Diánoia
ISSN: 0185-2450
ISSN: 1870-4913
Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM

Méndez Pinto, Emilio
¿Es necesariamente verdadero que, si un enunciado geométrico es verdadero, es necesariamente verdadero?
Diánoia, vol. LXIV, núm. 82, 2019, pp. 61-84
Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM

DOI: 10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

¿Es necesariamente verdadero que, si un enunciado geométrico es verdadero, es necesariamente verdadero?

[Is It Necessarily True that if a Geometric Statement Is True, It Is Necessarily True?]

EMILIO MÉNDEZ PINTO
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Escuela de Gobierno y Transformación Pública
emilio.mendez.pinto@gmail.com

Resumen: En este ensayo respondo negativamente a la pregunta del título al sostener que el enunciado "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" es contingentemente verdadero. Para ello, intento refutar la tesis de Ramsey de que las verdades geométricas son necesariamente verdades necesarias (Ramsey 2013, p. 13), así como la tesis de Kripke de que no puede haber proposiciones matemáticas contingentemente verdaderas (Kripke 2005, p. 156). Además, mediante la concepción fregeana sobre lo *a priori* y lo *a posteriori* (Frege 1980, p. 5), sostengo que hay verdades geométricas que *pueden* ser *a priori* sin tener que serlo.
Palabras clave: verdad matemática, verdades geométricas, verdades geométricas contingentes, verdades geométricas contingentes *a priori*, verdades geométricas necesarias *a posteriori*

Abstract: In this essay I respond negatively to the question of the title by arguing that the statement "The sum of the internal angles of a triangle is equal to 180°" is contingently true. For this, I try to refute Ramsey's thesis that geometric truths are necessarily necessary truths (Ramsey 2013, p. 13), as well as Kripke's thesis that there can be no contingently true mathematical propositions (Kripke 2005, p. 156). In addition, by appealing to the Fregean conception of the *a priori* and the *a posteriori* (Frege 1980, p. 5), I argue that there are geometric truths that *can be a priori* without having to be *a priori*.
Key words: mathematical truth, geometric truths, contingent geometric truths, *a priori* contingent geometric truths, *a posteriori* necessary geometric truths

En este ensayo sostengo que el enunciado geométrico euclidiano "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" es 1) contingentemente verdadero y 2) puede ser *a priori*.[1] Para mostrar la va-

[1] Si el enunciado *tuviese* que ser *a priori*, entonces *ipso facto* sería necesariamente verdadero según la doctrina kantiana. Sin embargo, como intentaré mostrar más adelante, el enunciado *no tiene* que ser *a priori*. Aún más: incluso si el enunciado fuese *a priori* según los cánones kantianos, ello *no implica* su necesidad.

lidez de 1), es pertinente refutar la pretendida validez universal de la afirmación de Ramsey 2013 (p. 13) de que, ya que la geometría consiste en tautologías y ya que las tautologías son verdades necesarias, las verdades geométricas son necesariamente verdades necesarias,[2] así como refutar la pretendida validez universal de la afirmación de Kripke 2005 (p. 156) de que "el carácter peculiar de las proposiciones matemáticas es tal que uno sabe (*a priori*) que no pueden ser contingentemente verdaderas".

A fin de mostrar la validez de 2), es pertinente dar cuenta de una concepción convincente de lo *a priori* y lo *a posteriori* que nos permita no sólo sostener que el enunciado "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" puede ser *a priori*, sino también que no tiene que serlo. Creo que la concepción fregeana de lo *a priori* y lo *a posteriori*, a diferencia de la concepción kantiana sobre los mismos términos, es una concepción convincente en este sentido. (Dicho sea de paso, también lo sería la concepción kripkeana, porque de acuerdo con ella también es cierto que una verdad puede ser *a priori* sin tener que serlo, si no fuese por el hecho de que, para Kripke, una proposición matemática verdadera no puede ser contingentemente verdadera, condición que contradice a 1).)

En realidad, si entendemos que decir "un enunciado geométrico euclidiano puede ser *a priori*, aunque no tenga que serlo" es algo muy cercano a decir "un enunciado geométrico euclidiano bien puede ser *a priori*, pero igualmente bien puede ser *a posteriori*", entonces nuestro trabajo en este aspecto ya está virtualmente hecho sin ninguna necesidad de investigación filosófica adicional. En efecto, ésa es la postura epistemológica que, *incluso con más fuerza* (sosteniendo que nuestro enunciado geométrico euclidiano *es a posteriori*), sostuvieron Gauss con respecto al carácter epistemológico del enunciado euclidiano relativo a la suma de los ángulos internos de un triángulo y Riemann con respecto al carácter epistemológico de los enunciados euclidianos en general. Sin embargo, incluso así, como consuelo nos queda el "resquicio filosófico" de intentar determinar ya no por qué el enunciado "La suma de los

[2] Esta afirmación de Ramsey se sustenta 1) en la idea de que, en la geometría, se considera que términos como "punto" y "línea" significan cualesquiera cosas que satisfagan ciertos axiomas, de tal modo que los únicos términos constantes en ella son funciones de verdad como "o" y "algún", y 2) en la idea de que las nociones geométricas se identifican con nociones algebraicas mediante las correlaciones de la geometría analítica. La idea 1) se funda en el programa formalista de Hilbert, mientras que la idea 2) lo hace en el programa logicista de Russell y Whitehead.

ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" tiene o no tiene que ser *a priori*, sino por qué puede o no serlo.[3]

Dos problemas que resultan de considerar los términos "tautología" y "verdad necesaria" sinónimos intercambiables

La tesis de Ramsey de que las verdades geométricas son necesariamente verdades necesarias descansa en la premisa de que la geometría consiste en tautologías y en la premisa (putativa, para sus propósitos)[4] de que las tautologías son verdades necesarias. Pongamos nuestra atención en la premisa putativa y preguntémonos: ¿es el caso que, para Ramsey, si bien las tautologías son necesariamente verdades necesarias, las verdades necesarias no son necesariamente tautologías? La respuesta a esta pregunta es un rotundo *no* porque, en lo que llamaremos la "teoría modal de Ramsey", las tautologías *equivalen* a verdades necesarias, del mismo modo que las contradicciones *equivalen* a verdades imposibles. Esto significa, para la misma teoría, tres cosas más. En primer lugar, que una proposición tautológica concuerda con todas las posibilidades de verdad, mientras que una proposición contradictoria no concuerda con ninguna posibilidad de verdad.[5] En segundo lugar, que ni las proposiciones tautológicas ni las contradictorias son proposiciones *genuinas*, porque no dicen nada sobre los hechos del mundo. En tercer lugar, que la negación de una tautología implica una contradicción, y viceversa, independientemente de su grado de complejidad.

Así pues, si se considera un solo argumento, la tabla de verdad de "$p \vee \neg p$" es:

p	
V	V
F	V

[3] Lo que (directa o indirectamente) mostraron las investigaciones de Gauss y de Riemann sobre la estructura geométrica del espacio es que el enunciado "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" no *tiene* que ser *a priori*, pero no que no *pueda* ser *a priori*.

[4] No obstante que una conclusión puede seguir siendo verdadera aunque no se siga de su premisa putativa, éste no parece ser el caso para la tesis de Ramsey.

[5] En la filosofía matemática de Ramsey, las tautologías y las contradicciones son respectivamente asimilables a las proposiciones verdaderas y a las proposiciones falsas, porque tanto las tautologías como las contradicciones son proposiciones ordinarias en cuanto que pueden considerarse argumentos para funciones de verdad.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

La tabla de verdad de “$p \wedge \neg p$” es:

p	
V	F
F	F

Según lo anterior, la proposición “$p \vee \neg p$” es tautológica (= concuerda con todas las posibilidades de verdad) porque es verdadera independientemente de la afirmación *o* de la negación de p, mientras que la proposición “$p \wedge \neg p$” es contradictoria (= no concuerda con ninguna posibilidad de verdad) porque es falsa independientemente de la afirmación *o* de la negación de p. Tanto $p \vee \neg p$ como $p \wedge \neg p$ son proposiciones *no genuinas* (*degeneradas*, como las llama Ramsey) porque no sabemos nada sobre el mundo si lo único que sabemos es, o bien que *llueve o no llueve* (Wittgenstein 2009, p. 84), o bien que *ni llueve ni no llueve*.

Estas tesis ramseyanas nos comprometen, en mi opinión, con dos posturas filosóficas. En primer lugar, con la postura según la cual no hay, *y no puede haber*, proposiciones matemáticas *sintéticas*, esto es, proposiciones matemáticas que nos den información sobre el mundo (esto se sigue del logicismo de Ramsey, según el cual todas las proposiciones matemáticas verdaderas son meras tautologías y todas las proposiciones matemáticas falsas son meras contradicciones). En segundo lugar, nos compromete con la postura según la cual no hay, *y no puede haber*, proposiciones *a posteriori* necesariamente verdaderas (esto se sigue de la intercambiabilidad sinonímica entre “tautología” y “proposición necesariamente verdadera”, así como entre “contradicción” y “proposición imposiblemente verdadera”).

Dos objeciones al primer compromiso

Llamemos *compromiso analítico* o *sintáctico-lógico* al compromiso con la postura filosófica según la cual no hay, *y no puede haber*, proposiciones matemáticas *sintéticas*. Este compromiso puede resumirse como sigue: ante la proposición “$a = b$”, si a y b son nombres de la misma cosa, entonces “$a = b$” es una tautología porque, en términos wittgensteinianos, decir que algo es idéntico a sí mismo es no decir absolutamente nada (Wittgenstein 2009, p. 106), mientras que, en términos ramseyanos, “$a = b$” no dice nada *genuinamente* si a y b denotan lo mismo.[6] Según la

[6] Este problema de identidad lo resuelve la teoría internista del significado (Frege-Russell) sosteniendo que, por ejemplo, si un nombre propio y una descripción definida asociada con ese nombre denotan lo mismo, saber que el único objeto

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

filosofía matemática de Ramsey, si $a = 2+2$ y $b = 4$, a y b son *símbolos equivalentes*, porque las proposiciones "Tengo $2+2$ x" y "Tengo 4 x" son la misma proposición en cuanto que son la misma función de verdad de proposiciones atómicas (*i.e.*, afirman el mismo hecho). En cambio, si en la proposición "$a = b$" a y b son nombres de cosas distintas, "$a = b$" es una contradicción porque, en términos wittgensteinianos, es un absurdo decir que *dos* cosas son mutuamente idénticas (Wittgenstein 2009, p. 106), mientras que, en términos ramseyanos, "$a = b$" no dice nada *genuinamente* si a y b denotan cosas distintas. Para el caso matemático, donde ahora, por ejemplo, $a = 2 + 3$ y $b = 4$, a y b no son símbolos equivalentes porque las proposiciones "Tengo $2 + 3$ x" y "Tengo 4 x" no son la misma proposición en cuanto que no son la misma función de verdad de proposiciones atómicas (*i.e.*, no afirman el mismo hecho).

Según este compromiso filosófico, toda proposición matemática verdadera es una proposición tautológica, mientras que toda proposición matemática falsa es una mera contradicción. Ahora bien, ¿qué tan cierto es esto? Dejemos de lado las proposiciones de las matemáticas aplicadas (proposiciones cuya verdad, siguiendo a Russell 2010, pp. 108–114, depende de algo más que de la *forma de la proposición*), así como las proposiciones *falsas* de las matemáticas puras (proposiciones que, siguiendo a Rayo 2015, p. 84,[7] tienen condiciones de verdad imposibles), y pongamos nuestra atención en las proposiciones verdaderas de las matemáticas puras.

Considerar a detalle la célebre "contradicción irresoluble" de Poincaré 2001 (p. 9)[8] sobre la mismísima posibilidad de las matemáticas,

que posee el atributo de tener dicho nombre propio es idéntico al único objeto que posee el atributo de tener dicha descripción definida no es un conocimiento trivial. En cambio, para la teoría externista del significado (Kripke-el Putnam del realismo externo) dicho conocimiento sí puede llegar a ser trivial al momento de identificar el referente de un nombre propio.

[7] Esta afirmación, junto con la de que las verdades de las matemáticas puras tienen condiciones de verdad triviales, constituyen la tesis de lo que Rayo llama *trivialismo matemático*. Esta última tesis, junto con la de que existen objetos matemáticos (que Rayo llama la tesis del *platonismo matemático*), constituyen el *trivialismo platónico* de Rayo.

[8] Es sabido que Poincaré era un kantiano con respecto a la naturaleza de las proposiciones aritméticas (aunque no con respecto a la naturaleza de las proposiciones geométricas). Para Poincaré, su "contradicción irresoluble" no fue más que una especie de pregunta retórica, una pregunta cuya respuesta ya conocía: cuando menos algunas proposiciones aritméticas representan intuiciones sintéticas *a priori*

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

así como lo que de ella puede seguirse, nos permite poner en seria duda la tesis ramseyana de que las proposiciones verdaderas de las matemáticas puras son meras tautologías. La "contradicción irresoluble" de Poincaré se sustenta en dos supuestos *prima facie* difícilmente controvertibles relativos a la naturaleza de las matemáticas (puras) y de sus proposiciones, a saber, que 1) las matemáticas son una ciencia deductiva sólo en apariencia (habida cuenta de la importancia fundamental de la inducción matemática en el razonamiento matemático)[9] y que 2) las proposiciones matemáticas pueden derivarse en orden mediante las reglas de la lógica formal.[10] Ahora bien, si 1) es verdad, ¿cómo es que las matemáticas pueden alcanzar un "rigor perfecto" que no es desafiado por nadie? Por otra parte, si 2) es verdad, ¿cómo es que las matemáticas no se reducen a una "gigantesca tautología", a una forma indirecta de decir que $A = A$? Ésta es la "contradicción irresoluble" de Poincaré con respecto a la mismísima posibilidad de las matemáticas.

Creo que una solución verosímil a esta contradicción pasa, *cuando menos*, por compatibilizar el hecho de que las matemáticas (puras) poseen un "rigor perfecto" indesafiable con el hecho de que las matemáticas (puras) no son una gigantesca tautología. Esta solución no es

y, por lo tanto, no hay una "contradicción irresoluble", tal como ésta se plantea en la posibilidad de las matemáticas.

[9] Y habida cuenta de la importancia fundamental que para Poincaré (y otros matemáticos como Dedekind, Frege, Russell y Zermelo) tiene la inducción matemática en el razonamiento matemático. Para una defensa formal de la inducción matemática, véase Boolos 1999, pp. 370–375, donde el autor afirma que la inducción matemática se sostiene porque la estructura que consiste en los números naturales bajo la relación de *menor que* se inserta en una estructura mayor que contiene otros objetos además de los números y que está dotada de otras relaciones además de la de *menor que*. Para una defensa de la inducción matemática como prueba de (algunas) proposiciones matemáticas, véase Wittgenstein 2007, pp. 779–781, donde el filósofo vienés afirma que una prueba por inducción matemática de una proposición (algebraica, por ejemplo) es una comprobación de su estructura, aunque no de su generalidad. Así, por inducción matemática puede probarse que "$ab = ba$" porque puede calcularse un ejemplo de ese tipo.

[10] Este segundo supuesto involucra problemas metamatemáticos relativos a la decidibilidad, la completitud y la consistencia, cuya consideración estaba apenas en ciernes durante la época en que Poincaré expuso su "contradicción irresoluble", no obstante que en sus escritos de filosofía de las matemáticas Poincaré ya advertía, desde una postura kantiana, del posible fracaso del programa logicista (en ese momento ya puesto en marcha por Peano, Burali-Forti, Couturat, Russell y Whitehead) y del programa formalista de Hilbert para dar cuenta de los fundamentos de las matemáticas. Para los problemas relativos a la completitud y la consistencia, véase Gödel 1977, pp. 595–596. Para el problema relativo a la decidibilidad, véanse Tarski 2014a, Church 1936 y Turing 1937.

fácil, porque parecería que las proposiciones no sujetas a ningún tipo de desafío son los silogismos y las relaciones de identidad. Pero los silogismos son meras tautologías en al menos un sentido del término "tautología": no nos dan información sobre el mundo, mientras que las relaciones de identidad son meras tautologías en al menos un sentido (el sentido de Ramsey) del término "tautología": concuerdan con todas las posibilidades de verdad.[11] Por otro lado, si las matemáticas no poseyeran un "rigor perfecto", entonces el que no se reduzcan a una "gigantesca tautología" no supondría ningún misterio; si, en cambio, las matemáticas se redujeran a una "gigantesca tautología", entonces el que posean un "rigor perfecto" no supondría ningún misterio.

Sin embargo, si conseguimos compatibilizar el hecho de que las matemáticas (puras) poseen un "rigor perfecto" indesafiable con el hecho de que las matemáticas (puras) no son una gigantesca tautología,[12] no sólo habremos mostrado que existen proposiciones matemáticas sintéticas que, no obstante, son perfectamente rigurosas, esto es, habremos mostrado que existen proposiciones matemáticas que nos dan informa-

[11] Según Ramsey: "la lógica se resuelve en tautologías, las matemáticas en identidades, la filosofía en definiciones; todo trivial, pero todo forma parte del trabajo vital de aclarar y organizar nuestro pensamiento" (Ramsey 2013, p. 264; a menos que se indique lo contrario, las traducciones de las citas son mías). Por otra parte, la suposición de que las relaciones de identidad concuerdan con todas las posibilidades de verdad es controvertible desde el punto de vista quineano (Harman 1983, p. 11), porque incluso la propiedad (si acaso es una propiedad) de cada cosa de ser idéntica a sí misma puede ser una propiedad de las cosas de *nuestro* mundo. En cambio, dicha suposición no es controvertible (es más, *es verdadera*) desde el punto de vista kripkeano (Kripke 1978, pp. 6–8), porque no puede ser el caso de que, por la ley de sustitutividad de los idénticos, si una cosa (objeto) x es idéntica a una cosa (objeto) y, x tenga una propiedad F y y no tenga dicha propiedad F.

[12] Es decir, encontrar proposiciones matemáticas *no tautológicas* que al mismo tiempo posean un rigor perfecto, un rigor, si se quiere, virtualmente imposible de desafiar tanto en sus métodos como en sus resultados. Aunque es claro que la rigurosidad científica depende de sus métodos, y no de sus resultados, también es claro que, para el caso de las matemáticas, la rigurosidad de sus diversos métodos no es, y nunca ha sido (y probablemente nunca será), homogénea. De esto da cuenta la propia historia de las matemáticas. Piénsese en el pobre desarrollo del concepto de número en la época de Euclides en comparación con el riquísimo avance que tuvo con Frege y Peano, o en la irrelevancia que tuvo el método axiomático euclidiano para el desarrollo del cálculo infinitesimal en los siglos XVII y XVIII y en la relevancia que posteriormente tuvo en las obras de Dedekind y de Cantor. Los intentos *à la* Bourbaki (Bourbaki 1950) de una formalización de las matemáticas según el método axiomático tienen justamente la intención de dejar de hablar de *matemáticas* y de comenzar a hablar de *una sola ciencia matemática* coherente en sus métodos y en sus propósitos.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

ción y que, no obstante, son virtualmente inmunes al desafío, sino también que *es incierto que todas las proposiciones matemáticas verdaderas sean proposiciones tautológicas*.

Para esto, digamos que un teorema matemático T es analítico[13] si y sólo si de T se deduce una serie de teoremas $U, V, W, \ldots$ tales que $T = U, T = V, T = W, \ldots$ y tales que $U = V, U = W, V = W, \ldots$ y la verdad de T resulta de los significados de las palabras empleadas al establecerlo. Si no se cumple que $U = V, U = W, V = W, \ldots$, entonces T no es un teorema analítico, incluso si se cumple que de T se deduzca una serie de teoremas $U, V, W, \ldots$ que repiten a T (o parte de T) en otros términos y que la verdad de T resulta de los significados de las palabras empleadas al establecerlo.

¿Es concebible algún caso en el que se cumpla que $T = U, T = V, T = W, \ldots$, pero no que $U = V, U = W, V = W, \ldots$? Respondo afirmativamente a esta pregunta: el teorema con infinitas proposiciones[14] $T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ es tal que, si tanto

$$U = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 5^2 = \frac{1}{6}5(5+1)(2 \times 5 + 1)$$

como

$$V = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 6^2 = \frac{1}{6}6(6+1)(2 \times 6 + 1)$$

como... etc.,

"repiten a T en otros términos", entonces tales deducciones cumplen la condición de que $T = U, T = V, T = W, \ldots$, pero no la condición de que $U = V, U = W, V = W, \ldots$, ya que (para estas dos instancias) $U = 55, V = 91$.

El teorema T es, entonces, una proposición matemática sintética perfectamente rigurosa: por un lado, desde T son aritméticamente (¿lógicamente?) deducibles tanto U como V como..., etc., y, por otro lado, las infinitas proposiciones del teorema $T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 =$

[13] Éste es el criterio que expuso Russell 1999, pp. 113–127 (omitiendo la condición de que $U = V, U = W, V = W \ldots$), a fin de dar cuenta del carácter analítico de los teoremas matemáticos. Al final de este trabajo Russell sostuvo que, si las proposiciones de la matemática y la lógica son afirmaciones sobre el uso correcto de cierto número pequeño de palabras, ello puede considerarse un "epitafio a Pitágoras". Esto puede ser así, aunque no creo que de lo expuesto por Russell se siga un "epitafio a Kant".

[14] El concepto de "infinitas proposiciones" se debe, hasta donde sé, a Hilbert 1977.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ no están, según la terminología kantiana, *pensadas ya* en el pensamiento de nuestro teorema T.[15]

Todo esto quizá sería convincente para aquellos filósofos que acepten tanto la doctrina kantiana como la quineana con respecto a lo analítico y lo sintético (aunque los quineanos seguramente rechazarían, de tajo, que *realmente exista* tal distinción). Pero aquellos filósofos que otorgan, como Putnam 1983 (pp. 5–19), un *sentido* (semántico) débil a la distinción entre lo analítico y lo sintético, así como aquellos filósofos que otorgan, como Carnap 1998 (pp. 23–37), un *sentido* (lógico) fuerte a dicha distinción, aún tendrían que vérselas con lo siguiente: ¿quién aceptaría, si no fuera una especie de demonio matemático laplaciano o de dios matemático agustiniano,[16] que el *resultado numérico* de

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2 = \frac{1}{6}100(100+1)(2 \times 100 + 1)$$

se encuentra *ya pensado* en el pensamiento de

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)?$$

Para este caso de un enunciado aritmético con infinitas proposiciones, el proceso de transformación tautológica, según el cual podemos cambiar la forma de la expresión sin alterar su significado, parece ser inútil: ¿quién osaría decir que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(n = 100)$$

es intercambiable sinonímicamente con

[15] En mi opinión, si se pretende "demostrar" el carácter sintético de los enunciados aritméticos, un enunciado aritmético con infinitas proposiciones se presta mucho más fácilmente para esta tarea que un enunciado aritmético con finitas proposiciones, como el célebre ejemplo de Kant de que "$7 + 5 = 12$", porque es muy controvertible la tesis de que "$7 + 5 = 12$" es una proposición sintética porque el concepto de "12" no se encuentra *ya pensado* al momento de pensar la unión de 7 y 5 (en especial si se piensan los números pequeños en términos de conjuntos, lo que no es una práctica psicológica extraña). Además, el ejemplo de Kant, *así como cualquier ejemplo que involucre un enunciado aritmético con finitas proposiciones*, está sujeto a la objeción de que "12" es sinónimo de "$7 + 5$" porque, mediante un proceso de transformación tautológica, podemos cambiar la forma de la expresión sin alterar su significado.

[16] Aunque se ha dicho (Hahn 1965) que un ser con un intelecto infinitamente poderoso no tendría interés ni en la lógica ni en las matemáticas.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)(n = 200)?$$

Una segunda objeción a lo que aquí he llamado "compromiso analítico o sintáctico-lógico", *i.e.*, el compromiso con la postura filosófica según la cual no hay, *y no puede haber*, proposiciones matemáticas *sintéticas*, tiene que ver con una de las dos preocupaciones que, según Benacerraf 1998, han motivado algunas consideraciones sobre la naturaleza de la *verdad matemática*, a saber, la preocupación de que la exposición de la verdad matemática engrane con una epistemología razonable.

Esta preocupación señalada por Benacerraf se refiere, aunque quizá no exclusivamente, a las exposiciones analíticas o sintáctico-lógicas de las matemáticas: éstas no consiguen conectar las condiciones de verdad de las proposiciones matemáticas con un análisis de cómo estas condiciones de verdad asignadas son *realmente* condiciones de su verdad.[17] Y no consiguen hacer esto porque "identifican" el *significado* con el *sentido* (en el sentido fregeano del término "sentido"). Éste es el caso, por ejemplo, de la tesis de Hempel con respecto a la naturaleza de la verdad matemática. Según Hempel, la proposición aritmética elemental de que $3 + 2 = 5$ es verdadera por razones similares por las que la afirmación de que ningún sexagenario tiene 45 años es verdadera: ambas son verdaderas simplemente "en virtud de definiciones o de estipulaciones similares que determinan el significado de los términos clave involucrados" (Hempel 1998, p. 379). Esto significa que su validación no requiere evidencia empírica o, de manera equivalente, que su verdad depende solamente de un análisis del significado atribuido a los términos que tienen lugar en la proposición de que $3 + 2 = 5$ y en la afirmación de que ningún sexagenario tiene 45 años. Ya que esta proposición y esta afirmación son enunciados analíticos, no transmiten información fáctica, y entonces pueden validarse sin recurrir a la evidencia empírica. (Existen serias dudas sobre todo esto. Primero, porque no hay evidencia suficiente a favor de la suposición de que haya un estrecha relación entre nuestra lógica y nuestro lenguaje natural

[17] Para el trivialismo platónico de Rayo, el dilema de Benacerraf, que consiste en sostener que lo que parece *necesario* para la verdad matemática hace *imposible* el conocimiento matemático (Hart 1991, p. 103), es un dilema falso. El dilema de Benacerraf puede también disolverse mediante lo que Stalnaker 2003, p. 43, llama "platonismo liberal", según el cual (en concordancia con las tesis de D.K. Lewis a este respecto) el platonismo sobre objetos matemáticos no implica que el conocimiento de tales objetos requiera la interacción causal con ellos.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

(Williamson 2016, pp. 73–182).[18] Segundo, porque no hay evidencia suficiente a favor de la suposición de que entre nuestra lógica y nuestro conocimiento empírico exista una diferencia epistemológica suficientemente relevante.)[19]

Pero ahora surge la cuestión: si según la postura de Hempel (u otras relevantemente similares) el significado de una proposición matemática tiene una íntima relación con su sentido, ¿qué relación tiene su sentido, su *significatividad*, con su *verdad*? Según Benacerraf, una relación cercana pero no íntima. (Yo digo que de la significatividad de una proposición p se sigue que p es verdadera *o* falsa, mientras que de la insignificatividad de p se sigue que p no es verdadera *ni* falsa.)

De esto da cuenta el hecho de que existen proposiciones matemáticas *significativas* que, no obstante, son falsas. Dos ejemplos de esto son la proposición "$1 + 1 = 1$", que es una proposición significativa porque, a pesar de su falsedad, comprendemos perfectamente qué quiere decirse con ella (a diferencia de proposiciones como "$1+ \rightarrow = 1$" o "$+ + 1 = \rightarrow$", que son claramente insignificativas),[20] así como la proposición "para cualesquiera números x y y, $x > y+1$" que, no obstante ser falsa si, por ejemplo, $x = 3$, $y = 4$, es significativa en cuanto que, una vez más, comprendemos perfectamente qué quiere decirse con ella.[21] También puede haber oraciones que entendemos pero que no tienen ningún sentido, como "El número de páginas de este ensayo es el mismo que una solución de la ecuación $x^3 + 2x - 3 = 0$".[22]

Más aún, la suposición (que he hecho aquí) de que una proposición significativa es verdadera *o* falsa no es trivial para la *lógica* de la lógica matemática en cuanto que, en ella, se da por sentado que una

[18] Para Davidson 1967 tampoco existe una conexión especial entre cómo funciona nuestro lenguaje y cómo funciona nuestro conocimiento.

[19] Recuérdese la máxima de Goodman 2004 (p. 100) que surge de lo que Rawls llamaría "equilibrio reflexivo": "Una regla se enmienda si da lugar a una inferencia que somos reacios a aceptar; una inferencia se rechaza si viola una regla que somos reacios a enmendar." Según la entiendo, la primera parte de la proposición 6.13 del *Tractatus* tiene el sentido señalado: "La lógica no es una teoría sino un retrato [*Bild*] especular del mundo." Davidson 1995 (pp. 285–287) replicó la tesis de Goodman de que los casos positivos de una hipótesis son enunciados que se derivan de la hipótesis por ejemplificación. Según Soames 2010 (pp. 56–57), Goodman no pudo resolver el problema de cómo entender un condicional contrafáctico porque no contaba con la maquinaria de la teoría de los (posibles) estados del mundo.

[20] Estos ejemplos son de von Neumann 1998, p. 63.

[21] Este ejemplo es de Tarski 2014b, p. 8.

[22] Este ejemplo, apenas modificado para nuestros propósitos, es de Wittgenstein 2003, p. 337.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

oración tiene significado si es verdadera *o* falsa: si una proposición P expresa *algo* sobre un objeto x (entonces denotamos a dicha proposición con $P(x)$), puede suceder que $P(x)$ tenga significado para todos los valores de x dentro del dominio z. Entonces, si x puede tomar valores arbitrarios en z, $P(x)$ será una función proposicional (Skolem 1977, pp. 512–524).[23] Pero si x es sustituido por otro valor y, tendremos una proposición que será verdadera *o* falsa según las circunstancias (*i.e.*, según las circunstancias que producirán que $P(y)$ sea verdadera *o* falsa).

En este sentido, creo que, así como para las ciencias empíricas una buena advertencia metodológica es decir que "Si lo verdadero es lo que tiene fundamentos, el fundamento no es verdadero, ni tampoco falso" (Wittgenstein 2015, p. 28) (donde el fundamento es la evidencia de una proposición, de tal manera que las evidencias "hablan a favor de las proposiciones" y la justificación de la evidencia es la fundamentación de una proposición), para las ciencias no empíricas una buena advertencia metodológica es decir que "Si lo verdadero *o* lo falso es lo que tiene significatividad, la significatividad no es verdadera ni tampoco falsa".

Una objeción al segundo compromiso

Toca el turno de discutir la postura filosófica según la cual no hay, *y no puede haber*, proposiciones *a posteriori* necesariamente verdaderas.[24] Este compromiso filosófico parte de la distinción lockeana entre necesidad *de re* y necesidad *de dicto* (o bien, entre esencia real y esencia nominal, o entre necesidad material y necesidad formal).[25] Los defensores de la necesidad *de re* sostienen que las cosas poseen esencias individuales independientemente de la manera como son designadas *e*

[23] En la filosofía matemática de Russell, una función proposicional puede ser verdadera en todos los casos, verdadera en algunos casos o verdadera en ningún caso. Más específicamente, un valor indeterminado de una función proposicional será necesario si la función siempre es verdadera, será posible si la función es a veces verdadera y será imposible si la función nunca es verdadera.

[24] Hay otra razón, distinta a la expuesta, para sostener que no puede haber *proposiciones* necesarias y *a posteriori* ni *proposiciones* contingentes y *a priori*. Esta razón tiene que ver con los modelos semánticos modales bidimensionales, que enfatizan la divergencia entre las distinciones modales y las epistemológicas.

[25] De acuerdo con Burgess 2012 (p. 48), una de las razones por las que muchos filósofos del siglo pasado se rehusaban a reconocer la necesidad metafísica era su deseo por evitar misterios, por trazar el origen de toda necesidad en nuestros conceptos.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

incluso conocidas,[26] mientras que los defensores de la necesidad *de dicto* (como lo fue el propio Locke) sostienen que las esencias no son más que ideas abstractas a las que se han anexado distintos nombres generales (o alguna formulación equivalente). La tesis ramseyana de que "tautología" y "verdad necesaria" son sinónimos intercambiables implica un compromiso filosófico con las modalidades *de dicto* porque no puede ser el caso de que, si una proposición p es *necesariamente* verdadera, $\neg p$ pueda concordar con *alguna* posibilidad de verdad.

La objeción a esta postura es la siguiente: puede ser el caso de que, si una proposición p es *necesariamente* verdadera, $\neg p$ pueda concordar con alguna posibilidad de verdad. Tomemos el clásico ejemplo de Putnam 1984 (pp. 17–23): "El agua es H_2O". Denotemos con p a esta proposición y con $\neg p$ a la proposición de que "El agua no es H_2O". Entonces es el caso de que p es necesariamente verdadera en sentido metafísico, pero contingentemente verdadera en los sentidos lógico y epistemológico. Esto porque, si el referente de *agua* es la fórmula química H_2O, y si identificamos el significado con la referencia, esto significa que una sustancia $\neq H_2O$ no es *realmente agua* (aunque se denote como "agua", aunque tenga todas las propiedades *sensitivas* del agua, etc.).[27] Pero p es una verdad lógica y epistemológicamente contingente porque $\neg p$ no es ni lógica ni epistemológicamente imposible. En forma paralela, $\neg p$ es una verdad lógica y epistemológicamente posible, pero metafísicamente imposible. Entonces p es necesariamente verdadera y, no obstante, $\neg p$ concuerda con la posibilidad de verdad lógica y con la posibilidad de verdad epistemológica.[28]

[26] Tal es la postura de Kripke, para quien existe no sólo una distinción entre "necesidad metafísica" y "necesidad lógica", sino también entre "necesidad metafísica" y "necesidad epistemológica", mientras que lo "necesario" y lo "*a priori*" no son, contrariamente a la doctrina kantiana, sinónimos intercambiables.

[27] Una crítica al supuesto (propio de las teorías externistas semánticas) de que las clases del lenguaje común y las clases científicas se alinean o pueden correlacionarse entre sí una a una (con particular atención en el caso del *agua*) se encuentra en Weisberg 2011.

[28] No es extraño sostener que, según la concepción de Frege-Russell, el significado se identifica con el sentido, mientras que, de acuerdo con la concepción de Kripke-el Putnam del realismo externo, el significado se identifica con la referencia. (Así como sostener que, según el "segundo" Wittgenstein, el significado se identifica con el uso.) A pesar de que aquí he adoptado dichas prácticas, ambas me parecen poco más que sobresimplificaciones de tales concepciones sobre el significado de "significado". Para la determinación y la transmisión de la referencia, por ejemplo, pueden resultar fundamentales las intenciones del hablante (Evans 1996, pp. 11–35), aunque esta aclaración no es del todo justa para la teoría de la referencia de

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

Según la "teoría modal de Ramsey", el enunciado "El agua es H_2O" tendría que ser necesariamente verdadero porque *concuerda* con todas las posibilidades de verdad: con la posibilidad de verdad metafísica, lógica y epistemológica.[29] Y, sin embargo, tal enunciado no es una tautología. En cambio, el enunciado "El agua no es H_2O" no concuerda con todas las posibilidades de verdad: concuerda con las posibilidades de verdad lógica y epistemológica, pero no con la posibilidad de verdad metafísica. Pero entonces dicho enunciado no es imposiblemente verdadero (contradictorio). Algo es metafísicamente necesario si y sólo si, cualquier cosa que fuese el caso (lógico, epistemológico, conceptual), aquello seguiría siendo el caso, mientras que algo es posible (lógica, epistemológica o conceptualmente) si y sólo si no es tal que no se daría en cualquier eventualidad (Williamson 2016, p. 214).

*¿El carácter peculiar de las proposiciones matemáticas es tal que uno sabe (*a priori*) que no pueden ser contingentemente verdaderas?*

Ahora es tiempo de intentar responder *negativamente* a esta pregunta kripkeana. Para ello es necesaria sólo una cosa: que se acepte que las proposiciones geométricas pertenecen a la clase de las proposiciones matemáticas. Aceptado esto, consideremos el estatus modal que tienen, por ejemplo, las siguientes proposiciones:

a. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

Kripke (Burgess y Burgess 2011, p. 76), y tampoco es del todo justa la interpretación común y corriente que se hace del "segundo" Wittgenstein a este respecto (Putnam 2006, p. 23).

[29] Y con otras posibilidades de verdad, como la "posibilidad de verdad conceptual". De acuerdo con las concepciones wittgensteiniana y putnamiana de "concepto", esta posibilidad de verdad conceptual tiene muy poca relevancia filosófica, porque la interpretación correcta de un concepto está fijada por su correcta aplicación (*la práctica fija la interpretación*), y no por imágenes mentales, intuiciones, etc. Aunque esto no significa que las imágenes mentales o las intuiciones sean epistemológicamente irrelevantes. Pero esto no puede ponerse en palabras porque, siguiendo a Pascal, la intuición (matemática, por ejemplo) se siente, pero no se expresa. El tipo de intuición que tengo en mente (que creo que es el tipo de intuición matemática que defendía Poincaré) tiene un carácter marcadamente *psicológico*, y no *lógico-filosófico*, y por lo tanto no puede identificarse con el intuicionismo matemático de Brouwer, Heyting, Weyl, Kolmogorov, Gentzen, Kleene, Dummett, etc., que sí tiene un carácter marcadamente lógico-filosófico y, por lo tanto, sí puede expresarse. En su disertación de doctorado, Turing 2014 (pp. 6, 38 y 41) recurrió continua y explícitamente a una noción de "intuición matemática" muy psicológica, esto es, a ideas intuitivas sin ninguna identificación particular.

b. La proporción de la circunferencia de un círculo con respecto a su diámetro es igual a π.

$\neg a$. La suma de los ángulos internos de un triángulo no es igual a 180°.

$\neg b$. La proporción de la circunferencia de un círculo con respecto a su diámetro no es igual a π.

Desde el punto de vista matemático, tanto a como b son verdaderas para la geometría euclidiana, pero falsas para la geometría hiperbólica (lobachevskiana) y para la geometría elíptica (riemanniana), donde, respectivamente, la suma de los ángulos internos de un triángulo es $<180°$ y $>180°$, así como donde, respectivamente, la proporción de la circunferencia de un círculo con respecto a su diámetro es $>\pi$ y $<\pi$.[30]

Desde un punto de vista modal, tanto a como b son proposiciones falsas en algún posible estado del mundo (lo que hace que $\neg a$ y $\neg b$ sean proposiciones verdaderas en algún posible estado del mundo);[31] tanto a como b son proposiciones cuyo contrario es posible (lo que hace que $\neg a$ y $\neg b$ sean proposiciones cuyo contrario es contingente);[32] tanto a como b no concuerdan con alguna posibilidad de verdad (lo que hace

[30] Se dice que el kantismo de Frege con respecto a la naturaleza de los postulados geométricos le impidió ver esto (ya que Frege mismo sostuvo que Kant descubrió la verdadera esencia de la geometría al haber llamado "sintéticas *a priori*" a sus verdades). Sin embargo, si la verdad de las leyes generales de una verdad geométrica *a priori* admite una prueba (empírica), aunque no la necesite, entonces puede suceder que esta verdad deje de ser *a priori* en el sentido kantiano (porque perfectamente puede, *empíricamente*, contradecir a la intuición). Ni kantiano en cuanto a la naturaleza de los postulados geométricos (como lo fue Frege), ni en cuanto a la naturaleza de los postulados aritméticos (como lo fue Poincaré), Bolzano 1999 (p. 223) sostiene que lo relevante en una prueba *aritmética* no es el *orden* de sus términos, sino el *conjunto* de sus términos, y entonces las proposiciones aritméticas no requieren la intuición (kantiana) del tiempo en absoluto. Creo que esta postura refuerza lo que dije antes sobre la (posible) naturaleza sintética de los juicios aritméticos.

[31] Según la teoría modal de Aristóteles. La noción de "posibles estados del mundo" tiene varias ventajas sobre la noción de "mundos posibles". Señalo tres de ellas. Primero, evita la molestia de tener que lidiar con el incauto pensamiento de que no puede haber mundos imposibles en absoluto. Segundo, también evita la molestia de tener que lidiar con la cuestión de "Si todos los mundos son posibles, ¿qué significa decir que sólo algunos son accesibles?" Tercero, y relacionado con los dos puntos anteriores, recurrir a la noción de un "posible estado del mundo" nos permite considerar algo que se llama un "mundo" en un modelo lógico no como una entidad concreta (contra Lewis), sino como una forma en que el mundo podría ser (pro Stalnaker). Para todo esto, véase Soames 2010, p. 52.

[32] Según la teoría modal de Leibniz.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

que $\neg a$ y $\neg b$ concuerden con alguna posibilidad de verdad).[33] De manera similar, ni $\neg a$ ni $\neg b$ implican contrafácticamente una contradicción,[34] y ni $\neg a$ ni $\neg b$ implican contrafácticamente su propia negación.[35]

Si de la manera habitual denotamos "necesariamente" con $\Box$ y "posiblemente" con $\Diamond$, no puede ser el caso que "imposiblemente a", porque entonces sería el caso que $\Box\neg a$. Tampoco puede ser el caso de que $\Box a$, porque entonces sería el caso de que $\Box\neg\neg a$. En realidad, son los casos de que "contingentemente a", que equivale a $\Diamond a \wedge \Diamond\neg a$, y de que "posiblemente no a", que equivale a $\Diamond\neg$no $a \wedge \Diamond\neg\neg$no a. Y lo mismo para el caso de b.

Así pues, parece que es cuando menos incierto que las proposiciones "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" y "La proporción de la circunferencia de un círculo con respecto a su diámetro es igual a π" (y otras proposiciones euclidianas, como las relativas al número de paralelas o a la medida de curvatura) sean proposiciones tautológicas o proposiciones que no pueden ser contingentemente verdaderas.

"La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" como una proposición que puede ser a priori

Uno de los dogmas más firmemente arraigados en las discusiones epistemológicas y metafísicas, al menos desde Leibniz, es la máxima según la cual *si algo es necesario, entonces se debe a un conocimiento* a priori. Esta máxima tiene su contraparte natural: *si algo es contingente, entonces se debe a un conocimiento* a posteriori. (En terminología leibniziana: si algo es tal que su contrario es imposible, entonces se debe a una verdad de razón, mientras que si algo es tal que su contrario es posible, entonces se debe a una verdad de hecho.) Este dogma filosófico alcanzó su máxima expresión en la filosofía pura de Kant:[36] si, según su doctrina, nuestro conocimiento está compuesto de lo que recibimos por medio de impresiones y de lo que nuestra propia facultad de conocer

[33] Según la teoría modal de Ramsey.

[34] Según la teoría modal de Lewis 1986, pp. 418–446.

[35] Según la teoría modal de Stalnaker 1968, pp. 98–112.

[36] Aunque Kripke llamó a este dogma una "práctica común contemporánea" durante la época de Kant, es claro que su *formulación* es marcadamente kantiana, del mismo modo que lo son las formulaciones del dogma señalado por Quine con respecto a que existe una escisión fundamental entre lo analítico y lo sintético y del dogma señalado por Davidson con respecto a que existe una dicotomía entre nuestros esquemas conceptuales y el contenido empírico.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

proporciona por sí misma, y si la experiencia sensible, por sí sola, no puede enseñarnos que algo *no pueda ser de otro modo*, entonces no sólo sucede que lo más que puede enseñarnos la experiencia son características o propiedades *contingentes* de las cosas, sino también que, ya que sí podemos pensar en proposiciones *necesarias*, el componente de nuestro conocimiento que nos permite hacer esto *tiene que ser* el referido a las categorías y a las intuiciones sensibles *a priori*. Este componente de nuestro conocimiento "se requiere para dar cuenta del carácter necesario y por lo tanto *a priori* de nuestro conocimiento del espacio tal como se materializa en la geometría. Dicho conocimiento no se deriva de la experiencia, y sin embargo nos dice cómo debe ser el espacio" (Stroud 1984, p. 149).

Creo que existen dos salidas del dogma según el cual *necesidad* y *aprioridad* son sinónimos intercambiables. Las llamaré, respectivamente, la *salida kripkeana* y la *salida fregeana*.

La salida kripkeana

La salida kripkeana consiste en admitir que una proposición necesaria bien puede ser *a priori*, pero rechazar que, por el hecho de ser necesaria, *tenga* que ser *a priori*. Kripke ejemplifica esta afirmación con la conjetura de Goldbach (que dice que todo número par ≥ 4 es la suma de dos números primos).[37] La verdad de esta conjetura no es cognoscible *a priori*,[38] sino sólo *a posteriori*.[39] Pero este conocimiento *a posteriori*, si

[37] Hay dos razones para creer que la conjetura de Goldbach es verdadera: la distribución aleatoria de los números primos y la evidencia numérica de los números pares hasta 10^{14}, que pueden escribirse como una suma de dos primos (Gowers 2008, p. 69).

[38] Aquí hay un argumento gramatical (¿conceptual?) a favor de Kripke: si la verdad de la conjetura de Goldbach fuese cognoscible *a priori*, no sería una conjetura, sino un teorema, es decir, "una verdad que se hace evidente mediante un proceso de *razonamiento* llamado *demostración*" (Legendre 2012, p. 12).

[39] Esto contrasta con la postura de Ayer 1981 (p. 6), para quien una cosa son las proposiciones de las matemáticas y de la lógica, y otra son las proposiciones sobre el comportamiento de las personas que se ocupan de las matemáticas o de la lógica. Así, para Ayer, las acciones de consultar una computadora o de preguntar a un matemático (estos ejemplos son de Kripke) para conocer una verdad matemática no tienen que ver con la verdad (o la falsedad) de las proposiciones matemáticas *en cuanto tales*. Más allá de esta disputa, la práctica de preguntar a una computadora ha resultado ser matemáticamente provechosa. Así se ha abordado exitosamente, por poner un ejemplo, el teorema de los cuatro colores (Courant y Robbins 1996, pp. 495–499).

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

llegara a mostrarnos la verdad de la conjetura, no podría, según Kripke, *no informarnos* ipso facto *que es necesaria*.

La salida fregeana

En las primeras páginas de *Los fundamentos de la aritmética*, Frege introdujo un criterio de distinción entre lo *a priori* y lo *a posteriori* según el cual dicha distinción no tiene que ver con el *contenido* de un juicio particular, sino con la *justificación* para hacer tal juicio: para que una verdad sea *a priori*, debe ser posible derivar su prueba exclusivamente de leyes generales que no necesitan *o* no admiten ninguna prueba (disyunción inclusiva), mientras que para que una verdad sea *a posteriori* debe ser imposible construir una prueba de ella sin incluir una apelación a los hechos (Frege 1980, p. 5).[40] Así, las verdades "$8 \times 7 = 56$" y "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" son *a priori* ya que es posible derivar su prueba de leyes generales que no necesitan prueba empírica alguna, aunque ello no significa que no *admitan* prueba empírica alguna: que $8 \times 7 = 56$ puede comprobarse empíricamente si contamos cuántas pelotas hay en 7 canastas que contienen, cada una, 8 pelotas; que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° puede comprobarse empíricamente si, siguiendo a Gauss, medimos empíricamente tales ángulos a fin de corroborar o refutar la creencia kantiana de que nuestra intuición no comete errores geométricos.

Podemos "traducir" esto como sigue: *un juicio* a priori *es un juicio cuya verdad no requiere una demostración fáctica,* mientras que *un juicio* a posteriori *es un juicio cuya verdad requiere una demostración fáctica*. Así pues, según esta concepción no interesan las condiciones psicológicas (o fisiológicas o físicas) de un juicio particular, sino la ausencia o presencia de un elemento fáctico en él. En pocas palabras: no interesa el *contenido empírico* de los juicios, sino la *justificación empírica* para hacerlos.

Considérese el enunciado "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" a la luz de esta concepción fregeana. Incluso si se supone que la verdad o falsedad de este enunciado —y de los enunciados euclidianos en general— es una cuestión hipotética o de

[40] Estos criterios son plenamente concordantes con el aparente antipsicologismo de Frege. Para Russell 1996 (p. 503), su antipsicologismo nunca fue muy claro, porque Frege introdujo elementos psicológicos al describir el juicio como el reconocimiento de la verdad.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

hecho, y no una cuestión necesaria o de razón,[41] sigue siendo cierto que es un enunciado *a priori* según nuestra definición, es decir, es un enunciado cuya verdad no requiere una demostración fáctica porque es perfectamente posible dar cuenta de su verdad mediante procedimientos estrictamente racionales. (No es, dirían Gauss y Riemann, un enunciado *a priori* según la definición clásica, "estándar", por así llamarle, de lo *a priori*, esto es, como independiente en un grado significativo de la experiencia sensible.) Pero del hecho de que *pueda* ser *a priori* no se sigue que *tenga* que ser *a priori*, porque uno puede demostrar *a posteriori* la verdad (o falsedad) del enunciado "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" si lleva a cabo, como en su momento se dice que hizo Gauss,[42] una investigación *empírica* sobre la estructura geométrica del espacio. Nótese que nuestra definición de lo *a priori* es compatible con la tesis kripkeana según la cual hay juicios que, a pesar de *poder* ser comprobados apriorísticamente, no *tienen* que ser comprobados apriorísticamente.[43]

La relevancia epistemológica de la distinción entre lo *a priori* y lo *a posteriori*

Para algunos filósofos, la distinción entre lo *a priori* y lo *a posteriori* es epistemológicamente inútil porque resolver la cuestión de si una

[41] Como lo han sostenido no sólo Gauss y Riemann, sino también otros matemáticos, como Newton y von Helmholtz. Para Newton 2011 (p. 6), la geometría está fundada en la mecánica práctica. Para von Helmholtz (*cfr.* Weyl 2009, p. 133), la geometría euclidiana no es *a priori* a pesar de la premisa kantiana de que el espacio es "forma pura de la intuición". Una postura "cercana" a Kant fue la de Arquímedes, para quien las demostraciones mecánicas no debían buscarse "sin ninguna noción previa", tal como lo expuso en su método de los teoremas mecánicos (Heath 2002, suplemento).

[42] Según Carnap 1995 (p. 135), Gauss nunca llevó a cabo esta prueba. Esto, sea como sea, no afecta a nuestro argumento.

[43] En este punto surge el enigma de que, si la investigación empírica sobre la estructura geométrica del espacio muestra que el enunciado "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" es falso en algunos casos, entonces ¿cómo es posible que, a la vez, la verdad de dicho enunciado sea comprobable racionalmente? Creo que el enigma se disuelve al considerar la distinción de Einstein entre los teoremas geométricos acerca de la realidad, que no son certeros, y los teoremas geométricos que son certeros, que no son acerca de la realidad. Y no encuentro ninguna objeción a aplicar esta distinción a un mismo enunciado geométrico. En terminología kantiana, esta distinción significa que, si los teoremas geométricos son *sintéticos*, entonces no son *a priori*; y si son *a priori*, entonces no son *sintéticos* (*cfr.* Carnap 1995, p. 183).

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

proposición particular es *a priori* o *a posteriori* “produce muy poco entendimiento”,[44] es decir, *oscurece patrones epistémicos más profundos*, en cuanto que, por ejemplo, una proposición particular a la que se le haya designado como “*a priori*” puede contener experiencias olvidadas que, si bien no desempeñan un papel *evidencial* en la conformación de dicha proposición, sí desempeñan un papel *habilitador*.

Creo que esta sospecha sobre la significatividad epistemológica de la distinción entre lo *a priori* y lo *a posteriori* es válida para las definiciones clásicas, estándar, de lo *a priori* y lo *a posteriori*, pero no así para las definiciones no clásicas, no estándar, de lo *a priori* y lo *a posteriori*. En otras palabras, es válida para las definiciones (*à la* Kant) que ponen atención en los *contenidos empíricos* de las proposiciones, pero no para las definiciones (*à la* Frege) que ponen atención en las *justificaciones empíricas* de las proposiciones.

Para las definiciones que ponen atención en los contenidos empíricos, una proposición *a priori* es tal porque es independiente, en un grado significativo, de la experiencia sensible, mientras que una proposición *a posteriori* es tal porque es dependiente, en un grado significativo, de la experiencia sensible.

Pero, entonces, ¿cómo “determinar”, con respecto a la experiencia sensible, el grado de independencia o de dependencia de una proposición particular? Desde las definiciones clásicas o estándar de lo *a priori* y lo *a posteriori*, ¿“La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°” es un enunciado *a priori* o *a posteriori*? Si alguien responde que es *a priori*, entonces puede replicársele que, para el conocimiento de la verdad de dicho enunciado, la experiencia sensible ha desempeñado un papel habilitador, aunque no evidencial. Y si alguien responde que es *a posteriori*, podría replicársele que, para el conocimiento de la verdad de dicho enunciado, la experiencia sensible ha desempeñado un papel evidencial, aunque no habilitador.

Este “problema de indeterminación” no tiene lugar en la concepción fregeana de lo *a priori* y lo *a posteriori*. Si alguien responde que el enunciado “La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°” es *a priori*, le bastará con poder mostrar que la prueba de la verdad de este enunciado es derivable de leyes generales que por sí mismas no necesitan *o* no admiten ninguna prueba. El término “*o*” de este principio es más importante de lo que aparenta: si las leyes generales no necesitan *pero sí admiten* alguna prueba, entonces la verdad del enunciado *podrá* mostrarse apriorísticamente, pero no *tendrá que* mostrarse apriorísti-

[44] Ésta es, por ejemplo, la postura de Timothy Williamson.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

camente. Si, por el contrario, alguien responde que el enunciado "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°" es *a posteriori*, le bastará con poder mostrar que la prueba de la verdad de este enunciado necesariamente incluye una apelación a los hechos. (Ante esta respuesta, un "apriorista fregeano" podría replicar que, si bien la prueba de la verdad de este enunciado *puede* incluir una apelación a los hechos —trazando, por ejemplo, un triángulo en una hoja y sumando sus ángulos internos—, también puede comprobarse mediante procedimientos estrictamente racionales.)

La distinción fregeana entre lo *a priori* y lo *a posteriori* no es epistemológicamente inútil porque, si el criterio para sostener que dicha distinción es epistemológicamente inútil es que oscurece algunos patrones epistémicos relevantes, la distinción fregeana no puede oscurecer patrones epistémicos relevantes sencillamente porque no pone atención en ninguno de ellos.

El hecho de que según la doctrina kantiana todos los juicios científicos sean juicios sintéticos *a priori* se debe a que Kant se ocupó del contenido de los juicios y no de la justificación para hacerlos, de la que sí se ocupó Frege. De acuerdo con la perspectiva fregeana, todos los juicios de las ciencias *naturales* son juicios sintéticos *a posteriori*.[45] Para el caso de los juicios de las matemáticas (puras) en general, la perspectiva fregeana es relevantemente similar a la perspectiva que adoptaría tiempo después el positivismo lógico: las proposiciones de la lógica y de las matemáticas no tienen el mismo estatus que las hipótesis empíricas porque su validez no se determina de la misma manera.[46]

BIBLIOGRAFÍA

Ayer, A., 1981, *Proposiciones básicas*, trad. M.M. Valdés, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Benacerraf, P., 1998, "Mathematical Truth", en Benacerraf y Putnam 1998, pp. 403–420.

Benacerraf, P. y H. Putnam (comps.), 1998, *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, 2a. ed., Cambridge University Press, Cambridge.

[45] Aunque, dada la distinción fregeana entre "juzgar" y "pensar", lo adecuado sería hablar de "verdades sintéticas" y no de "juicios sintéticos".

[46] No es ninguna casualidad que tanto Frege como Ayer ocuparan buena parte de su tiempo en replicar la tesis de John Stuart Mill de que, como la validez de las proposiciones de la lógica y las matemáticas se determina de la misma manera que la validez de las hipótesis empíricas, entonces éstas y aquéllas tienen el mismo estatus.

Bolzano, B., 1999, "Contributions to a Better-Grounded Presentation of Mathematics", trad. S. Russ, en W. Ewald (comp.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. 1, Oxford University Press, Oxford, pp. 174–224.

Boolos, G., 1999, *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press, Cambridge.

Bourbaki, N., 1950, "The Architecture of Mathematics", *The American Mathematical Monthly*, vol. 57, no. 4, pp. 221–232.

Burgess, A. y J. Burgess, 2011, *Truth*, Princeton University Press, Princeton.

Burgess, J., 2012, *Philosophical Logic*, Princeton University Press, Princeton.

Carnap, R., 1995, *An Introduction to the Philosophy of Science*, Dover, Nueva York.

———, 1998, *Filosofía y sintaxis lógica*, trad. C. Molina, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Church, A., 1936, "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory", *American Journal of Mathematics*, vol. 58, no. 2, pp. 345–363.

Courant, R. y H. Robbins, 1996, *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, Nueva York.

Davidson, D., 1967, "Truth and Meaning", *Synthese*, vol. 17, no. 3, pp. 304–323.

———, 1995, *Ensayos sobre acciones y sucesos*, trad. O. Hansberg, J.A. Robles y M.M. Valdés, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM/Crítica, México/Barcelona.

Evans, G., 1996, *Ensayos filosóficos*, trad. A. Tomasini Bassols, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Frege, G., 1980, *The Foundations of Arithmetic: A Logico-Mathematical Enquiry into the Concept of Number*, trad. J.L. Austin, Northwestern University Press, Evanston.

Gödel, K., 1977, "Some Metamathematical Results on Completeness and Consistency", en van Heijenoort 1977, pp. 595–596.

Goodman, N., 2004, *Hecho, ficción y pronóstico*, trad. J. Rodríguez Marqueze, Síntesis, Madrid.

Gowers, T. (comp.), 2008, *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, Princeton.

Hahn, H., 1965, "Lógica, matemática y conocimiento de la naturaleza", en A. Ayer (comp.), *El positivismo lógico*, trad. L. Aldama, U. Frisch, C.N. Molina, F.M. Torner y R. Ruiz Harrel, Fondo de Cultura Económica, México, pp. 153–167.

Harman, G., 1983, *Significado y existencia en la filosofía de Quine*, trad. H. Margáin y C. Orozco, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Hart, W.D., 1991, "Benacerraf's Dilemma", *Crítica*, vol. 23, no. 68, pp. 87–103.

Heath, T., 2002, *The Works of Archimedes*, Dover, Nueva York.

Hempel, C., 1998, "On the Nature of Mathematical Truth", en Benacerraf y Putnam 1998, pp. 377–393.

Hilbert, D., 1977, "On the Infinite", en van Heijenoort 1977, pp. 369–392.

Kripke, S., 1978, *Identidad y necesidad*, trad. M.M. Valdés, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

———, 2005, *El nombrar y la necesidad*, trad. M.M. Valdés, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Legendre, A.M., 2012, *Elements of Geometry and Trigonometry*, Forgotten, Londres.

Lewis, D.K., 1986, *Philosophical Papers*, Oxford University Press, Oxford.

Locke, J., 1996, *An Essay Concerning Human Understanding*, Hackett, Indianápolis.

Newton, I., 2011, *Principios matemáticos de la filosofía natural*, trad. A. Escohotado, Tecnos, Madrid.

Poincaré, H., 2001, *The Value of Science. Essential Writings of Henri Poincaré*, ed. S.J. Gould, The Modern Library, Nueva York.

Putnam, H., 1983, *Lo analítico y lo sintético*, trad. M. Gorostiza, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

———, 1984, *El significado de "significado"*, trad. J.G. Flematti Alcalde, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

———, 2006, *El pragmatismo. Un debate abierto*, trad. R. Rosaspini Reynolds, Gedisa, Barcelona.

Ramsey, F.P., 2013, *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, Martino Publishing, Mansfield Centre, Connecticut.

Rayo, A., 2015, *La construcción del espacio de posibilidades*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Russell, B., 1996, *The Principles of Mathematics*, W.W. Norton, Nueva York.

———, 1999, *Análisis filosófico*, trad. F. Rodríguez Consuegra, Paidós, Barcelona.

———, 2010, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Digireads, Overland Park, Kansas.

Skolem, T., 1977, "On Mathematical Logic", en van Heijenoort 1977, pp. 508–524.

Soames, S., 2010, *Philosophy of Language*, Princeton University Press, Princeton.

Stalnaker, R., 2003, *Ways a World Might Be. Metaphysical and Anti-Metaphysical Essays*, Oxford University Press, Oxford.

———, 1968, "A Theory of Conditionals", *American Philosophical Quarterly Monographs Series 2* (*Studies in Logical Theory*), pp. 98–112.

Stroud, B., 1984, *The Significance of Philosophical Scepticism*, Oxford University Press, Oxford.

Tarski, A., 2014a, "A General Method in Proofs of Undecidability", en A. Mostowski, R. Robinson y A. Tarski, *Undecidable Theories. Studies in Logic and the Foundation of Mathematics*, Dover, Nueva York, pp. 3–35.

———, 2014b, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Dover, Nueva York.

Turing, A., 1937, "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, vol. 42, pp. 230–265.

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2019.82.1635

Turing, A., 2014, *Systems of Logic Based on Ordinals*, Seeley G. Mudd Manuscript Library, Princeton.
Van Heijenoort, J. (comp.), 1977, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
Von Neumann, J., 1998, "The Formalist Foundations of Mathematics", en Benacerraf y Putnam 1998, pp. 61–65.
Weisberg, M., 2011, "El agua *no* es H_2O", en D. Baird, L. McIntyre y E. Scerri (coords.), *Filosofía de la química: síntesis de una nueva disciplina*, trad. G. Noriega, Fondo de Cultura Económica, México, pp. 490–502.
Weyl, H., 2009, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, Princeton.
Williamson, T., 2016, *La filosofía de la filosofía*, trad. M.Á. Fernández Vargas, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.
Wittgenstein, L., 2003, *Investigaciones filosóficas*, trad. A. García Suárez y U. Moulines, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.
———, 2007, *Gramática filosófica*, trad. L.F. Segura, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.
———, 2009, *Tractatus logico-philosophicus*, trad. J. Muñoz e I. Reguera, Alianza, Madrid.
———, 2015, *Sobre la certeza*, trad. J.L. Prades y V. Raga, Gedisa, Barcelona.

Recibido el 12 de septiembre de 2017; revisado el 12 de abril de 2018 y el 9 de agosto de 2018; aceptado el 26 de diciembre de 2018.