría más.

Si el trabajador trabaja  $t$  periodos, su fondo acumulado en el periodo  $t$  es:

$$F_t = \tau \left[ Y_1 \prod_{i=1}^t (1 + r_i) + Y_2 \prod_{i=2}^t (1 + r_i) + Y_3 \prod_{i=3}^t (1 + r_i) + \dots + Y_{t-1} \prod_{i=t-1}^t (1 + r_i) + Y_t \prod_{i=t}^t (1 + r_i) \right] \quad (1)$$

Un afiliado que haya trabajado  $t$  periodos acumuló un fondo descrito por la ecuación [1] y el fondo para una persona va a depender de los diferentes IBC y de las diferentes tasas de interés.

El IBC se determina en el mercado de trabajo y las tasas de interés son exógenas en el modelo. La política cambiaria y monetaria afecta la tasa de interés y así mismo al fondo de pensión. La tasa de interés puede ser nominal o real y ambas son afectadas por la inflación. La ecuación anterior utiliza tasas de rentabilidad nominales y para que el fondo que se acumula en el tiempo no pierda capacidad adquisitiva, se espera que las tasas de interés nominal sean mayores a la inflación.

De la ecuación anterior, se desprenden cuatro escenarios. El primer escenario es cuando el IBC de los diferentes periodos permanece constante durante toda la vida laboral del trabajador e igual a  $Y$ . El fondo es:

$$F_t = \tau Y \left[ \prod_{i=1}^t (1+r_i) + \prod_{i=2}^t (1+r_i) + \prod_{i=3}^t (1+r_i) + \dots + \prod_{i=t-1}^t (1+r_i) + \prod_t^t (1+r_i) \right] \quad (2)$$

El fondo de pensión depende de las tasas de interés real. Si las tasas de interés real son negativas, implican que el fondo de pensión pierde capacidad adquisitiva en el tiempo. El segundo escenario es cuando la tasa de interés nominal permanece constante durante todo el periodo de cotización y es igual a  $r$ . El fondo de pensión es:

$$F_t = \tau \left[ Y_1(1+r)^t + Y_2(1+r)^{t-1} + Y_3(1+r)^{t-2} + \dots + Y_{t-1}(1+r)^2 + Y_t(1+r)^1 \right] \quad (3)$$

En este caso el fondo de pensión depende de los IBC y de la tasa de interés nominal de largo. El tercer escenario es cuando el IBC tiene crecimientos salariales iguales a la inflación y el fondo de ahorro es igual a:

$$F_t = \tau \left[ Y_1 \prod_{i=1}^t (1+r_i) + Y_1(1+w_1) \prod_{i=2}^t (1+r_i) + Y_1(1+w_1)(1+w_2) \prod_{i=3}^t (1+r_i) + \dots \right. \\ \left. + Y_1(1+w_1)(1+w_2)(1+w_3) \dots (1+w_{t-2}) \prod_{i=t-1}^t (1+r_i) \right. \\ \left. + Y_1(1+w_1)(1+w_2)(1+w_3) \dots (1+w_{t-1}) \prod_t^t (1+r_i) \right]$$

Al igual que con las tasas de interés, la inflación tiene un comportamiento constante e igual a  $\pi$ . El fondo de pensión en este caso es:

$$F_t = \tau Y_1 \left[ \prod_{i=1}^t (1+r_i) + (1+\pi) \prod_{i=2}^t (1+r_i) + (1+\pi)^2 \prod_{i=3}^t (1+r_i) + \dots + (1+\pi)^{t-2} \prod_{i=t-1}^t (1+r_i) + (1+\pi)^{t-1} \prod_{i=t}^t (1+r_i) \right] \quad (4)$$

Luego, el fondo de pensión depende de las tasas de interés nominal y de los crecimientos salariales causados por la inflación. Ambos factores afectan de manera positiva el stock de ahorro pensional pero no es fácil establecer un impacto final porque las tasas de interés nominal dependen, en este caso, de la inflación. Si la tasa de inflación aumenta, se aumenta el stock de ahorro pero a la vez disminuye la tasa de interés real siempre y cuando la tasa de interés nominal permanezca constante.

El cuarto caso es hacer una combinación de los dos escenarios anteriores, pero en este caso la inflación y la tasa de interés son de largo plazo. El fondo de pensión con estas características es igual a:

$$F_t = Y_1 \tau \left[ \begin{aligned} &(1+\bar{r})^t + (1+\bar{r})^{t-1} (1+\bar{\pi})^1 + \dots + (1+\bar{r})^3 (1+\bar{\pi})^{t-3} \\ &+ (1+\bar{r})^2 (1+\bar{\pi})^{t-2} + (1+\bar{r}) (1+\bar{\pi})^{t-1} \end{aligned} \right] \quad (5)$$

La ecuación [5] describe el fondo de pensión acumulado por un trabajador durante  $t$  periodos de trabajo con la tasa de crecimiento salarial y de interés nominal de largo plazo con un IBC inicial. Es importante notar que mientras el exponente del factor que acompaña a la tasa de interés nominal decrece, el factor que acompaña el crecimiento salarial aumenta.

### 2.1.2. Flujo mínimo requerido de las pensiones

La etapa de pensión es de  $t+1$  a  $T$ , donde  $T$  es el periodo de fallecimiento del afiliado. Como se quiere determinar si la persona es o no un costo fiscal, se supone que durante su vida pensional el afiliado va a recibir lo que como mínimo establece el sistema pensional que es igual a una proporción  $\alpha$  del SM. La pensión mínima que recibe una persona se reajusta por medio de los crecimientos salariales para el SM.

Por lo tanto, el requerimiento mínimo de pensión  $R_{t+1}$  para el primer periodo de pensionado que es en  $t+1$  es:

$$R_{t+1} = \alpha SM_{t+1}$$

Donde  $SM_{t+1}$  es el salario mínimo del periodo  $t+1$  cuando el afiliado comienza a ser pensionado. Para el  $T$  - *esimo* periodo que es la esperanza de vida, el requerimiento mínimo de la pensión es:

$$R_T = \left[ \alpha SM_{t+1} \prod_{i=t+1}^{T-1} (1 + w_i) \right]$$

Donde  $w_{t+1}$  es el incremento salarial que se da para los SM. La suma de todos los requerimientos de las pensiones mínimas durante la vida pensional del afiliado es igual al requerimiento mínimo total e igual a:

$$PR = \alpha SM_{t+1} [1 + (1 + w_{t+1}) + \prod_{i=t+1}^{t+2} (1 + w_i) + \prod_{i=t+1}^{t+3} (1 + w_i) + \dots + \prod_{i=t+1}^{T-2} (1 + w_i) + \prod_{i=t+1}^{T-1} (1 + w_i)]$$

Con la tasa de crecimiento salarial de largo plazo del SM  $\bar{w}$ , se tiene:

$$PR = \alpha SM_{t+1} \sum_{i=0}^{T-t-2} (1 + \bar{w})^i \quad (6)$$

La ecuación [6] describe el requisito mínimo total que debería recibir una persona durante su vida pensional con los salarios mínimos vigentes. El flujo mínimo de pensión que se debe desembolsar depende del tipo de afiliado y del fondo alcanzado en el fondo de pensión. La  $PR$  cambia si la persona es mujer u hombre porque esta primera característica define el tiempo de disfrute de la pensión.

### 2.1.3. Saldos restantes

Al fondo de pensión se le descuenta la pensión de cada periodo y los costos de administración. Esto se denomina saldo restante en el periodo  $i$ . El saldo restante en el periodo  $i$  tiene rentabilidad, y es igual a,

$$Z_1 = (F_t - P_1 - aP_1)(1 + r_{t+1})$$

Donde  $Z_1$  es el saldo restante por la tasa de rendimiento,  $r_{t+1}$  es la tasa de rendimiento que se le aplica al saldo restante después de pagar la primera pensión,  $a$  son los costos de administración y  $P_1$  es el pago por la primera

pensión. El saldo restante en el periodo  $T$  debe ser igual o mayor a cero para que no exista costo fiscal e igual a:

$$Z_T = F_i \left[ \prod_{i=t+1}^T (1+r_i) \right] - (1+a) \left[ P_1 \prod_{i=t+1}^T (1+r_i) + P_2 \prod_{i=t+2}^T (1+r_i) + \dots + P_T (1+r_T) \right] \quad (7)$$

Los dos factores de la ecuación anterior se capitalizan pero la primera parte es el fondo capitalizado mientras la segunda son los requerimientos de pensión capitalizados. En la esperanza de vida, que es cuando el pensionado fallece, el fondo capitalizado debe ser igual a los requerimientos de pensiones capitalizados si se quiere que la persona no sea un costo fiscal. Si en el periodo  $T$ , el primer factor de la ecuación [7] es mayor o igual que el segundo factor de la misma ecuación, al Gobierno nacional no se le genera ningún déficit por esta persona. Ahora, si esta condición es menor a 0 y la persona cumplió todos los requisitos de ley, se genera un déficit por el cual debe responder el Gobierno nacional.

Con la tasa de interés de largo plazo, la ecuación [7] se modifica en:

$$Z_T = F_i (1+\bar{r})^{T-t-1} - (1+a) [P_1 (1+\bar{r})^{T-t-1} + P_2 (1+\bar{r})^{T-t-2} + P_3 (1+\bar{r})^{T-t-3} + \dots + P_T (1+\bar{r})^1] \quad (8)$$

#### 2.1.4. Condición de equilibrio fiscal

La primera condición de equilibrio fiscal es que la ecuación [8] sea mayor a 0, entendiendo como equilibrio fiscal la situación donde el sistema pensional no genera gastos adicionales a las finanzas públicas. De esta ecuación se puede encontrar el salario inicial, el cual debe ganar un trabajador al momento que comienza su etapa laboral. La ecuación [8] se iguala a cero:

$$Y_1 = \frac{(1+a) [R_{t+1} (1+\bar{r})^{T-t-1} + R_{t+2} (1+\bar{r})^{T-t-2} + R_{t+3} (1+\bar{r})^{T-t-3} + \dots + R_T (1+\bar{r})^1]}{(1+\bar{r})^{T-t-1} \pi [(1+\bar{r})^t + (1+\bar{r})^{t-1} (1+\bar{\pi})^1 + \dots + (1+\bar{r})^3 (1+\bar{\pi})^{t-3} + (1+\bar{r})^2 (1+\bar{\pi})^{t-2} + (1+\bar{r}) (1+\bar{\pi})^{t-1}]} \quad (9)$$

La ecuación anterior establece el primer salario que debe ganar el trabajador para no generar costo fiscal cuando gana una pensión  $P_i$  hasta el periodo de su esperanza de vida. Para hacer un análisis comparable, suponga que dichas pensiones  $P_i$  son las pensiones mínimas que la persona debe tener. Por lo tanto  $P_i = R_i$  y se puede reemplazar para obtener:

$$Y_1 = \frac{(1+a)[R_{t+1}(1+\bar{r})^{T-t-1} + R_{t+2}(1+\bar{r})^{T-t-2} + R_{t+3}(1+\bar{r})^{T-t-3} + \dots + R_T(1+\bar{r})^1]}{(1+\bar{r})^{T-t-1} \tau[(1+\bar{r})^t + (1+\bar{r})^{t-1}(1+\bar{\pi})^1 + \dots + (1+\bar{r})^3(1+\bar{\pi})^{t-3} + (1+\bar{r})^2(1+\bar{\pi})^{t-2} + (1+\bar{r})(1+\bar{\pi})^{t-1}]}$$

El primer requerimiento de pensión es igual al SM del periodo en que la persona se pensionó. Los requerimientos siguientes son ese SM ajustados con los crecimientos salariales dados por la inflación de largo plazo. Se reemplaza los requerimientos pensionales que se encuentran en la ecuación [6] en el numerador de la ecuación [9] para obtener que el salario inicial para que una persona no genere costo fiscal depende del salario mínimo del primer periodo de pensión, de la tasa de interés y de inflación de largo plazo. Por lo tanto, se tiene que el salario inicial recomendable debe ser igual a:

$$Y_1 = \frac{\alpha(1+a)SM_{t+1}[(1+\bar{r})^{T-t-1} + (1+\bar{w})^1(1+\bar{r})^{T-t-2} + (1+\bar{w})^2(1+\bar{r})^{T-t-3} + \dots + (1+\bar{w})^{T-t-2}(1+\bar{r})^1]}{(1+\bar{r})^{T-t-1} \tau[(1+\bar{r})^t + (1+\bar{r})^{t-1}(1+\bar{\pi})^1 + \dots + (1+\bar{r})^3(1+\bar{\pi})^{t-3} + (1+\bar{r})^2(1+\bar{\pi})^{t-2} + (1+\bar{r})(1+\bar{\pi})^{t-1}]}$$

$$Y_1 = \frac{\alpha(1+a)SM_{t+1}[\sum_{j=0}^{T-t-2} (1+\bar{w})^j(1+\bar{r})^{T-t-1-j}]}{(1+\bar{r})^{T-t-1} \tau[\sum_{j=0}^{t-1} (1+\bar{w})^{t-j}(1+\bar{\pi})^j]}$$

Con el salario inicial recomendable para que la persona no genere un costo fiscal al Gobierno nacional, se establece que todos los salarios anuales menores a  $Y_1$  son costos fiscales y los salarios anuales mayores o iguales a  $Y_1$  no generan costo fiscal. Por lo tanto:

$$Y_j < Y_1 \rightarrow \text{Genera Costo Fiscal}$$

$$Y_j \geq Y_1 \rightarrow \text{No Genera Costo Fiscal}$$

Existe  $n$  grupos salariales que se pueden dividir por medio del salario mínimo anual del periodo en que la persona comienza a trabajar. Al ser  $Y_1$  el salario con el cual no se genera costo fiscal, se puede determinar hasta que salario anual la persona es un costo fiscal.  $Y_1$  se divide en el salario anual mínimo y con ello el ingreso salarial se deja en salarios anuales mínimos igual a  $SM_N$ .

De los  $n$  grupos salariales que se determinan por medio de salarios anuales mínimos, se tiene que  $k$  grupos salariales son menores a  $SM_N$ , donde  $k < n$ . Estos grupos salariales son los que van a generar costo fiscal al Gobierno nacional. Para cada uno de esos  $k$  grupos salariales pertenecen  $N_k$  personas. Por ejemplo, para el primer grupo que pertenece a los  $k$  grupos salariales pertenecen  $N_1$  personas, para el segundo grupo salarial pertenecen  $N_2$  personas y así sucesivamente hasta que se llega al último grupo salarial de los  $k$  grupos salariales al cual pertenece  $N_k$  personas.



Para los grupos salariales que son menores que  $SM_N$  se debe determinar la ecuación [5] y [6] que indica el ahorro de la persona que acumuló durante su vida laboral más los rendimientos de los saldos y el requerimiento mínimo de pensión total para un trabajador.

La diferencia entre la ecuación calculada [5] y la ecuación calculada [6] con cada uno de los rangos salariales menores a  $SM_N$  es el costo fiscal por el cual debe responder el Gobierno nacional si la persona cumple con los requisitos de ley. Se debe tener en cuenta que esto es solo para una persona. Esta diferencia se debe multiplicar por cada una de las  $N_k$  personas que pertenecen a los  $k$  grupos salariales menores a  $SM_N$ . Y esas  $k$  diferencias sumadas da el costo fiscal total para el Gobierno nacional por pensiones de personas que no les alcanza a una pensión mínima por su rango salarial en el esquema de CI.

Esquemáticamente es:

$$\begin{aligned}\widehat{PR} - S_{SM_1} &= D_1 \rightarrow N_1 * D_1 = CF_1 \\ \widehat{PR} - S_{SM_2} &= D_2 \rightarrow N_2 * D_2 = CF_2 \\ \widehat{PR} - S_{SM_3} &= D_3 \rightarrow N_3 * D_3 = CF_3 \\ &\vdots \\ \widehat{PR} - S_{SM_k} &= D_k \rightarrow N_k * D_k = CF_k\end{aligned}$$

$S_{SM_k}$  es el fondo para la pensión mínima requerida,  $S_{SM_k}$  el fondo de pensión del  $k$ ésimo grupo salarial que no alcanza ni iguala al ahorro mínimo  $S_{SM_k}$ ,  $D_k$  implica la diferencia entre la pensión mínima requerida y el ahorro alcanzado en cada uno de los  $k$  grupos salariales. Se multiplica por el número de personas que pertenece a cada grupo salarial para con ello determinar el costo fiscal de ese grupo salarial,  $CF_k$ .

Para determinar el costo fiscal total se debe sumar todos los costos fiscales de cada uno de los grupos salariales donde el ahorro no alcanzó a ser el mínimo, es decir la suma de todos los  $CF$ , desde  $i=1, \dots, k$ , igual a:

$$CFT = \sum_{i=1}^k CF_i \quad (9)$$

La ecuación [9] describe el costo fiscal total de las personas que no alcanzan a tener el ahorro necesario para acceder a una pensión mínima en el esquema de CI pero que cumplen con los requisitos de ley para acceder a una pensión. Por lo tanto, el Gobierno nacional debe respaldar el restante de la pensión y esto es lo que genera el costo fiscal.

## 2.2. Esquema de prima media (PM)

El modelaje cambia a un esquema de PM, ya que existe solidaridad inter e intrageneracional. La solidaridad intrageneracional es que las personas que cotizan sobre salarios altos compensan lo que cotizan las personas con salarios bajos en la misma generación. Las personas con altos ingresos pagan sus pensiones y a la vez subsidian las pensiones de las personas de bajos ingresos. La solidaridad intergeneracional se presenta cuando en alguna generación el esquema presente ahorro pensional, el cual se puede utilizar en generaciones que presenten pasivos pensionales. Los saldos positivos de ahorro en el esquema de PM sirven para que en el momento que exista un pasivo pensional, este ahorro ayude a cubrirlo.

Además de que todos los trabajadores cotizan en una misma cuenta de ahorro, las personas que quieran acceder a la pensión en PM deben cumplir con los requisitos establecidos por la ley, entre ellos la edad de pensión y las semanas mínimas cotizadas.

Las variables del modelo son:

$\theta$  = Tasa de cotización.

$n_i$  = Trabajadores que pertenecen a la cohorte  $i$  con respecto al Salario Mínimo Anual – SMA.

$N$  = Total de trabajadores.

$Y_i$  = Proporción entre  $i$  de los trabajadores del cohorte  $i$  sobre el total de trabajadores.

$m_j$  = Pensionados que pertenecen al cohorte  $j$  con respecto al SMA que recibe como pensión.

$M$  = Total de pensionados.

$\phi_j$  = Proporción entre  $j$  de los pensionados del cohorte  $j$  sobre el total de pensionados.

Supóngase

1. El salario mínimo se ajusta periodo a periodo por el crecimiento salarial legal.
2. La tasa de interés real constante es igual a  $r$ .
3. Los rangos salariales tanto para trabajadores como para pensionados.
4. Cantidad de trabajadores y pensionados pueden variar periodo a periodo y lo pueden hacer entre los grupos salariales determinados por el SM.

Existen  $N$  trabajadores con diferentes rangos salariales.

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_{j-1} + n_j = N$$

Las personas del grupo  $n_1$  ganan un SM, las del grupo  $n_2$  ganan 2 SM y así sucesivamente hasta que las personas que pertenecen al grupo  $n_j$  ganan  $J$  SM. Para el primer periodo la cotización del fondo común con trabajadores que ganan diferentes rangos salariales es:

$$C_1 = \theta n_{1,1} SM_1 + 2\theta n_{1,2} SM_1 + 3\theta n_{1,3} SM_1 + \dots + (J-1)\theta n_{1,j-1} SM_1 + J\theta n_{1,j} SM_1$$

$$C_1 = \theta SM_1 (n_{1,1} + 2n_{1,2} + 3n_{1,3} + \dots + (J-1)n_{1,j-1} + Jn_{1,j})$$

$$C_1 = \theta SM_1 \left( \sum_{i=1}^J in_{1,i} \right)$$

Donde el primer subíndice que acompaña a cada una de las  $n$  indica el primer periodo y el segundo es el rango salarial. El  $SM_1$  es el salario mínimo del periodo 1. El fondo común en el periodo 1 con rangos salariales es:

$$F_1 = \theta SM_1 \left( \sum_{i=1}^J in_{1,i} \right) (1+r)$$

$$F_1 = C_1 (1+r)$$

La segunda cotización y el fondo común en el segundo periodo son:

$$C_2 = \theta SM_2 \left( \sum_{i=1}^J in_{2,i} \right)$$

$$F_2 = \left[ C_1 (1+r) + \theta SM_2 \left( \sum_{i=1}^J in_{2,i} \right) \right] (1+r)$$

$$F_2 = (F_1 + C_2) (1+r)$$

En el  $t$ -ésimo periodo la cotización y el fondo común son:

$$C_t = \theta SM_t \left( \sum_{i=1}^J in_{t,i} \right)$$

$$F_t = \left[ (F_{t-2} + C_{t-1}) (1+r) + \theta SM_t \left( \sum_{i=1}^J in_{t,i} \right) (1+r) \right]$$

$$F_t = (F_{t-1} + C_t) (1+r)$$

Ahora supóngase  $M$  pensionados con diferentes rangos salariales determinados por el SM.

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_{l-1} + m_l = M$$

$m_1$  indica los pensionados que ganan como pensión,  $\alpha_1 SM$ ,  $m_2$  indica los pensionados que ganan como pensión  $\alpha_2 SM$  y así sucesivamente hasta que  $m_l$  indica los pensionados que ganan como pensión  $\alpha_l SM$ . Las proporciones  $\alpha_i$  están entre un valor mínimo y máximo que se establece por la ley. El SM en este caso es el IBL que es un promedio de un tiempo determinado en los últimos periodos de trabajo. El fondo común en el periodo  $t+1$  es:

$$F_{t+1} = [F_t - (\alpha_1 m_{t+1,1} SM_{t+1} + 2\alpha_2 m_{t+1,2} SM_{t+1} + 3\alpha_3 m_{t+1,3} SM_{t+1} + \dots + (l-1)\alpha_{l-1} m_{t+1,l-1} SM_{t+1} + l\alpha_l m_{t+1,l} SM_{t+1}) + (\theta n_{t+1,1} SM_{t+1} + 2\theta n_{t+1,2} SM_{t+1} + 3\theta n_{t+1,3} SM_{t+1} + \dots + (l-1)\theta n_{t+1,l-1} SM_{t+1} + l\theta n_{t+1,l} SM_{t+1})]$$

$$F_{t+1} = \left[ F_t - SM_{t+1} \left( \sum_{i=1}^l \alpha_i m_{t+1,i} \right) + \theta SM_{t+1} \left( \sum_{i=1}^l i n_{t+1,i} \right) \right] (1+r)$$

El fondo común en el periodo  $t+2$  es:

$$F_{t+2} = \left[ F_{t+1} - SM_{t+2} \left( \sum_{i=1}^l \alpha_i m_{t+2,i} \right) + \theta SM_{t+2} \left( \sum_{i=1}^l i n_{t+2,i} \right) \right] (1+r)$$

El fondo común en el  $t+p$ -ésimo periodo es:

$$F_{t+p} = \left[ F_{t+p-1} - SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^l \alpha_i m_{t+p,i} \right) + \theta SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^l i n_{t+p,i} \right) \right] (1+r) \quad (10)$$

$F_{t+p-1}$  es el saldo en el fondo común en el periodo anterior. Esto puede ser negativo o positivo. Si es positivo quiere decir que en el periodo anterior se presentó un superávit en el fondo común. De ser negativo significa que desde el periodo anterior se presenta un déficit en el fondo común. El segundo término de la ecuación [14] es el flujo que se debe pagar por las pensiones de los pensionados en el periodo  $t+p$ . El tercer término de la ecuación [14] es el flujo de las cotizaciones de los trabajadores en el periodo  $t+p$ .

La condición de equilibrio fiscal es:

$$F_{t+p} \quad (15)$$

$$\left[ F_{t+p-1} - SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^I \alpha_i in_{t+p,i} \right) + \theta SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^I in_{t+p,i} \right) \right] (1+r) \quad (11)$$

La condición de equilibrio fiscal en un esquema de PM esta dado con las condiciones que tome la ecuación [15]. Si la ecuación [15] es menor a cero, se genera costo fiscal para el periodo  $t+p+1$ , en caso contrario donde la ecuación [15] sea igual o mayor a cero, no se genera costo fiscal para el periodo  $t+p+1$ . El ideal de los casos es que la ecuación [15] siempre sea mayor a 0, ya que significa un ahorro pensional que podría ayudar a pagar pasivos pensionales.

## 2.2. Costo fiscal total

Para calcular el costo fiscal total pensional se debe tener en cuenta tres escenarios. El primero es cuando los trabajadores y los pensionados están afiliados a un esquema pensional de CI, es decir, el costo fiscal total pensional sería la ecuación [9]. El segundo es cuando los trabajadores y los pensionados están afiliados a un esquema de PM, es decir, el costo fiscal total sería la ecuación [15]. El tercero es cuando tanto los trabajadores como los pensionados pueden estar afiliados a cualquiera de los dos esquemas y por lo tanto sería una combinación de los dos anteriores casos y el costo fiscal sería la suma de los resultados de las ecuaciones [9] y [15].

Los resultados de estos escenarios permitirán evaluar cuál de ellos genera un menor costo fiscal y decidir si el estado actual del sistema pensional colombiano es el adecuado para las finanzas públicas.

## 3. Análisis empírico

### 3.1. Normatividad del sistema pensional colombiano

La normatividad de los esquemas pensionales se estableció por las leyes 100/93 y 787/03. Santa Maria y Piraquive (2013) explican los parámetros principales y sus cambios. La tabla 1 exhibe los principales parámetros con los cuales se debe construir un modelo bajo el esquema de PM.

**Tabla 1.** Principales parámetros para la construcción empírica de esquemas de CI y PM

Parámetro	Ley 100/93	Ley 797/03
Tiempo Mínimo	1000 semanas	1300 semanas
Edad Mínima	55 años mujeres - 60 años hombres	57 años mujeres - 62 años hombres
Tasa de Cotización	13.5% del IBC + 1% para afiliados con IBC con salarios mayores o iguales a 4 SM	16.5% del IBC +1% para afiliados con IBC con salarios mayores o iguales a 4 SM + Cotizaciones Adicionales
Monto de la Pensión de Vejez	Monto Mínimo = 65% del IBC y Monto Máximo = 85% del IBC	Monto mínimo = 65% - 55% del IBC según el IBC y Monto Máximo = 80% del IBC
Afiliación	La afiliación es obligatoria salvo lo previsto para los trabajadores independientes	La afiliación es obligatoria tanto para trabajadores dependientes como independientes
Traslado entre Regímenes	Una sola vez cada 3 años	Una sola vez cada 5 años

Fuente: elaboración propia con base en María y Piraquive (2013).

### 3.2. Estimación del modelo

#### 3.2.1. Los datos

Las fuentes de información de los datos son el Banco de la Republica, el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE), la Administradora Colombiana de Pensiones (COLPENSIONES) y la Superintendencia Financiera de Colombia. La frecuencia de cada una de las variables se describe en la tabla 2. Es importante resaltar que la principal fuente de información es la Superintendencia Financiera de Colombia, que muestra la serie histórica de los afiliados tanto del esquema de PM como de CI.

La información de la Superintendencia Financiera tiene algunos problemas, ya que agrupa el salario de los afiliados por cohortes salariales y de 2008 en adelante estas cohortes cambiaron y son diferentes a los que se trabajaban antes de este periodo. Para solucionar dicho problema, se trabajó con el valor máximo de la cohorte.

**Tabla 2.** Variables, fuente de información y frecuencia

Variables	Fuente	Frecuencia	Tipo
Tasa de Interés de Captación	Banco de la República	Mensual	Corte último día hábil del mes
Tasa de Interés de Referencia	Banco de la República	Mensual	Corte último día hábil del mes
Tasa de Interés FAP	Superintendencia Financiera de Colombia	Mensual	Corte último día hábil del mes
Composición de afiliados y pensionados del esquema de CI	Superintendencia Financiera de Colombia	Mensual	Corte último mes del año
Composición de afiliados y pensionados del esquema de PM	Superintendencia Financiera de Colombia	Mensual	Corte último mes del año
Índice de Precios al Consumidor	Banco de la República	Mensual	Anual
Salario Mínimo Mensual	Banco de la República	Anual	Anual
Crecimiento Salarial Salario Mínimo	Banco de la República	Anual	Anual
Composición Demográfica	Departamento Administrativo Nacional de Estadística-DANE	Anual	Anual

Fuente: elaboración propia.

### 3.3.2. Metodología y Estimación del costo fiscal del sistema pensional actual colombiano: funcionamiento de esquemas paralelos y sustitutos

#### 3.3.2.1. Metodología, estimación y resultados del modelo de CI que funciona de manera paralela con el esquema de PM

El modelo que se planteó en el capítulo anterior busca determinar bajo qué escenarios no existe déficit en el sistema pensional colombiano, esto es, que las cotizaciones cubran el monto de las pensiones. En este primer momento no se trata de calcular cuánto es el nivel del déficit que tienen los esquemas de PM y CI en la actualidad, sino establecer cuánto tendrían que rentar los recursos o cuánto debe subir la base de cotización para que el sistema no incurra en desequilibrio cuando madure –el momento cuando la mayoría de afiliados se convierten en pensionados–, dados los valores de afiliados desde 1994, pensionados actuales, recursos financieros en los esquemas y la composición de afiliados según su género y edad.

El protocolo de estimación del costo fiscal para el esquema de capitalización individual es:

- i. Se toman los salarios mínimos observados desde 1994 hasta 2015.
- ii. Se proyecta el salario mínimo de cotización (no el legal) para cada uno de los años en los cuales no hay información observada, con el fin de suponer el trayecto del salario mínimo y la pensión que se debería obtener si el pensionado cumple con las condiciones que establece la Ley. Es importante indicar que en esta parte se comienza a tener en cuenta los diferentes escenarios planteados en el trabajo, pues se tiene en cuenta el crecimiento salarial y la tasa de rentabilidad de los ahorros.
- iii. Con la fórmula que establece el salario recomendable. Este es un salario contra factual y corresponde a aquel que le permitiría al sistema tener un déficit nulo para cada uno de los años. Este salario se calcula año a año tanto para hombre como para mujer y para los diferentes escenarios propuestos.
- iv. Se toman la información de la Superintendencia Financiera de Colombia, en la cual se puede identificar año a año, desde 1994 hasta 2015, la composición salarial de los colombianos que ahorran para su pensión. La base que brinda la Superintendencia contiene información de género, edad y rango salarial. Se le hace una modificación a dicha información para identificar a las personas por su rango salarial, ya que ese rango salarial permite, al momento en que se compara con el salario recomendado, encontrar la diferencia entre lo que debió ahorrar y lo que realmente ahorró. Esta diferencia entre ahorros es el déficit.
- v. Se calculan las cotizaciones reales y se compara con las cotizaciones deseadas para encontrar la diferencia, que en este caso sería el costo fiscal que se genera año a año. Este ejercicio de comparación se hace con cada uno de los escenarios y para hombre y mujer.
- vi. Se suman los costos fiscales de cada uno de los años y la suma total es el costo fiscal que se va generando por no cumplir con el salario recomendable. Esta suma se debe hacer tanto para hombres como para mujeres y la suma del costo fiscal más el costo fiscal de los hombres, da el costo fiscal total

Y el protocolo de estimación del costo fiscal para el esquema de prima media es:

- i. Se determina cuántos son los trabajadores y cuántos los pensionados, año a año, por género, y se identifica sus salarios.
- ii. Luego se calcula el ahorro total de los trabajadores y las pensiones totales de los pensionados año a año.



- iii. Si la diferencia entre lo ahorrado y lo devengado es mayor a cero, se genera un ahorro pensional mientras que si la diferencia es negativa se genera un costo pensional. Esto es en un año y es lo que se considera en el modelo como solidaridad intrageneracional.
- iv. Si se suman el ahorro o el costo año tras año, va quedando el ahorro pensional acumulado o el déficit pensional acumulado, que en el modelo es lo que se considera como solidaridad intergeneracional.

Para realizar la estimación del modelo se caracterizaron sus tres principales variables: el crecimiento salarial del salario mínimo, la tasa de rentabilidad del sistema financiero y el índice de precios al consumidor –inflación–; con ello, se puede calcular las tasas de largo plazo de cada una de ellas. Así, se elaboraron los cinco escenarios que se reportan en la tabla 3 y que se pueden describir así:

- El primero toma como referencia los datos observados de las diferentes variables.
- El segundo utiliza estimaciones de largo plazo de las tres variables principales, que son el crecimiento del salario mínimo, la tasa de interés y la inflación.
- Y en los tres últimos escenarios se utilizan los valores de los trabajos empíricos de Clavijo (2013). La tabla 3 resume la información de los 5 escenarios.

Con los escenarios se estiman los salarios para hombres y mujeres que no causan impacto negativo a las finanzas públicas. En el documento ese salario estimado se denomina salario recomendable para significar que es la remuneración al trabajo que se requiere en el momento de iniciar la vida laboral y de cotización para que el sistema pensional no tenga un déficit en el momento en que de trabajador pasa a ser pensionado. En sentido metodológico corresponde a un salario contra factual. Si se tienen los afiliados según el género, los rangos de edad, el tiempo cotizado y la afiliación a cada uno de los pilares del sistema pensional la cuestión es estimar el salario inicial que se requiere para que sus cotizaciones, dada una rentabilidad, cubran sus pensiones. Si ese salario calculado o recomendable o contra factual es mayor al que efectivamente utilizó el grupo de afiliados como base de cotización, necesariamente el sistema entrará en déficit, en caso contrario se tendrá superávit, y en igualdad salarial no existe desequilibrio financiero.

**Tabla 3.** Escenarios para el cálculo del esquema de CI

Variabes	Escenario 1 – Base	Escenario 2 – Series estimadas	Escenario 3 – estudios empíricos	Escenario 4 – estudios empíricos	Escenario 5 – estudios empíricos
Inflación	4%	2.80%	3%	3%	3%
Tasa de rentabilidad AFP's	7.50%	11.70%	6%	5%	7%
Crecimiento salarial	5%	6.30%	4%	4%	4%

Fuente: elaboración propia.

La variable significativa en los escenarios es la tasa de rentabilidad nominal. Reducciones en la rentabilidad tienen que compensarse con un crecimiento del salario recomendable para mantener un déficit nulo en el sistema. La explicación se encuentra en que una caída en la rentabilidad disminuye el ritmo de capitalización del sistema y la única manera de mantener la capitalización que acumula es afectar la base de cotización. En pocas palabras, debe existir un efecto compensatorio entre la base de cotización y la rentabilidad.

La tabla 4 muestra el salario inicial recomendable por género para no incurrir en un costo fiscal y para que por lo menos durante la vida pensional reciban el SM.

**Tabla 4.** Salarios recomendables para el año 1994 en el esquema de CI

Escenarios	Hombre			Mujer		
	Salario inicial anual - \$	Salario inicial mensual - \$	Salario recomendable mensual / Salario mínimo mensual	Salario inicial anual - \$	Salario inicial mensual - \$	Salario recomendable mensual / Salario mínimo mensual
Escenario Uno	6.101.966	508.497	5,15	13.461.306	1.121.775	11,37
Escenario Dos	3.377.792	281.483	2,85	6.691.957	557.663	5,65
Escenario Tres	8.242.560	686.880	6,96	18.416.526	1.534.710	15,55
Escenario Cuatro	9.913.799	826.150	8,37	23.257.943	1.938.162	19,64
Escenario Cinco	6.829.811	569.151	5,77	14.571.767	1.214.314	12,30

Fuente: elaboración propia con cálculos del autor.

De acuerdo con estos resultados, el salario contra factual inicial o con el cual debe empezar a cotizar el trabajador depende de varias situaciones. Si se mantiene lo demás constante, entre mayor sea el crecimiento del SM real, mayor debe ser el salario recomendable porque debe reunir más ahorro para que al momento de pensionarse se pueda cubrir ese SM real. Entre mayor sea la inflación, es decir, menor sea el salarial real, es menor el salario recomendable. Finalmente, entre mayor sea la tasa de interés real de las AFP's, es menor el salario recomendable.

Los diferentes escenarios permiten concluir que el salario recomendable promedio inicial (en 1994) para los hombres debió ser de \$574.433 y \$1.273.325 para las mujeres, que equivale respectivamente a 5.8 veces el SM de 1994 para hombres y 12.3 veces el SM de 1994 para mujeres. Estos resultados muestran que, desde el principio, el sistema pensional empezó desbalanceado por la composición salarial de los trabajadores colombianos. En promedio, menos del 10 % de afiliados cumplen con la condición para no ser un costo fiscal, pues sus salarios son mayores a 6 SM.

Como lo establece el modelo, el siguiente paso es determinar el costo fiscal periodo a periodo, que depende del número de afiliados que no cumplen con el supuesto del modelo, ya que el salario que devengan es menor al salario recomendable que deberían tener. Para la estimación del costo fiscal, se debe tener en cuenta tanto el género del afiliado como el rango salarial al cual pertenece. La tabla 5 indica el costo fiscal total del esquema de CI durante el periodo 1994 – 2015, medido en billones de pesos corrientes. La varianza del costo fiscal entre cada una de las estimaciones es alta porque depende de las condiciones establecidas en cada uno de los escenarios. En el mejor de los casos, el costo fiscal total sería de \$34.5 billones y el peor de \$248.06 billones. Cuando se analiza las características del costo fiscal se encuentra que las pensiones de las mujeres tienen una alta participación sobre el costo total, a tal punto que alcanzan a tener una participación promedio de un 76,3 % entre los escenarios.

**Tabla 5.** Costo fiscal total del esquema de CI con los escenarios que funciona paralelamente con el esquema de PM, 1994 hasta 2015

	Primera modelación	Segunda modelación	Tercera modelación	Cuarta modelación	Quinta modelación
Costo fiscal	\$34.50	\$62.47	\$193.71	\$248.06	\$148.54

*Fuente:* elaboración propia con cálculos del autor (cifras en billones de pesos).

### 3.3.2.2. Metodología, estimación y resultados del modelo de PM que funciona paralelamente con el esquema de CI

La estimación del esquema de PM tiene en cuenta tanto los afiliados como los pensionados y el rango salarial al que cada uno pertenece. En este escenario no se tiene en cuenta el género ni del afiliado ni del pensionado, pues los recursos se depositan en un mismo fondo.

Es importante aclarar que en la estimación del costo fiscal en el esquema de PM surgen dos escenarios porque la información disponible no está completa. El primer escenario se construye con los registros oficiales de los afiliados y de los pensionados, con datos disponibles desde diciembre de 2004 hasta junio de 2016. El segundo escenario utiliza métodos econométricos para estimar los afiliados y pensionados desde enero de 1994 hasta noviembre de 2004 y completar el análisis en el lapso en el cual está el esquema de CI.

En la tabla 6 se reporta el costo fiscal acumulado del esquema de PM con los datos oficiales del sistema, disponibles en los diferentes escenarios de análisis. En esta estimación lo único que cambia es en la tasa de rentabilidad.

**Tabla 6.** Costo fiscal total del esquema de PM que dependen del escenario que funciona de manera paralela con el esquema de CI – 2004 hasta 2015 – Datos de registros

Primera Modelación	Segunda Modelación	Tercera Modelación	Cuarta Modelación	Quinta Modelación
Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado
\$11.96	\$11.35	\$12.03	\$12.04	\$11.99

Fuente: elaboración propia con cálculos del autor (cifras en billones de pesos).

De los cálculos se deduce que sin importar el tipo de escenario la varianza del costo fiscal en el esquema de PM es menor a la varianza que se presenta en el esquema de CI. Así mismo, aunque funcionen de manera paralela en este primer análisis, el costo es tres veces menor al costo fiscal que se genera en el mejor escenario del esquema de CI. Para poder hacer un análisis comparativo entre pilares para la misma longitud de tiempo, se estiman los afiliados y los pensionados del esquema de PM para el periodo el periodo comprendido entre enero de 1994 y noviembre de 2004.

La estimación de la tasa de crecimiento tanto para afiliados como para pensionados se hace a través de suavizamiento exponencial. Como resultado se obtiene una tasa de -0,04 % para los afiliados y de -0,69 % para los pensionados. En la tabla 7 se presenta costo fiscal acumulado.

**Tabla 7.** Costo fiscal total del esquema de PM que dependen del escenario que funciona de manera paralela con el esquema de CI –1994 hasta 2015– Datos estimados

Primera Modelación	Segunda Modelación	Tercera Modelación	Cuarta Modelación	Quinta Modelación
Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado
-\$20.06	-\$55.79	-\$12.61	-\$8.66	-\$17.35

Fuente: elaboración propia con cálculos del autor (cifras en billones de pesos)

Los costos fiscales son negativos, es decir que si se toman los datos estimados para los afiliados y los pensionados, el esquema de PM debería presentar superávit. Esto lleva a preguntarse si el sistema pensional colombiano debería tener un esquema de CI paralelo al PM. En el mejor de los casos, el superávit fiscal sería de \$55.79 billones y es por la tasa de interés real del 11,7% anual, caso contrario donde en el esquema de CI se presenta un costo fiscal de magnitudes iguales a \$193 billones.

### 3.3.2.3. Costo fiscal del sistema pensional actual colombiano: funcionamiento de esquemas paralelos

Los dos resultados que se presentaron en las secciones anteriores exponen por separado cuál sería el costo fiscal de cada uno de los esquemas pensionales. Para calcular el costo fiscal total del sistema pensional actual se deben sumar los costos en que incurre cada uno de los pilares. La tabla 8 muestra el costo fiscal total del funcionamiento actual del sistema pensional.

**Tabla 8.** Costo fiscal total del sistema pensional colombiano actual, 1994 hasta 2015

	Primera modelación	Segunda modelación	Tercera modelación	Cuarta modelación	Quinta modelación
Costo fiscal únicamente con CI	\$34.50	\$62.47	\$193.71	\$248.06	\$148.54
Costo fiscal únicamente con PM datos reales	\$11.96	\$11.35	\$12.03	\$12.04	\$11.99
Costo fiscal únicamente con PM datos estimados	-\$20.06	-\$55.79	-\$12.61	-\$8.66	-\$17.35
Costo fiscal CI + PM datos reales	\$46.46	\$73.82	\$205.73	\$260.10	\$160.53
Costo fiscal CI + PM datos estimados	\$14.44	\$6.68	\$181.10	\$239.40	\$131.19

Fuente: elaboración propia con cálculos del autor (cifras en billones de pesos).

En el mejor de los escenarios del esquema de CI el costo fiscal es tres veces el que se genera en el esquema de PM en el mismo escenario. Con la información disponible, el menor costo fiscal sería de \$9.86 billones y con los datos estimados para los afiliados y pensionados, habría un superávit fiscal acumulado de \$22.16 billones. El superávit estimado del esquema de PM ayuda a disminuir el impacto negativo del costo fiscal sobre el funcionamiento total del sistema pensional.

### 3.3.3. Metodología y estimación del costo fiscal si únicamente funcionara el esquema de CI

El ejercicio que se presenta a continuación simula el escenario donde únicamente prevalece el CI, esto es, que el sistema pasa a ser completamente de ahorro individual como los sugieren algunos analistas. Como deja de existir la PM, pero de este pilar hay pensionados, se supone que a ellos se les cubre sus mesadas con recursos del presupuesto general, es decir, no afectan al nuevo sistema.

Para calcular el efecto se aplica el modelo teórico del esquema de CI a los afiliados del esquema de PM. El costo fiscal adicional que se generaría se reporta en la tabla 9 para cada uno de los escenarios de análisis.

En un sistema pensional de CI, con la información de registros, el costo fiscal aumenta en la mayoría de los casos en un 50 %. La causa está en que al pasar los afiliados del pilar de PM se desvanece del total el menor costo fiscal que tenía ese esquema, donde en la actualidad está casi la mitad de afiliados al sistema pensional. Cuando se utiliza la información estimada, el costo fiscal casi se duplica, dando razones de peso para pensar que el traslado de los afiliados del esquema de PM a el esquema de CI en lugar de mejorar las condiciones económicas, perjudicaría las finanzas públicas.

**Tabla 9.** Costo fiscal total de un sistema pensional CI, 1994-2015

	Primera modelación	Segunda modelación	Tercera modelación	Cuarta modelación	Quinta modelación
Costo fiscal únicamente con CI	\$34.50	\$62.47	\$193.71	\$248.06	\$148.54
Costo fiscal si los afiliados de PM se trasladaran a CI - Datos de registro	\$67.80	\$9.32	\$94.13	\$140.43	\$57.50
Costo fiscal si todos los afiliados estuvieran en CI - Datos de registro	\$102.30	\$71.79	\$287.84	\$388.49	\$206.04

*Continúa*

	Primera modelación	Segunda modelación	Tercera modelación	Cuarta modelación	Quinta modelación
Costo fiscal si los afiliados de PM se trasladaran a CI - Datos estimados	\$107.96	\$16.68	\$156.90	\$226.25	\$101.53
Costo fiscal si todos los afiliados estuvieran en CI - Datos estimados	\$142.46	\$79.15	\$350.61	\$474.31	\$250.06

Fuente: elaboración propia con cálculos del autor (cifras en billones de pesos).

### 3.3.4. Metodología y estimación del costo fiscal si únicamente funcionara el esquema de PM

Se desarrolla el mismo ejercicio de la sección anterior pero esta vez simulando si el sistema pensional fuera de PM. También se trabaja con dos tipos de datos, los de registro desde 2004 a 2015, y el segundo con datos estimados desde 1994 hasta 2015. Según la información brindada por la Superintendencia Financiera de Colombia, en el esquema de CI comenzaron a existir pensionados desde 1997. La tabla 10 muestra el costo fiscal si el sistema pensional fuera de PM.

**Tabla 10.** Costo fiscal total del sistema pensional PM, 1994-2015

	Primera modelación	Segunda modelación	Tercera modelación	Cuarta modelación	Quinta modelación
Costo fiscal únicamente PM - Datos de registro	\$11.96	\$11.35	\$12.03	\$12.04	\$11.99
Costo fiscal únicamente PM - Datos estimados	-\$20.06	-\$55.79	-\$12.61	-\$8.66	-\$17.35
Costo fiscal adicional PM si los de CI se pasaran al PM - Datos de registro	-\$114.47	-\$116.41	-\$113.79	-\$113.34	-\$114.24
Costo fiscal adicional PM si los de CI se pasaran al PM - Datos estimados	-\$129.56	-\$132.35	-\$128.58	-\$127.94	-\$129.23

Fuente: elaboración propia con cálculos del autor (cifras en billones de pesos).

Es importante observar que un sistema pensional de prima media genera superávit. En el mejor de los escenarios es de \$132.35 billones.

### 3.3.5. Comparación de los resultados

Como la idea del trabajo es confrontar el costo fiscal de las posibles combinaciones de esquemas teniendo en cuenta el salario recomendable que no genera

costo fiscal, se procede a realizar un análisis comparativo. Las estimaciones de un sistema pensional con dos esquemas (CI y PM) que funcionan de manera paralela (tabla 8) evidencia que el esquema de CI es frágil a la tasa de interés. El costo fiscal que genera el esquema de CI va desde \$34.5 billones hasta \$260 billones; mientras que el costo fiscal de PM se mantiene en una media de \$11 billones, dos veces menos al menor costo fiscal que se genera en el esquema de PM.

Esto lleva a resaltar el papel de la tasa de interés en el esquema de CI. Si la tasa de interés de los fondos pensionales fuera superior a la observada, los resultados probablemente presentarían un superávit fiscal, sin olvidar que faltaría hacer cambios significativos sobre los salarios de los afiliados, pues pese a que se puedan tener tasas de interés altas, si las bases de cotización son bajas los ahorros no serán los suficientes para respaldar la pensión.

Si el sistema pensional fuera de CI (tabla 9) el déficit pensional aumenta aproximadamente una tercera parte. En cambio, si fuera de PM (tabla 10) se genera un superávit fiscal promedio para los escenarios de \$114 billones. Nuevamente es importante resaltar que, a pesar de los cambios demográficos, si el sistema pensional solo funcionara con el esquema de PM, se contaría con un ahorro pensional que disminuiría el impacto de la transición demográfica.

### 3.3.6. Comparación de los costos de administración sobre capital versus sobre rendimientos

Con el propósito de comparar los efectos del actual esquema de pago a las administradoras de fondos pensionales sobre la acumulación de ahorro de los dueños de los fondos, los trabajadores, y deducir algunas conclusiones sobre los incentivos de las administradoras se calculó la ecuación resultado de la sección 2.1.5. que muestra el efecto de suponer que los costos de administración se cobran sobre el rendimiento y no como cuota fija vigente en la actualidad.

Los resultados del cálculo se reportan en la tabla 11. Se supone un afiliado que trabaja durante 28 años y que durante todo el tiempo laboral devengó un SM. El tiempo de cotización se tomó de las semanas requeridas para el esquema de PM pues en CI el retiro se fija de acuerdo con el monto de pensión deseado por el afiliado y el ahorro acumulado, independientemente de la edad del trabajador o del tiempo cotizado. Y el monto de cotización se tomó como el mínimo simplemente para efectos comparativos. Con estos criterios la pérdida observada es de un 12 % del ahorro acumulado en el fondo cuando se cobra sobre capital y el rendimiento.



**Tabla 11.** Comparación del fondo acumulado cuando se cobra sobre rendimiento y capital de un afiliado que devengó durante su vida laboral el SM, 1994-2021

		Escenarios donde se cambia la tasa de interés				
		3%	4%	5%	6%	7%
Fondo acumulado	Sobre capital	\$25,878,713.59	\$29,176,175.52	\$33,028,904.79	\$37,541,589.26	\$42,839,485.09
	Sobre rendimiento	\$29,112,482.70	\$32,821,358.97	\$37,154,563.67	\$42,229,741.35	\$48,187,633.40

Fuente: elaboración propia con cálculos del autor (cifras en pesos).

Desde luego, al pagar sobre el rendimiento de los recursos financieros acumulados, desde el inicio del período de cotización el trabajador aumenta el monto acumulado que al transcurrir el tiempo se capitaliza. Esto lleva a que durante el período siempre el ahorro del trabajador es mayor cuando los costos de administración se cobran sobre los rendimientos que logran las administradoras de pensiones, y ni como cuota fija como lo determina actualmente la ley. Como lo muestra la tabla 12, los costos de administración son 105 veces más cuando se cobran sobre capital que cuando se cobran por rendimiento de un afiliado que devenga el SM durante toda su vida laboral.

Un esquema de pago con base en el rendimiento llevaría a un cambio en el comportamiento de las administradoras pues la saca de la zona de comodidad y las lleva a buscar el mayor rendimiento para poder aumentar su retribución. Este cambio beneficiaría al afiliado pues con mayor rendimiento incrementa el capital, efecto que se uniría al resultado descrito en el párrafo anterior. Y esta secuela disminuiría el efecto fiscal del esquema de capitalización individual.

**Tabla 12.** Comparación del costo de administración anual cuando se cobra sobre rendimiento y capital de un afiliado que devengó durante su vida laboral el SM, 1994-2021 con una tasa de interés del 5%

Año	Capital	Rendimiento
1994	\$17,766.00	\$167.89
1995	\$21,408.12	\$202.31
1996	\$25,582.50	\$241.75
1997	\$30,960.90	\$292.58
1998	\$36,688.68	\$346.71
1999	\$42,562.80	\$402.22
2000	\$46,818.00	\$442.43

Año	Capital	Rendimiento
2001	\$51,480.00	\$486.49
2002	\$55,620.00	\$525.61
2003	\$59,760.00	\$564.73
2004	\$64,440.00	\$608.96
2005	\$68,670.00	\$648.93
2006	\$73,440.00	\$694.01
2007	\$78,066.00	\$737.72
2008	\$83,070.00	\$785.01
2009	\$89,442.00	\$845.23
2010	\$92,700.00	\$876.02
2011	\$96,408.00	\$911.06
2012	\$102,006.00	\$963.96
2013	\$106,110.00	\$1,002.74
2014	\$110,880.00	\$1,047.82
2015	\$115,983.00	\$1,096.04
2016	\$124,101.90	\$1,172.76
2017	\$130,307.00	\$1,231.40
2018	\$136,822.34	\$1,292.97
2019	\$143,663.46	\$1,357.62
2020	\$150,846.64	\$1,425.50
2021	\$158,388.97	\$1,496.78

*Fuente:* elaboración propia con cálculos del autor (cifras en pesos).

## Conclusiones

El modelo teórico plantea el funcionamiento tanto del esquema de PM como de CI con los lineamientos teóricos de los sistemas de seguridad social y los parámetros establecidos en las leyes que manejan dichos esquemas. El estimar cada uno de los esquemas de manera separada y luego de manera conjunta, permite evaluar rigurosa y exhaustivamente el costo fiscal que se puede generar en el sistema pensional colombiano.

A pesar de que se plantean los esquemas de manera separada y conjunta, quedan factores que no son involucrados en la modelación. Por ejemplo, en el modelo no se tiene en cuenta que existen otras formas de acceder a una pensión, como son la pensión de invalidez y la pensión por sobrevivencia.

Tampoco se profundiza en temas demográficos, ya que el trabajo intenta describir el costo fiscal acumulado en el transcurso de tiempo donde han funcionado de manera paralela el esquema de PM con el de CI. Queda abierta la posibilidad de indagar sobre cuál sería el costo fiscal futuro proyectando los cambios sobre la pirámide poblacional colombiana, sobre la tasa de dependencia y la tasa de reemplazo.

Otro factor importante es el supuesto simplificador de las variables principales del modelo, ya que como se realizó, se trabajan con variables de largo plazo y no con las observadas en cada periodo. Esto se hizo con el propósito de proyectar tanto las pensiones como los SM futuros.

Con estos factores no incluidos, los modelos de los esquemas son dicientes al momento de plantear programas y reformas de política públicas concernientes a la seguridad social en Colombia. El primer resultado determina un salario en el esquema de CI año a año, para establecer si el afiliado debería estar en el esquema de CI o en el esquema de PM. Esto ayudará a asesorar en qué condiciones el sistema pensional colombiano debería funcionar en pilares, ya sean complementarios o sustitutivos.

El segundo resultado modela el esquema de PM para resaltar la solidaridad inter e intrageneracional. Y es importante porque permitiría modificar variables que se consideran exógenas en el modelo, como la tasa de cotización y el SM que debe recibir cada pensionado. El hacer esto periodo a periodo, permitiría no dejar la solución del problema en manos futuras, sino en las manos tanto de los afiliados como de los pensionados actuales. Es decir, se eliminaría el supuesto de la Equivalencia Ricardiana porque las generaciones futuras no tendrían que pagar el costo fiscal, sino que lo harían las generaciones actuales tanto de trabajadores como de pensionados, por medio de mayores niveles de cotización o de menores pensiones, claramente que garanticen un nivel de calidad de vida adecuado.

El tercer resultado relacionado a los costos de administración evidencia que estos se deben cobrar, no sobre el capital sino sobre los rendimientos, para que con ello el ahorro acumulado en el fondo pensional sea mayor y se disminuya el impacto fiscal para el Gobierno nacional. Aunque la recomendación final de este trabajo es el cambio del actual sistema y la eliminación del esquema de CI como se indica más adelante, en tanto ello ocurra es urgente por una razón elemental de justicia y de correspondencia con los principios de la economía de mercado, sustituir la actual manera de cobrar las comisiones de los administradores en el sistema de capitalización individual, que se hace en base a un porcentaje fijo sobre los aportes de los contribuyentes, por una cobranza basada en un porcentaje sobre los rendimientos que los administradores obtienen sobre los recursos que les son entregados.

De igual manera existen varias conclusiones empíricas. El trabajar con datos requiere completitud, consistencia y precisión. En algunos de los escenarios trabajados la información tanto de los afiliados y de los pensionados no estaba completa, y por medio del análisis econométrico, se debió estimar ya fuera por series de tiempo o por imputación de datos. De igual forma, la información brindada parecía no ser consistente al analizarla detalladamente, ya que existían casos donde, por ejemplo, personas en la edad de 15 a 19 años ya recibían pensiones de vejez y en el mismo rango de edad, personas que tenían salarios entre 16 y 20 SM.

Estas dos características de la información conllevan a analizar la tercera, que es la precisión. Al realizar las estimaciones, se trabaja con datos estimados y no reales, lo que hace que al final del ejercicio, el costo fiscal se sub o sobre estime. Por ejemplo, uno de los obstáculos fueron los rangos salariales de los afiliados al esquema de CI. Primero, los rangos salariales no permitían calcular con precisión el salario que devengaba la persona y por lo tanto tampoco permitía calcular de manera precisa la cotización al esquema de CI. Segundo, los rangos salariales fueron modificados en 2011, que traía como consecuencia el cambio de cálculo.

Con el esquema de PM pasa exactamente lo mismo. La información de afiliados y pensionados no está completa para el periodo de análisis, lo que conlleva a realizar estimaciones. Tampoco hay información detallada de las tasas de interés ni de los ya sean, déficit o superávit fiscales que ha generado el esquema publico pensional.

A pesar de esto, se trabaja con la información disponible principalmente contenida en la Superintendencia Financiera de Colombia y en Banco de la República y se estiman los cálculos anteriormente descritos.

Por último, se llega a la parte del trabajo de la recomendación de política pública enfocada a las finanzas públicas y su sostenibilidad. El trabajo comienza con un análisis de la importancia de disminuir el impacto fiscal causado por las pensiones y reseña que en Colombia por medio de la Ley 100-1993 y la Ley 797-2003, se realiza la transición de un esquema publico pensional a un esquema pensional sustitutivo entre públicos y privados, con el ánimo de disminuir dicho costo fiscal.

Por medio de los cálculos se evidencia que en el transcurso del periodo no se ha logrado dicho fin porque el costo fiscal crece y que, de igual forma, la transición entre esquema no fue la mejor porque, como se plantean en las metodologías, sería mejor tener un sistema pensional que solo funcionara con un esquema de PM por la composición salarial que existe en el mercado laboral colombiano y porque según las estimaciones, en el peor de los casos, el sistema pensional colombiano bajo un esquema de PM tendría un costo

fiscal de 11 billones en promedio, mientras que en el mejor de los casos, en el esquema de CI el costo fiscal sería de 34 billones, tres veces el costo fiscal que se genera en PM.

Esto da paso a pensar qué cambios estructurales realmente necesita el sistema pensional colombiano y qué recomendaciones como tal deja el trabajo. La primera y gran recomendación, es que el sistema pensional colombiano debería funcionar bajo el esquema de PM, el cual debe garantizar una pensión mínima. Luego, cualquier otra persona que pueda acceder a otras formas de ahorro, lo pueda hacer y busque las opciones de inversión ya sea en el sistema financiero o en los sectores económicos. Se resume tener un sistema pensional de un pilar manejado por el esquema de PM y las diferentes opciones que tenga la economía para las decisiones de inversión.

La segunda recomendación es mejorar las condiciones del mercado laboral y del sistema financiero colombiano. Tener mejores condiciones en el mercado laboral implica que existan flujos de cotizaciones constantes y que no se permita evadir las responsabilidades tanto del empleado como del empleador al realizar las cotizaciones al sistema de seguridad social. De hecho, y haciendo el supuesto de que toda persona en edad de trabajar lo quiere hacer y lo hace, la tasa de dependencia en Colombia en el año 1985 es de 8,09, es decir, que por cada persona en edad de retiro, existen 8 personas que estarían trabajando. La tendencia de la tasa de dependencia es decreciente, pero con las proyecciones de población del DANE, en 2020 la tasa de dependencia sería 4,89, es decir, que por cada persona en edad de retiro, existen alrededor de 5 personas que estarían trabajando.

Y mejorar las condiciones del sistema financiero implica que realmente se presenten tasas de rentabilidades reales positivas y significativas para que el ahorro no pierda capacidad adquisitiva. Al observar que el sistema financiero no ofrece tasas de rentabilidad con dichas características, los fondos pensionales ya sean públicos o privados deben buscar nuevas inversiones que ofrezcan las características para que el ahorro no pierda poder adquisitivo. Estas inversiones podrían ser en sectores como la infraestructura, la tecnología y las comunicaciones, donde el papel del dinero de los ahorros de los afiliados sería para financiar proyectos.

La tercera recomendación es analizar los impactos que tiene la tasa de rentabilidad tanto en el esquema de PM como en el esquema de CI. Como se pudo observar con los cálculos, la tasa de rentabilidad en los diferentes escenarios hace que el déficit en el esquema de CI tenga mayor varianza en comparación con la que se presentan en el esquema de PM. Luego se vuelve fundamental indicar cuál sería la tasa de rentabilidad ideal para que en el esquema de CI no se generara déficit. Con el modelaje anterior, se controla

tanto el crecimiento salarial con un 5 % y la inflación con un 4 %, y se estima la tasa de rentabilidad que permitiría a una persona que gana durante toda su vida laboral el SM no ser costo fiscal. Las AF's deberían ofrecer a un afiliado hombre que gana durante toda su vida el SM la tasa de rentabilidad del 16 % anual para no ser costo fiscal y a la mujer que gana durante toda su vida el SM la tasa de rentabilidad del 18 % anual, 2 pp más para la mujer en comparación con la situación del hombre. Por lo tanto, se reitera la importancia de buscar nuevas opciones de inversiones en la economía real y no seguir con los rendimientos que ofrece el sistema financiero.

La tasa actual de rentabilidad estimada indica que su comportamiento de largo plazo es de 11,7 %, que está por debajo tanto de la tasa óptima para mujeres como para hombres. Si la tasa de rentabilidad no es la que se indica, seguirá persistiendo el déficit fiscal para todas aquellas personas que ganan un SM, que corresponde en promedio al 80 % de las personas de la composición salarial.

Finalmente, como se trata de dar una respuesta a la pregunta de investigación planteada, el costo fiscal en el sistema pensional colombiano solo se generaría si únicamente funcionaria el esquema de CI dado que cuando el esquema de PM funciona, se obtienen superávits en el sistema pensional. El superávit obtenido en el esquema de PM se debería invertir de manera eficiente para que en déficit intergeneracionales, se utilicen recursos intrageneracionales y con ello el sistema pensional colombiano no debería generar costo fiscal y si ser una fuente de financiamiento.

## Referencias bibliográficas

- ANIF (2011). *La torre de Babel pensional. Hacia una cartilla actuarial para Colombia*. Bogotá.: ANIF.
- Arias, M., & Mendoza J. C. (2009). *Un modelo de simulación del Régimen Pensional de Ahorro Individual con Solidaridad en Colombia*. Reporte de Estabilidad Financiera. Bogotá: Banco de la República.
- Barkin, S. (1953). Labor's View on Actuarial Requirements for Pension Plans. *Journal of the American Association of University Teachers of Insurance*, 20(1), pp. 63-69.
- Beenstock, M. (1987). Pensions and Labour Market Structure. *Oxford Economic Papers*, 39(3), pp. 568-576
- Boyce, S., & Ippolito, R. (2002). The Cost of Pension Insurance. *The Journal of Risk and Insurance*, 69(2), pp. 121-170.
- Bronson, D. (1953). Pension Plans. The Concept of Actuarial Soundness. *Journal of the American Association of University Teachers of Insurance*, 20(1), pp. 36-47.

- Bustamante, J. (2006). Factores que inciden en la cobertura del sistema pensional en Colombia. Archivos de Economía, documento 312.
- Cerda, R. A. (2005). On Social Security Financial Crisis. *Journal of Population Economics*, 18, 509-517.
- Cesaratto, S. (2002). The Economics of Pension: A Non Conventional Approach. *Review of Political Economy*, 14 (2), 149-177.
- Cesaratto, S. (2006). Transition to Fully Funded Pension Scheme: a non orthodox criticism. *Cambridge Journal of Economics*, 30, 33-48.
- Cesaratto, S. (2007). Are PM and CI Pension Schemes Equivalent Systems? Macroeconomic Considerations in the Light of Alternative Economic Theories. *Review of Political Economy*, 19 (4), 449-473.
- Clavijo, S., Vega, A., Vera, N., Malagón, D., & Cabra, M. (2013). El pasivo pensional en Colombia. Bogotá: Asociación Nacional de Instituciones Financieras – ANIF.
- Conde-Ruiz, J. I., & Profeta, P. (2007). The Redistributive Design of Social Security System. *The Economic Journal*, 117 (520), 686-712.
- Conover, M. (1921). Pensions for Public Employees. *The American Political Science Review*, 15(3), 350-365.
- Cramer, J., & Schrader, W. (1968). Elements of "Pension Costs". *The Journal of Risk and Insurance*, 35(2), pp. 237-245.
- Delgado, C. (2005). Educación y pensiones en Colombia: una perspectiva inter generacional. Archivos de Economía, documento 282.
- Dewhirst, J. (1971). A Conceptual Approach to Pension Accounting. *The Accounting Review*, 46(2), 365-373.
- Disney, R., Boeri, T., & Jappelli, T. (2004). Are Contributions to Public Pension Programmes a Tax on Employment? *Economic Policy*, 19(39), 267-311.
- Feldstein, M. (1974). Social Security, Induced Retirement, and Aggregate Capital Accumulation. *Journal of Political Economy*, 82(5), 905-926.
- Friedberg, L., & Webb, A. (2005). Retirement and the Evolution of Pension Structure. *The Journal of Human Resources*, 40(2), 281-308.
- Ghicas, D. (1990). Determinants of Actuarial Cost Method Changes for Pension Accounting and Funding. *The Accounting Review*, 65(2), 384-405.
- Hirte, G. (2003). The Political Feasibility of Privatizing Old-Age Insurance. *Scottish Journal of Political Economy*, 50 (4), 507-525.
- Hohaus, R. (1940). Actuarial Problems in Social Insurance. *Journal of the American Statistical Association*, 35(209), 37-46.
- Kuné, J. B. (2001). The Controversy of Funding versus Pay-As-You-Go: What remains of the debate? *The Geneva Papers on Risk and Insurance*, 26(3), 418-434.



- Lindbeck, A., & Persson, M. (2003). The Gains from Pension Reform. *Journal of Economic Literature*, 41 (1), 74-112.
- Llanes, M., & Piraquive, G. (2012). Sistemas pensionales y solidarios de Chile, Irlanda, Polonia, Brasil y Perú. Archivos de Economía, documento 386.
- Mackensie, G. A., Gerson, P. R., Cuevas, A., & Heller, P. S. (2001). Pension Reform and the Fiscal Policy Stance. Working Paper International Monetary Fund, 1 (214), 115-127.
- Melone, J. (1963). Actuarial Cost Methods. New Pension Terminology. *The Journal of Insurance*, 30(3), 456-464.
- Merchan, C. A. (2002). ¿Cuáles son los colombianos con pensiones privilegiadas? Archivos de Economía, documento 182.
- Modigliani, F. (1986). Life Cycle, Individual Thrift, and the Wealth of Nations. *The American Economy Review*, 76(3), 297-313.
- Moreno, Á. M., & Ortiz, F. (2010). Economía Política de la Reforma del Sistema Colombiano de Pensiones. *Revista de Economía Institucional*, 12(22), 167-192.
- Osorio, J. H., Martinez, J., & Rodríguez, T. (2005). El modelo DNPensión V 4 – Parte I. Archivos de Economía, documento 285.
- Osorio, J. H., Cuellas, J., & Rodríguez, T. (2005). El modelo DNPensión V 4.0, Parte I. Archivos de Economía – Departamento Nacional de Planeación. Junio de 2005.
- Parra Osorio, J. C. (2001). DNPensión: Un modelo de simulación para estimar el costo fiscal del sistema pensional colombiano. Archivos de Economía – Departamento Nacional de Planeación. Mayo de 2001.
- Peterson, R. (1953). Actuarial Soundness in Pension Plans with Insurance Companies. *Journal of the American Association of University Teachers of Insurance*, 20, (1), 48-53.
- Pivetti, M. (2006). The “Principle of Scarcity”, Pension Policy and Growth. *Review of Political Economy*, 18 (3), 379-390.
- Pollard, P. S., & Pecchenino, R. A. (1997). The Transition from a Pay-As-You-Go to a Fully-Funded Social Security System: Is There a Role for Social Insurance? The Federal Reserve Bank of ST. Louis. Working Paper.
- Santa Maria, M., & Piraquive, G. (2013). Evolución y alternativas del sistema pensional en Colombia. Archivos de Economía, documento 398.
- Santis, G. (2003). The Demography of an Equitable and Stable Intergenerational Transfer System. *Population*, 58 (6), 587-622.
- Schipper, K., & Weil, R. (1982). Alternative Accounting Treatments for Pensions. *The Accounting Review*, 57(4), 806-824.
- VanDerhei, J., Joanatte, F. (1988). Economic Determinants for the Choice of Actuarial Cost Methods. *The Journal of Risk and Insurance*, 55(1), 59-74.



- Yoon, Y., & Talmain, G. (2001). Endogenous Fertility, Endogenous Growth and Public Pension System: Should We switch from a Pay-As-You-Go to a Fully Funded System? *The Manchester School*, 69(5), 586-605.
- Sustainability of a Pay-As-You-Go Pension system in a small open economy with ageing, human capital and endogenous fertility. Peter J. Stauvermann and Ronald R. Kumar. Changwon National University and The University of the South Pacific. November 2014.
- SURA. (2015). *Cómo fortalecer los sistemas de pensiones latinoamericanos. Experiencias, lecciones y propuestas. Tomo I.* Estudio Internacional de SURA Asset Management.
- SURA. (2015). *Cómo fortalecer los sistemas de pensiones latinoamericanos. Experiencias, lecciones y propuestas. Tomo II.* Estudio Internacional de SURA Asset Management.
- SURA. (2013). Contribución del sistema privado de pensiones al desarrollo económico de Latinoamérica. Experiencias de Colombia, México, Chile y Perú. Estudio Internacional de SURA Asset Management.

## Anexos

### Apéndice A. Desarrollo matemático del modelo CI

En el siguiente apéndice se desarrolla la parte matemática del modelo de CI. Toda persona debe cotizar un porcentaje de su salario. La primera ecuación describe la cotización que hace todo afiliado en cualquier periodo durante el cual esta como trabajador

$$C_i^* = (\tau + a)Y_i$$

Donde  $\tau$  es el porcentaje que se capitaliza,  $a$  es el porcentaje que sirve para los costos de administración y los fondos de solidaridad y  $Y_i$  es el IBC del periodo  $i$ . De la ecuación anterior se puede establecer que la cotización efectiva es solo la parte que se capitaliza y que para cualquier periodo es igual a

$$C_i = \tau Y_i$$

La cotización efectiva del primer periodo y el ahorro acumulado hasta el primer periodo es igual a

$$F_1 = Y_1 \tau (1 + r_1)$$

Para el segundo periodo se tiene que la cotización efectiva y el ahorro acumulado para el segundo periodo son:

$$\begin{aligned}C_2 &= Y_2 \tau \\F_2 &= [C_2 + S_1](1 + r_2) \\F_2 &= [Y_2 \tau + Y_1 \tau (1 + r_1)](1 + r_2) \\F_2 &= Y_2 \tau (1 + r_2) + Y_1 \tau (1 + r_1)(1 + r_2) \\F_2 &= \tau [Y_2(1 + r_2) + Y_1(1 + r_1)(1 + r_2)]\end{aligned}$$

Para el tercer periodo es:

$$\begin{aligned}C_3 &= Y_3 \tau \\F_3 &= [C_3 + S_2](1 + r_3) \\F_3 &= \{Y_3 \tau + \tau [Y_2(1 + r_2) + Y_1(1 + r_1)(1 + r_2)]\}(1 + r_3) \\F_3 &= \tau \{Y_3(1 + r_3) + Y_2(1 + r_3)(1 + r_2) + Y_1(1 + r_3)(1 + r_2)(1 + r_1)\}\end{aligned}$$

Para el cuarto periodo es:

$$\begin{aligned}C_4 &= Y_4 \tau \\F_4 &= [C_4 + S_3](1 + r_4) \\F_4 &= \tau \{Y_4(1 + r_4) + Y_3(1 + r_4)(1 + r_3) + Y_2(1 + r_4)(1 + r_3)(1 + r_2) \\&\quad + Y_1(1 + r_4)(1 + r_3)(1 + r_2)(1 + r_1)\}\end{aligned}$$

Si el trabajador trabaja  $t$  periodos, su cotización en el periodo  $t$  y su ahorro acumulado al periodo  $t$  es:

$$\begin{aligned}C_t &= Y_t \tau \\F_t &= [C_t + S_{t-1}](1 + r_t) \\F_t &= \tau \{Y_1(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4) \dots (1 + r_{t-1})(1 + r_t) \\&\quad + Y_2(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4) \dots (1 + r_{t-1})(1 + r_t) \\&\quad + Y_3(1 + r_3)(1 + r_4) \dots (1 + r_{t-1})(1 + r_t) + \dots + Y_{t-1}(1 + r_{t-1})(1 + r_t) \\&\quad + Y_t(1 + r_t)\}\end{aligned}$$

$$F_t = \tau \left[ Y_1 \prod_{i=1}^t (1 + r_i) + Y_2 \prod_{i=2}^t (1 + r_i) + Y_3 \prod_{i=3}^t (1 + r_i) + \dots + Y_{t-1} \prod_{i=t-1}^t (1 + r_i) + Y_t \prod_{i=t}^t (1 + r_i) \right]$$

De la ecuación [1] se desprenden varios escenarios. El primer escenario es cuando el IBC de los diferentes periodos permanece constante durante toda

la vida laboral del trabajador e igual a  $Y$ , es decir nunca tuvo un aumento salarial real.

$$F_t = \tau \left[ Y_1 \prod_{i=1}^t (1+r_i) + Y_2 \prod_{i=2}^t (1+r_i) + Y_3 \prod_{i=3}^t (1+r_i) + \dots + Y_{t-1} \prod_{i=t-1}^t (1+r_i) + Y_t \prod_{i=t}^t (1+r_i) \right]$$

Luego,

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = \dots Y_{t-1} = Y_t = Y$$

Con el reemplazo se obtiene:

$$F_t = \tau \left[ Y \prod_{i=1}^t (1+r_i) + Y \prod_{i=2}^t (1+r_i) + Y \prod_{i=3}^t (1+r_i) + \dots + Y \prod_{i=t-1}^t (1+r_i) + Y \prod_{i=t}^t (1+r_i) \right]$$

Con factor común,

$$F_t = \tau Y \left[ \prod_{i=1}^t (1+r_i) + \prod_{i=2}^t (1+r_i) + \prod_{i=3}^t (1+r_i) + \dots + \prod_{i=t-1}^t (1+r_i) + \prod_{i=t}^t (1+r_i) \right] \quad (1.1)$$

El segundo escenario es cuando la tasa de interés real permanece constante durante todo el periodo de cotización y se puede entender como la tasa de interés de largo plazo igual a  $\bar{r}$ . Entonces,

$$r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_{t-1} = r_t = \bar{r}$$

Con el reemplazo se obtiene

$$F_t = \tau \left[ Y_1 \prod_{i=1}^t (1+\bar{r}) + Y_2 \prod_{i=2}^t (1+\bar{r}) + Y_3 \prod_{i=3}^t (1+\bar{r}) + \dots + Y_{t-1} \prod_{i=t-1}^t (1+\bar{r}) + Y_t \prod_{i=t}^t (1+\bar{r}) \right]$$

Y con propiedades de la multiplicación se obtiene:

$$F_t = \tau [Y_1(1+\bar{r})^t + Y_2(1+\bar{r})^{t-1} + Y_3(1+\bar{r})^{t-2} + \dots + Y_{t-1}(1+\bar{r})^2 + Y_t(1+\bar{r})^1]$$

El tercer escenario es cuando los IBC tienen aumentos que dependen del crecimiento salarial igual a la inflación. Al igual que con las tasas de interés, la inflación tiene un comportamiento de largo plazo igual a  $\bar{\pi}$ . Por lo tanto,

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \dots = \pi_{t-2} = \pi_{t-1} = \bar{\pi}$$

Con los incrementos salariales que se deben únicamente a la inflación, los IBC se describen por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1 \\ Y_2 &= Y_1(1 + \bar{\pi}) \\ Y_3 &= Y_1(1 + \bar{\pi})^2 \\ Y_4 &= Y_3(1 + \pi_3) = Y_1(1 + \bar{\pi})^3 \\ &\vdots \\ Y_t &= Y_{t-1}(1 + \pi_{t-1}) = Y_1(1 + \bar{\pi})^{t-1} \end{aligned}$$

Se reemplaza,

$$\begin{aligned} F_t = \tau Y_1 \{ &(1 + r_t)(1 + r_{t-1}) \dots (1 + r_4)(1 + r_3)(1 + r_2)(1 + r_1) + (1 + \bar{\pi})(1 + r_t)(1 + r_{t-1}) \dots (1 + r_4)(1 + r_3)(1 + r_2) \\ &+ (1 + \bar{\pi})^2(1 + r_t)(1 + r_{t-1}) \dots (1 + r_4)(1 + r_3) + (1 + \bar{\pi})^3(1 + r_t)(1 + r_{t-1}) \dots (1 + r_4) \\ &+ (1 + \bar{\pi})^{t-2}(1 + r_t)(1 + r_{t-1}) + (1 + \bar{\pi})^{t-1}(1 + r_t) \} \end{aligned}$$

El cuarto caso es hacer una combinación de los dos escenarios anteriores, donde se tiene en cuenta que el IBC aumenta según la inflación de largo plazo y que la tasa de interés es igual a la tasa de interés de largo plazo.

$$F_t = Y_1 \tau [(1 + \bar{r}) + (1 + \bar{r})^{t-1}(1 + \bar{w})^1 + \dots + (1 + \bar{r})^3(1 + \bar{w})^{t-3} + (1 + \bar{r})^2(1 + \bar{w})^{t-2} + (1 + \bar{r})(1 + \bar{w})^{t-1}]$$

### *Flujo mínimo requerido de las pensiones*

El requerimiento mínimo de pensión para el primer periodo de pensionado que es en  $t+1$  es,

$$R_{t+1} = \alpha SM_{t+1}$$

Para el segundo periodo de pensión, el requerimiento de la pensión mínima es,

$$\begin{aligned} R_{t+2} &= \alpha SM_{t+2} \\ R_{t+2} &= \alpha(1 + w_{t+1})SM_{t+1} \end{aligned}$$

Donde  $w_{t+1}$  es el incremento salarial que se da para los SM. El requerimiento de pensión para el tercer periodo es igual a,

$$R_{t+3} = \alpha(1 + w_{t+2})(1 + w_{t+1})SM_{t+1}$$

Para el  $T$  - *esimo* periodo que es la esperanza de vida, el requerimiento mínimo de la pensión es,

$$R_T = \alpha(1 + w_{t+1})(1 + w_{t+2}) \cdots (1 + w_{T+1})SM_{t+1}$$

$$R_T = \left[ \alpha SM_{t+1} \prod_{i=t+1}^{T-1} (1 + w_i) \right]$$

Con la suma de todos los requerimientos de las pensiones mínimas durante la vida pensional del afiliado se tiene el requerimiento mínimo total que es,

$$PR = R_{t+1} + R_{t+2} + \cdots + R_T$$

$$PR = \alpha SM_{t+1} + \alpha SM_{t+1}(1 + w_{t+1}) + \alpha SM_{t+1}(1 + w_{t+1})(1 + w_{t+2}) + \cdots$$

$$+ \alpha SM_{t+1}(1 + w_{t+1})(1 + w_{t+2}) \cdots (1 + w_{T+1})$$

$$PR = \alpha SM_{t+1} [1 + (1 + w_{t+1}) + (1 + w_{t+1})(1 + w_{t+2}) + \cdots$$

$$+ (1 + w_{t+1})(1 + w_{t+2}) \cdots (1 + w_T)]$$

$$PR = \alpha SM_{t+1} [1 + (1 + w_{t+1}) + \prod_{i=t+1}^{t+2} (1 + w_i) + \prod_{i=t+1}^{t+3} (1 + w_i) + \cdots + \prod_{i=t+1}^{t-2} (1 + w_i) + \prod_{i=t+1}^{T-1} (1 + w_i)]$$

Con la tasa de crecimiento salarial de largo plazo del SM  $\bar{w}$ , se tiene

$$PR = \alpha SM_{t+1} [1 + (1 + \bar{w}) + (1 + \bar{w})^2 + \cdots + (1 + \bar{w})^{T-t-3} + (1 + \bar{w})^{T-t-2}]$$

$$PR = \alpha SM_{t+1} \prod_{i=0}^{T-t-2} (1 + \bar{w})^i \quad (3)$$

La ecuación [3] describe el requisito mínimo total que debería recibir una persona durante su vida pensional con los salarios mínimos vigentes.

### *Saldo restantes*

Al ahorro total se le descuenta la pensión de cada periodo y los costos de administración. Esto se denomina saldo restante en el periodo  $i$ . El saldo restante en el periodo  $i$  tiene rentabilidad, al igual que cuando estaba como

trabajador, y lo puede acumular para el ahorro que queda para la pensión. Por lo tanto, el saldo restante en el primer periodo por la rentabilidad es,

$$Z_1 = (F_t - P_1 - aP_1)(1 + r_{t+1})$$

Donde  $Z_1$  es el saldo restante por la tasa de rendimiento,  $r_{t+1}$  es la tasa de rendimiento real que se le aplica al saldo restante después de pagar la primera pensión,  $a$  son los costos de administración y  $P_1$  es el pago por la primera pensión.

El saldo restante después de pagar el segundo periodo de pensiones más la tasa de rendimiento es,

$$\begin{aligned} Z_2 &= (Z_1 - P_2 - aP_2)(1 + r_{t+2}) \\ Z_2 &= ((F_t - P_1 - aP_1)(1 + r_{t+1}) - P_2 - aP_2)(1 + r_{t+2}) \\ Z_2 &= F_t(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2}) - P_1(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) - aP_1(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) \\ &\quad - P_2(1 + r_{t+2}) - aP_2(1 + r_{t+2}) \\ Z_2 &= F_t(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2}) - P_1(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) - P_2(1 + r_{t+2}) \\ &\quad - aP_1(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) - aP_2(1 + r_{t+2}) \\ Z_2 &= F_t(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2}) - (1 + a)[P_1(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) + P_2(1 + r_{t+2})] \end{aligned}$$

El saldo restante después de pagar el tercer periodo de pensiones más la tasa de rendimiento es,

$$\begin{aligned} Z_3 &= (Z_2 - P_3 - aP_3)(1 + r_{t+3}) \\ Z_3 &= [F_t(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2}) - P_1(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) - P_2(1 + r_{t+2}) \\ &\quad - aP_1(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) - aP_2(1 + r_{t+2}) - P_3 - aP_3](1 + r_{t+3}) \\ Z_3 &= F_t(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+3}) - P_1(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) - P_2(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2}) \\ &\quad - P_3(1 + r_{t+3}) - aP_1(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) - aP_2(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2}) - aP_3(1 + r_{t+3}) \\ Z_3 &= F_t(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+3}) - (1 + a)[P_1(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) \\ &\quad + P_2(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2}) + P_3(1 + r_{t+3})] \end{aligned}$$

El saldo restante después de pagar el cuarto periodo de pensiones más la tasa de rendimiento es,

$$\begin{aligned}
Z_4 &= (Z_3 - P_4 - aP_4)(1 + r_{t+4})1 \\
Z_4 &= \{F_t(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+3}) - P_1(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) \\
&- P_2(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2}) - P_3(1 + r_{t+3}) - aP_1(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) \\
&- aP_2(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2}) - aP_3(1 + r_{t+3}) - P_4 - aP_4\}(1 + r_{t+4}) \\
Z_4 &= F_t(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+4}) - P_1(1 + r_{t+4})(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) \\
&- P_2(1 + r_{t+4})(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2}) - P_3(1 + r_{t+4})(1 + r_{t+3}) - P_4(1 + r_{t+4}) \\
&- aP_1(1 + r_{t+4})(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) \\
&- aP_2(1 + r_{t+4})(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2}) - aP_3(1 + r_{t+4})(1 + r_{t+3}) \\
&- aP_4(1 + r_{t+4}) \\
Z_4 &= F_t(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+4}) - (1 + a)[P_1(1 + r_{t+4})(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2})(1 + r_{t+1}) \\
&+ P_2(1 + r_{t+4})(1 + r_{t+3})(1 + r_{t+2}) + P_3(1 + r_{t+4})(1 + r_{t+3}) + P_4(1 + r_{t+4})]
\end{aligned} \tag{4}$$

El patrón de los saldos restantes es que el ahorro total acumulado  $S_t$  se multiplica por las tasas de interés hasta el periodo en el cual se calcula el saldo restante menos las pensiones pagadas multiplicadas por las tasas de interés. Por último, esta  $a$  se multiplica por una sucesión decreciente de las tasas de interés. Por lo tanto por medio del patrón de los saldos restantes, el saldo restante en el periodo  $T$ , que debe seguir igual o mayor a cero es,

$$\begin{aligned}
Z_T &= (Z_{T-1} - P_T - aP_T)(1 + r_T) \\
Z_T &= F_t(1 + r_{t+1})...(1 + r_T) - P_1(1 + r_T)...(1 + r_{t+1}) - P_2(1 + r_T)...(1 + r_{t+2}) - \dots \\
&- P_T(1 + r_T) - aP_1(1 + r_T)...(1 + r_{t+1}) - aP_2(1 + r_T)...(1 + r_{t+2}) - \dots \\
&- aP_T(1 + r_T) \\
Z_T &= F_t[\prod_{i=t+1}^T (1 + r_i)] - P_1 \prod_{i=t+1}^T (1 + r_i) - P_2 \prod_{i=t+2}^T (1 + r_i) - \dots \\
&- P_T(1 + r_T) - aP_1 \prod_{i=t+1}^T (1 + r_i) - aP_2 \prod_{i=t+2}^T (1 + r_i) - \dots - aP_T(1 + r_T) \\
Z_T &= F_t[\prod_{i=t+1}^T (1 + r_i)] - (1 + a)[P_1 \prod_{i=t+1}^T (1 + r_i) + P_2 \prod_{i=t+2}^T (1 + r_i) + \dots + P_T(1 + r_T)]
\end{aligned} \tag{4}$$

Con la tasa de interés de largo plazo, la ecuación [4] se modifica en,

$$Z_T = F_t(1 + \bar{r})^{T-t-1} - (1 + a)[P_1(1 + \bar{r})^T + P_2(1 + \bar{r})^{T-1} + P_3(1 + \bar{r})^{T-2} + \dots + P_T(1 + \bar{r})^1]$$

### Condición de equilibrio fiscal

La primera condición de equilibrio fiscal es que la ecuación anterior sea mayor a 0 y por lo tanto se iguala a 0 para obtener,

$$\begin{aligned}
F_t(1+\bar{r})^{T-t-1} - (1+a)[P_1(1+\bar{r})^T + P_2(1+\bar{r})^{T-1} + P_3(1+\bar{r})^{T-2} + \dots + P_T(1+\bar{r})^1] &= 0 \\
F_t(1+\bar{r})^{T-t-1} &= (1+a)[P_1(1+\bar{r})^T + P_2(1+\bar{r})^{T-1} + P_3(1+\bar{r})^{T-2} + \dots + P_T(1+\bar{r})^1] \\
F_t &= \frac{(1+a)[P_1(1+\bar{r})^T + P_2(1+\bar{r})^{T-1} + P_3(1+\bar{r})^{T-2} + \dots + P_T(1+\bar{r})^1]}{(1+\bar{r})^{T-t-1}}
\end{aligned}$$

Se reemplaza  $F_t$  para obtener,

$$\begin{aligned}
Y_1 \tau[(1+\bar{r})^t + (1+\bar{r})^{t-1}(1+\bar{w})^1 + \dots + (1+\bar{r})^3(1+\bar{w})^{t-3} + (1+\bar{r})^2(1+\bar{w})^{t-2} + (1+\bar{r})(1+\bar{w})^{t-1}] \\
= \frac{(1+a)[P_1(1+\bar{r})^T + P_2(1+\bar{r})^{T-1} + P_3(1+\bar{r})^{T-2} + \dots + P_T(1+\bar{r})^1]}{(1+\bar{r})^{T-t-1}} \\
Y_1 = \frac{(1+a)[P_1(1+\bar{r})^T + P_2(1+\bar{r})^{T-1} + P_3(1+\bar{r})^{T-2} + \dots + P_T(1+\bar{r})^1]}{(1+\bar{r})^{T-t-1} \tau[(1+\bar{r})^t + (1+\bar{r})^{t-1}(1+\bar{w})^1 + \dots + (1+\bar{r})^3(1+\bar{w})^{t-3} + (1+\bar{r})^2(1+\bar{w})^{t-2} + (1+\bar{r})(1+\bar{w})^{t-1}]}
\end{aligned}$$

La ecuación anterior establece el primer salario que debe ganar el trabajador para no generar costo fiscal cuando gana una pensión  $P$  hasta el periodo de su esperanza de vida. Para hacer un análisis comparable, suponga por el momento que dichas pensiones  $P$  son las pensiones mínimas que la persona debe tener. Por lo tanto  $P_i = R_i$  y se puede reemplazar para obtener

$$Y_1 = \frac{(1+a)[R_{t+1}(1+\bar{r})^T + R_{t+2}(1+\bar{r})^{T-1} + R_{t+3}(1+\bar{r})^{T-2} + \dots + R_T(1+\bar{r})^1]}{(1+\bar{r})^{T-t-1} \tau[(1+\bar{r})^t + (1+\bar{r})^{t-1}(1+\bar{w})^1 + \dots + (1+\bar{r})^3(1+\bar{w})^{t-3} + (1+\bar{r})^2(1+\bar{w})^{t-2} + (1+\bar{r})(1+\bar{w})^{t-1}]}$$

Se toma el numerador de la anterior ecuación para reemplazar y simplificar dejándolo en salarios mínimos,

$$\begin{aligned}
(1+a)[R_{t+1}(1+\bar{r})^T + R_{t+2}(1+\bar{r})^{T-1} + R_{t+3}(1+\bar{r})^{T-2} + \dots + R_T(1+\bar{r})^1] \\
R_{t+1} &= \alpha SM_{t+1} \\
R_{t+2} &= \alpha SM_{t+2} = \alpha(1+\bar{w})^1 SM_{t+1} \\
R_{t+3} &= \alpha(1+w_{t+2})(1+w_{t+1}) SM_{t+1} = \alpha(1+\bar{w})^2 SM_{t+1} \\
&\vdots \\
R_T &= \alpha(1+w_{t+1})(1+w_{t+2}) \dots (1+w_{T-1}) SM_{t+1} = \alpha(1+\bar{w})^{T-t-2} SM_{t+1}
\end{aligned}$$

Se reemplaza,

$$\begin{aligned}
(1+a)[\alpha SM_{t+1}(1+\bar{r})^T + \alpha(1+\bar{w})^1 SM_{t+1}(1+\bar{r})^{T-1} + \alpha(1+\bar{w})^2 SM_{t+1}(1+\bar{r})^{T-2} + \dots \\
+ \alpha(1+\bar{w})^{T-t-2} SM_{t+1}(1+\bar{r})^1]
\end{aligned}$$



Con factor común,

$$\alpha(1+a)SM_{t+1}[(1+\bar{r})^T + (1+\bar{w})^1(1+\bar{r})^{T-1} + (1+\bar{w})^2(1+\bar{r})^{T-2} + \dots + (1+\bar{w})^{T-t-2}(1+\bar{r})^1]$$

Se reemplaza esta ecuación en el numerador de la ecuación base [4.2] para obtener que el salario inicial para que una persona no sea un costo fiscal depende del salario mínimo del primer periodo de pensión, de la tasa de interés y de la inflación de largo plazo.

$$Y_1 = \frac{\alpha(1+a)SM_{t+1}[(1+\bar{r})^T + (1+\bar{w})^1(1+\bar{r})^{T-1} + (1+\bar{w})^2(1+\bar{r})^{T-2} + \dots + (1+\bar{w})^{T-t-2}(1+\bar{r})^1]}{(1+\bar{r})^{T-t-1} \tau [(1+\bar{r})^t + (1+\bar{r})^{t-1}(1+\bar{w})^1 + \dots + (1+\bar{r})^3(1+\bar{w})^{t-3} + (1+\bar{r})^2(1+\bar{w})^{t-2} + (1+\bar{r})(1+\bar{w})^{t-1}]}$$

## Apéndice B. Desarrollo matemático del modelo PM

### Primera Modelación

1. Salario Minino – SM constante
2. Tasa de interés real constante e igual a  $r$
3. Tasa de inflación igual a 0
4. Cantidad de trabajadores y pensionados permanece constante

Primera cotización y fondo común en el periodo 1:

$$\begin{aligned} C_1 &= \theta SM \\ F_1 &= \theta \eta_1 SM (1+r) \\ \eta_1 &= 1 \end{aligned}$$

Segunda cotización y fondo común en el periodo 2:

$$\begin{aligned} C_2 &= \theta SM + \theta SM = 2\theta SM \\ F_2 &= [\theta SM (1+r) + 2\theta SM](1+r) \\ F_2 &= \theta \eta_1 SM (1+r)^2 + \theta \eta_2 SM (1+r) \\ \eta_1 &= 1; \eta_2 = 2 \end{aligned}$$

Tercera cotización y fondo común en el periodo 3:

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \theta SM + \theta SM + \theta SM = 3\theta SM \\
 F_3 &= \{[\theta SM(1+r) + 2\theta SM](1+r) + 3\theta SM\}(1+r) \\
 F_3 &= \theta \eta_1 SM(1+r)^3 + \theta \eta_2 SM(1+r)^2 + \theta \eta_3 SM(1+r) \\
 \eta_1 &= 1; \eta_2 = 2; \eta_3 = 3
 \end{aligned}$$

Cuarta cotización y fondo común en el periodo 4:

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \theta SM + \theta SM + \theta SM + \theta SM = 4\theta SM \\
 F_4 &= \{\theta \eta_1 SM(1+r)^3 + \theta \eta_2 SM(1+r)^2 + \theta \eta_3 SM(1+r) + 4\theta SM\}(1+r) \\
 F_4 &= \theta \eta_1 SM(1+r)^4 + \theta \eta_2 SM(1+r)^3 + \theta \eta_3 SM(1+r)^2 + \theta \eta_4 SM(1+r) \\
 \eta_1 &= 1; \eta_2 = 2; \eta_3 = 3; \eta_4 = 4 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

*T* esima cotización y fondo común en el *t*-esimo periodo:

$$\begin{aligned}
 C_t &= \theta SM + \theta SM + \theta SM + \dots + \theta SM = n\theta SM \\
 F_t &= \{\theta \eta_1 SM(1+r)^{t-1} + \theta \eta_2 SM(1+r)^{t-2} + \theta \eta_3 SM(1+r)^{t-3} + \theta \eta_4 SM(1+r)^{t-4} + \dots \\
 &\quad + \theta \eta_{t-1} SM(1+r)^1 + n\theta SM\}(1+r) \\
 vvF_t &= \theta \eta_1 SM(1+r)^t + \theta \eta_2 SM(1+r)^{t-1} + \theta \eta_3 SM(1+r)^{t-2} + \theta \eta_4 SM(1+r)^{t-3} + \dots \\
 &\quad + \theta \eta_{t-1} SM(1+r)^2 + \eta_t \theta SM(1) \\
 \eta_1 &= 1; \eta_2 = 2; \eta_3 = 3; \eta_4 = 4, \dots, \eta_{t-1} = n-1, \eta_t = n
 \end{aligned}$$

Con factor común,

$$F_t = SM[\eta_1(1+r)^t + \eta_2(1+r)^{t-1} + \eta_3(1+r)^{t-2} + \dots + \eta_{t-1}(1+r)^2 + \eta_t(1+r)^1]$$

Con sumatoria el fondo común en el periodo *t* es igual a:

$$F_t = \theta SM \left[ \sum_{i=1}^t \eta_i (1+r)^{t+1-i} \right]$$

El fondo común en el periodo *t+1* donde ya existe un pensionado y *n* trabajadores es:

$$\begin{aligned}
 F_{t-1} &= \left\{ \theta SM \left[ \sum_{i=1}^t \eta_i (1+r)^{t+1-i} \right] - \alpha SM + \theta n SM \right\} (1+r) \\
 F_{t+1} &= \{F_t - \alpha SM + \theta n SM\} (1+r) \\
 F_{t+1} &= \{F_t - \alpha \beta_1 SM + \theta n SM\} (1+r) \\
 \beta_1 &= 1
 \end{aligned}$$

El fondo común en el periodo  $t+2$  donde hay dos pensionados y  $n$  trabajadores es:

$$\begin{aligned}
 F_{t+2} &= [\{F_t - \alpha \beta_1 SM + \theta \eta_t SM\} (1+r) - \alpha 2 SM + \theta \eta_t SM] (1+r) \\
 F_{t+2} &= F_t (1+r)^2 - \alpha \beta_1 SM (1+r)^2 + \theta \eta_t SM (1+r)^2 - \alpha 2 SM (1+r) + \theta \eta_t SM (1+r) \\
 F_{t+2} &= F_t (1+r)^2 + \theta \eta_t SM (1+r)^2 + \theta \eta_t SM (1+r) - \alpha \beta_1 SM (1+r)^2 - \alpha \beta_2 SM (1+r) \\
 \beta_2 &= 2
 \end{aligned}$$

El fondo común en el periodo  $t+3$  donde hay tres pensionados y  $n$  trabajadores es:

$$\begin{aligned}
 F_{t+3} &= F_t (1+r)^3 + \theta \eta_t SM (1+r)^3 + \theta \eta_t SM (1+r)^2 + \theta \eta_t SM (1+r) - \alpha \beta_1 SM (1+r)^3 \\
 &\quad - \alpha \beta_2 SM (1+r)^2 - \alpha \beta_3 SM (1+r)
 \end{aligned}$$

En el periodo de la esperanza de vida se muere el primer pensionado, pero existen  $\eta$  trabajadores y  $\beta$  pensionados. El primer trabajador comienza a trabajar en el periodo 1, trabaja durante  $t$  periodos. En el periodo  $t+1$  recibe su primera pensión y recibe la pensión hasta la esperanza de vida que es el periodo  $t+p$ . El fondo común en el periodo  $t+p$  es:

$$\begin{aligned}
 F_{t+p} &= F_t (1+r)^{t+p} - \alpha \beta_1 SM (1+r)^p - \alpha \beta_2 SM (1+r)^{p-1} - \alpha \beta_{t+p-1} SM (1+r)^2 \\
 &\quad - \alpha \beta_{t+p} SM (1+r)^{p-1} + \theta \eta_t SM (1+r)^p + \theta \eta_t SM (1+r)^{p-1} \\
 &\quad + \theta \eta_t SM (1+r)^{p-2} + \dots + \theta \eta_t SM (1+r)^2 + \theta \eta_t SM (1+r)
 \end{aligned}$$

Con sumatorias,

$$F_{t+p} = F_t (1+r)^{t+p} - \alpha SM \left[ \sum_{i=1}^t \beta_i (1+r)^{p+1-i} \right] + \theta \eta_t SM \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right]$$

Factor común del SM,

$$F_{t+p} = SM \left\{ \theta \left[ \sum_{i=1}^t \eta_i (1+r)^{t+1-i} \right] (1+r)^{t+p} - \alpha \left[ \sum_{i=1}^t \beta_i (1+r)^{p+1-i} \right] + \theta \eta_t \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] \right\}$$

Suponga un periodo  $T$ , donde hay  $\eta$  trabajadores y  $\beta$  pensionados y el fondo común es:

$$F_{t+p} = SM \left\{ \theta \left[ \sum_{i=1}^t \eta_i (1+r)^{t+1-i} \right] (1+r)^{t+p} - \alpha \beta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] + \theta \eta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] \right\}$$

Stock de la primera generación que se capitaliza durante el tiempo

$$SM \theta \left[ \sum_{i=1}^t \eta_i (1+r)^{t+1-i} \right] (1+r)^{t+p}$$

Flujo de las pensiones periodo a periodo para las pensiones

$$SM \alpha \beta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right]$$

Flujo de los aportes de los trabajadores periodo a periodo

$$SM \theta \eta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right]$$

*Condición de equilibrio fiscal*

Superávit del fondo común

$$SM \left\{ \theta \left[ \sum_{i=1}^t \eta_i (1+r)^{t+1-i} \right] (1+r)^{t+p} - \alpha \beta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] + \theta \eta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] \right\} \geq 0$$

Déficit del fondo común

$$SM \left\{ \theta \left[ \sum_{i=1}^t \eta_i (1+r)^{t+1-i} \right] (1+r)^{t+p} - \alpha \beta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] + \theta \eta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] \right\} < 0$$

Se despeja y se pasa a dividir el SM,

$$SM \left\{ \theta \left[ \sum_{i=1}^t \eta_i (1+r)^{t+1-i} \right] (1+r)^{t+p} - \alpha \beta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] + \theta \eta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] \right\} = 0$$

$$\left\{ \theta \left[ \sum_{i=1}^t \eta_i (1+r)^{t+1-i} \right] (1+r)^{t+p} - \alpha \beta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] + \theta \eta \left[ \sum_{i=1}^t (1+r)^{p+1-i} \right] \right\} = 0$$

### Segunda Modelación

1. Salario mínimo se ajusta periodo a periodo por el crecimiento salarial legal
2. Tasa de interés real constante e igual a  $r$
3. Rangos salariales tanto para trabajadores como para pensionados
4. Cantidad de trabajadores y pensionados pueden variar periodo a periodo y lo pueden hacer entre los grupos salariales determinados por el SM

Supóngase  $N$  trabajadores con diferentes rangos salariales.

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_{j-1} + n_j = N$$

Las personas del grupo  $n_1$  ganan un SM, las del grupo  $n_2$  ganan 2 SM y así sucesivamente hasta que las personas que pertenecen al grupo  $n_j$  ganan  $J$  SM. Para el primer periodo la cotización del fondo común con trabajadores que ganan diferentes rangos salariales es:

$$C_1 = \theta n_{1,1} SM_1 + 2\theta n_{1,2} SM_1 + 3\theta n_{1,3} SM_1 + \dots + (J-1)\theta n_{1,j-1} SM_1 + J\theta n_{1,j} SM_1$$

$$C_1 = \theta SM_1 (n_{1,1} + 2n_{1,2} + 3n_{1,3} + \dots + (J-1)n_{1,j-1} + Jn_{1,j})$$

$$C_1 = \theta SM_1 \left( \sum_{i=1}^j i n_{1,i} \right)$$

Donde el primer subíndice que acompaña a cada una de las  $n$  indica el primer periodo y el segundo es el rango salarial. El  $SM_1$  es el salario mínimo del periodo 1. El fondo común en el periodo 1 con rangos salariales es:

$$F_2 = \theta SM_1 \left( \sum_{i=1}^J i n_{1,i} \right) (1+r)$$

$$F_2 = C_1 (1+r)$$

La segunda cotización y el fondo común en el segundo periodo es:

$$C_2 = \theta SM_2 \left( \sum_{i=1}^j in_{2,i} \right)$$

$$F_2 = \left[ C_1(1+r) + \theta SM_2 \left( \sum_{i=1}^j in_{2,i} \right) \right] (1+r)$$

$$F_2 = (F_1 + C_2)(1+r)$$

La tercera cotización y el fondo común en el tercer periodo es:

$$C_3 = \theta SM_3 \left( \sum_{i=1}^j in_{3,i} \right)$$

$$F_3 = \left[ (F_1 + C_2)(1+r) + \theta SM_3 \left( \sum_{i=1}^j in_{3,i} \right) \right] (1+r)$$

$$F_3 = (F_2 + C_3)(1+r)$$

En el  $t$ -ésimo periodo la cotización y el fondo común es:

$$C_t = \theta SM_t \left( \sum_{i=1}^j in_{t,i} \right)$$

$$F_t = \left[ (F_{t-2} + C_{t-1})(1+r) + \theta SM_t \left( \sum_{i=1}^j in_{t,i} \right) \right] (1+r)$$

$$F_t = (F_{t-1} + C_t)(1+r)$$

Ahora supóngase  $M$  pensionados con diferentes rangos salariales determinados por el SM.

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_{l-1} + m_l = M \quad -1$$

$m_1$  indica los pensionados que ganan como pensión  $\alpha_1 SM$ ,  $m_2$  indica los pensionados que ganan como pensión  $\alpha_2 SM$  y así sucesivamente hasta que  $m_l$  indica los pensionados que ganan como pensión  $\alpha_l SM$ . Las proporciones  $\alpha_i$  están entre un valor mínimo y máximo que se establece por la ley. De igual forma, el SM en este caso es el IBL que es un promedio de un tiempo determinado en los últimos periodos de trabajo. El fondo común en el periodo  $t+1$  es:

$$\begin{aligned}
F_{t+1} = & [F_t - (\alpha_1 m_{t+1,1} SM_{t+1} + 2\alpha_2 m_{t+1,2} SM_{t+1} + 3\alpha_3 m_{t+1,3} SM_{t+1} + \dots \\
& + (l-1)\alpha_{l-1} m_{t+1,l} SM_{t+1} + l\alpha_l m_{t+1,l} SM_{t+1}) \\
& + (\theta n_{t+1,1} SM_{t+1} + 2\theta n_{t+1,2} SM_{t+1} + 3\theta n_{t+1,3} SM_{t+1} + \dots \\
& + (J-1)\theta n_{t+1,j-1} SM_{t+1} + J\theta n_{t+1,j} SM_{t+1})](1+r) \\
F_{t+1} = & \left[ F_t - SM_{t+1} \left( \sum_{i=1}^J \alpha_i im_{t+1,i} \right) + \theta SM_{t+1} \left( \sum_{i=1}^J in_{t+1,i} \right) \right] (1+r)
\end{aligned}$$

El fondo común en el periodo  $t+2$  es:

$$F_{t+2} = \left[ F_{t+1} - SM_{t+2} \left( \sum_{i=1}^J \alpha_i im_{t+2,i} \right) + \theta SM_{t+2} \left( \sum_{i=1}^J in_{t+2,i} \right) \right] (1+r)$$

El fondo común en el  $t+p$  *esimo* periodo es:

$$F_{t+p} = \left[ F_{t+p-1} - SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^J \alpha_i im_{t+p,i} \right) + \theta SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^J in_{t+p,i} \right) \right] (1+r)$$

Saldo en el fondo común en el periodo anterior. Esto puede ser negativo o positivo. Si es positivo es que en el periodo anterior se presentó un superávit en el fondo común. De ser negativo significa que desde el periodo anterior se presenta un déficit en el fondo común.

$$F_{t+p-1}$$

Es el flujo que se debe pagar por las pensiones de los pensionados en el periodo  $t+p$ .

$$SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^J \alpha_i im_{t+p,i} \right)$$

Es el flujo de las cotizaciones de los trabajadores en el periodo  $t+p$ .

$$\theta SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^J in_{t+p,i} \right)$$

*Condición de equilibrio fiscal*

Superávit del fondo común

$$F_{t+p} \geq 0$$

$$\left[ F_{t+p-1} - SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^I \alpha_i im_{t+p,i} \right) + \theta SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^I in_{t+p,i} \right) \right] (1+r) \geq 0$$

Déficit del fondo común

$$F_{t+p} < 0$$

$$\left[ F_{t+p-1} - SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^I \alpha_i im_{t+p,i} \right) + \theta SM_{t+p} \left( \sum_{i=1}^I in_{t+p,i} \right) \right] (1+r) < 0$$

### **Apéndice C. Explicación de la modelación de las tres principales variables por medio de series de tiempo**

Análisis de series de tiempo - Inflación

Fuente: Banco de la República

Tipo de frecuencia de los datos originales: Mensual

Lapso: 1954 -2015.

Tipo de frecuencia de los datos modificados: Anual, último mes de cada año. Se trabaja con la serie de Variación Anual.

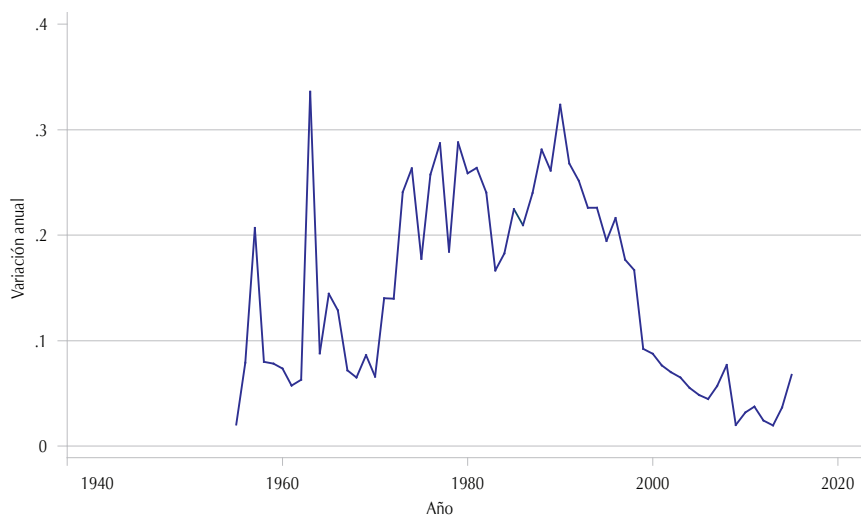
Lapso: 1954 – 2015.

Al momento de graficar la inflación en todo el lapso disponible, se observan dos tipos de tendencias. La primera tendencia creciente está en el periodo 1954 hasta 1990, con varianza igual a 0,00808942, una inflación mínima de 0,0203, una inflación máxima de 0,336 y una inflación promedio de 0,1743.

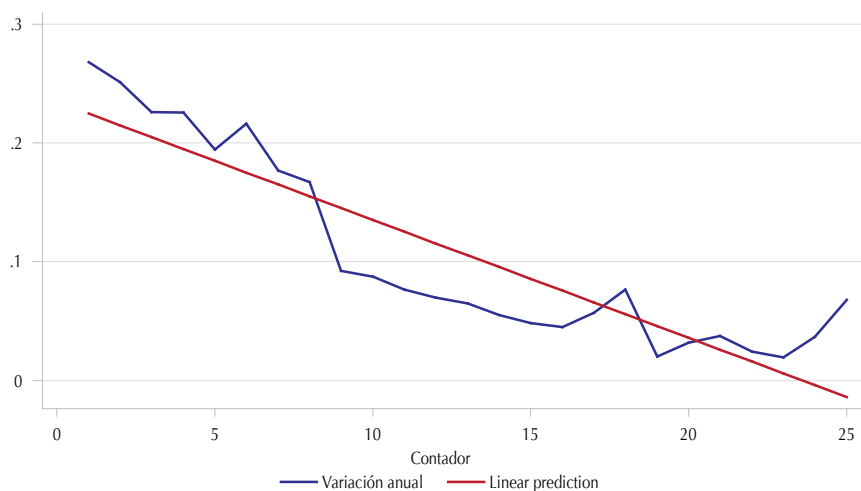
La segunda tendencia decreciente comprende el periodo de 1991 a 2015, donde en el último lapso de este periodo se observa un crecimiento leve. La varianza de este periodo es de 0,00668046, la inflación mínima de 0,0194, la máxima de 0,2682 y la inflación promedio de este periodo es 0,1054.



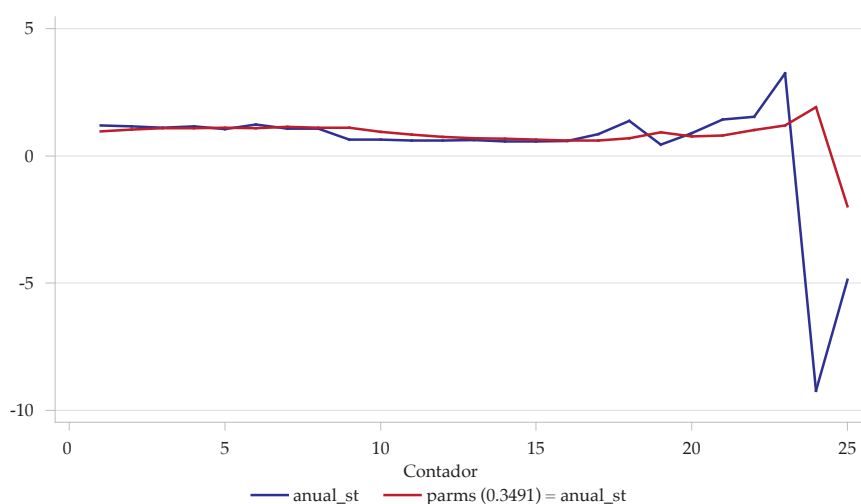
Se comprueba que hay un choque estructural por medio del estadístico Chow, teniendo en cuenta que se supone que el choque se da después de 1990. El estadístico de Chow es igual a 105,06 y el estadístico de prueba es igual a 4.003, lo que indica que hay un cambio estructural.



Para poder determinar la inflación de largo plazo se toma la segunda parte de la serie, que presenta tendencia negativa y que no tiene choques estructurales. Con esta serie se calcula la tendencia y el modelo ARIMA adecuado. La tendencia de la serie se calcula como una regresión simple de la inflación sobre la variable de tiempo. Como lo muestra la siguiente figura, la tendencia de la serie inflación sin choques estructurales es lineal negativa.

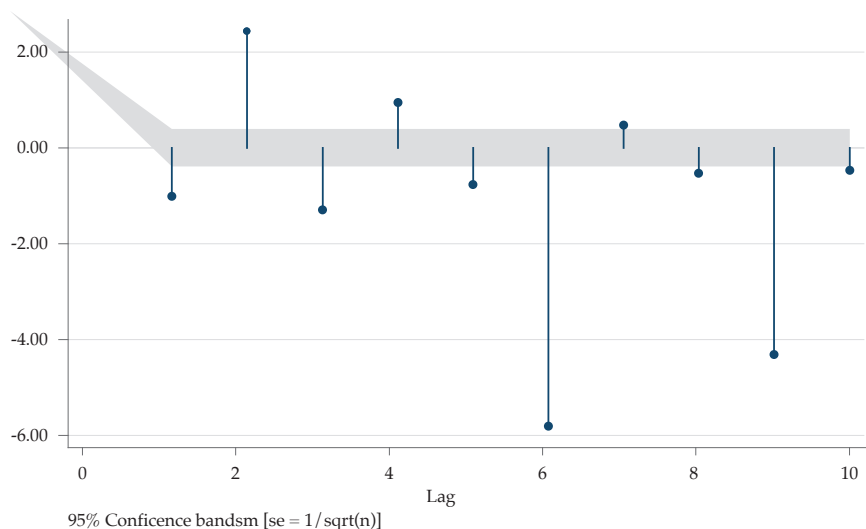


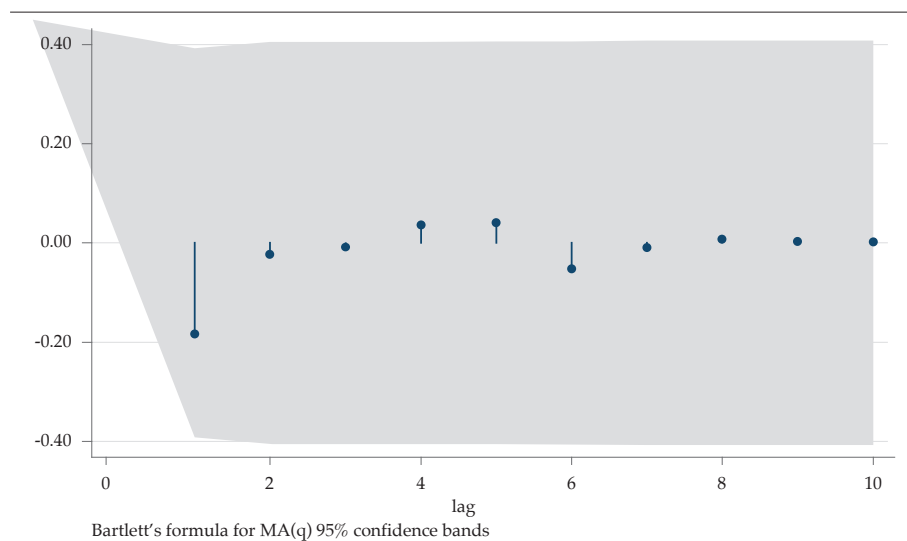
Por medio del método multiplicativo de descomposición de series de tiempo, a la serie original de inflación se le quita el componente de la tendencia para obtener lo que muestra la siguiente figura. Como se indica en ella, la serie de inflación sin tendencia tiene un comportamiento estable excepto en los tres últimos periodos. Para poder suavizar la serie en estos tres últimos periodos se utiliza el suavizamiento exponencial, que permite por medio de un parámetro alfa, minimizar las fluctuaciones de la serie y trabajar con una serie más estable. El parámetro alfa 0,3491 es que minimiza las fluctuaciones de la serie, que de igual forma se puede ver en la figura.



El estadístico Dickey Fuller de la serie suavizada de la inflación sin tendencia es igual a  $-4.438$ , lo cual indica que la serie es estacionaria y que es adecuado calcular el orden ARMA para con ello poder establecer el comportamiento de largo plazo de la variable inflación. Por medio de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, se establece que la serie en cuestión no tiene ni comportamiento autorregresivo ni de media móvil. No tiene comportamiento autorregresivo porque los valores de la función de autocorrelación parcial, aunque alternantes entre valores positivos y negativos, va disminuyendo con el tiempo y tal es el caso que en la auto correlación de orden 11 y siguientes son iguales a cero.

Con el orden de media móvil se tiene que los valores de la función de autocorrelación no son significativas en ningún periodo. Dado estos resultados, se calcula tres modelos iniciales y se establece su eficiencia en el pronóstico por medio del criterio de información Akaike y de la significancia estadística de cada uno de los parámetros.





Los modelos bases son ARMA (1,0), ARMA (0,1) y ARMA (1,1). Los resultados se presentan a continuación seguido por los criterios de información.

#### ARMA (1,0)

ssannual_st	OPG		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
ssannual_st _cons	.8828634	.1136449	7.77	0.000	.6601234	1.105603
<b>ARMA</b>						
ar L1.	-.7273789	.4040618	-1.80	0.072	-1.519325	.0645676
/sigma	.577428	.0911279	6.34	0.000	.3988206	.7560353
Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	25	.	-22.12086	3	50.24172	53.89835

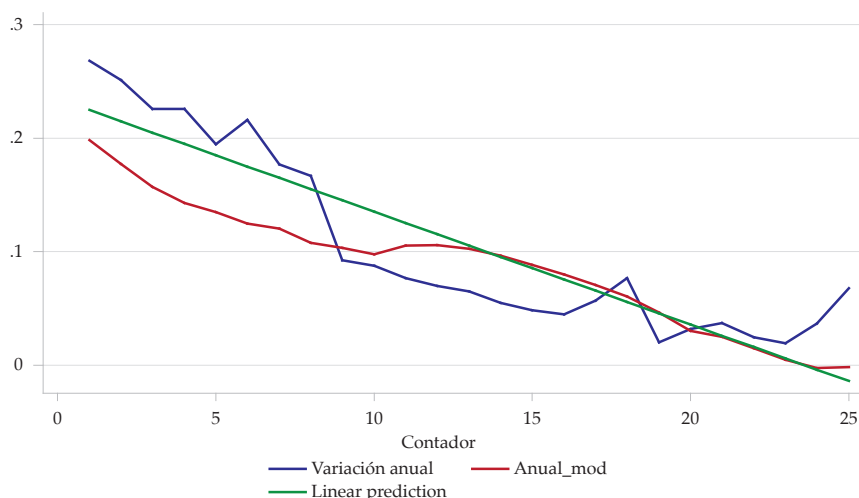
## ARMA (0,1)

ssannual_st	OPG		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
ssannual_st _cons	.8708205	.1493208	5.83	0.000	.578157	1.163484
ARMA						
ma L1.	-.4069557	.4337138	-0.94	0.348	-1.257019	.4431077
/sigma	.6006467	.1158487	5.18	0.000	.3735875	.8277059
Model						
	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	25	.	-22.82022	3	51.64045	55.29708

## ARMA (1,1)

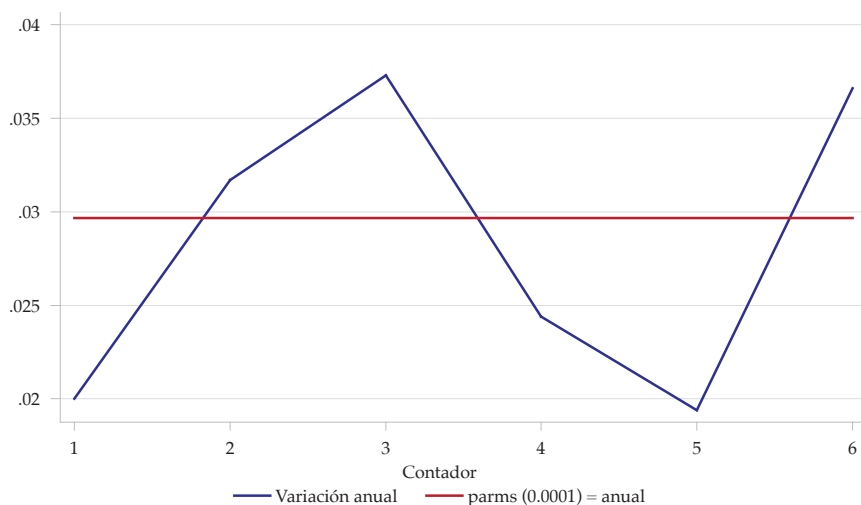
ssannual_st	OPG		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
ssannual_st _cons	.8823438	.1237326	7.13	0.000	.6398324	1.124855
ARMA						
ar L1.	-.7518385	.8938558	-0.84	0.400	-2.503764	1.000087
ma L1.	.031756	.8103987	0.04	0.969	-1.556596	1.620108
/sigma	.5769623	.093801	6.15	0.000	.3931157	.7608088
Model						
	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	25	.	-22.11682	4	52.23364	57.10915

Primero, es importante analizar el comportamiento de la constante en los tres modelos. La constante en los tres modelos se acerca a 0,88, indicando que el comportamiento de largo plazo de la inflación sin tendencia es de 0,88. Segundo, el mejor modelo por medio de los criterios de información es el ARMA (1,0). Con esto el modelo se calcula la serie de inflación modificada que se presenta en la siguiente figura junto con la inflación original y la tendencia.



Con los métodos utilizados de tendencia, de suavizamiento y de modelación ARMA, queda como conclusión que la serie tiene tendencia decreciente y que el comportamiento de largo plazo explicado por la constante de los modelos ARMA tiende a ser negativo. Por lo tanto, se hará un último ejercicio donde se toman los últimos valores de la inflación para poder estimar la inflación de largo plazo, que comprende la información anual de 2009 hasta 2014.

A pesar de que la serie presenta pocas observaciones, no es estacionaria, ya que el test Dickey Fuller es igual -2.203 y por lo tanto se debe diferenciar para que sea estacionaria. Como la serie tiene pocas observaciones, no permite calcular las funciones de autocorrelación parcial ni normal. El siguiente paso es suavizar la serie por medio de suavizamiento exponencial. El parámetro alfa de suavizamiento es 0,0001. La siguiente figura permite identificar que la serie suavizada se acerca a una inflación del 0,03.



Los modelos adicionales que se calculan son un ARMA(1,0), ARMA(0,1), ARMA(1,1) y ARMA(2,0).

#### ARMA (1,0)

anual	OPG		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
anual _cons	.0282278	.0024292	11.62	0.000	.0234667	.032989
ARMA ar L1.	-.2977354	1.015222	-0.29	0.769	-2.287534	1.692063
/sigma	.0070532	.0050575	1.39	0.082	0	.0169657
Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	6	.	21.16562	3	-36.33123	-36.95596

## ARMA (0,1)

anual	OPG		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
anual _cons	.0284107	.0010005	28.40	0.000	.0264497	.0303717
ARMA ma L1.	-1.000009	.	.	.	.	.
/sigma	.0048125	.0022279	2.16	0.015	.0004458	.0091791

## ARMA (1,1)

anual	OPG		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
anual _cons	.0284222	.0011875	23.94	0.000	.0260948	.0307496
ARMA ar L1.	-.077676	1.333568	-0.06	0.954	-2.691422	2.53607
ma L1.	-.9999827	23144.75	-0.00	1.000	-45363.88	45361.88
/sigma	.004746	54.92258	0.00	0.500	0	107.651

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	6	.	22.54869	4	-37.09738	-37.93035

## ARMA (2,0)

anual	OPG		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
anual _cons	.0288129	.0049127	5.87	0.000	.0191842	.0384415
ARMA ar L1.	-.2221273	1.237007	-0.18	0.857	-2.646617	2.202362
L2.	-.9870641	.1251882	-7.88	0.000	-1.232428	-.7416997
/sigma	.00117	.005799	0.20	0.420	0	.0125357

Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	6	.	28.32369	4	-48.64739	-49.48035



Con este último ejercicio y con los modelos adicionales estimados, se concluye que la inflación de largo plazo en Colombia es de 0,028.

### *Análisis de series de tiempo – Crecimiento Salarial*

Fuente: Banco de la República

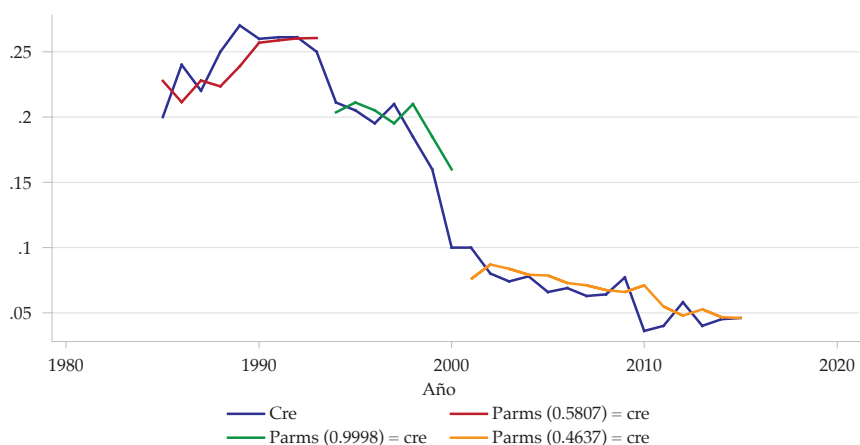
Tipo de frecuencia de los datos originales: Anual

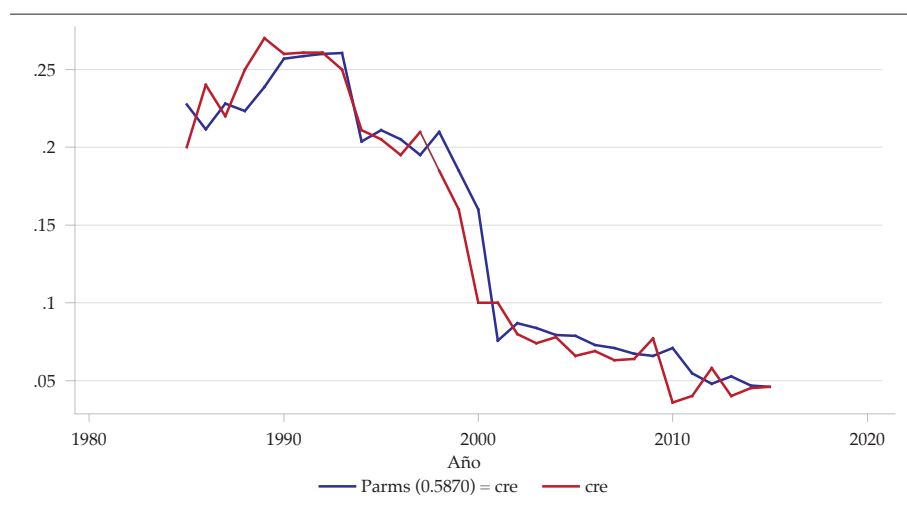
Lapso: 1984 -2015.

Tipo de frecuencia de los datos modificados: Anual, último mes de cada año. Se trabaja con la serie de Variación Anual.

Lapso: 1984 -2015.

Con la información disponible del crecimiento salarial, se observa que tiene dos tendencias. La primera tendencia entre 1984 y 1992 es positiva, seguida de la segunda tendencia decreciente del periodo 1993-2015. Pero en esta tendencia hay dos tipos de pendientes de la tendencia. La primera sub-tendencia de la segunda tendencia esta desde el periodo 1993-2000 y la segunda sub-tendencia se encuentra en el lapso comprendido entre 2001 y 2015. Es importante analizar la última parte de la serie que indica que el crecimiento salarial tiende a estabilizarse menos de 0,05.

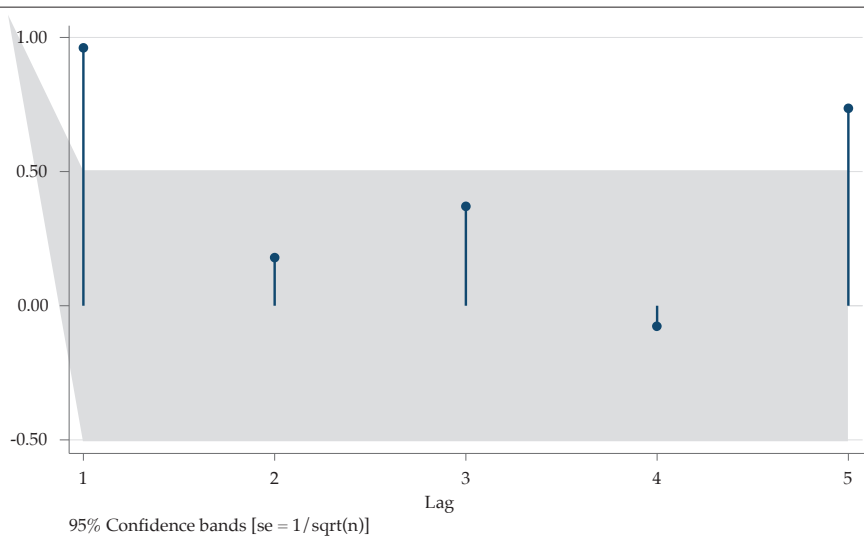
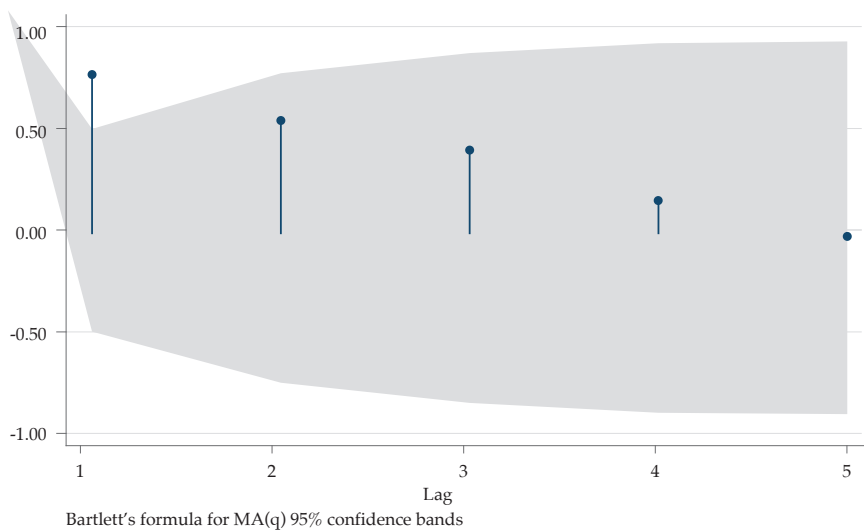




Para comprobar el primer choque estructural se realiza el estadístico de Chow obteniendo como resultado un estadístico igual a 18,81 y un estadístico de región de rechazo igual a 4,17. Se puede concluir que la serie presenta un choque estructural en dicho periodo. Como se indicó anteriormente, la segunda tendencia presenta dos tendencias que se diferencian por las pendientes. Al momento de calcular el estadístico Chow de esta segunda tendencia, da un valor de 42,19 y un estadístico de rechazo igual a 4,66. Por lo tanto, también se presenta un segundo choque en el año 2000.

En cada uno de los choques se utilizan diferentes parámetros de suavizamiento. En el primer choque el parámetro de suavizamiento es de 0,5807, el parámetro del segundo choque es de 0,9998 y el parámetro del tercer choque es de 0,4637. Una vez se juntan todas las series suavizadas, se construyen la serie consolidada suavizada, que se puede observar en los gráficos anteriores.

Con la información después del tercer choque, se calcula si la serie es estacionaria. El test Dickey Fuller es igual a -6,013, lo que confirma que la serie es estacionaria y lo que permite calcular las funciones de autocorrelación normal y parcial para el modelo ARMA. La función de autocorrelación indica que la serie no cuenta con un modelamiento MA, mientras que con la función de autocorrelación parcial el orden adecuado es el AR(1).



El modelo base a calcular es un ARMA(1,0) y se calculan modelos adicionales para poder comparar los criterios de información y confirmar los resultados.

## ARMA (1,0)

ssc_cre	OPG		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
ssc_cre _cons	.0635988	.0120431	5.28	0.000	.0399948	.0872027
ARMA						
ar L1.	.8925985	.170848	5.22	0.000	.5577427	1.227454
/sigma	.0064127	.0010642	6.03	0.000	.0043268	.0084986
Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	15	.	53.66087	3	-101.3217	-99.19759

## ARMA (1,1)

ssc_cre	OPG		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
ssc_cre _cons	.0636516	.0115281	5.52	0.000	.041057	.0862463
ARMA						
ar L1.	.8721777	.2501147	3.49	0.000	.3819619	1.362394
ma L1.	.0788225	.393145	0.20	0.841	-.6917276	.8493726
/sigma	.0064108	.00114	5.62	0.000	.0041763	.0086452
Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	15	.	53.67803	4	-99.35607	-96.52387

## ARMA (2,0)

ssc_cre	OPG		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
ssc_cre						
_cons	.0636326	.011678	5.45	0.000	.0407442	.0865209
ARMA						
ar						
L1.	.934093	.2926068	3.19	0.001	.3605941	1.507592
L2.	-.0497299	.3463917	-0.14	0.886	-.7286452	.6291855
/sigma	.0064116	.0011387	5.63	0.000	.0041798	.0086434
Model	Obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	15	.	53.67386	4	-99.34772	-96.51552

La significancia de los estimadores de los modelos ARMA (1,1) y ARMA (2,0) permiten establecer que no son significativos y de igual manera, los criterios de información permiten identificar que el mejor modelo es el ARMA(1,0).

Se concluye que el crecimiento salarial de largo plazo en Colombia es del 0,063.

### *Análisis de series de tiempo – Tasa de rentabilidad de los Fondos Privados de Pensiones*

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia

Tipo de frecuencia de los datos originales: Anual

Lapso: 1994 - 2015.

Tipo de frecuencia de los datos modificados: Se construyó la tasa de interés ponderada de los diferentes fondos de pensiones según su participación en el total de los fondos pensionales.

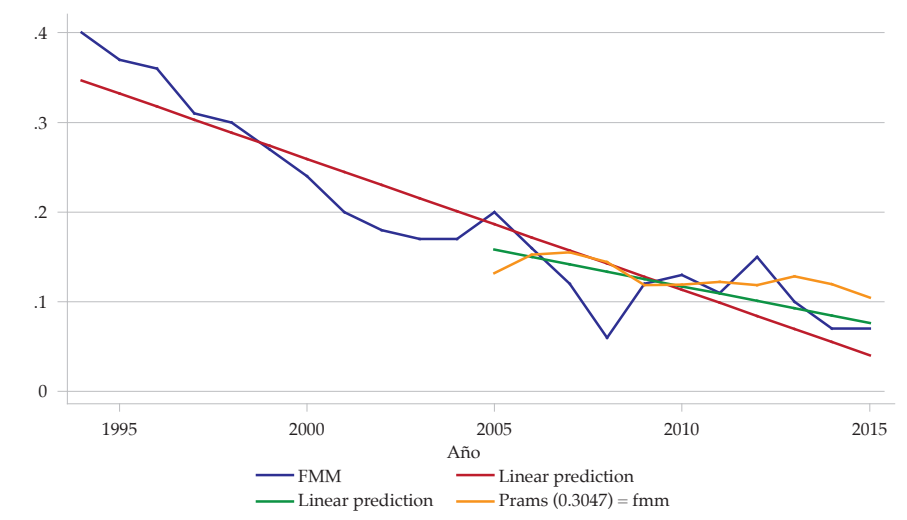
Lapso: 1994 - 2015.

Es importante analizar la construcción de la variable de la tasa de interés de los fondos privados de pensiones. La construcción de esta variable se hace según las tasas de rentabilidad de cada uno de los fondos ponderada por la

participación del fondo sobre el total de los recursos financieros de los fondos pensionales.

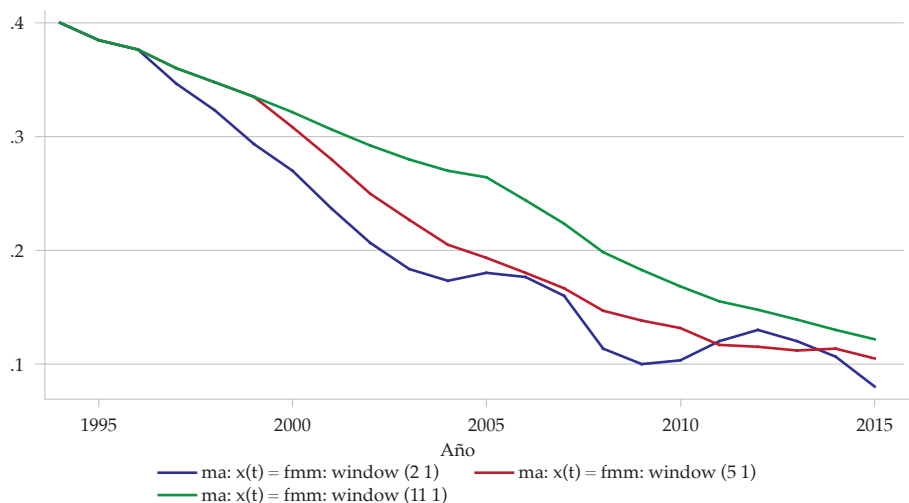
Así los cálculos, la siguiente figura muestra la serie de interés ponderada junto con la tendencia del conjunto total de datos, la tendencia desde el periodo 2005 hasta el 2015 y la serie suavizada con un parámetro alfa igual a 0,3047 desde el periodo 2005 hasta el 2015. Todas las series presentan tendencia decreciente.

Al momento de analizar la estacionariedad de la serie, el estadístico Dickey Fuller es igual a -1.814, lo que indica que la serie no es estacionaria, y el resultado es claro porque la serie presenta una tendencia exponencial decreciente, ya que sus primeros valores son cercanos a 0,40, mientras que los finales son iguales a 0,07. La tasa de interés ha decrecido 0,33 puntos en 20 años.

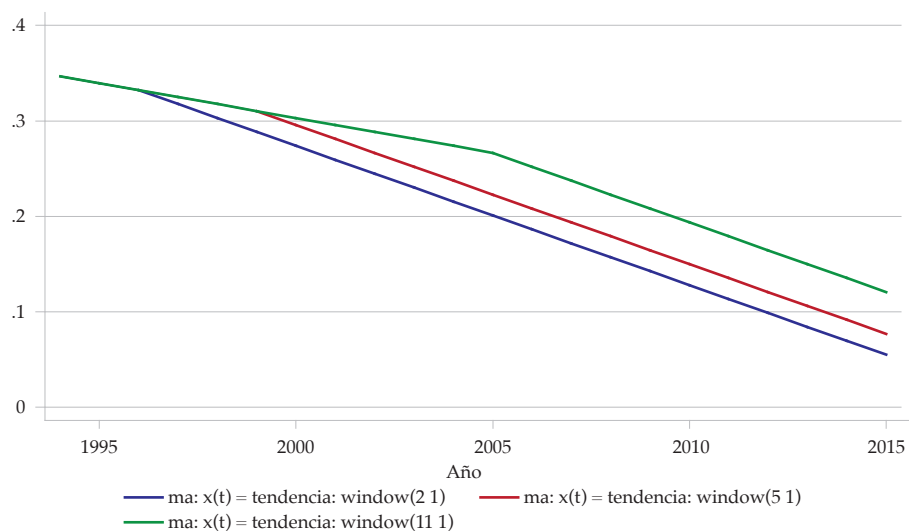


Las tres tendencias tienden a comportarse por debajo del 0,1 pero con los modelos ARMA no es posible calcular el comportamiento porque las funciones de autocorrelación parcial y normal no son significativas en ninguna de las tres tendencias.

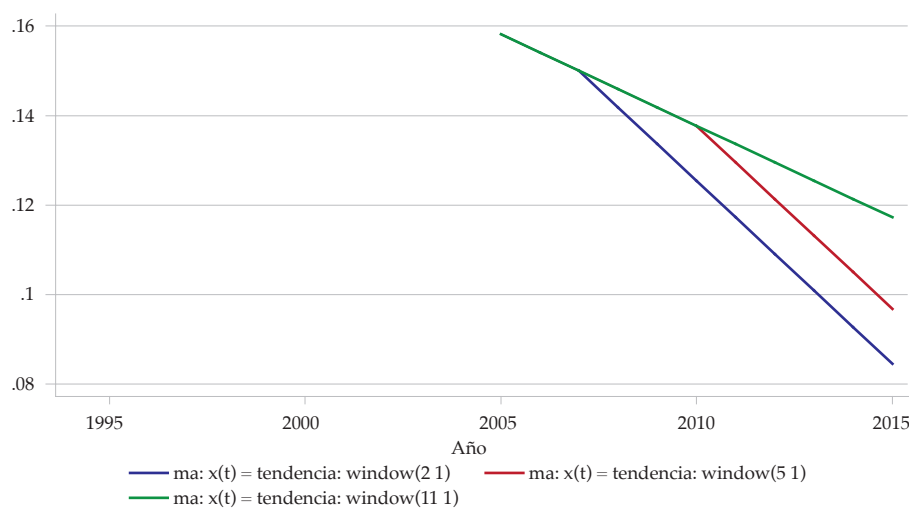
Como herramienta adicional, se utiliza los promedios móviles sobre la variable original de la tasa de interés y con esta se obtiene que, con un promedio móvil de orden tres, el comportamiento de largo plazo de la tasa de interés es 0,08 y su ECM es igual a 0,0006663, con un promedio de orden 6 la tasa de largo plazo es de 0,105 con un ECM igual a 0,0020417 y con un promedio de orden 12, la tasa de largo plazo es de 0,1216 con un ECM igual a 0,0053805. Con el criterio de ECM se toma el orden 3 como referencia y el comportamiento de largo plazo sería 0,08.



Con la serie de la tendencia de la tasa de interés se calculan los mismos ordenes de la media móvil. Con el orden 3, el comportamiento de largo plazo es 0,055 con un CME igual a 0,0001956; con el orden 6, el comportamiento de largo plazo es 0,077 con un CME igual a 0,001099 y finalmente con el orden 12, el comportamiento de largo plazo es de 0,1207 con un CME igual a 0,0041449. El criterio CME permite identificar que, con esta serie, la media móvil es la del orden 3 y que por lo tanto el comportamiento de largo plazo sería 0,055.

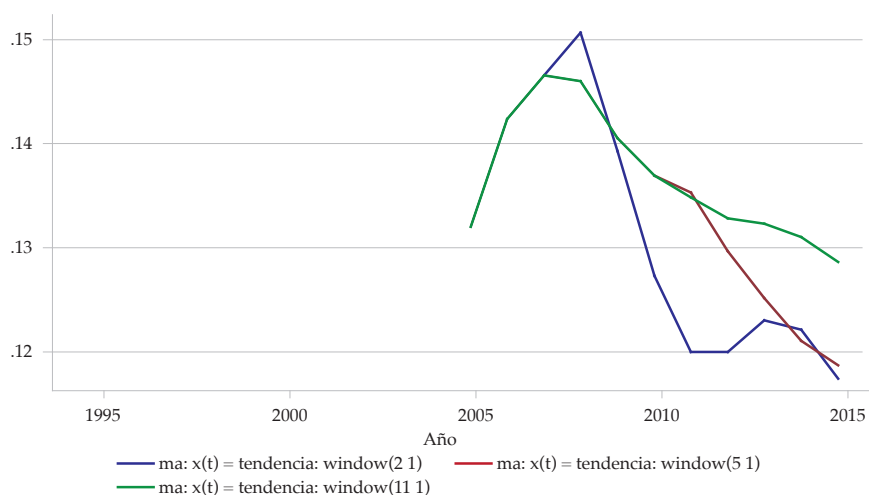


Con la serie de la tendencia después de 2005 de la tasa de interés se calculan mismos ordenes de la media móvil. Con el orden 3, el comportamiento de largo plazo es 0,0845 con un CME igual a 0,0000563; con el orden 6, el comportamiento de largo plazo es 0,0968 con un CME igual a 0,0002739 y finalmente con el orden 12, el comportamiento de largo plazo es de 0,1172 con un CME igual a 0,0005857. El criterio CME permite identificar que, con esta serie, la media móvil es la del orden 3 y que por lo tanto el comportamiento de largo plazo sería 0,0845.



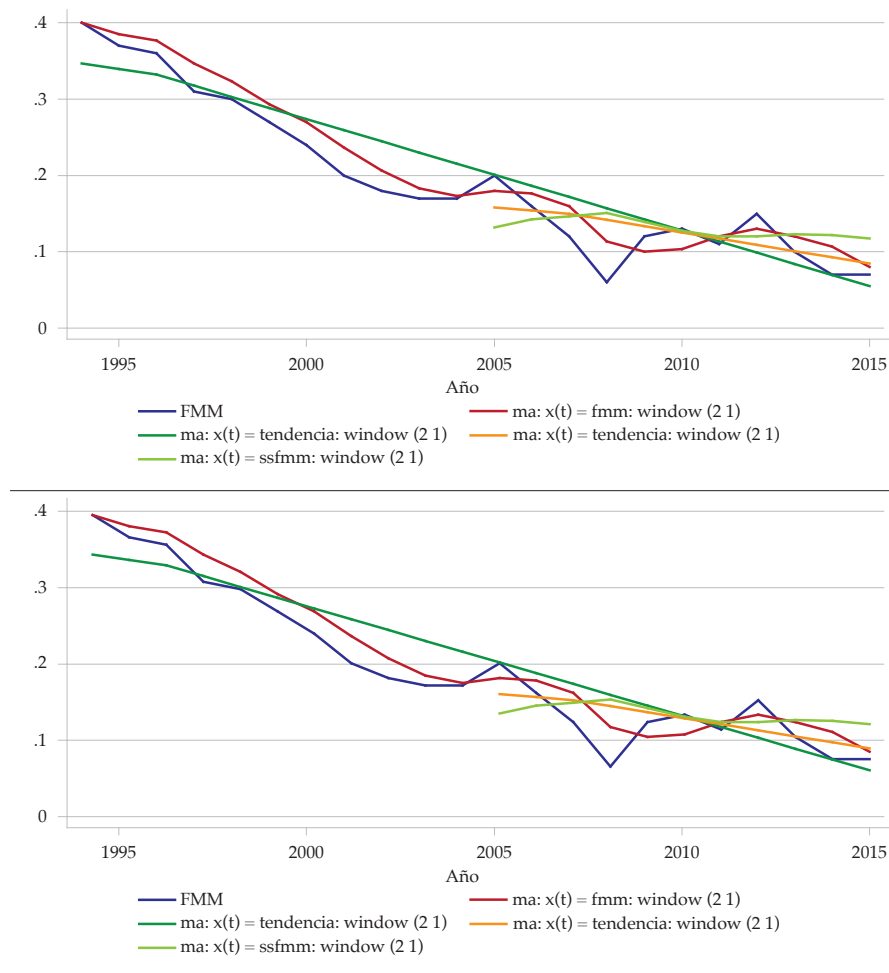
Con la serie de la serie suavizadas después de 2005 de la tasa de interés se calculan mismos ordenes de la media móvil. Con el orden 3, el comportamiento de largo plazo es 0,117 con un CME igual a 0,0000838; con el orden 6, el comportamiento de largo plazo es 0,118 con un CME igual 0,0001349 y finalmente con el orden 12, el comportamiento de largo plazo es de 0,128 con un CME igual a 0,0001881. El criterio CME permite identificar que, con esta serie, la media móvil es la del orden 3 y que por lo tanto el comportamiento de largo plazo sería 0,117.





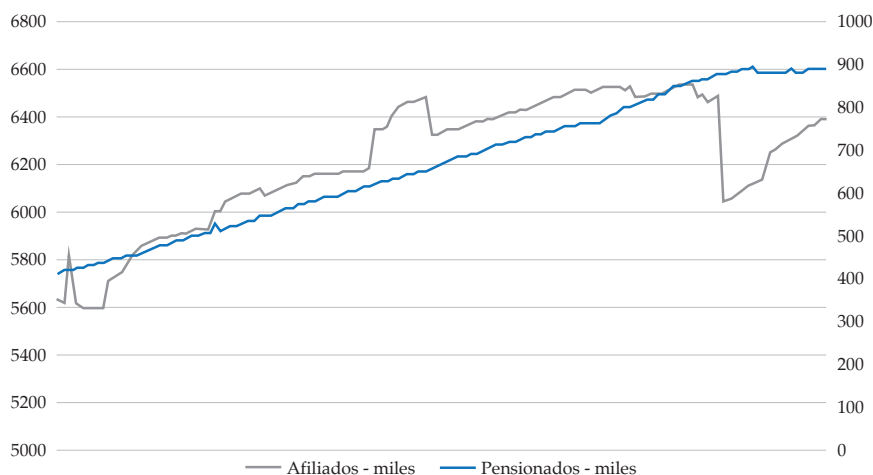
Cuando se comparan los CME de las series anteriores, se concluye que la serie que presenta el menor CME es la serie suavizada después del 2005. Por lo tanto, se tomará como la tasa de interés de largo plazo a 0,117.

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
dmm_fmnn	22	.0006663	.0006767	0	.0028444
dmm_tenden~a	22	.0001956	.0000553	0	.0002126
dmm_tenden~d	11	.0000563	.000024	0	.0000669
dmm_ssfnm	11	.0000838	.0001253	0	.0004274
Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
fmnn	22	.1936364	.101819	.06	.4
mm_fmnn	22	.2084091	.1039237	.08	.4
mm_tendencia	22	.2072217	.0930899	.0551327	.3467194
mm_tendenc~d	11	.1243388	.0254881	.0845455	.1581818
mm_ssfnm	11	.1309764	.0118697	.1174109	.1506511



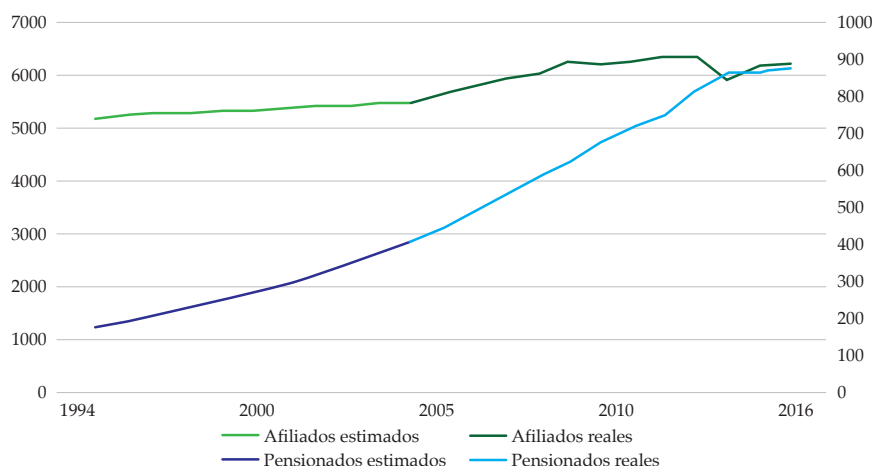
## Apéndice D. Análisis de la variable de afiliados y pensionados del esquema de PM

Por medio del número de afiliados y pensionados del esquema de PM se estima la tasa de decrecimiento a la cual se deben descontar los afiliados y pensionados actuales para completar la serie de tiempo para el lapso en el cual no se encuentra información. La información de afiliados y pensionados del esquema de PM se encuentra entre diciembre de 2004 y junio de 2016, y el propósito del ejercicio de estimación es completar la serie hasta diciembre de 1993. La siguiente figura muestra el comportamiento histórico mensual tanto de afiliados como de pensionados en el lapso donde se cuenta con datos reales.



Como lo muestra la figura, ambas variables tienen tendencia creciente, pero tiene mayor varianza en las tasas de crecimiento la variable de afiliados. Por medio de suavizamiento exponencial, se estima el parámetro que minimice el Cuadrado Medio debido al Error de las tasas de decrecimiento de las variables de afiliados y pensionados.

El parámetro que suaviza y minimiza el error de la variable de afiliados es 0.0035 y permite calcular una tasa de decrecimiento de -0,04 %. El parámetro que suaviza y minimiza el error de la variable de pensionados es 0,044 y permite calcular una tasa de decrecimiento de -0,69 %. Con estos valores, se estima los pensionados y afiliados para el lapso 1994-2003, los cuales se muestran en la siguiente figura.



Como lo muestra la figura, tiene mayor pendiente el número de pensionados que el de afiliados y una de las razones es el envejecimiento de la población colombiana. Con este ejercicio se estimó los afiliados y pensionados y así tener información completa para el periodo 1994-2016.

## Apéndice E. Tablas de los cálculos de la modelación del esquema de CI

**Tabla 1.** Salarios recomendables tanto para hombres como para mujeres entre 1994 – 2016 con los diferentes escenarios estudiados para el esquema de CI

Año	Escenario uno		Escenario dos		Escenario tres	
	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer
	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM
1994	\$508.497,17	\$1.121.775,50	\$281.482,67	\$557.663,09	\$686.880,02	\$1.534.710,48
1995	\$533.922,03	\$1.177.864,27	\$299.216,08	\$592.795,87	\$714.355,23	\$1.596.098,90
1996	\$560.618,14	\$1.236.757,49	\$318.066,69	\$630.142,01	\$742.929,43	\$1.659.942,85
1997	\$588.649,04	\$1.298.595,36	\$338.104,89	\$669.840,95	\$772.646,61	\$1.726.340,57
1998	\$618.081,49	\$1.363.525,13	\$359.405,50	\$712.040,93	\$803.552,48	\$1.795.394,19
1999	\$648.985,57	\$1.431.701,39	\$382.048,05	\$756.899,51	\$835.694,58	\$1.867.209,96
2000	\$681.434,85	\$1.503.286,46	\$406.117,07	\$804.584,18	\$869.122,36	\$1.941.898,35
2001	\$715.506,59	\$1.578.450,78	\$431.702,45	\$855.272,98	\$903.887,25	\$2.019.574,29
2002	\$751.281,92	\$1.657.373,32	\$458.899,70	\$909.155,18	\$940.042,74	\$2.100.357,26
2003	\$788.846,01	\$1.740.241,98	\$487.810,38	\$966.431,96	\$977.644,45	\$2.184.371,55
2004	\$828.288,32	\$1.827.254,08	\$518.542,44	\$1.027.317,17	\$1.016.750,23	\$2.271.746,41
2005	\$869.702,73	\$1.918.616,79	\$551.210,61	\$1.092.038,15	\$1.057.420,24	\$2.362.616,27
2006	\$913.187,87	\$2.014.547,63	\$585.936,88	\$1.160.836,56	\$1.099.717,05	\$2.457.120,92
2007	\$958.847,26	\$2.115.275,01	\$622.850,90	\$1.233.969,26	\$1.143.705,73	\$2.555.405,76
2008	\$1.006.789,62	\$2.221.038,76	\$662.090,51	\$1.311.709,32	\$1.189.453,96	\$2.657.621,99
2009	\$1.057.129,11	\$2.332.090,70	\$703.802,21	\$1.394.347,01	\$1.237.032,12	\$2.763.926,87
2010	\$1.109.985,56	\$2.448.695,23	\$748.141,75	\$1.482.190,87	\$1.286.513,40	\$2.874.483,94
2011	\$1.165.484,84	\$2.571.129,99	\$795.274,68	\$1.575.568,90	\$1.337.973,94	\$2.989.463,30
2012	\$1.223.759,08	\$2.699.686,49	\$845.376,99	\$1.674.829,74	\$1.391.492,90	\$3.109.041,83
2013	\$1.284.947,04	\$2.834.670,82	\$898.635,74	\$1.780.344,01	\$1.447.152,61	\$3.233.403,50
2014	\$1.349.194,39	\$2.976.404,36	\$955.249,79	\$1.892.505,68	\$1.505.038,72	\$3.362.739,64
2015	\$1.416.654,11	\$3.125.224,58	\$1.015.430,53	\$2.011.733,54	\$1.565.240,27	\$3.497.249,23
2016	\$1.487.486,81	\$3.281.485,80	\$1.079.402,65	\$2.138.472,75	\$1.627.849,88	\$3.637.139,20

Año	Escenario cuatro		Escenario quinto	
	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer
	SIM	SIM	SIM	SIM
1994	\$826.149,94	\$1.938.161,89	\$569.150,93	\$1.214.313,89
1995	\$859.195,94	\$2.015.688,37	\$591.916,97	\$1.262.886,44
1996	\$893.563,78	\$2.096.315,90	\$615.593,65	\$1.313.401,90
1997	\$929.306,33	\$2.180.168,54	\$640.217,39	\$1.365.937,98
1998	\$966.478,58	\$2.267.375,28	\$665.826,09	\$1.420.575,50
1999	\$1.005.137,73	\$2.358.070,29	\$692.459,13	\$1.477.398,52
2000	\$1.045.343,24	\$2.452.393,10	\$720.157,50	\$1.536.494,46
2001	\$1.087.156,97	\$2.550.488,83	\$748.963,80	\$1.597.954,23
2002	\$1.130.643,25	\$2.652.508,38	\$778.922,35	\$1.661.872,40
2003	\$1.175.868,98	\$2.758.608,71	\$810.079,24	\$1.728.347,30
2004	\$1.222.903,73	\$2.868.953,06	\$842.482,41	\$1.797.481,19
2005	\$1.271.819,88	\$2.983.711,19	\$876.181,71	\$1.869.380,44
2006	\$1.322.692,68	\$3.103.059,63	\$911.228,98	\$1.944.155,66
2007	\$1.375.600,39	\$3.227.182,02	\$947.678,14	\$2.021.921,88
2008	\$1.430.624,40	\$3.356.269,30	\$985.585,26	\$2.102.798,76
2009	\$1.487.849,38	\$3.490.520,07	\$1.025.008,67	\$2.186.910,71
2010	\$1.547.363,35	\$3.630.140,87	\$1.066.009,02	\$2.274.387,14
2011	\$1.609.257,89	\$3.775.346,51	\$1.108.649,38	\$2.365.362,62
2012	\$1.673.628,20	\$3.926.360,37	\$1.152.995,35	\$2.459.977,13
2013	\$1.740.573,33	\$4.083.414,78	\$1.199.115,17	\$2.558.376,21
2014	\$1.810.196,26	\$4.246.751,38	\$1.247.079,78	\$2.660.711,26
2015	\$1.882.604,11	\$4.416.621,43	\$1.296.962,97	\$2.767.139,71
2016	\$1.957.908,28	\$4.593.286,29	\$1.348.841,49	\$2.877.825,30

**Tabla 2.** Costo fiscal del esquema de CI que funciona de forma paralela con el esquema de PM con los diferentes escenarios (Primera parte)

Año	Primera modelación		Segunda modelación	
	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer
1994	133.902.852.211	74.235.908.414	133.902.852.211	165.059.984.129
1995	205.066.448.017	124.321.275.310	205.066.448.017	283.619.715.165
1996	222.534.255.078	133.613.736.308	222.534.255.078	314.864.955.467
1997	278.926.152.033	171.900.232.074	221.139.810.005	366.554.790.841
1998	298.153.821.668	187.919.224.639	208.516.275.717	389.181.276.345
1999	337.761.936.334	211.323.540.625	195.402.388.835	424.258.151.713
2000	393.888.645.822	258.948.615.390	228.359.937.234	511.315.222.935
2001	430.022.148.714	299.166.686.903	244.415.945.998	580.805.953.539
2002	454.549.957.019	316.565.578.247	454.549.957.019	609.913.138.114
2003	519.094.258.803	365.151.156.818	519.094.258.803	700.313.663.157
2004	602.774.691.306	427.091.149.601	602.774.691.306	815.224.857.182
2005	709.143.093.291	503.748.966.044	709.143.093.291	961.591.778.609
2006	913.082.414.993	632.959.175.304	913.082.414.993	1.204.761.360.354
2007	1.027.593.211.263	744.752.809.119	1.027.593.211.263	1.411.271.160.938
2008	1.072.987.138.091	788.512.597.353	1.072.987.138.091	1.487.141.316.093
2009	1.239.631.993.943	924.092.051.033	1.239.631.993.943	1.740.101.171.783
2010	1.497.857.007.665	1.109.443.334.540	1.497.857.007.665	2.119.187.796.536
2011	2.854.433.278.523	906.074.267.071	1.255.391.017.373	4.354.681.765.040
2012	3.242.626.735.288	1.063.759.640.986	1.464.249.504.547	5.049.333.731.191
2013	1.185.204.323.823	871.793.697.266	1.185.204.323.823	5.938.255.628.807
2014	1.810.657.647.688	1.310.982.870.512	1.810.657.647.688	7.235.404.187.208
2015	2.104.555.013.302	1.541.427.785.242	2.104.555.013.302	8.289.362.716.491
	21.534.447.024.875	12.967.784.298.798	17.516.109.186.204	44.952.204.321.634
Total	34.502.231.323.673		62.468.313.507.838	

**Tabla 3.** Costo fiscal del esquema de CI que funciona de forma paralela con el esquema de PM con los diferentes escenarios (Segunda parte)

Año	Tercera modelación		Cuarta modelación		Quinta modelación	
	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer
1994	417.251.158.979	652.062.193.143	542.965.056.465	854.776.582.153	383.872.107.690	491.616.853.012
1995	654.816.300.643	1.185.631.904.628	867.686.511.461	1.567.661.862.235	614.112.904.796	883.435.129.083
1996	725.014.288.275	1.402.165.905.293	992.099.829.611	1.870.111.330.913	701.617.627.940	1.032.844.532.064
1997	768.012.981.029	1.713.182.590.920	1.103.193.019.060	2.315.761.067.065	773.517.524.620	1.239.987.779.372
1998	827.009.017.095	1.975.594.548.132	1.159.080.116.012	2.714.868.577.572	904.707.040.594	1.386.900.231.186
1999	896.566.530.493	2.354.129.718.664	1.287.430.946.935	3.249.343.561.217	1.050.551.654.783	1.658.754.867.241
2000	980.528.885.919	2.882.242.041.088	1.443.032.268.139	4.005.834.200.868	1.214.423.555.566	2.017.248.662.654
2001	999.501.703.474	3.340.830.190.375	1.620.192.857.210	4.671.648.517.049	1.318.905.057.438	2.318.483.149.682
2002	981.721.330.847	3.459.310.592.208	1.635.266.028.200	4.856.652.503.615	1.366.259.586.569	2.388.500.241.280
2003	1.037.503.641.574	3.896.425.352.059	1.778.108.582.408	5.486.936.514.329	1.517.531.289.141	2.675.614.630.470
2004	1.105.571.724.854	4.451.892.835.315	1.964.684.919.625	6.288.036.118.148	1.723.488.630.853	3.042.244.656.867
2005	1.191.202.945.906	5.069.537.074.226	2.183.213.290.608	7.177.378.989.357	1.946.740.642.096	3.448.938.861.560
2006	1.389.183.190.260	6.219.437.886.747	2.653.065.536.084	8.847.634.664.933	2.414.435.490.164	4.199.106.550.095
2007	1.387.052.078.199	7.237.188.432.381	2.814.853.367.940	10.280.857.586.033	2.536.234.451.631	4.794.090.841.731
2008	1.256.099.775.391	7.503.921.335.463	2.755.367.465.630	10.737.027.419.898	2.457.352.331.212	4.864.956.583.387
2009	1.256.386.392.725	8.511.417.370.477	2.957.785.083.433	12.203.489.206.099	2.795.264.453.603	5.534.598.402.211
2010	1.464.398.113.609	9.426.194.360.453	3.325.563.587.488	13.498.677.576.551	3.199.799.465.090	6.142.017.892.717

Año	Tercera modelación		Cuarta modelación		Quinta modelación	
	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer
2011	4.415.454.367.089	11.986.287.799.425	6.273.636.538.994	11.936.376.357.505	2.845.692.162.129	8.576.291.080.070
2012	4.876.637.582.209	13.391.139.997.394	6.938.947.715.673	13.322.747.782.059	3.121.787.165.223	9.569.208.588.950
2013	5.500.235.374.643	15.058.996.793.818	7.791.807.939.829	14.978.420.340.859	3.548.993.180.171	10.768.356.036.322
2014	6.507.290.801.702	17.204.832.287.722	9.094.749.168.646	17.122.455.926.625	4.303.647.813.731	12.396.564.079.164
2015	7.075.599.267.622	19.070.828.170.931	9.918.270.306.561	18.975.030.308.045	4.649.999.594.940	13.719.528.895.685
	45.713.037.452.538	147.993.249.380.859	71.101.000.136.011	176.961.726.993.126	45.388.933.729.981	103.149.288.544.802
Total	193.706.286.833.397		248.062.727.129.137		148.538.222.274.784	



## Apéndice F. Tablas de la modelación del esquema PM

**Tabla 4.** Costo fiscal en el esquema de PM funciona de manera paralela con el esquema CI en los diferentes escenarios estimados (Primera parte)

Año	Afiliados	Pensionados	Primera Modelación	Segunda Modelación
			Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado
2004	398.640.904.640	398.230.250.000	413.221.232	414.658.523
2005	438.582.349.520	349.879.372.500	795.337.431.622	808.360.650.255
2006	479.175.110.400	411.416.592.000	1.806.921.490.660	1.881.426.519.762
2007	519.271.022.368	482.518.139.400	2.677.049.330.143	2.861.357.249.737
2008	554.405.635.680	549.990.317.500	3.146.715.920.887	3.484.522.262.525
2009	586.757.805.920	647.134.733.600	2.978.874.979.162	3.495.182.477.636
2010	617.687.868.800	714.708.760.000	2.344.276.496.071	3.043.331.088.874
2011	662.326.730.624	798.011.328.400	1.009.492.425.406	1.868.711.561.863
2012	717.148.513.392	880.055.631.600	-814.260.828.878	154.144.454.873
2013	794.380.489.200	994.175.244.000	-3.127.976.439.828	-2.126.753.813.219
2014	802.411.850.240	1.101.102.464.000	-6.433.239.899.154	-5.519.204.819.862
2015	895.454.535.248	1.154.516.045.550	-11.957.272.492.549	-11.347.079.323.761

**Tabla 5.** Costo fiscal en el esquema de PM funciona de manera paralela con el esquema CI en los diferentes escenarios estimados (Segunda parte)

Año	Afiliados	Pensionados	Tercera Modelación	Cuarta Modelación	Quinta Modelación
			Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado	Costo fiscal Acumulado
2004	398.640.904.640	398.230.250.000	412.707.913	412.365.701	413.050.125
2005	438.582.349.520	349.879.372.500	790.736.990.662	787.684.748.240	793.801.001.174
2006	479.175.110.400	411.416.592.000	1.781.138.452.535	1.764.185.140.145	1.798.279.708.641
2007	519.271.022.368	482.518.139.400	2.614.617.790.734	2.573.946.307.415	2.656.046.431.043
2008	554.405.635.680	549.990.317.500	3.034.922.907.855	2.962.825.854.557	3.108.956.212.516
2009	586.757.805.920	647.134.733.600	2.812.615.271.395	2.706.658.545.937	2.922.454.483.972
2010	617.687.868.800	714.708.760.000	2.126.416.814.047	1.989.554.320.798	2.269.929.084.247
2011	662.326.730.624	798.011.328.400	752.607.299.521	594.199.604.434	921.195.753.990
2012	717.148.513.392	880.055.631.600	-1.087.932.054.667	-1.252.325.025.900	-909.263.696.054
2013	794.380.489.200	994.175.244.000	-3.388.176.849.415	-3.538.052.268.695	-3.219.693.500.983
2014	802.411.850.240	1.101.102.464.000	-6.635.914.181.298	-6.742.165.283.470	-6.506.963.008.708
2015	895.454.535.248	1.154.516.045.550	-12.027.054.793.344	-12.040.668.580.287	-11.987.662.604.707

