Educação Matemática Debate
ISSN: 2526-6136
revista.emd@unimontes.br
Universidade Estadual de Montes Claros
Brasil

Costa, André Pereira da; Santos, Marilene Rosa dos
O pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele
Educação Matemática Debate, vol. 4, 2020, -, pp. 1-20
Universidade Estadual de Montes Claros
Brasil

DOI: https://doi.org/10.24116/emd.e202004

10.24116/emd.e202004 eISSN 2526-6136

Educação Matemática Debate

O pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele

The geometric thinking in Mathematics degree: an analysis in the light of Duval and Van-Hiele

André Pereira da Costa

Marilene Rosa dos Santos

Resumo: Nesta pesquisa, analisamos o pensamento geométrico de estudantes da licenciatura em Matemática de uma universidade em Pernambuco. Fundamentamo-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), que apresenta um modelo teórico sobre o funcionamento cognitivo no campo da Geometria e na teoria de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van-Hiele (1957), que indica um modelo de níveis de compreensão dos conceitos geométricos. Participaram da pesquisa 34 acadêmicos que já tinham cursando disciplinas relacionadas à Geometria. Esses participantes responderam uma questão que abordou o conceito de quadriláteros notáveis. Os resultados indicaram que quase a metade desses participantes atuava na apreensão perceptiva de Duval (1995) e no primeiro nível de Van-Hiele (1957), caracterizados pela identificação das figuras geométricas em um plano ou espaço por meio da aparência física. Concluímos que a articulação entre as teorias de Duval (1995) e de Van-Hiele (1957) possibilitou uma melhor compreensão do pensamento geométrico dos estudantes.

Palavras-chave: Duval. Van-Hiele. Quadriláteros. Pensamento Geométrico.

Abstract: In this research, we analyze the geometric thinking of undergraduate mathematics students from a university in Pernambuco. We are based on Duval's Theory of Semiotic Representation Records (1995), which presents a theoretical model on cognitive functioning in the field of geometry and Van-Hiele's (1957) theory of geometric thought development, which indicates a model of levels of understanding of geometric concepts. Participated in the research thirty-four academics who had already studied Geometry-related subjects. These participants answered a question that addressed the concept of remarkable quadrilaterals. The results indicated that almost half of these participants acted in the perceptual apprehension of Duval (1995) and in the first level of Van-Hiele (1957), characterized by the identification of geometric figures in a plane or space through physical appearance. We conclude that the articulation between the theories of Duval (1995) and Van-Hiele (1957) enabled a better understanding of the students' geometric thinking.

Keywords: Duval. Van-Hiele. Quadrilaterals. Geometric thinking.

André Pereira da Costa
Doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professor da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), *campus* Barreiras. Bahia, Brasil.
orcid.org/0000-0003-0303-8656
andre.costa@ufob.edu.br

Marilene Rosa dos Santos
Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Professora da Universidade de Pernambuco (UPE). Pernambuco, Brasil.
orcid.org/0000-0003-1409-1364
rosa.marilene@gmail.com

Recebido em 28/08/2019
Aceito em 06/09/2019
Publicado em 29/02/2020

1 Introdução

Por quase quarenta anos, a Geometria foi relegada a um segundo plano nas orientações curriculares, nos livros didáticos e nos cursos universitários de licenciatura, deixando um grande lastro conceitual nesse campo da Matemática, tanto para os professores, como para os alunos. Contudo, com o desenvolvimento das pesquisas em Educação Matemática e com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, no final da década de 1990, esse contexto, aos poucos, tem se transformado e o ensino da Geometria vem ganhando mais espaço nas escolas brasileiras.

Todavia, essa presença da Geometria na classe de Matemática do Brasil ainda tem ocorrido de forma tímida, pois dados de pesquisas referentes ao ensino e à aprendizagem desse saber matemático, como de Pereira da Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2017a; 2017b), e os resultados de avaliações em larga escala, em nível internacional (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA, 2015), em nível nacional (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB, 2015) e em estadual (Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco – SAEPE, 2015), mostram que alunos de diferentes níveis escolares da educação básica apresentam baixo desempenho nos itens que abordam conceitos da Geometria.

Outrossim, quando aumentamos a escolaridade, constatamos que discentes de licenciatura em Matemática (PEREIRA DA COSTA e ROSA DOS SANTOS, 2016; 2017a; 2017b) e professores de Matemática do ensino básico (PEREIRA DA COSTA e CÂMARA DOS SANTOS, 2016c; PEREIRA DA COSTA *et al.*, 2017; PEREIRA DA COSTA; ELOI e ANDRADE, 2017) ao responderem um teste sobre os quadriláteros notáveis planos, em geral, cometem o mesmo erro, sinalizando, assim, semelhantes dificuldades conceituais relacionadas à aprendizagem, o que fundamenta a demanda da realização de pesquisas sobre esse fenômeno.

Nesse sentido, vários pesquisadores e professores de Matemática brasileiros têm se dedicado de forma sistemática a investigar os reais motivos de os alunos do ensino básico apresentarem baixos desempenhos, no que se refere ao campo geométrico e, em consequência, o modo como ele tem sido abordado em sala de aula, em diferentes níveis escolares do país.

Como exemplo disso, alguns desses educadores matemáticos (SENA e DORNELES, 2013; CONCEIÇÃO e OLIVEIRA, 2014; REZENDE, 2015; MORETTI, 2017; PEREIRA DA COSTA e ROSA DOS SANTOS, 2017a, 2019) têm sinalizado, que o mínimo se tem abordado sobre Geometria em sala de aula no ensino básico, e que muitos docentes não se sentem confortáveis em ensinar com esse campo matemático em sua prática docente, principalmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nessa pesquisa[1] pretendemos centrar nosso enfoque na análise do pensamento geométrico de um grupo de licenciandos em Matemática, que serão futuros professores da educação básica. Para isso, nos questionamos: Será que esses estudantes, após cursarem disciplinas referentes aos conteúdos geométricos, apresentam um pensamento geométrico que os possibilitasse ensinar Geometria de forma adequada no ensino básico?

De acordo com esse cerne, decidimos por limitar o núcleo do estudo e elegemos os quadriláteros notáveis planos como objeto matemático a ser estudado. É importante destacar que, com base nos documentos curriculares de Matemática (BRASIL, 1998; 2018; PERNAMBUCO, 2012), a sistematização desse conceito deve ocorrer no 6º ano do Ensino Fundamental brasileiro. Dessa forma, alunos de licenciatura em Matemática devem ter familiaridade e compreensão desse objeto de conhecimento.

Para tanto, fundamentamo-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida por Duval (1995), em que se apresenta um modelo teórico para o entendimento do funcionamento cognitivo no campo da Geometria, e na Teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico, proposta por Van-Hiele (1957), em que se indica um modelo teórico de níveis de compreensão dos conceitos geométricos.

Em razão disso, nosso objetivo geral é analisar o pensamento geométrico de estudantes de uma licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior do Estado de Pernambuco, em relação a um problema que envolveu o conceito de quadriláteros notáveis planos. De forma mais específica, buscamos caracterizar o pensamento geométrico desses futuros professores a luz das teorias desenvolvidas por Duval e Van-Hiele.

2 A teoria desenvolvida por Duval

A teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval analisa o funcionamento da cognição vinculado, sobretudo, à atividade matemática e à problemática relacionada à sua aprendizagem. Tendo por base as dificuldades

[1] Este artigo é fruto de ampliação da discussão e análise de um trabalho apresentado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática, realizado em 2016.

apresentadas pelos alunos do ensino básico no ensino da Matemática, Duval faz uma análise dessas dificuldades a partir de uma abordagem cognitiva. Assim, para o autor, por meio da descrição do funcionamento cognitivo, o estudante poderá desenvolver a compreensão, a operação e o controle da variedade de processos em Matemática que são abordados na sala de aula.

Para Duval (1995), a Matemática é uma idealização, isto é, uma construção mental, que não existe na realidade prática, mas apenas no mundo platônico. Além disso, o acesso à Matemática só é possível por meio das representações dos seus objetos. Dessa forma, para que o aluno produza uma compreensão do campo matemático, é necessário que ele realize a diferenciação entre a representação e o objeto da Matemática. Se o estudante considera a representação como o próprio objeto matemático, isso acaba gerando um lastro contínuo de entendimento.

Com base nessa teoria, as representações são classificadas em mentais, internas (ou computacionais) e semióticas:

> as mentais consistem num conjunto de imagens e concepções que uma pessoa pode ter sobre um objeto ou sobre uma situação. As computacionais são caracterizadas pela execução automática de uma tarefa, a fim de produzir uma resposta adaptada à situação. As representações semióticas, por sua vez, são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento. (PIROLA, 2012, p. 30)

Conforme Duval (1995), as representações semióticas são fundamentais para a comunicação das representações mentais e, também, para a atividade cognitiva do pensamento humano. Logo, exerce uma função essencial na produção do pensamento matemático. O pesquisador indica que na Matemática existe uma ampla diversidade de representações semióticas, organizadas em quatro grupos: a linguagem natural, as escritas algébricas (e formais), as figuras geométricas e as representações gráficas.

Duval (1995) destaca que nas atividades de natureza matemática um único objeto matemático pode ser representado por diversos registros de representação. O contato e a vivência com vários registros favorecem, ao processo de aprendizagem, à compreensão e à produção de conhecimentos em Matemática. Por meio dessa variedade de alternativas para representação dos objetos matemáticos, o autor francês introduz duas importantes operações relacionadas à apreensão matemática: tratamento e conversão.

De acordo com Duval (1995), o tratamento é uma transformação que ocorre dentro de um mesmo registro de representação semiótica. Por exemplo, realizar um cálculo no mesmo sistema de escrita, resolver uma equação ou um sistema linear etc. Enquanto a conversão, é a mudança que ocorre quando um objeto matemático muda de uma representação semiótica para outra — do mesmo objeto em Matemática. Como exemplo disso, dada a função afim $f(x) = 2x + 3$ (representação algébrica), pede-se para construir seu gráfico (representação gráfica).

Nas diversas situações didáticas propostas em sala de aula, para que o aluno desenvolva compreensão com significado da Matemática, é necessário que ele realize tratamento e conversão dos objetos matemáticos:

> Além de transitar pelos diversos registros que representam os conceitos, é indispensável que o sujeito tenha a coordenação desses registros na resolução de um problema. Essa coordenação implica no reconhecimento do objeto matemático nos diferentes registros de representação e na compreensão de que todos esses registros podem se complementar no sentido de que um pode expressar características ou propriedades do objeto matemático que não se manifestam nitidamente em outro (PIROLA, 2012, p. 37).

Com relação à Geometria, Duval (1995) propõe um importante modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico por meio da noção de apreensões, com o qual é possível analisar como ocorre o processo de aprendizagem desse campo da Matemática. O autor organizou as apreensões geométricas em quatro grupos: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. Como podemos verificar no Quadro 1, cada apreensão possui características que manifestam o funcionamento do pensamento em Geometria.

Quadro 1: Apreensões na aprendizagem da Geometria

Apreensões	**Caracterização**
Perceptiva	Permite identificar ou reconhecer, imediatamente, uma forma ou um objeto no plano e no espaço. Ela tem a função epistemológica de identificação dos objetos em duas ou três dimensões, sendo essa identificação realizada por meio de tratamentos cognitivos efetuados automaticamente e, portanto, inconscientemente. Essa apreensão está relacionada com o primeiro olhar e com a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica.
Discursiva	Está relacionada com uma denominação, uma legenda ou uma hipótese. Essa apreensão compreende a uma justificativa (de natureza dedutiva) das propriedades matemáticas de uma figura.

Operatória	Está relacionada com a capacidade de operar sobre as figuras: manipular, compor, transformar, reconfigurar, comparar objetos geométricos para resolver determinado problema de geometria. É centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis que estas modificações possibilitam.
Sequencial	É solicitada sempre que se deseja construir uma figura ou descrever a sua construção. Ela trata da ordem de construção de uma figura. Essa ordem não depende apenas de propriedades matemáticas da figura, mas também das necessidades técnicas das ferramentas utilizadas (régua, compasso e *software*, por exemplo).

Fonte: Pirola (2012, p. 43-47)

Diferentemente do modelo de Van-Hiele, no qual os níveis de pensamento geométrico são hierárquicos, no modelo de Duval não há hierarquia entre as apreensões geométricas, logo, ao resolver um problema em Geometria, um estudante poderá mobilizar mais de uma apreensão. É importante destacar que há relação de subordinação entre elas, dependendo do tipo de situação vivenciada.

3 A teoria de Van-Hiele

A teoria relativa ao desenvolvimento do pensamento geométrico foi proposta pelo casal holandês Pierre Marie Van-Hiele e Gina Van-Hiele Geodolf, em 1957, com a conclusão de suas teses de doutorado. Esses pesquisadores se basearam na teoria psicogenética desenvolvida pelo suíço Jean Piaget.

Em suas pesquisas, o casal Van-Hiele investigou sua própria realidade de sala de aula, tendo em vista que muitos de seus alunos tinham dificuldades de aprendizagem relativas à Geometria. Nessa direção, a questão central que orientou os estudos de Dina e de Pierre foi à seguinte: Por que muitos estudantes, que dominavam a maioria dos conceitos matemáticos, apresentavam dificuldades na aprendizagem de Geometria?

Ao analisar esse problema, Van-Hiele (1957) percebeu a existência de diversos níveis de desenvolvimento que formam o pensamento geométrico. Para o autor, o avanço entre os níveis se dá a partir de ordem hierárquica, na qual o estudante passa de um nível mais simples para um mais elaborado. Então, ao ter contato com os conceitos geométricos, por meio de tarefas organizadas adequadamente pelo professor, um aluno alcançará com mais sucesso do que outro que não teve as mesmas condições.

Ainda, como sinalizado pelo autor, o progresso do pensamento geométrico de um sujeito não depende de sua idade, nem de sua maturidade biológica. Tais características se apresentam como divergentes dos atributos da teoria de Piaget. Nessa direção, o que possibilita esse desenvolvimento é a ação pedagógica, como bem pontua Câmara dos Santos (2002, p. 7):

> [...] Van-Hiele evidencia que esse processo de construção do pensamento geométrico não seria ligado somente a uma maturação ontogenética, mas que ele é produto da ação educativa. A escolha das situações didáticas poderia agir não somente no sentido de catalisar o processo, mas também servir de agente limitador do desenvolvimento, podendo mesmo impedir o aluno de atingir os níveis mais elevados do processo. Seria o caso, por exemplo, de exigir que o aluno faça demonstrações correspondentes a um nível superior ao que lhe permitiria seu pensamento geométrico.

Logo, o que promove o desenvolvimento do pensamento geométrico é o contato com atividades adequadas, que, ao serem exploradas em sala de aula, contribuem com a aprendizagem em Geometria. Assim, Van-Hiele (1957) construiu um modelo teórico constituído por cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, iniciando com o reconhecimento dos objetos geométricos pelo seu aspecto global, finalizando com a análise de diferentes sistemas axiomáticos. No Quadro 2, podemos observar que cada nível apresenta características que explicitam a estrutura do pensamento geométrico.

Quadro 2: Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele

Níveis	Características	Exemplos
Primeiro nível	Os alunos percebem os objetos geométricos de acordo com a sua aparência física. Eles justificam suas produções por meio de considerações visuais, (protótipos visuais), sem usar explicitamente as propriedades desses objetos.	O estudante classifica os quadriláteros (ilustrados em recortes) em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
Segundo Nível	Os alunos são capazes de reconhecer os objetos geométricos por meio de suas propriedades. No entanto, eles usam um conjunto de propriedades necessárias para a identificação e a descrição desses objetos.	O estudante descreve um quadrado mobilizando suas propriedades: 4 lados, 4 ângulos retos, lados iguais, lados opostos paralelos.
Terceiro Nível	Os alunos são capazes de ordenar as propriedades de objetos geométricos, construir definições abstratas, distinguir as propriedades necessárias e as propriedades suficientes para determinar um conceito, além de entender deduções simples. No	O estudante descreve um quadrado pelas propriedades mínimas: 4 lados congruentes e 4 ângulos retos, logo, é um caso especial de retângulo e de losango. O quadrado também é um paralelogramo, pois também possui os lados opostos paralelos.

	entanto, demonstrações não estão incluídas.	
Quarto Nível	Os alunos são capazes de entender o papel dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva e desenvolver demonstrações originais ou, pelo menos, compreendê-las.	O estudante demonstra as propriedades dos quadriláteros notáveis por meio da congruência de triângulos.
Quinto Nível	Os alunos são capazes de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos e estudar várias geometrias na ausência de modelos concretos.	O estudante estabelece e demonstra teoremas em uma geometria finita.

Fonte: Jehin e Chenu (2000, p. 69)

Com base nesse quadro, podemos constatar que os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico estão ligados por meio de uma ordem hierárquica. Dessa maneira, para alcançar um nível mais avançado, o aluno deve ter passado por níveis mais simples. Conforme Van-Hiele (1957), cada nível possui características próprias, como seu vocabulário específico, além de relações com os objetos geométricos que se diferenciam entre os níveis.

> A teoria de Van-Hiele pode ser um guia de orientação aos processos de ensino e de aprendizagem da geometria, pois, a partir do conhecimento das características dos níveis de pensamento geométrico dos estudantes, o professor de matemática poderá organizar, de forma mais produtiva, as situações didáticas a serem vivenciadas em sala de aula, de forma a garantir uma melhor aprendizagem aos alunos (PEREIRA DA COSTA e CÂMARA DOS SANTOS, 2016c, p. 111).

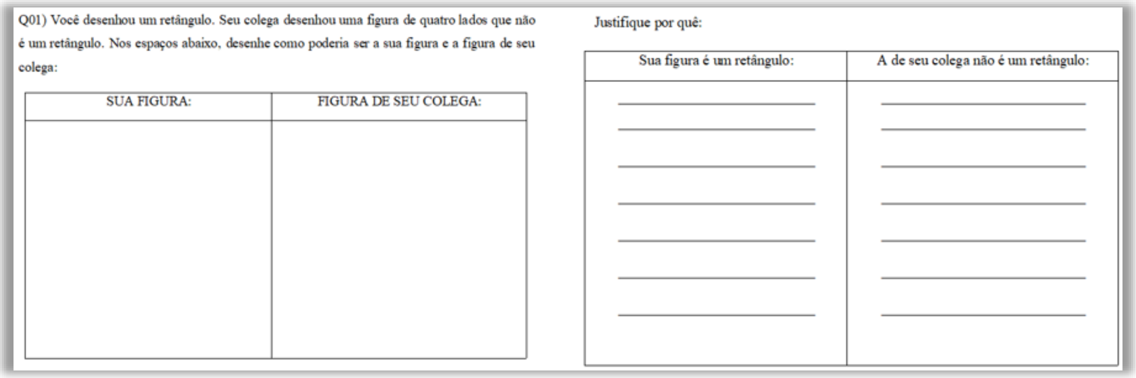
Considerando a teoria vanhieliana, um aluno de ensino superior, que sistematicamente vivencia o estudo dos objetos matemáticos, poderá ter domínio do processo dedutivo, desenvolver demonstrações, comparar axiomas e teoremas de diferentes sistemas, que são atributos do quarto nível e do quinto nível de pensamento geométrico.

4 Percurso metodológico

Este estudo apresenta uma abordagem qualitativa, pois concordamos com Triviños (1987) que discute que esse tipo de pesquisa busca analisar e compreender um fenômeno social em sua complexidade, sendo que no campo educacional, esse fenômeno é denominado de fenômeno educacional.

Participaram da pesquisa 34 estudantes de uma turma do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior, situada no Estado de Pernambuco. No momento da coleta de dados, eles estavam cursando o 6º período do curso e todos os estudantes já tinham cursando disciplinas relacionadas à Geometria. Como nossa finalidade não foi realizar uma avaliação do curso e nem da instituição, campo da pesquisa, optamos por não citar o nome da universidade e nem da cidade a qual se situa, mantendo, desse modo, o anonimato.

Como instrumento de coleta de dados, usamos um teste diagnóstico[2] composto por cinco questões que abordam o conceito de quadriláteros notáveis planos. Com base nas produções dos estudantes relativas ao teste, pudemos analisar o pensamento geométrico deles. Por questão de economia, nesse artigo, apresentamos a discussão sobre os dados construídos a partir da primeira questão, formada por dois itens. A seguir, apresentamos os enunciados dos itens.


Q01) Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega:

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:

Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:

(a) primeiro momento (b) segundo momento

Figura 1: Extrato da questão do teste analisada (CÂMARA DOS SANTOS, 2009)

Como é possível perceber na Figura 1(a), no primeiro momento a questão solicitou que os licenciandos produzissem um retângulo e, em seguida, deveriam construir uma figura de quatro lados que não fosse um retângulo. No segundo momento, conforme ilustrado pela Figura 1(b), os estudantes deveriam justificar suas produções. O objetivo, aqui, foi verificar os critérios utilizados pelos participantes na diferenciação das duas figuras.

Dessa maneira, analisamos tanto as construções como as justificativas a partir da Teoria de Duval e da Teoria de Van-Hiele, buscando caracterizar o pensamento geométrico dos participantes. Portanto, a análise completa da mencionada questão é apresentada no tópico que segue.

[2] Esse teste foi construído por Câmara dos Santos (2009).

5 Análise e discussão dos resultados

Como dito anteriormente, o item do teste analisado solicitou que os alunos produzissem um retângulo e, posteriormente, uma figura de quatro lados não classificada como um retângulo. No segundo momento da questão, os participantes deveriam explicar o motivo pelo qual a primeira figura construída era um retângulo e, ainda, porque a segunda figura não era um retângulo. Nessa fase, o objetivo foi verificar o que os licenciandos consideraram na justificativa — se fazia referência ao aspecto global da figura, às suas propriedades, entre outros —, se realizavam tratamento ou conversão entre os registros de representação semiótica etc. Na Tabela 1 encontramos as figuras geométricas consideradas "não retângulos" pelos licenciandos investigados (em porcentagem).

Tabela 1: Figuras geométricas escolhidas como não retângulos

Figuras Geométricas	Frequência
Quadrado	40%
Trapézio	21%
Paralelogramo Oblíquo	18%
Losango (Não Quadrado)	12%
Trapezoide	6%
Quadrilátero Não Notável	3%

Fonte: Dados da Pesquisa

Pela tabela, podemos observar que cerca de dois quintos dos estudantes de Licenciatura em Matemática identificaram o quadrado como "não retângulo", ou seja, 40%, em média, do total não reconhecem o quadrado um paralelogramo que é retângulo, logo, não realizaram conversão entre os registros de representação semiótica — língua natural e figura geométrica. Esse dado parece apresentar que os estudantes consideraram somente a aparência global na produção das figuras. Isto é, para esses licenciandos, os dois tipos de quadriláteros notáveis — retângulo e quadrado — apresentam divergência em suas aparências físicas. Tais aspectos correspondem à apreensão perceptiva de Duval (1995) e ao primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele (1957).

Analisando os protocolos dos licenciandos, notamos que o estudante L1 construiu um retângulo e um quadrado em posição padrão, que em geral é mais abordado em sala de aula na escola básica. Nessa situação, fica bem claro que esse discente não conseguiu perceber que o quadrado é um retângulo, visto que possui ângulos retos, então, não realizou conversão segundo Duval, como podemos perceber na Figura 2.

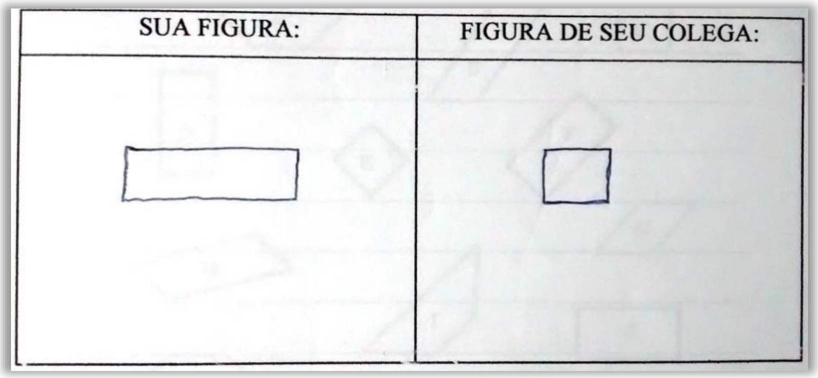


Figura 2: Produção do estudante L1 referente ao primeiro momento da questão (Dados da Pesquisa)

Resultado semelhante foi evidenciado em pesquisas desenvolvidas com estudantes do ensino básico, sobretudo, com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental (PEREIRA DA COSTA e CÂMARA DOS SANTOS, 2015b; PEREIRA DA COSTA, 2016; 2019) e com estudantes do Ensino Médio (PEREIRA DA COSTA e CÂMARA DOS SANTOS, 2015a; PEREIRA DA COSTA, 2019). Isto é, estudantes de licenciatura em Matemática apresentaram o mesmo tipo de pensamento geométrico que estudantes do ensino básico. Ainda, nessa questão investigada, verificamos que o quadrado foi o quadrilátero notável mais produzido entre os participantes, semelhante ao que foi evidenciando nos estudos de Câmara dos Santos (2001), de Pereira da Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b) e de Pereira da Costa (2019).

Em seguida, com uma média de 21%, a segunda figura mais evidente nas construções dos licenciandos como sendo “não retângulo” foi o trapézio. Como exemplo disso, ilustramos esse tipo de resposta com a construção do estudante L2 (Figura 3).

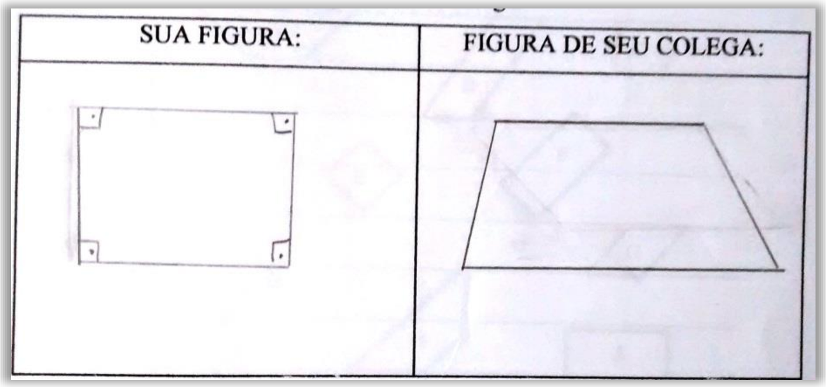


Figura 3: Produção do estudante L2 referente ao primeiro momento da questão (Dados da Pesquisa)

A produção de L2 parece mostrar que ele tende a procurar atributos específicos do trapézio como parâmetro para diferenciar as duas figuras geométricas, realizando conversão de ida entre a língua natural (enunciado do item) e a figura geométrica (desenho), com base na teoria de Duval (1995). Essa evidência mostra que esse licenciando não atua no primeiro nível de Van-Hiele (1957), pois o aspecto global não foi considerado na produção.

Em terceiro lugar, o paralelogramo oblíquo — com ângulos internos não retos — foi identificado como "não retângulo" por 18% dos participantes, como é possível notar na Figura 4, mostrando que realizou conversão entre duas representações semióticas — língua natural e figura geométrica — segundo Duval (1995). Aqui chamamos atenção para o fato de que o retângulo é o paralelogramo que apresenta ângulos retos.

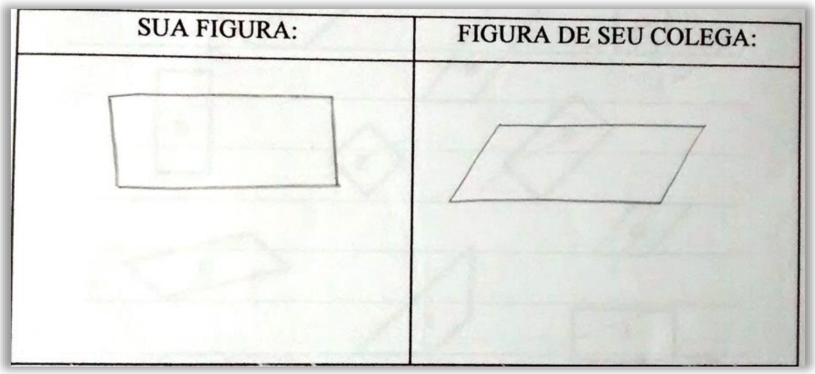


Figura 4: Produção do estudante L3 referente ao primeiro momento da questão (Dados da Pesquisa)

O licenciando L3 produziu dois tipos de paralelogramos: o primeiro com todos os ângulos retos (o retângulo) e o segundo com dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos (o paralelogramo oblíquo). Aqui, se considerarmos somente a produção desse estudante, não é possível afirmamos com certeza a hipótese de que ele considerou os ângulos internos dos quadriláteros notáveis como parâmetro de diferenciação. Desse modo, não é viável dizer que esse estudante mobilizou a apreensão discursiva de Duval, sendo necessário verificar sua justificativa (produção escrita).

O mesmo pode ser verificado com os níveis de Van-Hiele (1957). A única certeza é que L3 não se situa no primeiro nível de pensamento geométrico, caracterizado pela identificação das figuras geométricas a partir de sua aparência física.

Contudo, ao observamos os registros escritos deixados por L3, constatamos a confirmação da hipótese: *"Por que um retângulo é composto por quatro lados que formam ângulos de 90º e com medidas de lados opostos iguais, porém os adjacentes diferentes"* (justificativa para o retângulo) e *"Por que apesar dos lados paralelos possuírem a mesma medida, os lados adjacentes não formam 90º"* (explicação para o "não retângulo"). Aqui, como o aluno fez uso de características dos quadriláteros notáveis em sua explicação, então, ele atuou na apreensão discursiva proposta por Duval (1995).

Além disso, ao mencionar algumas propriedades dos quadriláteros, sem uma articulação clara entre elas, podemos afirmar que esse licenciando atua no segundo nível de pensamento geométrico proposto por Van-Hiele (1957).

Em quarto lugar, o losango padrão (não quadrado) foi produzido por 12% dos licenciandos (Figura 5); em quinto lugar está o trapezoide, com uma média de 6% (Figura 6); e, em sexto lugar, encontramos o quadrilátero não notável (um quadrilátero não convexo), com um índice de 3% do total (Figura 7). Mais uma vez, esses resultados parecem mostrar que há uma tendência entre os estudantes em buscarem características dessas figuras na diferenciação, mobilizando assim a apreensão discursiva e realizando conversão entre a língua natural e a figura geométrica, segundo Duval (1995).

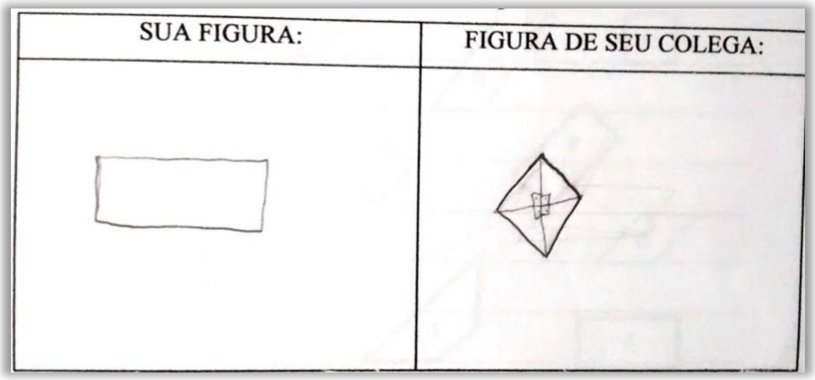


Figura 5: Produção do estudante L4 referente ao primeiro momento da questão (Dados da Pesquisa)

Pelos registros deixados pelo estudante L4, podemos observar que ele mobilizou as diagonais do losango como caminho para diferenciar as duas construções. Aqui, as evidências mostram que esse licenciando percebeu que as diagonais do losango são perpendiculares — o que não se verifica com o retângulo padrão —, realizando conversão. Esse comportamento é típico do segundo nível de Van-Hiele (1957) e da apreensão discursiva de Duval (1995).

No caso do estudante L5, ilustrado na Figura 6, que fez um retângulo e um trapezoide, percebemos que ele utilizou a medida dos comprimentos dos lados dos quadriláteros, notando, dessa maneira, que o retângulo possui lados opostos congruentes — o que não ocorre no trapezoide. Ainda, esse estudante considerou os ângulos das figuras: o retângulo tem ângulos retos e o trapezoide não possui esse atributo, assim, realizou conversão e atuou na apreensão geométrica discursiva conforme Duval (1995). Como fez uso das propriedades dos quadriláteros na construção, atuou no segundo nível de Van-Hiele (1957).

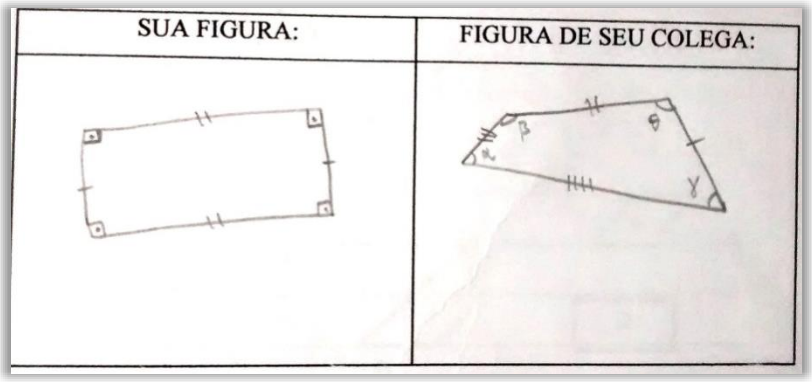


Figura 6: Produção do estudante L5 referente ao primeiro momento da questão (Dados da Pesquisa)

Além disso, evidenciamos estudantes que construíram um retângulo e um quadrilátero não notável, utilizando a congruência dos lados das figuras para distinguir os dois quadriláteros, aparentemente. Mais uma vez, esses licenciandos parecem ter mobilizando a apreensão discursiva, além de realizar conversão entre as representações semióticas dos quadriláteros mencionados, com base na teoria de Duval (1995). Ao que tudo indica, trabalhou no segundo nível de Van-Hiele (1957), pois utilizou as propriedades das figuras geométricas em sua construção. A Figura 7 ilustra esse caso:

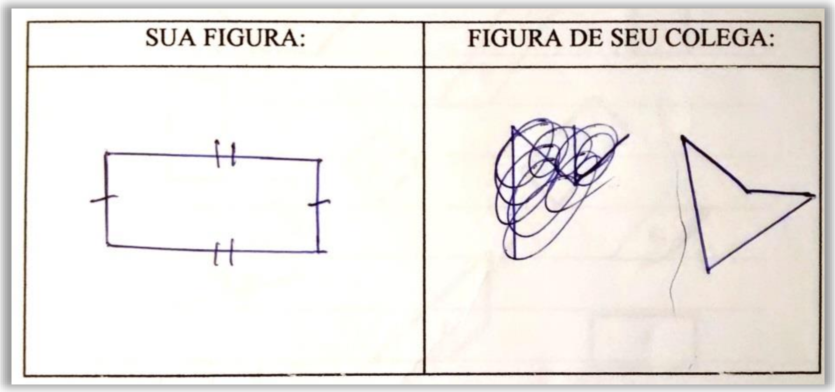
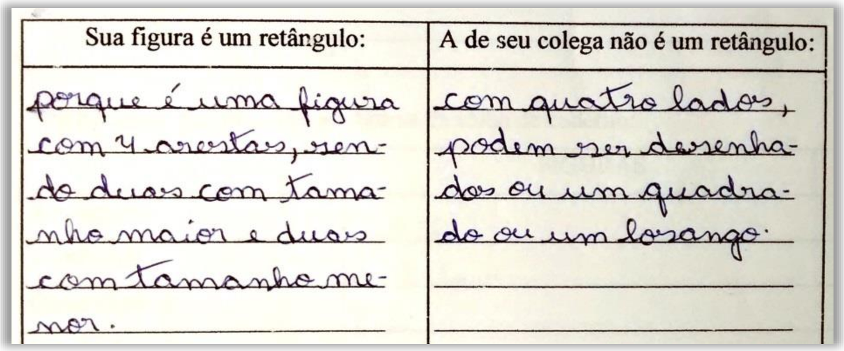


Figura 7: Produção do estudante L6 referente ao primeiro momento da questão (Dados da Pesquisa)

Nesse primeiro momento da questão analisada, como todos os estudantes realizaram construções, então mobilizaram a apreensão sequencial de Duval (1995). Todavia, não atuaram na apreensão operatória, pois não operaram sobre as figuras produzidas. Além disso, como não há clareza se articularam as propriedades dos quadriláteros nas produções, não foi possível verificar estudantes atuando no terceiro nível de Van-Hiele (1957).

No que se refere à segunda etapa da questão, evidenciamos que 32% em média, o que corresponde a quase um terço dos participantes, fez alusão exclusivamente da aparência física das figuras em seus registros escritos. Ou seja, não realizaram conversão de volta entre a figura geométrica e a língua materna, pois atuaram na apreensão perceptiva de Duval (1995) e no primeiro nível de Van-Hiele (1957), conforme ilustrado na Figura 8.

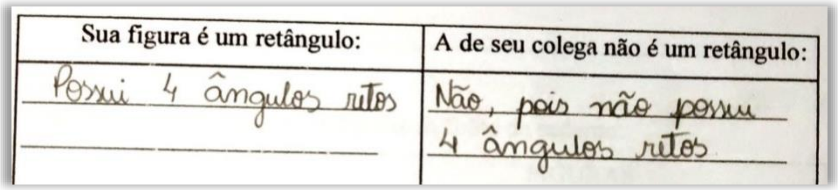


Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
porque é uma figura com 4 arestas, sendo duas com tamanho maior e duas com tamanho menor.	com quatro lados, podem ser desenhados ou um quadrado ou um losango.

Figura 8: Produção do estudante L7 referente ao segundo momento da questão (Dados da Pesquisa)

Pelos registros escritos, percebemos que mesmo o estudante L7 tenha feito uso de uma linguagem da Geometria Espacial, a partir da palavra "arestas", ao se referir aos lados da figura, sua justificativa não é a mais adequada. Esse licenciando explicou diferença entre as duas figuras tendo por base o aspecto global, dizendo que o retângulo possui "duas arestas (lados) com tamanho maior e duas com tamanho menor", deixando evidente que o quadrado ou um losango não têm esse atributo. Tal aspecto é uma característica da apreensão geométrica perceptiva de Duval (1995) e do primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele (1957), em que ocorre o reconhecimento das figuras geométricas em um espaço ou plano a partir de sua aparência física.

Um pouco menos da metade dos estudantes da licenciatura em Matemática, 44% em média, fizeram referência somente à definição habitual das figuras em suas falas, como apresentado na Figura 9.

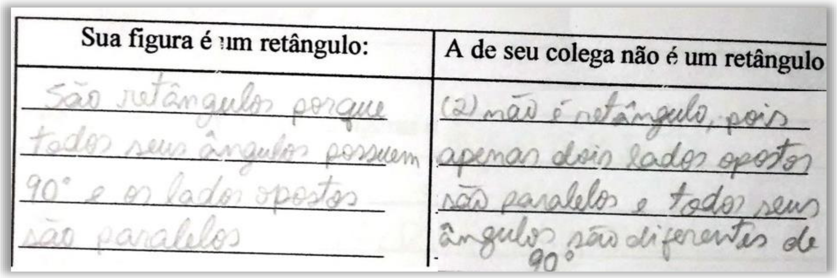


Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Possui 4 ângulos retos	Não, pois não possui 4 ângulos retos

Figura 9: Produção do estudante L8 referente ao segundo momento da questão (Dados da Pesquisa)

O estudante L8 fez um retângulo e um paralelogramo oblíquo, e justificou a produção a partir da definição do retângulo na distinção com o outro paralelogramo (não retângulo): o retângulo “possui quatro ângulos retos” e o paralelogramo “não possui quatro ângulos retos”. Aqui ficou evidente que esse estudante não mobilizou as propriedades desses quadriláteros notáveis em suas explicações, pois não atuou na apreensão discursiva, porém, esse estudante converteu os registros de representação semiótica — da figura geométrica para a língua natural —, pois o paralelogramo produzido não apresenta as características de um retângulo.

Enfim, 24% em média, o que corresponde a quase um quarto dos participantes, mobilizou as propriedades das figuras como forma para diferenciá-las, atuando, assim, na apreensão discursiva de Duval (1995), realizando ainda a conversão entre as representações semióticas, como elucidado na Figura 10.



Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo
São retângulos porque todos seus ângulos possuem 90° e os lados opostos são paralelos	(2) não é retângulo, pois apenas dois lados opostos são paralelos e todos seus ângulos são diferentes de 90°

Figura 10: Produção do estudante L9 referente ao segundo momento da questão (Dados da Pesquisa)

O estudante L9, ao construir um retângulo e um trapézio, em sua primeira fala mencionou a definição habitual: “todos seus ângulos possuem 90º” e uma das propriedades do retângulo: “os lados opostos são paralelos (congruentes)”. Posteriormente, argumentou que o trapézio “não é um retângulo, pois apenas dois lados opostos são paralelos” (elemento da definição) e “todos os seus ângulos são diferentes de 90º”. Esses aspectos parecem corresponder à apreensão discursiva de Duval (1995) e ao segundo nível de pensamento geométrico de Van-Hiele (1957), caracterizado pelo reconhecimento das figuras geométricas a partir de suas propriedades.

6 Considerações

A partir dos resultados obtidos com as produções dos estudantes de licenciatura em Matemática, pudemos verificar que quase a metade desses participantes se situa na apreensão perceptiva de Duval (1995) e no primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele (1957), caracterizados pela identificação das figuras geométricas em um plano ou espaço por meio da aparência física. Isso pode ser percebido nas falas dos estudantes relativas à produção de um retângulo e um quadrado, como por exemplo, no seguinte trecho “o retângulo possui dois lados maiores e dois menores, enquanto o quadrado e o losango não”.

Isso mostra que esses estudantes não realizaram conversão (de ida e de volta) entre as representações semióticas conforme Duval (1995), e ainda não são capazes de identificar os quadriláteros notáveis a partir de suas propriedades e nem de articulá-las entre si, atributo do terceiro nível de Van-Hiele (1957).

Constatamos que cerca de um terço dos partícipes estava atuando no segundo nível de Van-Hiele, marcado pelo reconhecimento das figuras como portadoras de propriedades, e 18% do total se localizava na fronteira entre os dois primeiros níveis. Também, esses alunos atuaram na apreensão geométrica discursiva segundo Duval (1995). Tal fenômeno pode ser observado, por ilustração, quando um licenciando fez um retângulo e um quadrado, contudo, no registro escrito utilizou a definição habitual dessas figuras geométricas planas como parâmetro diferenciador.

Notamos ainda que, predominantemente, os registros escritos utilizados nas justificativas abordam apenas a definição habitual do quadrilátero. Assim, o uso e aplicação das propriedades dessas figuras apresentaram um baixo índice nas produções e nas explicitações dos participantes.

Por fim, destacamos a importância do desenvolvimento de estudos que utilizem simultaneamente as teorias de Duval (1995) e de Van-Hiele (1957), pois essa articulação possibilita uma melhor compreensão do funcionamento cognitivo dos estudantes e, consequentemente, do pensamento geométrico. Tal fato é relevante para tomadas de decisão em sala de aula, com foco na aprendizagem dos conceitos em Geometria.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Sistema de Avaliação da Educação Básica: Matemática. Brasília: INEP, 2015.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. Effets de l´utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le developpement de la pensée géométrique. *In*: CONGRÈS INTERNATIONAL SUR CABRI-GÉOMÉTRE, 2, 2001, Montreal. Annales CabriWorld 2001. Montreal: CICAG, 2001, p.1-12.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. Evoluindo nos níveis de Van-Hiele: o caso dos quadriláteros. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE CABRI GÉOMÈTRE, 1, 2002, Santiago. Actas del IberoCabri 2002. Santiago: Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE) y Universidad Nacional Andrés Bello (UNAB), 2002, p. 1-10.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, Rute; GUIMARÃES, Gilda. (Org.). *A pesquisa em Educação Matemática:* repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009, p. 177-211.

CONCEIÇÃO, Diego Aluísio; OLIVEIRA, Kalline Paula. *Uma análise do nível do conhecimento geométrico dos professores de Matemática das escolas estaduais do município de São Vicente Ferrer.* 2014. 45f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) — Universidade de Pernambuco. Nazaré da Mata.

DURVAL, Raymond. *Sémiosis et pensée humaine:* registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

JEHIN, Monique Detheux; CHENU, Florent. Comment evaluer le raisonnement geometrique? *Cahiers du Service de Pédagogie Expérimentale*, v. 3, n. 4, p. 67-85, 2000.

MORETTI, Méricles Thadeu. *Linguagem natural e formal na semioesfera da aprendizagem matemática*: um exemplo em Geometria. Palestra realizada no VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática. Garanhuns: SBEM-PE, 2017.

OECD. Programme for International Student Assessment. Pisa 2015 – Results in Focus. Organisation for Economic Co-operation and Development: OECD, 2015.

PEREIRA DA COSTA, André; COSTA, Cristina Marinho; VIEIRA, Maria Sônia Leitão Melo; ELOI, Quércia Carvalho; ANDRADE, Vladimir Lira Veras Xavier; REGNIER, Jean-Claude. Estudo Exploratório do pensamento geométrico de professores de Matemática: caso de um grupo na

Paraíba (Brasil) a luz da A.S.I. In: RÉGNIER, Jean-Claude; GRAS, Régis; COUTURIER, Raphael; BODIN, Antonine. (Org.). *Analyse Statistique Implicative:* points de vue conceptuels, applicatifs et métaphoriques. Besançon: Université Bourgogne Franche-Comté, 2017, p. 209-228.

PEREIRA DA COSTA, André; ELOI, Quércia Carvalho; ANDRADE, Vladimir Lira Veras Xavier. O pensamento geométrico de professores de Matemática da educação básica: um estudo sob a luz da Análise de Similaridade. In: REGNIER, Jean-Claude; ANDRADE, Vladimir Lira Veras Xavier. (Org.). *A Análise Estatística Implicativa nas pesquisas no ensino de Ciências e Matemática.* Recife: Editora Universitária da UFRPE, 2017, p. 92-97.

PEREIRA DA COSTA, André. *A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico*: o caso dos quadriláteros notáveis. 2019. 401f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) — Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife

PEREIRA DA COSTA, André. *A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do Ensino Fundamental*: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 243f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) — Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife

PEREIRA DA COSTA, André; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2015, Tuxtla Gutiérrez. Anais da XIV CIAEM. CIAEM: Tuxtla Gutiérrez, 2015a, p. 1-9.

PEREIRA DA COSTA, André; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 3-17, 2016c.

PEREIRA DA COSTA, André; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino médio: um estudo envolvendo os quadriláteros. SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2015, Ilhéus. Anais do 4º SIPEMAT: Educação Matemática no Contexto da Diversidade Cultural. Ilhéus: UESC, 2015b, p. 998-1009.

PEREIRA DA COSTA, André; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. Níveis de pensamento geométrico de alunos do Ensino Médio no Estado de Pernambuco: um estudo sob o olhar vanhieliano. *Em Teia*, Recife, v. 7, n. 3, p.1-19, 2016a.

PEREIRA DA COSTA, André; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. O desenvolvimento do pensamento geométrico no estudo dos quadriláteros notáveis sob a ótica vanhieliana. *Educação Matemática em Foco*, Campina Grande, v. 6, n. 2, p. 1-31, jul./dez. 2017b.

PEREIRA DA COSTA, André; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. O pensamento geométrico de professores de Matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis. *Educação Online*, Rio de Janeiro, n. 22, p.108-126, maio/ago. 2016b.

PEREIRA DA COSTA, André; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. O uso do GeoGebra no ensino de quadriláteros notáveis: um estudo com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 10-24, 2017a.

PEREIRA DA COSTA, André; ROSA DOS SANTOS, Marilene. O pensamento geométrico de professores de Matemática em formação inicial. *Educação Matemática em Revista – RS*, Porto Alegre, v. 2, n. 18, p. 18-32, 2017b.

PEREIRA DA COSTA, André; ROSA DOS SANTOS, Marilene. Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele. *Educação Online,* Rio de Janeiro, n. 25, p.1-23, maio/ago. 2017a.

PEREIRA DA COSTA, André; ROSA DOS SANTOS, Marilene. O estudo de quadriláteros notáveis no livro didático de Matemática: um olhar para a organização matemática. *Revemop*, Ouro Preto, v. 1, n. 2, p. 229-247, maio/ago. 2019.

PEREIRA DA COSTA, André; ROSA DOS SANTOS, Marilene. Um estudo sobre o pensamento geométrico de estudantes de Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2016, São Paulo. Anais do XII ENEM: Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo: SBEM, 2016, p. 1-12.

PERNAMBUCO. Secretaria de Estado da Educação. *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco*: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife; Juiz de Fora: SEE; UFJF, 2012.

PERNAMBUCO. Secretaria de Estado da Educação de Pernambuco. *Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco*: Matemática. Revista da Gestão Escolar, Juiz de Fora, 2015.

PIROLA, Daiane Lodete. *Aprendizagem em Geometria nas séries iniciais:* uma possibilidade pela integração entre as apreensões em Geometria e as capacidades de percepção visual. 2012. 158f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências da Educação. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

REZENDE, Dayselane Pimenta Lopes. Ensino e aprendizagem de Geometria: uma proposta para o estudo de polígonos nos anos finais do Ensino Fundamental. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 19, 2015, Juiz de Fora. Anais do XIX EBRAPEM. Juiz de Fora: UFJF, 2015, p. 1-12.

SENA, Rebeca Moreira; DORNELES, Beatriz Vargas. Ensino de Geometria: rumos da pesquisa (1991 - 2011). *Revemat,* Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 138-155, 2013.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. *Introdução à pesquisa em Ciências Sociais:* a pesquisa qualitativa em Educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VAN-HIELE, Pierre Marie. *El problema de la comprensión:* en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la Geometria. 1957. 151f. Tesis (Doctorado en Matemáticas y Ciencias Naturales) — Universidad Real de Utrecht. Utrecht.