Horizonte de la Ciencia
ISSN: 2304-4330
ISSN: 2413-936X
horizontedelaciencia@gmail.com
Universidad Nacional del Centro del Perú
Perú

Contreras Oré, Fabio A.
Epistemología del número cero
Horizonte de la Ciencia, vol. 3, núm. 4, 2013, Marzo-Julio, pp. 43-48
Universidad Nacional del Centro del Perú
Perú

DOI: https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2013.4.58

HORIZONTE DE LA CIENCIA
Horizonte de la Ciencia 3 (4), julio 2013. FE-UNCP/ISNN 2304 - 4330

Epistemología del número cero

Mg. Fabio A. Contreras Oré
Universidad Nacional del Centro del Perú

En el cosmos espiritual de Pitágoras, 10 era un número divino, pero no por ninguna razón que tenga que ver con los dedos de las manos y los pies, sino porque es la suma de los cuatro primeros números (1+2+3+4 = 10), símbolos, cada uno de ellos, de los cuatro elementos: fuego, aire, agua y tierra.

Alex Bellos, en Alex en el país de los números.

Resumen
El presente artículo es un análisis de la evolución histórica del número cero a través de tres etapas: intra-representacional, inter-representacional y trans-representacional, estableciendo un paralelismo con la psicogénesis establecida por Jean Piaget en su epistemología genética, así como en la interpretación del desarrollo de los sistemas de registros semióticos de aprehensión perceptual, aprehensión operatoria y aprehensión discursiva. Este análisis, permite resaltar los obstáculos epistemológicos en la construcción del objeto matemático denominado cero, que puede servir para realizar una transposición didáctica adecuada y oportuna en el marco de la Didáctica Fundamental.

Palabras clave: Epistemología, número cero

Zero number epistemology

Abstract
This article is an analysis of the historical evolution of zero number through three phases: intra-representational, inter-representational and trans-representational, establishing a parallelism with the psychogenesis established by Jean Piaget in his genetical epistemology, so in the interpretation of the development of the semiotic register systems of perceptual, operative, and reasoning apprehension. This analysis lets us emphasize the epistemological obstacles in the mathematical object construction called zero, that it can serve to realize an adequate didactical transposition and opportune inside of Fundamental Didactic.

Key words: Epistemology, zero number.

Introducción

Piaget y García en su Psicogénesis e Historia de la Ciencia (1982) han puesto de manifiesto la existencia de mecanismos comunes que explican la evolución de las ideas tanto de la Geometría como de la Física manifiestas en los estudios históricos con los niveles de desarrollo de las mismas ideas en el plano psicogenéticos estudiados por el ginebrino.

Para su análisis han considerado el desarrollo histórico en tres períodos a los que respectivamente han denominado: intra, inter y trans. Así, cuando han realizado el respectivo análisis en el desarrollo de la Geometría se ha hecho mediante las tres etapas denominadas intra-figurales, inter-figurales y trans-figurales; para la evolución del Álgebra se ha considerado las etapas intra-operacional, inter-operacional y trans-operacional. En el presente ensayo vamos a utilizar los períodos intra-representacional, inter-representacional y trans-representacional para explicar la evolución histórica del objeto matemático llamado cero.

En primer lugar, la actividad humana que ha conducido al concepto de número, en general, y al de cero, en particular ha sido el conteo, o necesidad de contar. En todos los pueblos de la antigüedad se han elaborado técnicas perceptuales de conteo, lo que ha producido una tecnología del conteo a la que se le ha denominado sistema de numeración. Genevieve Guitel (1975) refiere que primero aparecieron los denominados numerales figurativos, luego los sistemas de numeración orales, y finalmente los sistemas de numeración escritos, que tiene dos vertientes, los sistemas de numeración aditivos y los sistemas de numeración posicionales.

Sin embargo, hay algo importante que destacar, en ningún sistema de numeración sea hablado antiguo o moderno se necesita el cero: así cuando tenemos necesidad de expresar verbalmente el numeral 2005, decimos dos mil cinco, y no se necesita expresar la ausencia de centenas y decenas, lo mismo pasa en el inglés, francés, o cualquier otro idioma (en quechua se dice iskay waranga pishqa niyuq) . Por tanto el cero no fue necesario en los pueblos que sólo desarrollaron sistemas de numeración hablados o en los pueblos que aún cuando evolucionaron a sistemas de numeración escritos al referirse oralmente a lo escrito nunca conocieron el cero.

El período intra-representacional

Los pueblos que intentaron escribir numerales grandes, tuvieron que inventar signos figurativos para expresar cantidades, así nacieron los sistemas de numeración aditivos, los más primitivos con signos figurativos (signos que de alguna manera gráficamente reflejan el origen del instrumento de conteo: palitos, puntos, cuerdas, aves, etc.), luego fueron sustituidos por signos arbitrarios que generalmente fueron signos producidos por necesidad de abreviar tiempos en la escritura. Conclusión; en esta etapa tampoco se hace necesario un signo para el cero. Toda esta etapa puede considerarse la pre historia de la creación del cero.

Para la creación del cero hay que esperar la aparición de los sistemas de numeración escritos de valor posicional. Para el efecto se requiere de una abstracción de segundo nivel: pues en los sistemas de numeración aditivos, cada vez que las cantidades se hacen bastante grandes hay necesidad de crear nuevos símbolos para las potencias de la base, es decir se tiene una puerta abierta para un número grande de signos; en cambio en los sistemas de numeración posicional, sólo se requiere de un número finito de símbolos de base; pues el valor final se conoce por la adición de los valores relativos adquirido por la posición que ocupan.

En los pueblos de la cultura mesopotámica con escritura cuneiforme, en las tabletas de arcilla de los años 3000 a.C al 2000 a.C no existe ni siquiera un vacío para expresar la diferencia entre dos numerales, el que decifraba tales códigos debería hacer una interpretación de conformidad con el contexto. Entre el 1700 a.C y el 400 a.C aparece un vacío; es entre el 311 a.C y el 150 a.C que aparece expresamente un signo para el cero medial. Los mayas en América Central entre los años 300 a.C al 900 d.C crearon un sistema de numeración posicional de base 20, en la que usaron varios tipos de signos para expresar el cero, superior a la de los babilonios, como se explicará posteriormente. El primer registro del sistema de numeración posicional decimal hindú se halla en el documento Lokavibhaga del año 458. Hay evidencias que Aryabhata (476-550) usaba la palabra sáscrita “kha” como un verdadero numeral del cero.

Así: en el sistema de numeración posicional indo arábigo, se necesita nueve guarismos, 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 y 9; pues, los números mayores tal como 583 si bien están escritos con los mismos numerales, el 5 representa por el lugar que ocupa a 5 centenas, es decir 500; el 8 representa a 8 decenas por el lugar que ocupa y finalmente el valor absoluto y relativo del 3 es 3 por el lugar que ocupa. Finalmente: 583 = 500+80+3

De ésta manera aparece un signo especial para la ausencia de un guarismo, de otra manera, existe la posibilidad de interpretar una misma representación como cantidades diferentes: por ejemplo, para distinguir 54 del 504 o del 5004 o de otros numerales. Aparece, entonces el cero medial o cero mediático (Genevieve Guitel, 1975), sólo como un signo para diferenciar dos cantidades en las que hay ausencia de un orden numérico determinado. Este cero es estático, y no puede considerarse un número, es simple y llanamente un signo que aparece al interior de una representación semiótica de los numerales.

Es este cero medial o cero mediático que se encuentra descrito, por ejemplo en el Diccionario Enciclopédico Santillana que dice: “cero (del ár. sifr, vacío de número) s. m. 1. Símbolo numérico sin valor por sí mismo. 2. Símbolo que lo expresa: 0. 3. Nada, ninguno: El ejercicio tiene cero faltas. 4. Punto de partida de una escala: a diez grados bajo cero. 5. Pésima calificación: Esta película merece un cero.”

Este cero medial que aparece sólo como signo que sirve para completar los vacíos cuando se escriben numerales en los que faltan algunas órdenes del sistema, sin embargo fue un gran progreso para la humanidad y corresponde a un tratamiento de representación. Un tratamiento es una transformación de la representación al interior de un registro. El registro inicial está conformado por los guarismos del sistema de numeración al que se le añade un nuevo elemento por necesidad de mejorar el propio registro de representaciones. Esta es la etapa que correspondería a la aprehensión perceptual (León y Calderón s/f. Encuentro colombiano de matemática educativa). De igual manera, esta es la etapa que correspondería al pensamiento pre operacional del desarrollo psicogenético del concepto cero, etapa confusa y sincrética, destinada fundamentalmente a la designación de un signo para resolver una situación.

El tratamiento cognitivo es inconsciente e inmediato y la representación percibida tiene como función epistemológica la identificación de la representación como signo que completa los espacios vacíos de determinadas órdenes para evitar la confusión entre dos representaciones que usan los mismos signos pero que tienen valores diferentes.

Saber contar y representar a los numerales en un sistema de numeración, sin embargo, no es saber operar con ellos. El pueblo munduruku en la selva brasileña es un pueblo anumérico, sin embargo algunos de sus habitantes que viven cerca de las ciudades brasileñas en contacto con los brasileños, han aprendido a contar hasta centenas y millares, sin embargo a la pregunta ¿Cuánto es cinco menos tres?, responden "no sé". (Bellos. 2011.p 24).

El período inter-representacional

Por esa razón, un nuevo progreso hacia la comprensión del cero surge con la aceptación del nuevo signo en el registro semiótico de representación de los numerales, que produjo de inmediato facilidades para el cálculo de las operaciones aritméticas básicas, y pronto comienzan a darse cuenta de propiedades de este nuevo signo: $0+0=0$; $a+0=a$; $a-a=0$; etc, y sobre todo que si a un número cualesquiera se le añade ceros a su derecha este queda multiplicada por potencias de la base diez. Nace un nuevo tipo de cero; el cero medial se convierte en un cero operador (Genevieve Guitel, 1975). Permanece en la historia, que este cero operador fue conocido por los mayas, cuando representaron a la base veinte de su sistema de numeración con los signos correspondientes al uno y el cero a la derecha.

El cero operador corresponde al pensamiento operatorio de Piaget, pues, en el estadio del pensamiento operatorio concreto: se puede realizar operaciones lógicas sobre aquellos problemas ligados a objetos concretos, el pensamiento es reversible, capaz de realizar una acción y su contraria, comienza el aprendizaje de las operaciones numéricas, el cero operador permite modificar el valor de un número, en realidad multiplica y divide por múltiplos de la base diez. Pero a su vez estamos en la etapa inter-representacional o de aprehensión operatoria. La aprehensión operatoria. Es la aprehensión de una representación en sus diferentes modificaciones posibles. Estas modificaciones son efectuadas al interior del registro representacional, siguiendo sólo las leyes y parámetros de organización de los elementos de la representación. La función epistemológica de este tipo de aprehensión es precisamente la exploración heurística. (León y Calderón s/f. Encuentro colombiano de matemática educativa)

Es este cero operador que se encuentra descrito en el Diccionario Enciclopédico Sopena (segunda parte) cuando dice "CERO m. Arit. Signo sin valor propio que en el sistema de numeración arábigo sirve para ocupar los lugares donde no ha de haber cifra significativa. Colocado a la derecha de un número entero, decupla su valor. Así mismo, se encuentra CIFRA. f. Guarismo, cada uno de los signos representativos del cero y de los nueve primeros números// Por extensión, número". Pues, en la primera parte describe al cero medial.

Se observa en esta etapa, asimismo, que entendiendo que el cero sólo es un signo útil para el cálculo y el tratamiento con registros similares, venciendo esos escrúpulos se llega a utilizar propiedades tales como $0+0=0$; $a+0=a$; $a-a=0$. Es decir, invariantes operatorias, conceptos y teoremas en acción. (Vergnaud, 1990).

El período trans-representacional

Tratar el cero como un número, permitió que el sistema de numeración decimal que tenía su mejor aliado en el ábaco permite trasladarse y explotarse mejor usando los signos indo-arábigos. Las técnicas del cálculo aritmético de los comerciantes y la geometría de los griegos se convierten en ramas de la matemática se inicia una revolución. Finalmente el cero, se independiza poco a poco de su origen perceptual y operatorio, para convertirse en un objeto matemático, cuando se axiomatiza el concepto de número:

Richard Dedekind, Guisseppe Peano, Georg Cantor, Gotlob Frege, y muchos otros comenzaron seriamente a estudiar el problema de la fundamentación del número. Estaban convencidos que existían varias clases de números. La fundamentación de los números irracionales, requería de la fundamentación del conjunto de los racionales, finalmente, la fundamentación de los distintos sistemas numéricos conducían a la fundamentación de los números naturales. Pero esto no parecía tan evidente. Se inicia la etapa denominada trans-representacional o de la independencia del objeto matemático cero respecto a su representación sólo como signo. Esta etapa corresponde a la noética, es decir a la creación puramente intelectual.

Para la fundamentación de la Aritmética en forma axiomática Giusseppe Peano (1858-1932), eligió tres conceptos primitivos uno, número y sucesivo o sucesor, que verifican cinco axiomas, en su versión original, consideró al uno como el primer número natural. Años más tarde, el propio Peano se autocorrigió y consideró que el primer número natural era el cero. La axiomática de Peano se basa en el concepto de sucesor o el siguiente de n que es n+1, es decir en la ordinalidad, consecuentemente el 0 es un ordinal, pues si el sucesor de n es n+1, el sucesor de 0 es 0+1=1 y el sucesor de -1 es 0, es decir, aunque el conteo siempre se inicia en 1. Tampoco debe olvidarse, que los teléfonos, celulares, calculadoras y otros artefactos de la tecnología moderna, escriben la serie 1; 2;...; 9; 0; estableciendo al 0 al final de la serie, con lo que da la impresión de que el 0 no es el inicio de la serie natural sino el último.

En cambio la axiomática de Cantor (1845-1918), Dedekind (1831-1916), y otros se basa en la cardinalidad, donde el cero se define como el cardinal del conjunto nulo o vacío . En ambos casos el cero se convierte en un objeto matemático, con existencia en el intelecto. Esta etapa corresponde al de las operaciones formales de Piaget (1972: 52); pues, las operaciones formales marcan una tercera etapa donde el conocimiento sobrepasa lo real mismo para insertarse en lo posible y poder actuar directamente en lo posible y lo necesario. El cero numérico se inserta en el mundo de lo posible, alejándose de la experiencia concreta. El cero numérico es un artefacto cultural, es una creación del cerebro humano.

Pues, en la aprehensión discursiva, tercera forma de aprehensión, las propiedades matemáticas no son determinadas por constataciones visuales, son dadas por enunciación de relaciones que se abstraen de otro tipo de experiencia, está determinada por la aprehensión desde un marco teórico conceptual, es decir por indicaciones discursivas que permiten explicitar otras propiedades a partir del uso de definiciones, axiomas y teoremas y por las experiencias que permite ese tejido teórico. El tratamiento cognitivo correspondiente es el razonamiento deductivo y la función epistemológica es la demostración, los ejercicios elementales de aplicación de teoremas o de definiciones, requieren fundamentalmente de este tipo de aprehensión. (León y Calderón. Encuentro colombiano de matemática educativa).

Este cero número es el que se encuentra descrito en el Dictionnaire des matématiques de Alain Bouvier y F. Le Lionnais Editorial Presses Universitaires de France donde se expresa: Zéro: Cardinal de l'ensemble vide, c'est l'unique élément de N sans prédécesseur. On la note 0. Cést aussi le plus petit ordinal. On appelle fréquemment zero l'élément neutre d'un groupe dont la lois est note additivement. (Cero: Cardinal del conjunto vacío, es el único elemento de N sin predecesor. Se le denota por 0. Es también el más pequeño ordinal. Se llama frecuentemente cero al elemento neutro de un grupo en la que la ley interna se denota aditivamente).

Sin embargo, es conveniente resaltar que el desarrollo descrito no fue lineal, sino que frecuentemente hubo retrocesos y saltos. El desarrollo se hace por equilibraciones y reequilibraciones. Algunas veces, los matemáticos de algunas culturas se adelantaron a su época y conceptualizaron, lo que más adelante recién se vería cristalizado en tratamientos completos; así el cero numérico dio sus primeros pasos vacilantes como número genuino bajo el tutelaje de los matemáticos indios tales como Brahmagupta, quién el siglo VII demostró cómo se comportaba la palabra sunya, sinónimo de vacío, respecto a otros números, en un contexto comercial:

- Una deuda menos sunya es una deuda.
- Una fortuna menos una sunya es una fortuna.
- Sunyamenos sunya es sunya
- Una deuda sustraída de sunya es una fortuna.
- El producto de sunya multiplicado por una deuda o una fortuna es sunya.
- El producto de sunya multiplicado por sunya es sunya.

Para finalizar, vamos a establecer un cuadro con algunas, de los muchos registros semióticos en la que está presente el cero número.

cero El cardinal más pequeño	El único natural que no tiene precedente El cero es un ordinal	El número natural más pequeño El elemento neutro de la adición	El separador entre positivos y negativos El elemento absorvente de la multiplicación
0 ax0 = 0xa =0	0+a=a+0=0 Cardϕ	a-0=a $\lvert\phi\rvert$	0-a=-a a-a
0%	$\lvert\{x \in R / x^2 < 0\}\rvert$	$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n}$	$0 = e^{i\pi} - 1$
$0 = cos\frac{\pi}{2}$	0!	a^0	$\frac{0}{a}$
0	0^0		etc.

A modo de conclusiones didácticas

Estas reflexiones corresponden a la Didáctica Fundamental y resultan de suma importancia para una adecuada transposición didáctica. Pues, se constata que durante el desarrollo histórico de la creación del cero como número el hombre ha encontrado obstáculos epistemológicos, los mismos que tarde o temprano se van a hacer presente en el curso del aprendizaje de los estudiantes. Hay también, sin lugar a dudas obstáculos didácticos; por ejemplo, para muchas personas se hace difícil aceptar que el cero es un múltiplo de cualquier otro número natural; pues, en el lenguaje no matemático la palabra múltiplo evoca a cantidades mayores que el número propuesto, sin embargo la palabra múltiplo en matemática es una definición, es un concepto intelectual que involucra al cero como múltiplo de cualquier otro número natural.

El cero numérico, es un objeto matemático muy especial, goza de todas las propiedades de un número, y tiene propiedades específicas; pero también, tiene restricciones que hay que tener en cuenta durante su aprendizaje.

Referencias bibliográficas:

Bellos A. (2011). Alex en el país de los números. Segunda edición. España: Grijalbo

Boyer C.B. (2007). Historia de la matemática. Tercera reimpresión. Madrid, España: Ciencia y Tecnología Alianza Editorial.

D'Amore B. y Fandiño Pinilla, M.I. (2012). El número cero. Colombia: Didácticas Magisterio.

Guitel G. (1975). Histoire comparée des numerérations écrites. Paris, Francia.: Flammarion

Ifrah G- (1988). Historia de una gran invención. Primera reimpresión. Mdrid, España: Alianza Editorial.

León O.L. y Calderón D.I. Seminario sobre Semiosis y lenguaje en la didáctica de las matemáticas. Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas. Giplym de la Universidad Distrital Francisco José De Caldas. Colombia. Funes.uniandes.edu.co/935/1/3Cursos

Piaget J. (1972). L'épistémologie génétique. Francia: Presses universitaires de France. Colección Que sais-je? Nº 1399.

Piaget J. (2010). La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. Séptma reimpresión. México: Siglo veintiuno editores.

Piaget J. y García R. (2008). Psicogénesis e historia de la ciencia. Undécima edición. México: Siglo veintiuno editores.

Rumbos Pellicer I.B. (2011). Breve historia de las matemáticas. México: Trillas.