IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH
ISSN: 2007-4336
ISSN: 2448-8550
revista@rediech.org
Red de Investigadores Educativos Chihuahua A. C.
México

Bojórquez Gutiérrez, Karla; González-Quiñones, Fidel; Tarango, Javier

Tipificación de patrones en razonamiento covariacional en estudiantes de nuevo ingreso en la carrera de ingeniería

IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, vol. 12, e1173, 2021, Enero-Diciembre
Red de Investigadores Educativos Chihuahua A. C.
Chihuahua, México

DOI: https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v12i0.1173 revista de investigación educativa de la Rediech

REDIECH Red de Investigadores Educativos CHIHUAHUA

• Volumen 12 • 2021 • e1173 • ISSN: 2448-8550 •

Tipificación de patrones en razonamiento covariacional en estudiantes de nuevo ingreso en la carrera de ingeniería

Typification of covariational reasoning patterns in engineering degree new students

Karla Bojórquez Gutiérrez
Fidel González-Quiñones
Javier Tarango

Resumen

Este artículo plantea como objetivo el análisis del nivel de razonamiento covariacional en los estudiantes de nuevo ingreso en la carrera de ingeniería de una institución pública de nivel superior, presentando para ello los datos provenientes de una investigación con una muestra de 215 estudiantes bajo un enfoque mixto y no-experimental transeccional, quienes respondieron un instrumento de medición adaptado de otros instrumentos previamente validados por sus autores. La naturaleza del estudio permitió obtener calificaciones de cada estudiante provenientes del acierto o error en la interpretación de la variabilidad de los conceptos analizados, pero también muestra una interpretación cualitativa de las razones para la elección de su respuesta, haciendo posible una interpretación más completa sobre los resultados de la prueba aplicada, la cual permitió clasificar a los sujetos participantes en el estudio en cinco diferentes niveles de razonamiento, dando pie a identificar consistencias entre la manera en que se justifica la selección de cada gráfica, así como la condición alcanzada y presentada sobre el nivel de razonamiento covariacional, mostrando como hallazgo una coordinación robusta.

Palabras clave: razonamiento covariacional, correlación, cálculo, proceso de razonamiento, educación matemática, estudiantes universitarios.

Abstract

The goal of this article is to analyze the level of covariational reasoning in new students in the engineering career of a public higher education institution, presenting data that comes from a research with a sample of 215 students under a non-experimental, cross-sectional mixed approach, they answered a measurement instrument adapted from other instruments previously validated by their authors. The nature of the study allowed obtaining grades from each student based on the success or error in the interpretation of the variability of the concepts analyzed, but also shows a qualitative interpretation of the reasons for choosing their answer, making possible a more complete interpretation of the results of the applied test, which allowed to classify the subjects participating in the study in five different levels of reasoning and lead to identify consistencies between the way in which the selection of each graph is justified, as well as the condition reached and presented on the level of covariational reasoning, which shows a robust coordination as a finding.

Keywords: covariational reasoning, correlation, calculus, reasoning process, mathematics education, university students.

Recibido: enero 25 de 2021 | *Aprobado:* diciembre 17 de 2021 | *Publicado:* diciembre 20 de 2021
DOI: https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v12i0.1173

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 12 • 2021 • e1173 • ISSN: 2448-8550

Introducción

La enseñanza del cálculo en general y el concepto de derivada en particular, constituyen una parte fundamental en los cursos de educación superior orientados a la ingeniería. El concepto de derivada es uno de los principales a estudiar y desarrollar dentro de los programas en las asignaturas correspondientes, sin embargo, algunas dificultades en la comprensión del concepto de derivada se deben a la imprecisión en su definición en relación con otros conceptos, tales como: función, límite, razón, entre otros (Fiallo y Rodríguez, 2019).

A pesar de la importancia que tiene el concepto de función en el desarrollo y comprensión de las bases del cálculo, distintas investigaciones acerca de la noción y enseñanza del concepto de función, demuestran que este se aborda como una representación algebraica y su representación gráfica se estudia más como un paso algorítmico, sin dar importancia a analizar la correspondencia de dos cantidades covariables (Ávila, 2018; Saa-Vernaza y Mosquera, 2018).

Aun cuando la comprensión de las relaciones funcionales es fundamental en el entendimiento de conceptos avanzados de cálculo (Cuevas-Vallejo, Delgado y Martínez, 2018), los estudios han revelado que los estudiantes tienen una débil comprensión de las funciones y tienen dificultades en el modelamiento de situaciones que presentan cantidades que varían de manera dependiente (Yemen-Karpuzcu, Ulusoy e Isiksal-Bostan, 2015). Por otro lado, los enfoques algebraico y algorítmico de las matemáticas han contribuido a que los estudiantes de nuevo ingreso a la educación superior encuentren dificultades en el manejo de asignaturas que se relacionan con el cálculo (Rueda y Parada, 2016).

Karla Bojórquez Gutiérrez. Profesora de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua, México. Es egresada de la maestría en Innovación Educativa de la Facultad de Filosofía y Letras de la UACH. Entre sus publicaciones recientes se encuentra el trabajo "Análisis de la ansiedad matemática y pensamiento matemático en estudiantes de nuevo ingreso en la UACH" (2021). Correo electrónico: kbojorquez@uach.mx. ID: https://orcid.org/0000-0002-3086-9351.

Fidel González-Quiñones. Profesor investigador en la Universidad Autónoma de Chihuahua, México. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores, Nivel C, e integrante del Cuerpo Académico Consolidado UACH-088 'Estudios de la Información'. Cuenta con estudios como doctor en Periodismo Social por la Universidad de Sevilla; maestría en Administración de Recursos Humanos y maestría en Mercadotecnia, ambas por la UACH. Encargado del Centro Estratégico de Investigación de la misma universidad, donde realiza auditorías de opinión, asesoría metodológica y observatorio de medios. Correo electrónico: fgonzalez@uach.mx. ID: https://orcid.org/0000-0002-8404-0098.

Javier Tarango. Profesor-investigador de Tiempo Completo en la Universidad Autónoma de Chihuahua. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores, Nivel II. Cuenta con estudios como doctor en Educación; maestría en Ciencias de la Información y maestría en Desarrollo Organizacional. Desarrolla sus actividades académicas en los programas académicos de maestría en Innovación Educativa y doctorado en Educación, Arte y Humanidades, además imparte cátedra virtual en la licenciatura en Bibliotecología y Gestión del Conocimiento, y en la maestría en Transparencia y Protección de Datos Personales de la Universidad de Guadalajara. Correo electrónico: jtarango@uach.mx. ID: https://orcid.org/0000-0002-0416-3400.

Mediante la experiencia adquirida a través del desarrollo de la presente investigación en la enseñanza de materias de cálculo a nivel superior, se ha logrado constatar lo antes expuesto acerca de la manera en que se enseñan y aprenden conceptos clave para el desarrollo de las bases del cálculo. Como resultado de esta reflexión, se plantea como objetivo de esta investigación examinar las tipologías de respuesta sobre el razonamiento covariacional en estudiantes de nuevo ingreso a la carrera de ingeniería, tomando como sujetos de estudio a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua (México).

El razonamiento covariacional y las actividades cognitivas

La parte del pensamiento matemático que desarrolla la comprensión funcional es esencial para la interpretación de modelos dinámicos, la comprensión de conceptos de cálculo y ecuaciones diferenciales (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002). La concepción moderna de función abordada por el pensamiento funcional, fue planteada a partir de conceptos que derivan del razonamiento covariacional continuo o el razonamiento de cómo varían los valores de dos o más cantidades. Este tipo de razonamiento, alcanzado mediante problemas que permitan explicar la relación entre variables, resulta imprescindible para que el conocimiento adquiera sentido para los estudiantes (Fernández, Detzel y Ruiz, 2004).

Al final de la década de los 80s, el concepto de razonamiento covariacional aparece en la literatura científica en los trabajos de Confrey y Thompson. En el trabajo de Thompson y Carlson (2017) se complementa la definición de covariación planteada por Confrey, quien la define como la coordinación de los valores cambiantes de dos variables. La covariación, desde el punto de vista de los autores, se define como la concepción de los valores individuales de las cantidades y después conceptualizar dos o más cantidades que varían simultáneamente. Esta representación de variaciones en dos cantidades es útil para definir y comprender lo que es el concepto de función y los constructos avanzados que de esto se derivan, según el "enfoque de covariacional, una función se entiende como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales se genera independientemente a través de una secuencia de valores" (Confrey y Smith, 1995, p. 67). El razonamiento covariacional se convierte en una herramienta, o una manera de pensar que permite plantear y comprender conceptos que son básicos para un pensamiento matemático avanzado.

Desde una perspectiva más actual, el razonamiento covariacional se define formalmente como "las actividades cognitivas involucradas en coordinar dos cantidades variables mientras se atiende a las maneras en que estas cambian una en relación con la otra" (Carlson *et al.*, 2002, p. 354). La manera en que el razonamiento covariacional se manifiesta es mediante niveles de desarrollo, los cuales aparecen en orden de sucesión. Una manera de determinar el nivel de razonamiento en que se encuentra un sujeto es

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 12 • 2021 • e1173 • ISSN: 2448-8550

mediante la identificación de las acciones mentales que el mismo efectúa al resolver problemas de covariación. Estas acciones mentales y los niveles de clasificación a los que corresponden están descritos en la tabla 1, propuesta por Carlson *et al.* (2002) y adaptada por Yemen-Karpuzcu, Ulusoy e Isiksal-Bostan (2015).

Tabla 1.Acciones mentales y niveles de razonamiento covariacional.

Acción mental	Descripción de la acción mental	Nivel
Acción mental 1 (AM1)	Coordinar el valor de una variable con los cambios en la otra	Nivel 1 (N1): Coordinación
Acción mental 2 (AM2)	Coordinar la dirección de cambio de una variable con los cambios en la otra variable	Nivel 2 (N2): Dirección
Acción mental 3 (AM3)	Coordinar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable	Nivel 3 (N3): Coordinación cuantitativa
Acción mental 4 (AM4)	Coordinar la razón de cambio promedio de la función con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada	Nivel 4 (N4): Razón promedio
Acción mental 5 (AM5)	Coordinar la razón de cambio instantánea de la función con cambios continuos en la variable independiente en el dominio completo de la función	Nivel 5 (N5): Razón instantánea

Fuente: Yemen-Karpuzcu, Ulusoy y Isiksal-Bostan (2015).

A manera de interpretación de la propuesta presentada en la tabla 1, se considera que, de acuerdo con las acciones mentales presentadas por el sujeto, se coloca en uno de los cinco niveles de razonamiento covariacional. Estas acciones mentales son acumulativas, es decir, para que un sujeto se clasifique en el Nivel 1 (N1) basta con que presente la AM1. Sin embargo, para que un sujeto clasifique en el Nivel 2 (N2) tiene que presentar tanto la AM1 como la AM2. Así, para que un sujeto sea clasificado en el Nivel 5 (N5) deberá presentar todas las acciones mentales (AM1 a AM5).

Las investigaciones de Thompson y Carlson (2017) proponen una nueva clasificación de los niveles de razonamiento covariacional, en la cual se toma en cuenta el razonamiento variacional de forma separada al razonamiento covariacional. Además, se incluye un nuevo nivel primario y se recatalogan las acciones mentales que definen cada nivel (tabla 2).

La interpretación a la propuesta presentada en la tabla 2 significa que idealmente una persona desarrolle los niveles más altos de razonamiento covariacional siendo capaz de identificar las razones de cambio entre dos variables de manera suave y continua. Las habilidades de razonamiento covariacional son importantes para interpretar y representar gráficamente la información de una función, así como entender los conceptos principales del cálculo (Carlson *et al.*, 2002). Sin embargo, el hecho de que un sujeto no presente el nivel de razonamiento covariacional más alto, no quiere decir que este no se pueda desarrollar.

Tabla 2. Clasificación de razonamiento covariacional.

Nivel de razonamiento covariacional	Descripción de acciones mentales
Sin coordinación	La persona no tiene imagen de las variables variando juntas. La persona se enfoca en una u otra de las variaciones de las variables sin coordinar los valores
Precoordinación de valores	La persona observa los valores de dos variables cambiando, pero de manera no sincronizada, una variable cambia, luego cambia la segunda, luego la primera, y así sucesivamente. La persona no anticipa la creación de pares de valores como objetos multiplicativos
Coordinación robusta de valores	La persona forma una imagen robusta de las cantidades variando juntas, tal como "esta cantidad crece mientras esta cantidad decrece". La persona no prevé que los valores individuales de las cantidades van juntas. En cambio, la persona prevé un vínculo separado y no multiplicativo en los cambios generales en los valores de dos cantidades
Coordinación de valores	La persona coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x,y)
Covariación continua gruesa	La persona prevé cambios en el valor de una variable mientras suceden simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, y prevé que ambas variables varían con una variación continua a trozos
Covariación continua suave	La persona prevé aumentos o disminuciones (en lo sucesivo, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en lo sucesivo, variable) como ocurre simultáneamente con cambios en el valor de la otra variable, y la persona prevé que ambas variables varíen de manera suave y continua

Fuente: Thompson y Carlson (2017).

Existen ciertos indicadores que colocan a un estudiante en uno u otro nivel de razonamiento, por ejemplo, cuando se llenan botellas con un líquido, un estudiante en el nivel sin coordinación (nivel 0) entendería que el agua "sube" en la botella o que más agua se va añadiendo, pero no coordinaría los cambios de altura del agua con la cantidad de agua que se agrega. En cambio, un estudiante en el nivel de precoordinación (nivel 1) notaría que al agregar agua a la botella la altura de esta aumenta.

Un estudiante en el nivel de coordinación robusta (nivel 2) describiría que la altura del agua aumenta cuando aumenta el volumen. En el nivel de coordinación de valores (nivel 3), el sujeto podría identificar las distintas secciones de la botella que representan variaciones en la altura, pero no considera valores intermedios de altura o de volumen. Para el nivel de coordinación gruesa (nivel 4), el estudiante podría identificar cómo aumenta la altura por cada incremento de agua añadido, visualizando también los valores intermedios de altura y volumen, pero considerando cada variable por separado; podría utilizar frases como "se llena más rápido". Finalmente, un alumno en el nivel de coordinación suave (nivel 5) imaginaría la variación del volumen y la altura de manera suave, anticipando que en cada intervalo el volumen y la altura varían de manera continua (Thompson y Carlson, 2017).

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 12 • 2021 • e1173 • ISSN: 2448-8550

Metodología del estudio

Los resultados mostrados en el presente estudio forman parte de una investigación más amplia que busca determinar el nivel de ansiedad matemática, pensamiento matemático y razonamiento covariacional en estudiantes de nuevo ingreso que estudien carreras de ingeniería (Bojorquez, 2021). La investigación se realizó con la participación de 215 estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua (México).

La muestra fue obtenida por conveniencia a partir de una población de más de 400 estudiantes, utilizando un nivel de confianza del 95% y un 5% como margen de error. Se informó a cada uno de los participantes acerca de la naturaleza de la investigación y se les presentó una carta de consentimiento donde quedó asentada la anonimidad de su participación. La aplicación del instrumento se llevó a cabo en el mes de septiembre del 2019 en las instalaciones de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua (México).

Esta investigación corresponde a un estudio mixto, no experimental, transeccional y descriptivo. No se realizó manipulación alguna de la variable estudiada, solamente se buscó estudiar y describir las respuestas de los participantes al instrumento aplicado, para luego clasificar a cada sujeto en un nivel de razonamiento covariacional de acuerdo con el marco sugerido por Thompson y Carlson (2017).

Para cumplir con el propósito de esta investigación, se construyó un test de razonamiento covariacional derivado del instrumento utilizado por Yemen-Karpuzcu, Ulusoy e Isiksal-Bostan (2015). El instrumento consta de una relación de columnas que presentan, por un lado, el dibujo de cuatro botellas de diferente forma e igual capacidad que son llenadas a una razón constante. Por otro lado, se tienen cinco gráficas que representan el cambio de la altura del líquido en función del volumen mientras la botella es llenada con agua. Estas gráficas corresponden, todas menos una, a la gráfica del llenado de cada botella (figura 1). Las botellas y sus gráficas se tomaron del material didáctico *The language of functions and graphs* (Swan, Bell, Burkhardt y Janvier, 1985).

Los sujetos deben seleccionar la respuesta correcta que relaciona cada botella con su gráfica y anotarla en los paréntesis junto a cada figura. Además, se pide a los alumnos que justifiquen esta selección explicando los motivos por los cuales eligieron la correspondencia de cada gráfica para cada botella. Esta explicación debe escribirse con claridad y ser lo más detallada posible. El análisis de esta explicación sumada a las respuestas correctas permite clasificar a los sujetos en uno de los cinco niveles de razonamiento covariacional.

En este estudio se seleccionaron cuatro botellas y cinco gráficas, la gráfica D aparece como distractor. La botella de tinta y el embudo cerrado presentan partes cilíndricas y cónicas, mientras que el matraz de evaporación es de forma esférica y el

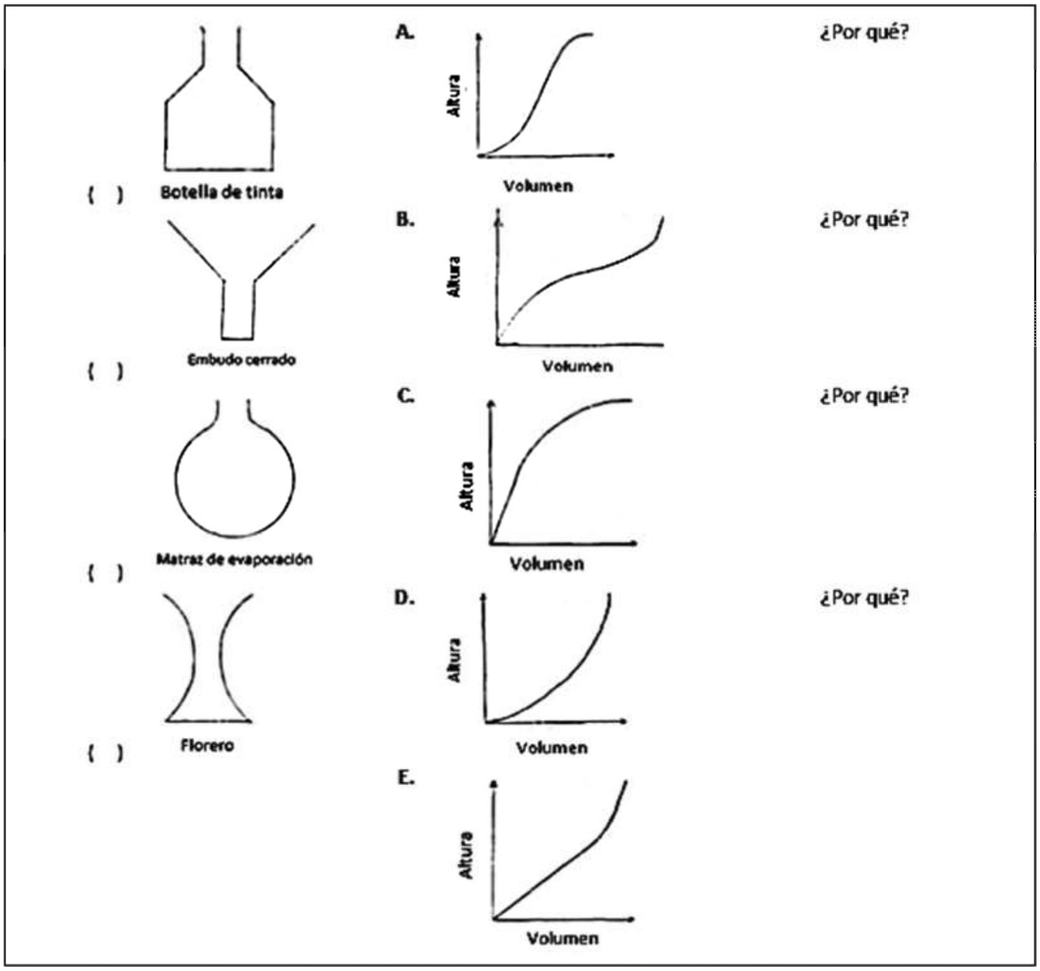

Figura 1. Instrumento de botellas.
Fuente: Swan, Bell, Burkhardt y Janvier (1985).

florero no presenta partes cilíndricas ni esféricas. En cuanto a las gráficas, la C tiene una sección lineal y una sección que es cóncava hacia abajo, la gráfica D es cóncava hacia arriba, las gráficas A y B presentan ambos tipos de concavidad y la gráfica E presenta una sección lineal. La gráfica A, correspondiente al florero, muestra un punto de inflexión donde la curva cambia de creciente a decreciente. Por otro lado, la gráfica B, correspondiente al matraz de evaporación, presenta un punto de inflexión donde la gráfica cambia de decreciente a creciente. En resumen, tanto las botellas como las gráficas presentan diferentes tipos de funciones que son suficientes para evaluar el razonamiento covariacional de los participantes.

La justificación dada por cada participante, independientemente de la selección de las respuestas correctas, fue analizada bajo los supuestos indicados en el marco teórico, donde se indica que la manera en que el razonamiento covariacional se manifiesta es mediante niveles de desarrollo, los cuales aparecen en orden de sucesión (Thompson y Carlson, 2017). Una vez analizadas las respuestas de cada participante,

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 12 • 2021 • e1173 • ISSN: 2448-8550

y con el propósito de facilitar la visualización de los resultados, se asignó un nivel numérico correspondiente con cada nivel de razonamiento covariacional, donde el nivel más bajo (sin coordinación) se hace corresponder con el nivel 0, mientras que el nivel más alto de razonamiento (covariación continua suave) corresponde al nivel 5.

Una vez clasificados los sujetos del estudio, se realizaron análisis estadísticos descriptivos de media, mediana y moda para obtener una idea general del nivel de razonamiento covariacional de los participantes en el estudio.

Análisis de resultados

En el proceso de análisis de los datos se verificó la elección correcta de las gráficas para cada botella y posteriormente se analizó la explicación dada por el estudiante del por qué y cómo se llegó a esa selección. Se analizaron las justificaciones de todas las respuestas, no solo de aquellas que estuvieran correctas. El nivel de razonamiento covariacional depende de la descripción presentada y no del número de respuestas correctas. En la figura 2 se muestra el primer caso analizado, correspondiente a un sujeto sin coordinación.

El sujeto elige erróneamente la gráfica B para la botella de tinta justificando que "la gráfica explica el volumen que podía contener". Para el embudo cerrado selec-

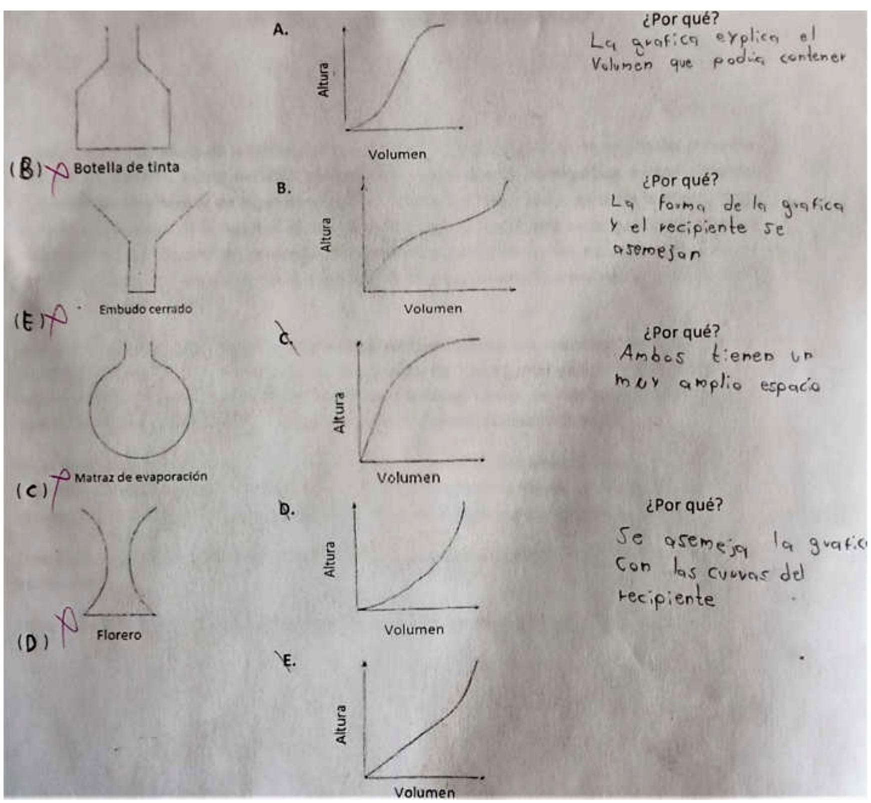

Figura 2. Sujeto 1: sin coordinación.
Fuente: Creación propia.

cionó también erróneamente la gráfica E, justificando que “la forma de la gráfica y el recipiente se asemejan”. La gráfica C fue relacionada de forma incorrecta con el matraz de evaporación dando como explicación que “ambas tienen un muy amplio espacio”. Finalmente, la gráfica D fue incorrectamente relacionada con el florero, explicando que “se asemeja la gráfica con las curvas del recipiente”.

En el caso presentado en la figura 2, el sujeto no fue capaz de relacionar correctamente ninguna botella con su gráfica. Además, en la justificación se enfoca en relacionar la forma de la botella con la forma de las gráficas, no establece ninguna correlación entre la altura y el volumen de agua en la botella. El siguiente caso se muestra en la figura 3.

El sujeto 2 relaciona de manera correcta la gráfica E con la botella de tinta, justificando esta selección porque “al igual del matraz, el volumen asciende y en la punta disminuye”. El embudo cerrado es erróneamente relacionado con la gráfica E, repitiendo la asignación de esta gráfica; se justifica “porque en un punto el volumen se mantiene constante”. Al relacionar el matraz de evaporación se hizo incorrectamente con la gráfica C, se justificó esta selección porque “su volumen asciende rápido y en la punta del matraz disminuye”. El florero fue relacionado con la gráfica B, la cual no representa el llenado de este recipiente. La justificación dada es “porque hay un momento en donde el volumen deja de ascender y luego vuelve a hacerlo”.

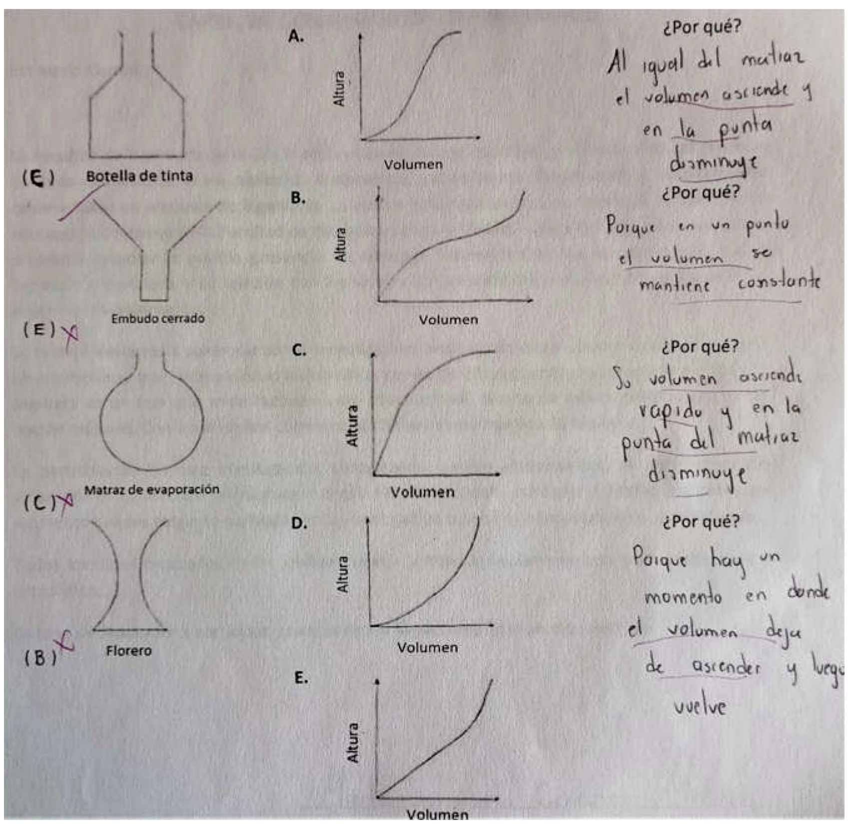

Figura 3. Sujeto 2: precoordinación de valores.

Fuente: Creación propia.

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 12 • 2021 • e1173 • ISSN: 2448-8550

El sujeto representado en la figura 3 logró relacionar correctamente una de las cuatro botellas con su gráfica. Por otro lado, el estudiante identifica que existe un cambio ascendente en el volumen de agua, esto es, que la botella se está llenando, sin embargo, no logra determinar que aquello que "asciende" no es el volumen, sino la altura. Se identifica la variación en una sola variable en lugar de dos, una dependiente de la otra.

El sujeto 3 (figura 4) relaciona erróneamente la gráfica C con la figura de la botella de tinta, justificando su selección ya que "se presenta un comportamiento constante con respecto a la forma con la altura". La gráfica E se relaciona, incorrectamente, con la figura del embudo cerrado explicando que "igual que la anterior poco más agresivo ya que es delgado en el fondo y suele llenarse con menos liquido". La figura del matraz de evaporación se relacionó incorrectamente con la gráfica D "por la forma suele llenarse constantemente". Por último, la figura del florero fue relacionada con la gráfica B sin ser la gráfica que le corresponde, argumentando que "con la forma tiene una parte en la gráfica que es constante el volumen con la altura".

En el caso antes analizado no encontró la correspondencia de ninguna botella con su gráfica, fue capaz de explicar la idea de que ciertas partes de la botella presentan

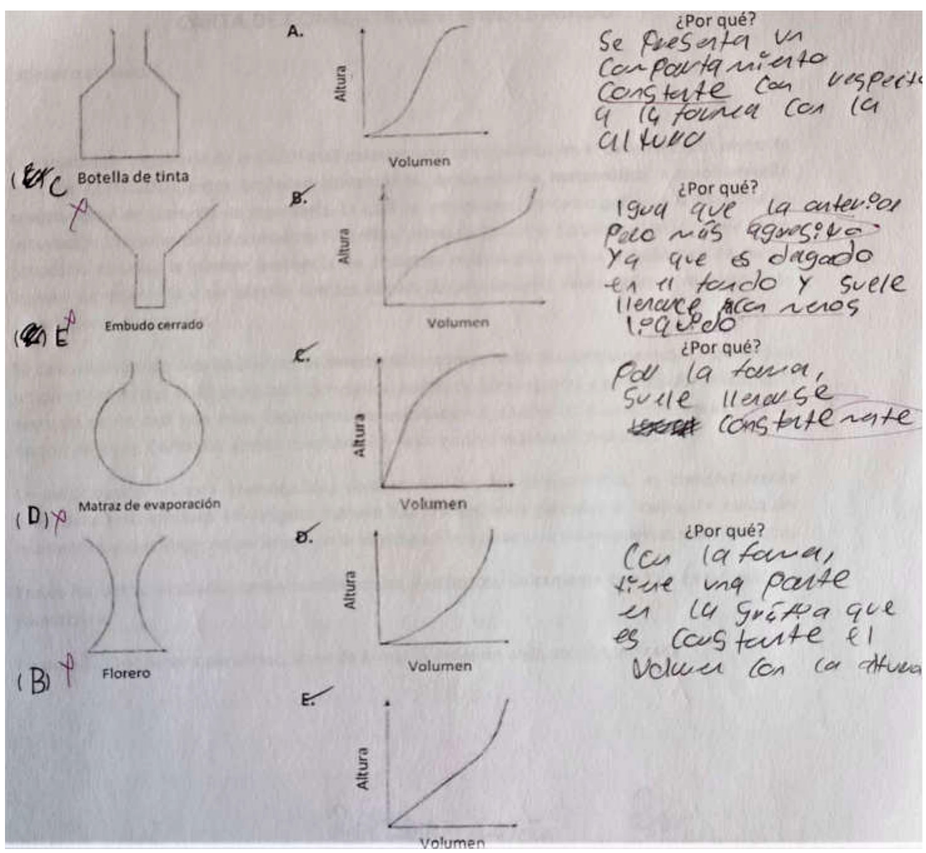

Figura 4. Sujeto 3: coordinación robusta de valores.

Fuente: Creación propia.

un llenado constante, es decir establece una relación entre la altura y el volumen. Así mismo, logra identificar que con cierto volumen de agua la altura debe presentar un crecimiento "agresivo", logrando así una coordinación entre el cambio en el volumen y el cambio en la altura.

El sujeto 4 (representado en la figura 5) relaciona correctamente todas las botellas con la gráfica correspondiente. A la botella de tinta se le asigna la gráfica E explicando que "tiene 3 etapas 1 constante V+, A-; 1 no constante; 1 constante V-, A+". Al embudo cerrado se le relaciona con la gráfica C dando como justificación que "tiene 2 etapas 1 constante A+; 1 no constante V+". La gráfica B fue relacionada con el matraz de evaporación aclarando que "tiene 1 cambio simétrico a la mitad del círculo más hacia el centro V-". Finalmente, el florero se relaciona con la gráfica A, explicando que "tiene un cambio simétrico a la mitad más hacia el centro A+".

En el caso del estudiante cuyos resultados son presentados en la figura 5, este relaciona correctamente todas las botellas con la gráfica correspondiente, pero esto no es indicador de un nivel de razonamiento covariacional avanzado. De hecho, en la justificación dada por el sujeto se visualiza el llenado de la botella en "etapas", en cada etapa se identifica cuál de las dos variables aumenta en relación con la otra. Al realizar esta separación se evidencia una correlación de forma discreta.

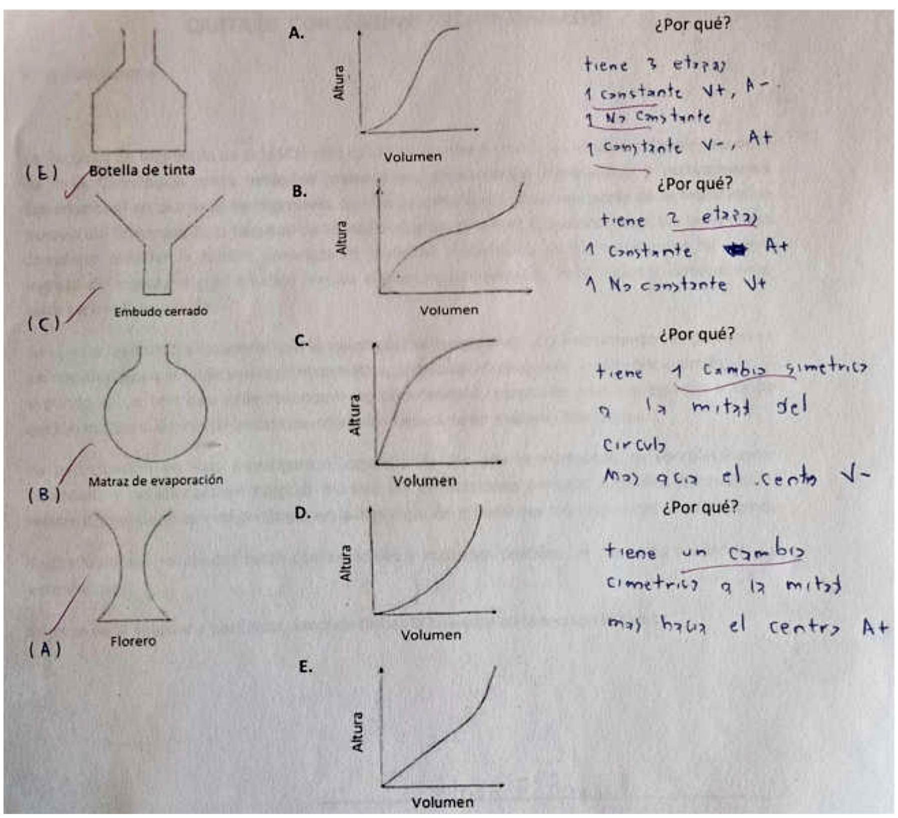

Figura 5. Sujeto 4: coordinación de valores.

Fuente: Creación propia.

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 12 • 2021 • e1173 • ISSN: 2448-8550

El sujeto 5 (representado en la figura 6) relaciona correctamente la gráfica E con la botella de tinta, argumentando esta selección porque "la figura es amplia al principio por lo cual se llena muy lento, pero después se va volviendo angosta, entonces el llenado se vuelve más rápido". La gráfica C es relacionada correctamente con el embudo cerrado, justifica la selección pues "la figura que se forma es un rectángulo, entonces se va llenando constantemente pero después se amplía la figura y baja su velocidad de lleno drásticamente". La tercera botella, el matraz de evaporación, es emparejada acertadamente con la gráfica B. Esta selección se hace "porque como es un círculo al principio es muy angosto, pero luego se va ampliando hasta el punto de volverse angosto por lo cual el llene va rápido luego lento y rápido nuevamente". Finalmente, la gráfica A se asigna al florero explicando la selección "porque se llena lento al principio por el tamaño de la base, pero la figura se vuelve angosta por lo que hace que se acelere después".

Al igual que el estudiante representado en la figura 5, en la figura 6 se tiene a un sujeto participante que identifica de manera correcta la gráfica que corresponde a cada botella. La diferencia entre el estudiante representado en la figura 5 y el que se presenta en este caso, es la explicación que da a su razonamiento. Si bien el sujeto describe la forma de las botellas y los distintos segmentos en cada una, es capaz de visualizar cómo estos cambios de forma afectan la "velocidad" del llenado. Esto

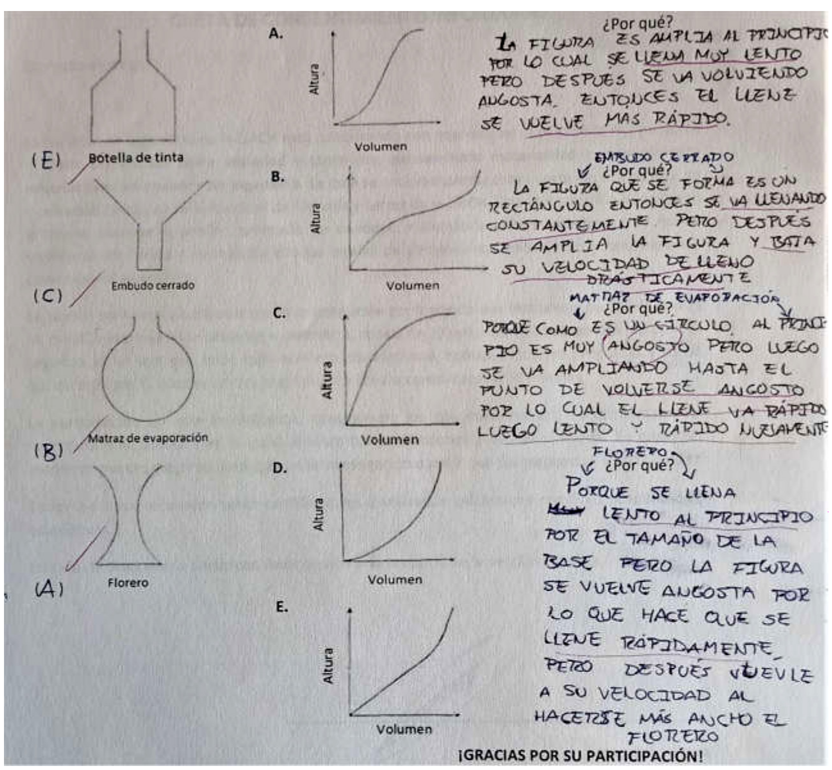

Figura 6. Sujeto 5: con covariación continua gruesa.

Fuente: Creación propia.

indica que el estudiante prevé los cambios en la altura respecto al volumen de agua que contiene la botella. Es interesante notar el uso repetido del concepto de rapidez o velocidad para explicar cómo la altura crece o decrece en función del volumen. Si bien este concepto no es parte del ejercicio, pues se indica que la botella se llena a razón constante, parece que la relación entre cambio y velocidad es algo arraigado en la comprensión de los estudiantes.

El sujeto 6 (representado en la figura 7) asigna la gráfica E a la botella de tinta, explicando que "la altura de [la] botella de tinta primero va aumentando uniformemente con el volumen hay un cambio en medio y al final sigue constante". Para relacionar la gráfica C con el embudo cerrado, el sujeto da como justificación que "la altura del embudo empieza subiendo uniforme al volumen y empieza a ser menos cuando se expande la figura". Los argumentos dados para asignar la gráfica B al matraz de evaporación son que "al principio aumenta más rápido la altura que el volumen, al llegar a la parte media se reduce el aumento y luego regresa, al final se mantiene constante". Por último, se explica que la gráfica A corresponde con el florero pues "el florero empieza aumentando menos la altura en comparación al volumen, en el medio va aumentando más la altura que el volumen y al final regresa".

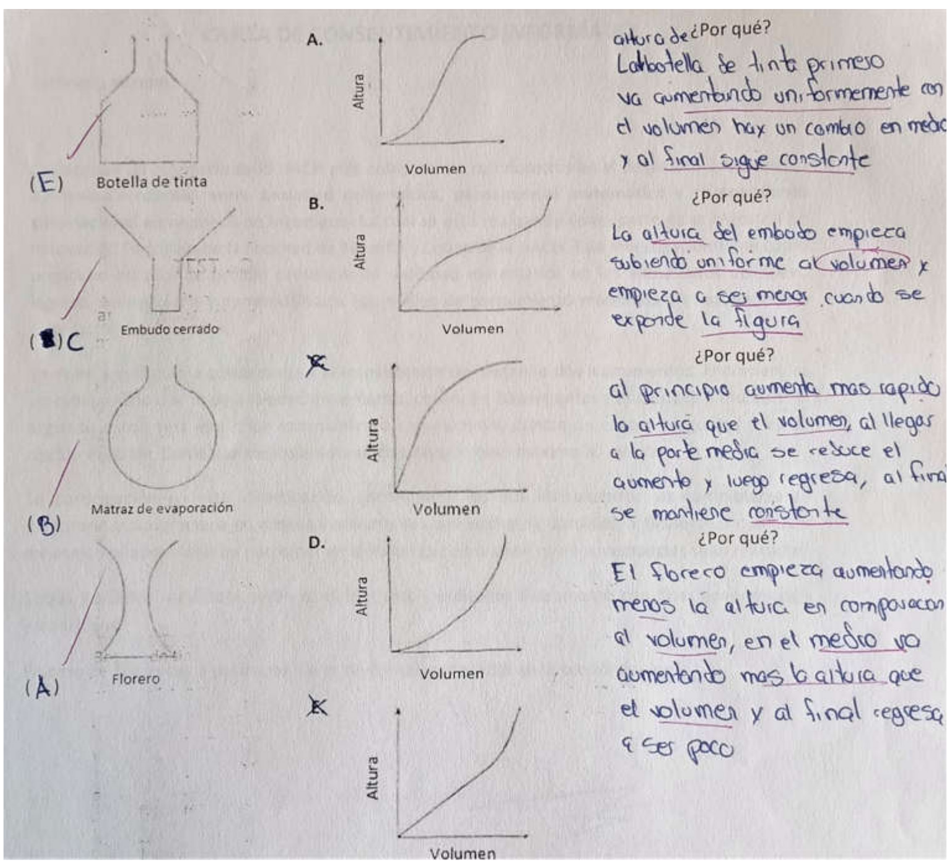

Figura 7. Sujeto 6: covariación continua suave.

Fuente: Creación propia.

La figura 7 representa a un estudiante que también hizo una correcta relación de botellas con gráficas en todos los casos. El estudiante explica la correlación que existe entre altura y volumen indicando cómo aumenta la primera en relación con la segunda. Indica en qué momento del llenado la altura aumenta “rápidamente”, en qué momento aumenta “uniformemente” y cuando “es menos”. El estudiante es capaz de visualizar los cambios en una de las variables en función de la otra de manera continua y uniforme, lo cual señala el nivel más alto de razonamiento.

En ocasiones la justificación presentada por el sujeto participante no es solo de forma escrita, sino que se valen de ayudas gráficas para lograr darle sentido a su razonamiento. Uno de estos casos es representado en la figura 8, donde se indica que hizo una relación incorrecta entre la botella de tinta y la gráfica C, esta selección la justifica porque “el agua sube de manera constante hasta que se reduce el espacio que tiene para expandirse”. En la siguiente botella, el embudo cerrado, explica la selección de la gráfica E como “lo contrario a lo anterior, el agua sube de manera constante hasta que el espacio que tiene aumenta”. El matraz de evaporación fue correctamente relacionado con la gráfica B, siguiendo el razonamiento de que “el espacio horizontal que tiene para expandirse cambia constantemente”. Finalmente,

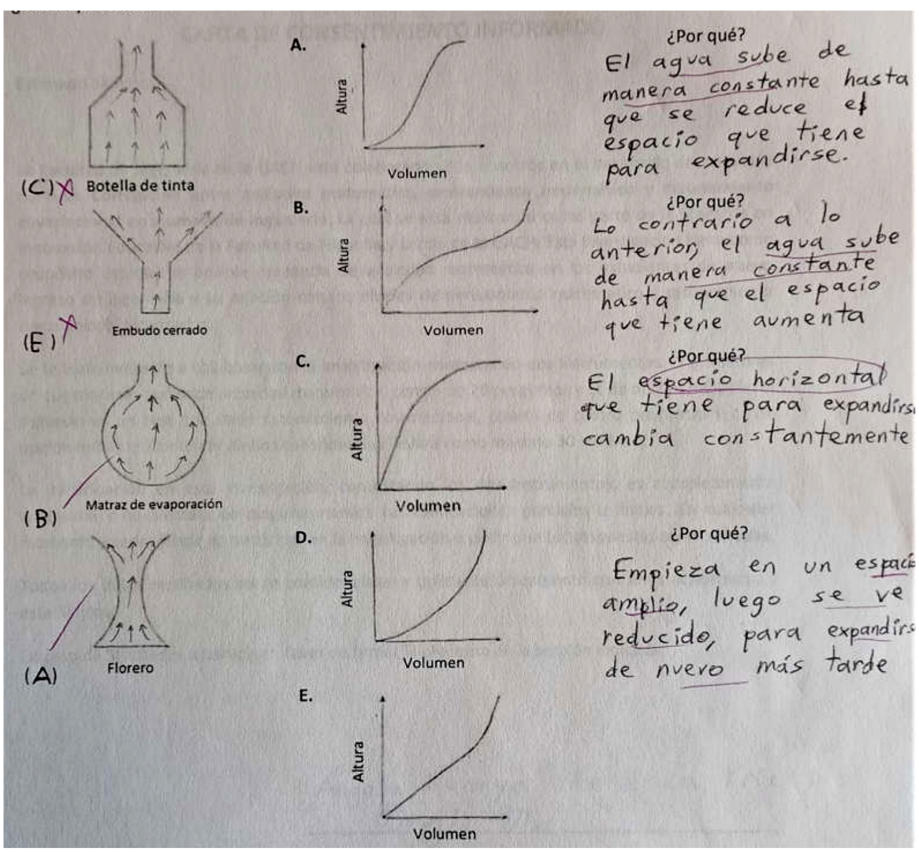

Figura 8. Sujeto 7: razonamiento expresado de forma gráfica.

Fuente: Creación propia.

se asigna correctamente la gráfica A al florero, pues "empieza en un espacio amplio, luego se ve reducido, para expandirse de nuevo más tarde".

En la figura 8 es posible observar que el sujeto 7 dibuja la manera en que el agua va "subiendo" en cada botella mediante flechas ascendentes que indican la "dirección" del llenado. En la explicación escrita el alumno logra identificar que la altura del agua "sube", pero relaciona "el espacio horizontal" de la botella y no el volumen que esta contiene. En la figura 9 se muestra otro caso en que el estudiante se apoya con una representación gráfica.

Las respuestas del sujeto 8, que se encuentran representadas en la figura 9, indican que no explicó su razonamiento de manera escrita, sino que seccionó cada botella e identifico cada sección con un cambio en la curva de las gráficas. En la botella de tinta se identifican tres secciones principales, la sección 1 con forma rectangular corresponde a la sección 1 de la gráfica E, la cual muestra una recta. La sección 2 de la botella de tinta identifica la parte cónica invertida de la misma, la cual corresponde con la sección convexa de la gráfica seleccionada. La sección rectangular más angosta de la botella se identifica con el número 3, esta corresponde con la segunda recta, más corta, de la gráfica E.

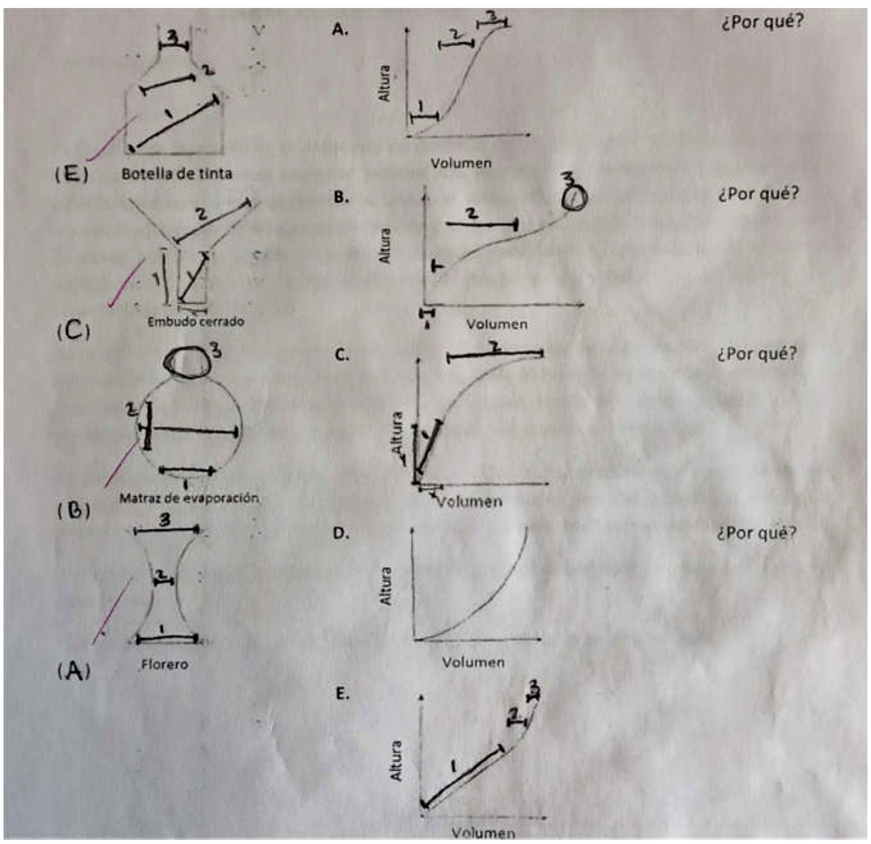

Figura 9. Sujeto 8: razonamiento expresado de forma gráfica.
Fuente: Creación propia.

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 12 • 2021 • e1173 • ISSN: 2448-8550

En el embudo cerrado se identifican solamente dos secciones. La sección 1 es la base del embudo, la cual tiene forma rectangular y corresponde a la parte recta de la gráfica C. La sección 2 es la parte cónica del embudo, la cual se representa en la parte cóncava de la gráfica seleccionada. En el matraz de evaporación se identifican tres secciones. Las secciones 1 y 2 forman parte del cuerpo esférico del matraz, la sección 2 se identifica a partir de la parte media de la esfera, este punto medio se identifica en la gráfica B como el punto de inflexión. La sección 3 del matraz corresponde al cuello, el cual se representa en la gráfica B como la parte recta de la misma.

En el florero se identifican tres secciones. La sección 1 corresponde a la base del florero, la cual es más ancha en comparación a la sección 2 que corresponde al cuerpo del florero. La sección 1 corresponde a la parte inicial de la gráfica A que muestra una sección convexa. La sección 2 del florero se señala como correspondiente a la parte más "larga" de la gráfica. Finalmente, la sección 3, similar a la sección 1, se relaciona con la sección 3 de la gráfica, la cual muestra una parte cóncava.

Si bien este razonamiento le permitió reconocer qué gráfica correspondía a cada botella, lo coloca en un nivel de coordinación de valores, pues se limita a interpretar

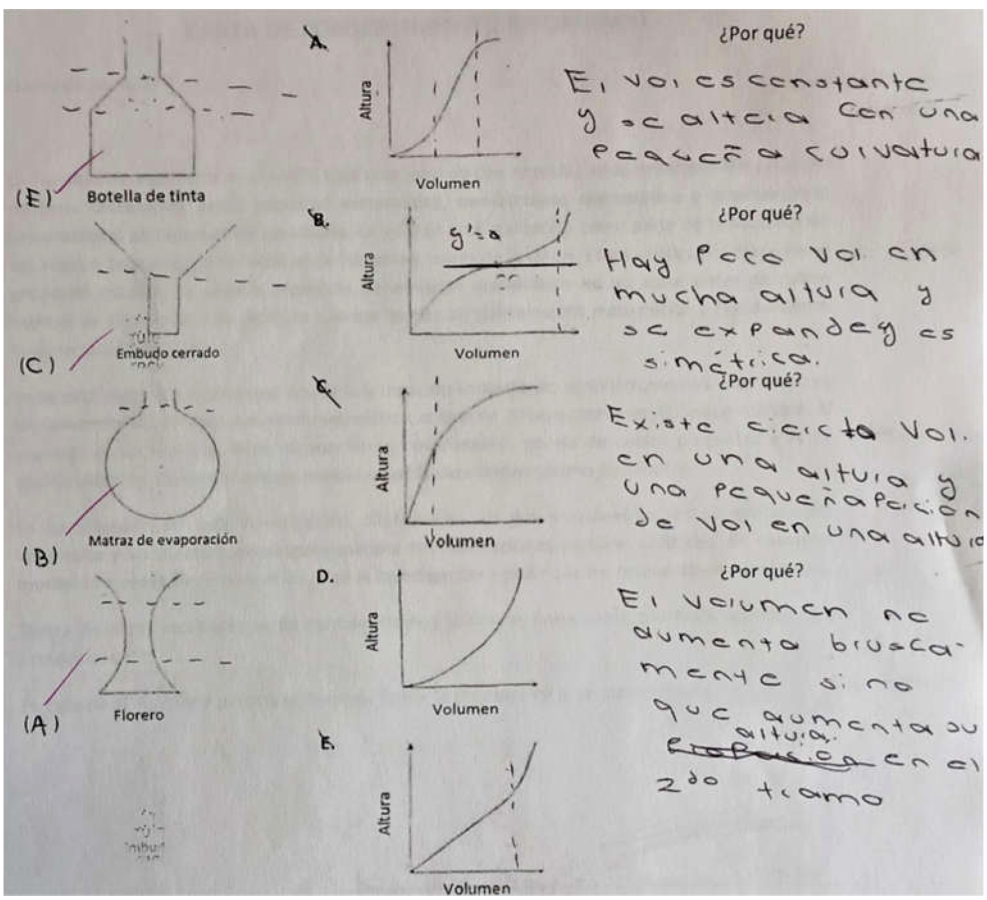

Figura 10. Sujeto 9: razonamiento expresado de forma gráfica.

Fuente: Creación propia.

los cambios entre las variables de manera discreta. En la figura 10 se muestra otro ejemplo de una ayuda gráfica para la explicación.

Las respuestas dadas por el sujeto de estudio 9 indican que asignó la gráfica E a la botella de tinta, dando como justificación escrita que "el vol [volumen] es constante y se altera con una pequeña curvatura". El embudo cerrado se relacionó con la gráfica C, argumentando que "hay poco vol [volumen] en mucha altura y se expande y es simétrica". Para el matraz de evaporación se explica que "existe cierto vol. en una altura y una pequeña porción de vol [volumen] en una altura" y por ello se le relaciona con la gráfica B. El florero es emparejado con la gráfica A, argumentando que "el volumen no aumenta bruscamente si no que aumenta su altura".

El caso del sujeto de estudio 9, que se presenta en la figura 10, también indica una selección correcta de las gráficas para cada botella. Al igual que en la figura 9, el sujeto marcó las distintas secciones de cambio en cada botella y las relacionó con los puntos de inflexión en cada gráfica. Sin embargo, en el dibujo del matraz de evaporación no se realizó una marca en la mitad de la esfera, que también representa un punto de cambio en el llenado. Además, en la explicación de su razonamiento encuentra una relación entre la altura y el volumen, indicando la "brusquedad" de los cambios de uno u otro de acuerdo con la sección de la gráfica que se analiza.

A continuación se presentan los resultados generales del nivel general de razonamiento covariacional en los estudiantes seleccionados, los análisis se llevaron a cabo con el programa estadístico IBM SPSS Statistics. En la figura 11 se presenta la media

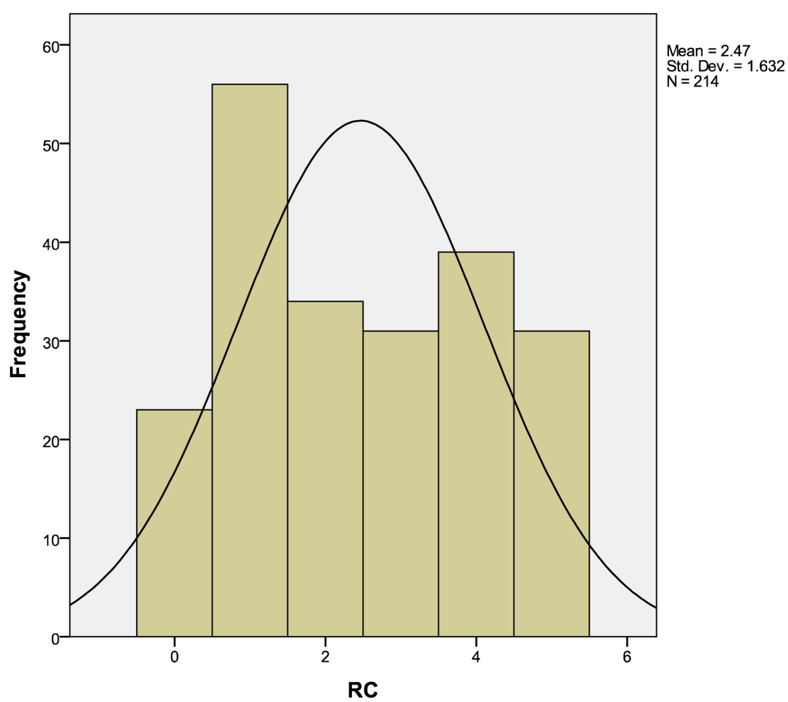

Figura 11. Histograma con curva normal.
Fuente: Creación propia.

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 12 • 2021 • e1173 • ISSN: 2448-8550

de calificación obtenida que resultó de 2.47 y además el histograma correspondiente con la curva normal. Los datos parecen no ajustarse a la curva normal, por lo que se realizó una prueba de Kolmogorov-Smirnov como se recomienda en el manual *Métodos estadísticos con SPSS aplicados a la educación* (Romo-González y Tarango, 2016) por ser una muestra mayor a 50 sujetos. Con un nivel de confianza de 95% y un valor de significancia de la prueba igual a .000 se concluye que los datos no se ajustan a la distribución normal. Debido a esto y a la naturaleza discreta de los datos se realizó una prueba de Wilcoxon para determinar el nivel de razonamiento covariacional. El resultado de la prueba indica que la mediana de la variable no es igual a 2. Este resultado no es consistente con los datos, pues la mediana calculada con los datos obtenidos es igual a 2, sin embargo, la moda es igual a 1. En cualquier caso, estos resultados sitúan el nivel general de razonamiento covariacional entre la precoordinación y la coordinación robusta de valores.

Discusión y conclusiones

Al realizar la revisión de cada instrumento contestado y catalogar a los sujetos participantes en el estudio en uno de los cinco niveles de razonamiento, se detectaron ciertas consistencias en la manera en que se justifica la selección de cada gráfica. En niveles inferiores (sin coordinación y precoordinación), los estudiantes tienden a comparar las curvas o forma de la botella con las curvas o forma de la gráfica, hacen la selección buscando una gráfica que se asemeje a la forma de la botella, sin embargo, no consideran que la gráfica representa una variación entre dos variables. Otro aspecto notable de las explicaciones que presentan los sujetos que se encuentran en estos niveles de razonamiento es que únicamente visualizan una de las dos variables y basan su elección en los cambios que presenta solo la altura o el volumen, pero no analizan la dependencia de la primera respecto a la segunda. “Este énfasis se dio, porque este tipo de razonamiento, poco desarrollado en los estudiantes e importante para el estudio de funciones, se utiliza para la interpretación, representación y justificación de cómo los valores de dos cantidades (magnitudes), en una situación dada, varían simultáneamente y un en relación al otro” (Lima y Siple, 2021, p. 254).

Al analizar los resultados de los estudiantes que alcanzan alguno de los niveles medios de razonamiento (coordinación robusta y coordinación), se encontró que identifican gráficamente de manera correcta el llenado de las secciones cilíndricas de las botellas; sin embargo, confunden el crecimiento lineal de una gráfica con el llenado constante. En las justificaciones dadas, reiteradamente se explicaba cómo “se llena de manera constante” o “el cambio de altura es constante” para explicar una covariación lineal entre las variables. Pocos fueron los sujetos participantes en el estudio que identificaron la concavidad de las gráficas como un factor determinante para relacionar con la botella que representaban.

Acerca de los sujetos participantes en el estudio, clasificados en los niveles más altos de razonamiento (covariación continua), resulta interesante que se incorporara la variable tiempo como variable independiente. En el razonamiento explicado por los estudiantes se hace mención de la "rapidez" o "velocidad" del llenado. Se identificaron estos conceptos como un intento de explicar la variación que presenta la altura del agua respecto a una cantidad de volumen. Al hablar de un llenado "rápido" se hace referencia a que dado cierto volumen la altura incrementa en mayor proporción y un llenado "lento" indica que, dado cierto volumen de agua, la altura incrementa en menor proporción.

Gráficamente los estudiantes se basaron en los puntos de inflexión de las curvas para identificar los cambios en la forma de las botellas que se ven reflejados en las variaciones de altura-volumen. Debe considerarse lo señalado por Mateus-Nieves y Moreno (2021) y por Ramos (2021), que actualmente se observa en los estudiantes el surgimiento y desarrollo de argumentos variacionales partiendo de conocimientos previos que se relacionan con experiencias de la vida cotidiana, lo cual es complementado por Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan y Amidon (2016) y por Moreno y Alvarado (2021), quienes consideran que el principal problema es que cuando los estudiantes ingresan a la universidad muestran significativas deficiencias en la comprensión y análisis de las funciones, evidenciando con ello dificultades para modelar relaciones funcionales.

De forma general, los resultados analizados indican que los estudiantes de primer semestre de ingeniería presentan un razonamiento covariacional que indica una coordinación robusta de valores. Esto sugiere que, si bien los estudiantes logran identificar la manera en que una variable depende de la otra (a mayor volumen, mayor altura), no logran coordinar cómo es que los cambios individuales de una variable afectan a la otra. En otras palabras, los estudiantes interpretan la variación de manera independiente, primero analizando una y luego otra variable, pero no logran interpretar el evento (en este caso el llenado de las botellas) como un suceso que involucra dos variables simultáneas. Este nivel de razonamiento covariacional y sus implicaciones podría estar relacionado con el rendimiento académico, dificultad para interpretar problemas o baja comprensión en temas de física y cálculo (Zimmerman, Olsho, Loverude, Boudreaux, Smith y White, 2019). Esto representa que "a partir de situaciones particulares, los estudiantes hacen conjeturas, descubren relaciones y patrones que los conduce a realizar acciones para representar, organizar y reorganizar su conocimiento" (Mariño, Falk y Hernández, 2021, p. 13).

Parte de la importancia de esta metodología es que permite evaluar la comprensión de los estudiantes no solamente por el número de aciertos, sino que aporta una visión más completa del razonamiento que se lleva a cabo mediante un análisis e interpretación de los argumentos brindados para explicar sus respuestas. Para poder complementar el aprendizaje de los estudiantes, se deben proponer tareas que demanden una conjunción entre la geometría y la funcionalidad (Sessa, Andrés, Coronel, Di Rico y Luna, 2020). Además, es importante tomar en cuenta la concepción del estudiante de las características de la tarea a evaluar (Johnson, McClintock y Hornbein, 2017); el problema de llenado de botellas muestra un panorama general del razonamiento covariacional, no obstante, existen otros tipos de problemas de variación unidireccional, que involucran variables como tiempo, temperatura, distancia, entre otras, las cuales brindan la oportunidad de investigaciones futuras con distintos enfoques hacia el razonamiento covariacional, tal como lo afirman Nava, García y Sánchez (2021) y Martínez (2021), al reconocer la carencia de estudios sobre las emociones que experimenta la población estudiantil ante el uso del razonamiento covariacional y en todas las disciplinas matemáticas, incluso, según Trejo, Ferrari y Martínez (2021) y Castillo-Garsow (2010), no solo en estudiantes, sino, además, en profesores.

Referencias

Ávila, P. (2018). Razonamiento covariacional a través del software dinámico: El caso de la variación lineal y cuadrática. En M. Gómez y D. Arias (eds.), *La enseñanza de las ciencias básicas, ejercicio facilitador del desarrollo tecnológico y científico del país* (pp. 195-214). Universidad Católica de Pereira.

Bojorquez, K. (2021). *Correlación entre ansiedad matemática, pensamiento matemático y razonamiento covariacional en estudiantes de ingeniería* [Tesis de Maestría]. Universidad Autónoma de Chihuahua. Recuperado de: http://repositorio.uach.mx/.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378.

Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, (26), 66-86.

Cuevas-Vallejo, C. A., Delgado Pineda, M., y Martínez Reyes, M. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y el concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial. *Revista Logos, Ciencia y Tecnología*, *10*(2). 20-38. https://doi.org/10.22335/rlct.v10i2.557.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., y Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(3), 151-181. http://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090.

Fernández de Tassara, A., Detzel, P., y Ruiz, M. E. (2004). El sentido de las funciones en la enseñanza. *Revista de Educación Matemática*, *19*(2), 30-41.

Fiallo, J., y Rodríguez, G. (2019). *Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la derivada como razón de cambio mediante el uso de software de geometría dinámica*. En I. E. Pérez-Vera y D. García (eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 141-149). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth* [Tesis de Doctorado]. Arizona State University.

Johnson, H. L., McClintock, E., y Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: A case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *49*(6), 851-864. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4.

Lima, M. J., y Siple, I. Z. (2021). GeoGebra grupos e objetos de aprendizagem: um recurso para exploração do raciocínio covariacional em tempos de aulas não presenciais. *Boletim online de Educação Matemática*, *9*(18), 253-273. https://doi.org/10.5965/2357724X09182021253.

Mariño, L. F., Falk de Losada, M., y Hernández, R. V. (2021). Una caracterización del pensamiento variacional desde la resolución de problemas de ecuaciones lineales diofánticas y la teoría fundamentada. *Eco Matemático*, *12*(1), 13-25.

Mateus-Nieves, E., y Moreno Moreno, E. (2021). Desarrollo del pensamiento variacional para la enseñanza de nociones preliminares de cálculo: una experiencia de aula en la educación básica. *Acta Sci. (Canoas)*, *23*(2), 113-135. http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5716.

Moreno Sandoval, S., y Alvarado Monroy, A. (2021). La modelización como vehículo para el desarrollo del razonamiento covariacional en educación secundaria. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática*, *30*(2), 147-178. https://doi.org/10.48489/quadrante.23687.

Nava Guzmán, C., García González, M. S., y Sánchez Aguilar, M. (2021). El afecto y el razonamiento covariacional: una reflexión sobre la importancia de su estudio. *Revista Educación*, *45*(2), 1-13. https://doi.org/10.15517/revedu.v45i1.40993.

Ramos Flores, J. E. (2021). *Razonamiento covariacional de estudiantes de tercero de secundaria con respecto a funciones de variable continua y discreta* [Tesis de Maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Romo-González, J. R., y Tarango, J. (2016). *Métodos estadísticos con SPSS aplicados a la educación*. Alfagrama Ediciones.

Rueda Rueda, N. J., y Parada Rico, S. E. (2016). Razonamiento covariacional en situaciones de optimización modeladas por ambientes de geometría dinámica. *Uni-Pluriversidad*, *16*(1), 51-63.

Saa-Vernaza, Á. J., y Mosquera, E. F. (2018). *Razonamiento covariacional al estudiar la función por partes mediado por GeoGebra*. Ponencia presentada en la XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Medellín, Colombia.

Sessa, C., Andrés, M., Coronel, M. T., Di Rico, E., y Luna, J. P. (2020). Diseño colaborativo de una propuesta para abordar la noción de función que coordina gráficos cartesianos con modelos geométricos dinámicos. *Revista de Educación Matemática*, *35*(1), 45-60. Recuperado de: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/28177.

Swan, M., Bell, A., Burkhardt, H., y Janvier, C. (1985). *The language of functions and graphs: An examination module for secondary school*. Joint Matriculation Board. Recuperado de: http://www.mathshell.com/publications/tss/lfg/lfg_teacher.pdf.

Thompson, C., y Carlson, M. (2017). Variation, covariation and functions: Foundation ways of thinking mathematically. Mathematical processes and content. En J. Cai (ed.), *Compendium for research in Mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Trejo Martínez, M., Ferrari Escolá, M., y Martínez Sierra, G. (2021). Covariación logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas: un estudio de caso. *Educación Matemática*, *33*(1), 41-70. http://doi.org/10.24844/EM3301.02.

Yemen-Karpuzcu, S., Ulusoy, F., e Isiksal-Bostan, M. (2015). Prospective middle school mathematics teachers' covariational reasoning for intepreting dynamic events during peer interactions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(1), 89-108. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9668-8.

Zimmerman, C., Olsho, A., Loverude, M., Boudreaux, A., Smith, T., y White Brahmia, S. (2019). *Towards understanding and characterizing expert covariational reasoning in physics*. https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.01598.

Cómo citar este artículo:

Bojórquez Gutiérrez, K., González-Quiñones, F., y Tarango, J. (2021). Tipificación de patrones en razonamiento covariacional en estudiantes de nuevo ingreso en la carrera de ingeniería. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 12, e1173. doi: 10.33010/ie_rie_rediech.v12i0.1173.