Selecciones Matemáticas
ISSN: 2411-1783
selecmat@unitru.edu.pe
Universidad Nacional de Trujillo
Perú

Ccolque T., Felipe Clímaco
Relativización de Tor para HH de Productos Cruzados
Selecciones Matemáticas, vol. 9, núm. 02, 2022, Agosto-Diciembre, pp. 336-356
Universidad Nacional de Trujillo
Perú

DOI: https://doi.org/10.17268/sel.mat.2022.02.10

Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2022; Vol. 9(2): 336-356.

# Relativization of Tor for HH of crossed products

# Relativización de Tor para HH de Productos Cruzados

Felipe Clímaco Ccolque T.

*Received, May. 01, 2022* *Accepted, Nov. 26, 2022*

How to cite this article:
Ccolque FC. *Relativization of Tor for HH of crossed products*. Selecciones Matemáticas. 2022;9(2):336–356. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.02.10

**Abstract**

*In this article, from the relativization of the functor Tor some properties of Hochschild homologies of crossed products of Hopf are determined. The Hochschild homology functor of a product crossed satisfies the properties of a left satellite relative to an associated projective class of epimorphisms of an additive functor.*

**Keywords**. Derived functors, natural equivalence of bifunctors, relative projective resolution, horseshoe lemma, Hochschild homologies.

**Resumen**

*En este artículo se determinan algunas propiedades de homologías de Hochschild de productos cruzados de Hopf a partir de la relativización del funtor Tor. El funtor de homología de Hochschild de un producto cruzado satisface las propiedades de un satélite izquierdo relativo a una clase proyectiva asociada de epimorfismos de un funtor aditivo.*

**Palabras clave**. Funtores derivados, equivalencia natural de bifuntores, resolución proyectiva relativa, lema de herradura, homologías de Hochschild.

**1. Introducción.** En 2010, G.Carboni, J.A.Guccione y J.J.Guccione, han obtenido en [1] un complejo mixto, más simple que el canónico que da homología de Hochschild, cíclica, negativa y periódica de un producto cruzado $E = A\#_f H$, donde $H$ es una álgebra de Hopf arbitraria y $f$ es un cociclo invertible por convolución con valores en una $K-$álgebra $A$. Según [1, página 849], la homología de Hochschild de $E$ es la homología de $E \otimes_{E^e} (X_*, d_*)$, donde $(X_*, d_*)$ es una resolución proyectiva relativa de $E$.

Los bifuntores $Tor$ y $\overline{Tor}$ se introdujeron en [2, III.8]. Se desea mostrar que la técnica utilizada para demostrar que los bifuntores $Ext^n$ y $\overline{Ext}^{\,n}$ son naturalmente equivalentes (ver [2, IV.8]), es aplicable a los correspondientes bifuntores $Tor$ para demostrar su equivalencia natural.
En la sección [2, IV.11] se describió brevemente el bifuntor $Tor_n^{\Lambda}(-,-)$ para $n = 0, 1, \ldots$, y se mencionó que $Tor_n^{\Lambda}$ es balanceado. Dado $\gamma : \Lambda \to \Lambda'$ un morfismo de anillos unitarios y $C$ un $\Lambda'$-módulo derecho. En la sección [2, IX.4] se introdujo el símbolo $Tor_n^{\gamma}(C, -)$ para denotar los funtores $\mathscr{E}_0'$-derivados izquierdos del funtor $C \otimes_{\Lambda'} (-) : \mathfrak{m}_{\Lambda'} \to \mathfrak{Ab}$.

En el artículo [3, § 2] fueron tratados los funtores relativos $Tor$ y $Ext$ como análogos a los funtores "$Tor$" y "$Ext$" de Cartan-Eilenberg [4], a partir de un subanillo $S$ de un anillo $R$ utilizando resoluciones $(R, S)$-proyectivas (o inyectivas) de $R$-módulos.

El propósito de este artículo es establecer las propiedades de homologías de Hochschild de productos cruzados de Hopf a partir de las nociones del funtor derivado relativo Tor. Se establecen como resultados principales Teorema 4.1, Teorema 4.2, Teorema 5.1 y Teorema 5.2. La presentación de este trabajo se hace

*Facultad de Ciencias, UNI-IMCA, Calle los Biólogos, Urb San Cesar, La Molina, Lima, Perú. (ccolque@imca.edu.pe).

en cinco secciones.
En la segunda sección, usando clase proyectiva de epimorfismos se aborda los funtores derivados relativos izquierdos de un funtor aditivo, y el lema de herradura.
En la tercera sección, usando los $\Lambda$-módulos derechos proyectivos y los $\Lambda$-módulos izquierdos proyectivos se desarrolla la equivalencia natural de los bifuntores $Tor_n^{\Lambda}$ y $\overline{Tor}_n^{\,\Lambda}$.
En la cuarta sección, dado un morfismo de anillos unitarios $\gamma : R \to S$ se adapta una teoría relativa para la equivalencia natural de los bifuntores relativos $Tor_n^{\gamma}$ y $\overline{Tor}_n^{\,\gamma}$.
Algunas características de $Tor$ relativo desarrolladas en [3] son reproducidas utilizando como herramienta principal la existencia de una clase proyectiva de epimorfismos en la categoría abeliana de $S$-módulos (Teorema 4.1) puesto que a un subanillo $R$ de un anillo $S$ se le puede asociar un morfismo de anillos unitarios $\gamma : R \to S$ tal que $1 \mapsto 1$.
En la quinta sección, se determinan propiedades de homología de Hochschild de productos cruzados.

**2. Clase Proyectiva de Epimorfismos.** Para abordar la relativización de la equivalencia natural necesitaremos algunas nociones de funtores derivados relativos izquierdos de un funtor aditivo de una categoría abeliana dotada de una clase proyectiva en una categoría abeliana.
Las ideas de las demostraciones del teorema, de la proposición y del lema de esta sección se puede encontrar en [5].

**Funtores $\mathscr{E}-$Derivados Izquierdos.** Sean $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana y $\mathscr{E}$ una clase de epimorfismos en $\mathfrak{A}$.

**Teorema 2.1.** [2, T IX.1.3] *Sean $\mathcal{K} : \cdots \longrightarrow K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\partial_1} K_0 \longrightarrow 0$ y $\mathcal{L} : \cdots \longrightarrow L_n \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\partial_1} L_0 \longrightarrow 0$ dos complejos de cadenas en $\mathfrak{A}$. Si $\mathcal{K}$ es $\mathscr{E}$-proyectivo y $\mathcal{L}$ es $\mathscr{E}$-acíclico, entonces cada morfismo $\alpha : H_0(\mathcal{K}) \to H_0(\mathcal{L})$ induce un morfismo de complejos de cadenas $\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$. Además, dos morfismos de complejos de cadenas inducidos por $\alpha$ son homotópicos.*

**Definición 2.1.** *Una clase cerrada $\mathscr{E}$ de epimorfismos de $\mathfrak{A}$ es proyectiva si para cada objeto $A$ de $\mathfrak{A}$ existe un epimorfismo $\varepsilon : P \to A$ en $\mathscr{E}$, donde $P$ es $\mathscr{E}-$proyectivo.*

**Proposición 2.1.** *Si $\mathscr{E}$ es una clase proyectiva, entonces cada objeto de $\mathfrak{A}$ posee una resolución $\mathscr{E}$-proyectiva.*

**Definición 2.2.** *Sea $T : (\mathfrak{A}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{B}$ un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas, donde $\mathscr{E}$ es una clase proyectiva en $\mathfrak{A}$. Dado $A \in |(\mathfrak{A}, \mathscr{E})|$, sea $\mathcal{P}$ una resolución $\mathscr{E}$-proyectiva de $A$ y*

$$T\mathcal{P} : \cdots \longrightarrow TP_{n+1} \xrightarrow{T\partial_{n+1}} TP_n \xrightarrow{T\partial_n} TP_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow TP_1 \xrightarrow{T\partial_1} TP_0 \longrightarrow 0$$

*un complejo de cadenas sobre $\mathfrak{B}$. Se define $L_n^{\mathscr{E}}T(A) = H_n(T\mathcal{P})$, $n = 0, 1, \ldots$.*

**Definición 2.3.** *Dado $\alpha \in (\mathfrak{A}, \mathscr{E})\,(A, A')$ y $\mathcal{P}'$ una resolución $\mathscr{E}$-proyectiva de $A'$, se define la aplicación $\alpha_* : L_n^{\mathscr{E}}T(A) \to L_n^{\mathscr{E}}T(A')$ por $\alpha_* = H_n\,(T\varphi)$, donde $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ es un morfismo de complejos de cadenas inducido por $\alpha$ .*

El teorema 2.1 garantiza que están bien dadas las dos definiciones anteriores. Así, queda definido el $n-$ésimo funtor $\mathscr{E}-$derivado izquierdo de $T$ denotado por $L_n^{\mathscr{E}}T : (\mathfrak{A}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{B}$ para $n = 0, 1, \ldots$.

La herramienta para obtener una sucesión exacta larga que involucra los funtores $\mathscr{E}-$derivados izquierdos es el resultado siguiente.

**Lema 2.1 (Lema de Herradura).** *Sea $\mathscr{E}$ una clase proyectiva en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ y $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ una sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta en $\mathfrak{A}$.
Si $\mathcal{P}' : \cdots \longrightarrow P'_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} P'_n \xrightarrow{\partial'_n} P'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'_1 \xrightarrow{\partial'_1} P'_0 \longrightarrow 0$ y
$\mathcal{P}'' : \cdots \longrightarrow P''_{n+1} \xrightarrow{\partial''_{n+1}} P''_n \xrightarrow{\partial''_n} P''_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P''_1 \xrightarrow{\partial''_1} P''_0 \longrightarrow 0$ son resoluciones $\mathscr{E}$-proyectivas de $A'$ y $A''$, respectivamente; entonces existe una resolución $\mathscr{E}$-proyectiva $\mathcal{P}$ de $A$ tal que
$\mathcal{P}' \rightarrowtail \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{P}''$ es una sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta de complejos de cadenas donde $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \oplus \mathcal{P}''$ y tal*

*que el diagrama siguiente es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1' \arrow[r] \arrow[d, "\partial_1'"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\partial_1"] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d, "\partial_1''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "\imath_0"] \arrow[d, two heads, "\varepsilon'"] & P_0 \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, two heads, "\varepsilon"] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\varepsilon''"] \arrow[dl, dashed, "\exists\psi_0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\beta"] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

**Proposición 2.2.** *Sea $T : (\mathfrak{A}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{B}$ un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas, donde $\mathscr{E}$ es una clase proyectiva en $\mathfrak{A}$, entonces $L_n^{\mathscr{E}}T : (\mathfrak{A}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{B}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ es un funtor covariante aditivo.*

*Demostración:* Primero probemos que $L_n^{\mathscr{E}}T$ es un funtor covariante.
Dado un objeto $A$ en $(\mathfrak{A}, \mathscr{E})$, se obtiene un objeto $L_n^{\mathscr{E}}T(A) = H_n(T\mathcal{P})$ en $\mathfrak{B}$.

Dado un morfismo $\alpha : A \to A'$ en $(\mathfrak{A}, \mathscr{E})$, se obtiene un morfismo $\alpha_* : L_n^{\mathscr{E}}T(A) \to L_n^{\mathscr{E}}T(A')$ en $\mathfrak{B}$ tal que $\alpha_* = H_n(T\varphi)$ .
Claramente $L_n^{\mathscr{E}}T : (\mathfrak{A}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{B}$ satisface los dos axiomas de funtores:
**FUN1.** $L_n^{\mathscr{E}}T(1_A) = 1_{L_n^{\mathscr{E}}T(A)}$ para todo $A \in |(\mathfrak{A}, \mathscr{E})|$.
**FUN 2.** $L_n^{\mathscr{E}}T(\beta\alpha) = L_n^{\mathscr{E}}T(\beta)L_n^{\mathscr{E}}T(\alpha)$ para todo los morfismos $\alpha : A \to A'$ y $\beta : A' \to A''$ en $(\mathfrak{A}, \mathscr{E})$.
Finalmente probemos que el funtor $L_n^{\mathscr{E}}T$ es aditivo verificando la igualdad
$L_n^{\mathscr{E}}T(A \oplus B) = L_n^{\mathscr{E}}T(A) \oplus L_n^{\mathscr{E}}T(B)$ para $A$ y $B$ objetos de $(\mathfrak{A}, \mathscr{E})$.
Por [2, P IX.1.2] se sabe que $0 \to A \to A \oplus B \to B \to 0$ es una sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta en $\mathfrak{A}$. Aplicando Proposición 2.1 y Lema 2.1 se obtiene una resolución $\mathscr{E}$-proyectiva $\mathcal{P}$ de $A \oplus B$ tal que $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \oplus \mathcal{P}''$.
Como el funtor $T$ es aditivo $TP_n = TP_n' \oplus TP_n''$ para $n \geq 0$, modo que $T\mathcal{P} = T\mathcal{P}' \oplus T\mathcal{P}''$.

Puesto que el $n$-ésimo funtor de Homología $H_n$ es aditivo, se sigue que
$L_n^{\mathscr{E}}T(A \oplus B) = H_n(T\mathcal{P}) = H_n(T\mathcal{P}' \oplus T\mathcal{P}'') = H_n(T\mathcal{P}') \oplus H_n(T\mathcal{P}'') = L_n^{\mathscr{E}}T(A) \oplus L_n^{\mathscr{E}}T(B)$. □

## 3. Equivalencia Natural de Bifuntores.

En esta sección, teniendo en cuenta [6, Corolario 1] se omite la demostración de algunas proposiciones ya que en la sección siguiente aparece ideas de la demostración o las demostraciones correspondientes usando la estructura homológica llamada clase proyectiva de epimorfismos en una categoría abeliana.

### 3.1. Los Bifuntores $Tor_n^{\Lambda}$.

Usando los $\Lambda$-módulos derechos proyectivos es posible mostrar la existencia de los bifuntores $Tor_n^{\Lambda}(-,-) : \mathfrak{m}_{\Lambda}^r \times \mathfrak{m}_{\Lambda}^l \to \mathfrak{Ab}$ para $n = 1, 2, \ldots$; que son covariantes en la primera variable y covariantes en la segunda variable (ver [2, IV.11]).

**Proposición 3.1.** *Si $B$ es un $\Lambda$-módulo izquierdo, entonces $(-) \otimes_{\Lambda} B : \mathfrak{m}_{\Lambda}^r \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante aditivo.*

**Proposición 3.2.** *Sea $B$ un $\Lambda$-módulo izquierdo, entonces el funtor $(-) \otimes_{\Lambda} B : \mathfrak{m}_{\Lambda}^r \to \mathfrak{Ab}$ es exacto derecho.*

*Demostración:* Sea $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de $\Lambda$-módulos derechos, entonces debemos probar que

$$A' \otimes_{\Lambda} B \xrightarrow{f_*} A \otimes_{\Lambda} B \xrightarrow{g_*} A'' \otimes_{\Lambda} B \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

es una sucesión exacta.

$i)$ La sucesión (3.1) es exacta en $A'' \otimes_{\Lambda} B$; es decir, $g_*$ es sobreyectiva.
$ii)$ La sucesión (3.1) es exacta en $A \otimes_{\Lambda} B$; es decir, $Im(f_*) = Ker(g_*)$ .

El hecho que $g_*f_* = (gf)_* = 0$ implica que $Im(f_*) \subseteq Ker(g_*)$.

Sea $E = Im(f_*)$, de la inclusión anterior $\overline{g} : \frac{A \otimes_{\Lambda} B}{E} \to A'' \otimes_{\Lambda} B$ dado por $\overline{g}(\overline{a \otimes b}) = g(a) \otimes b$ está bien definida (ver [7, Proposición 5.9]).
Sea $\overline{p} : A'' \otimes_{\Lambda} B \to \frac{A \otimes_{\Lambda} B}{E}$ dado por $\overline{p}(a'' \otimes b) = \overline{a \otimes b}$ si $a'' = g(a)$.
Si $a'' = g(a_1) = g(a_2)$, $a_1 - a_2 \in Ker(g) = Im(f)$, $a_1 - a_2 = f(a')$; de modo que
$a_1 \otimes b - a_2 \otimes b = f(a') \otimes b \in E$ y así $\overline{a_1 \otimes b} = \overline{a_2 \otimes b} = \overline{p}(a'' \otimes b)$. Esto quiere decir que $\overline{p}$ está bien definida. Claramente $\overline{p}\,\overline{g} = 1_{\frac{A \otimes_{\Lambda} B}{E}}$ y $\overline{g}\,\overline{p} = 1_{A'' \otimes_{\Lambda} B}$.

Por otro lado, $\dfrac{A\otimes_\Lambda B}{Ker(g_*)} \cong A''\otimes_\Lambda B \cong \dfrac{A\otimes_\Lambda B}{E}$.

Pero $\dfrac{A\otimes_\Lambda B}{Ker(g_*)} \cong \dfrac{A\otimes_\Lambda B/E}{Ker(g_*)/E}$, por lo tanto $Ker(g_*) = E = Im(f_*)$ .

□

Ahora, podemos definir los funtores derivados izquierdos de $(-)\otimes_\Lambda B$.

**Definición 3.1.** *El funtor* $Tor_n^\Lambda(-,B) : \mathfrak{m}_\Lambda^r \to \mathfrak{Ab}$ *se define como*

$$Tor_n^\Lambda(-,B) := L_n((-)\otimes_\Lambda B),\ n = 1,2,\dots\ .$$

*Esto significa que el grupo abeliano* $Tor_n^\Lambda(A,B)$ *es calculado eligiendo una resolución proyectiva* $\mathcal{P}$ *de* $A$ *y tomando la* $n$*-ésima homología del complejo de cadenas* $\mathcal{P}\otimes_\Lambda B$.

**Proposición 3.3.** *Si* $P$ *es un* $\Lambda$*-módulo derecho proyectivo y* $Q$ *es un* $\Lambda-$*módulo izquierdo proyectivo, entonces* $Tor_n^\Lambda(P,B) = 0 = Tor_n^\Lambda(A,Q)$ *para* $n = 1,2,\dots$ *.*

Dado $A$ un $\Delta$-módulo derecho y $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos izquierdos, obtenemos la $Tor$-sucesión exacta larga en la segunda variable

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^\Lambda(A,B') \longrightarrow Tor_n^\Lambda(A,B) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(A,B'') \xrightarrow{\omega_n} Tor_{n-1}^\Lambda(A,B') \longrightarrow \cdots \tag{3.2}$$

Dada una sucesión exacta corta $A \overset{\varphi}{\rightarrowtail} B \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} C$ de complejos de cadenas de $\Lambda$-módulos.
La definición de $\omega_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ se puede hacer explícitamente, como sigue:
Sea $[c] \in H_n(C)$, luego $c \in Z_n(C) = Ker\,\partial \subseteq C_n$

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, tail, "\varphi"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[d, "\partial"] \\ A_{n-1} \arrow[r, tail, "\varphi"] & B_{n-1} \arrow[r, two heads, "\psi"] & C_{n-1} \end{tikzcd}$$

Como $\psi$ es sobreyectiva, $\psi(b) = c$ para algún $b \in B_n$.
Del hecho que $c \in Ker\,\partial$ se tiene $\psi\partial b = \partial\psi(b) = \partial c = 0$, así $\partial b \in Ker\,\psi = Im\,\varphi$ y $\varphi\, a = \partial b$ para algún $a \in A_{n-1}$. Aplicando el operador $\partial$ a esta igualdad:

$$\varphi\partial a = \partial\varphi a = \partial\partial b = 0.$$

Luego $\varphi(\partial a) = 0$, siendo $\varphi$ monomorfismo $\partial a = 0$. Esto significa que $a \in Z_{n-1}(A)$ y por lo tanto determina $[a] \in H_{n-1}(A)$, de manera que $\omega_n$ es definido por $\omega_n[c] = [a]$.

**Proposición 3.4.** *Si damos un diagrama conmutativo de complejos de cadenas de* $\Lambda$*-módulos con filas sucesiones exactas cortas*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, tail, "\varphi'"] & B' \arrow[r, two heads, "\psi'"] & C' \end{tikzcd}$$

*entonces el diagrama de homologías*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_n(B) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_n(C) \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(A') \arrow[r, "\varphi'_*"] & H_n(B') \arrow[r, "\psi'_*"] & H_n(C') \arrow[r, "\omega'_n"] & H_{n-1}(A') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

*es conmutativo.*

*Demostración:* Como el $n$-ésimo funtor de homología $H_n(-)$ es covariante, basta verificar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_n(C) \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\gamma_*"'] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ H_n(C') \arrow[r, "\omega'_n"] & H_{n-1}(A') \end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $[c] \in H_n(C)$, entonces $\omega_n[c] = [a]$, donde $a \in Ker\,\partial_{n-1}$, $\varphi_{n-1}a = \partial_n b$ y $\psi_n b = c$.

$$\begin{aligned} \alpha_*\omega_n[c] &= \alpha_*[a] \\ &= \alpha_*(a + Im\,\partial_n^A) = \alpha_{n-1}a + Im\,\partial_n^{A'} = [\alpha_{n-1}a]. \end{aligned}$$

Por otro lado $\gamma_*[c] \in H_n(C')$ y $\omega'_n\gamma_*[c] = \omega'_n[\gamma_n c]$.
Utilizando los diagramas conmutativos siguientes

$$\begin{tikzcd} b \in B_n \arrow[r, two heads, "\psi_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & C_n \ni c \arrow[d, "\beta_n"] \\ B'_n \arrow[r, two heads, "\psi'_n"] & C'_n \ni \gamma_n c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \in A_{n-1} \arrow[r, tail, "\varphi_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & B_{n-1} \arrow[d, "\beta_{n-1}"] \\ A'_{n-1} \arrow[r, tail, "\varphi'_{n-1}"] & B'_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \in B_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & B_{n-1} \arrow[d, "\beta_{n-1}"] \\ B'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & B'_{n-1} \end{tikzcd}$$

se obtiene que $\gamma_n c = \psi'_n(\beta_n b)$, $\beta_{n-1}\varphi_{n-1}a = \varphi'_{n-1}\alpha_{n-1}a$. Pero $\varphi_{n-1}a = \partial_n b$, luego $\beta_{n-1}\varphi_{n-1}a = \beta_{n-1}\partial_n b = \partial'_n\beta_n b$. Así, $\varphi'_{n-1}(\alpha_{n-1}a) = \partial'_n(\beta_n b)$. Puesto que $\alpha_{n-1}a \in Ker\, \partial'_{n-1}$, por definición $\omega'_n[\gamma_n c] = [\alpha_{n-1}a]$; de modo que $\omega'_n\gamma_*[c] = [\alpha_{n-1}a]$. Por lo tanto $\alpha_*\omega_n = \omega'_n\gamma_*$ . □

La sucesión (3.2) es natural con respecto a la primera variable y a la sucesión exacta corta en la segunda variable.

**Proposición 3.5.** *Sea $\alpha : A \to A'$ un morfismo de $\Lambda$-módulos derechos y sea*

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, tail, "\beta'"] \arrow[d, "\phi'"] & B \arrow[r, two heads, "\beta''"] \arrow[d, "\phi"] & B'' \arrow[d, "\phi''"] \\ C' \arrow[r, tail, "\vartheta'"] & C \arrow[r, two heads, "\vartheta''"] & C'' \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

*un diagrama conmutativo de $\Lambda$-módulos izquierdos con filas sucesiones exactas cortas. Entonces los diagramas siguientes son conmutativos :*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Tor_n^\Lambda(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & Tor_n^\Lambda(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & Tor_n^\Lambda(A,B'') \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & Tor_{n-1}^\Lambda(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Tor_n^\Lambda(A',B') \arrow[r] & Tor_n^\Lambda(A',B) \arrow[r] & Tor_n^\Lambda(A',B'') \arrow[r, "\omega_n"] & Tor_{n-1}^\Lambda(A',B') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Tor_n^\Lambda(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & Tor_n^\Lambda(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_*"] & Tor_n^\Lambda(A,B'') \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\phi''_*"'] & Tor_{n-1}^\Lambda(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Tor_n^\Lambda(A,C') \arrow[r] & Tor_n^\Lambda(A,C) \arrow[r] & Tor_n^\Lambda(A,C'') \arrow[r, "\omega_n"] & Tor_{n-1}^\Lambda(A,C') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

La prueba de la proposición siguiente proviene de [2, P IV.5.5]

**Proposición 3.6.** *Sea*

$$\mathcal{P} : \quad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & P_n \arrow[rr, "\partial_n"] \arrow[dr, two heads, "\varepsilon"'] & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & 0 \\ & & & R_n = Im\partial_n \arrow[ur, tail, "\mu"'] & & & & \end{tikzcd}$$

*una resolución proyectiva de un $\Lambda$-módulo derecho $A$, entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow Tor_n^\Lambda(A,B) \longrightarrow R_n \otimes_\Lambda B \xrightarrow{\mu_*} P_{n-1} \otimes_\Lambda B \ \text{ es exacta para } n \geq 1.$$

Sean $\mathfrak{C}_1$ y $\mathfrak{C}_2$ categorías. Sea $F : \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{D}$ un funtor de la categoría producto $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ en la categoría $\mathfrak{D}$. Entonces $F$ se llama bifuntor.

**Proposición 3.7.** *Sea $F : \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{D}$ un bifuntor. Dado $C_1 \in |\mathfrak{C}_1|$, $F$ determina un funtor $F_{C_1} : \mathfrak{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{D}$; dado $C_2 \in |\mathfrak{C}_2|$, $F$ determina un funtor $F_{C_2} : \mathfrak{C}_1 \longrightarrow \mathfrak{D}$. Si $\varphi_1 : C_1 \to C'_1$, $\varphi_2 : C_2 \to C'_2$ son morfismos, entonces el diagrama siguiente conmuta*

$$\begin{tikzcd} F(C_1,C_2) \arrow[r, "F_{C_2}(\varphi_1)"] \arrow[d, "F_{C_1}(\varphi_2)"'] & F(C'_1,C_2) \arrow[d, "F_{C'_1}(\varphi_2)"] \\ F(C_1,C'_2) \arrow[r, "F_{C'_2}(\varphi_1)"'] & F(C'_1,C'_2) \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

*Demostración:* Puesto que $F$ es un bifuntor, se definen $F_{C_1}(C_2) = F(C_1, C_2)$, $F_{C_2}(C_1) = F(C_1, C_2)$, $F_{C_1}(\varphi_2) = F(1_{C_1}, \varphi_2)$ y $F_{C_2}(\varphi_1) = F(\varphi_1, 1_{C_2})$. Entonces $F_{C_1}$ y $F_{C_2}$ son funtores determinados por $F$. El diagrama (3.7) conmuta pues $F_{C'_1}(\varphi_2)F_{C_2}(\varphi_1) = F(\varphi_1, \varphi_2) = F_{C'_2}(\varphi_1)F_{C_1}(\varphi_2)$. □

**Proposición 3.8.** *Si $F_{C_1} : \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{D}$, $F_{C_2} : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{D}$ son funtores cuyos subíndices son objetos de las categorías $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, respectivamente, tales que $F(C_1, C_2) = F_{C_1}(C_2) = F_{C_2}(C_1)$ y el diagrama (3.7) conmuta, entonces estas familias de funtores "determinan el bifuntor"(ver [2, E II.2.7])*
*$G : \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{D}$ tal que $G_{C_1}(C_2) = F_{C_1}(C_2)$ y $G_{C_2}(C_1) = F_{C_2}(C_1)$.*

**Proposición 3.9.** $Tor_n^{\Lambda}(-,-) : \mathfrak{m}_{\Lambda}^r \times \mathfrak{m}_{\Lambda}^l \to \mathfrak{Ab}$ *es un bifuntor para* $n = 1, 2, \ldots$.

*Demostración:* Se deja al lector. □

**3.2. Los Bifuntores $\overline{Tor}_n^{\Lambda}$.** Usando los $\Lambda$-módulos izquierdos proyectivos es posible mostrar la existencia de los bifuntores $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(-,-) : \mathfrak{m}_{\Lambda}^r \times \mathfrak{m}_{\Lambda}^l \to \mathfrak{Ab}$ para $n = 1, 2, \ldots$; que son covariantes en la primera variable y covariantes en la segunda variable.

**Proposición 3.10.** *Si $A$ es un $\Lambda$-módulo derecho, entonces $A \otimes_{\Lambda} (-) : \mathfrak{m}_{\Lambda}^l \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante aditivo.*

**Proposición 3.11.** *Sea $A$ un $\Lambda$-módulo derecho, entonces el funtor $A \otimes_{\Lambda} (-) : \mathfrak{m}_{\Lambda}^l \to \mathfrak{Ab}$ es exacto derecho.*

Ahora, podemos definir los funtores derivados izquierdos de $A \otimes_{\Lambda} (-)$.

**Definición 3.2.** *El funtor $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(A,-) : \mathfrak{m}_{\Lambda}^l \to \mathfrak{Ab}$ se define como*

$$\overline{Tor}_n^{\Lambda}(A,-) := L_n(A \otimes_{\Lambda} (-)),\ n = 0, 1, \ldots .$$

*Esto significa que el grupo abeliano $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B)$ es calculado eligiendo una resolución proyectiva $Q$ de $B$ y tomando la $n$-ésima homología del complejo de cadenas $A \otimes_{\Lambda} Q$.*

**Proposición 3.12.** *Si $P$ es un $\Lambda$-módulo derecho proyectivo y $Q$ es un $\Lambda-$módulo izquierdo proyectivo, entonces $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, Q) = 0 = \overline{Tor}_n^{\Lambda}(P, B)$ para $n = 1, 2, \ldots$ .*

Dado $A$ un $\Lambda$-módulo derecho y $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda$-módulos izquierdos, obtenemos la $\overline{Tor}$-sucesión exacta larga en la segunda variable

$$\cdots \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B') \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B) \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B'') \xrightarrow{\varpi_n} \overline{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(A, B') \longrightarrow \cdots \tag{3.8}$$

**Proposición 3.13.** *Sea $\alpha : A \to A'$ un morfismo de $\Lambda$-módulos derechos y sea (3.4) un diagrama conmutativo de $\Lambda$-módulos izquierdos con filas sucesiones exactas cortas. Entonces los diagramas siguientes son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B'') \arrow[r, "\varpi_n"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & \overline{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(A, B') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A', B') \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A', B) \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A', B'') \arrow[r, "\varpi_n"] & \overline{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(A', B') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B') \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_*"] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, B'') \arrow[r, "\varpi_n"] \arrow[d, "\phi''_*"'] & \overline{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(A, B') \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, C') \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, C) \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\Lambda}(A, C'') \arrow[r, "\varpi_n"] & \overline{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(A, C') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

**Proposición 3.14.** $\overline{Tor}_n^{\Lambda}(-,-) : \mathfrak{m}_{\Lambda}^r \times \mathfrak{m}_{\Lambda}^l \to \mathfrak{Ab}$ *es un bifuntor para* $n = 1, 2, \ldots$.

*Demostración:* Se realiza como en Proposición 4.14. □

**Proposición 3.15.** $(-) \otimes_{\Lambda} (-) : \mathfrak{m}_{\Lambda}^r \times \mathfrak{m}_{\Lambda}^l \to \mathfrak{Ab}$ *es un bifuntor.*

*Demostración:* Probaremos esta proposición con los cuatro siguientes items $i)$, $ii)$,$iii)$ y $iv)$ :
$i)$ Sea $F_A : \mathfrak{m}_{\Lambda}^l \to \mathfrak{Ab}$ dado por $F_A = A \otimes_{\Lambda} (-)$, entonces por Proposición 3.10 $F_A$ es un funtor covariante tal que $F_A(B) = A \otimes_{\Lambda} B$ .
$ii)$ Sea $F_B : \mathfrak{m}_{\Lambda}^r \to \mathfrak{Ab}$ dado por $F_B = (-) \otimes_{\Lambda} B$, entonces por Proposición 3.1 $F_B$ es un funtor covariante tal que $F_B(A) = A \otimes_{\Lambda} B$.
$iii)$ Por $i)$ y $ii)$ resulta que $F_A(B) = F_B(A)$ .

Consideremos $\varphi_1 = \alpha,\ \varphi_2 = \beta,\ C_1 = A,\ C_1' = A', C_2 = B,\ C_2' = B', \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{m}^r_\Lambda$ y $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{m}^l_\Lambda$ para obtener el diagrama (3.7)

$$\begin{tikzcd} A \otimes_\Lambda B \arrow[r, "\alpha\otimes_\Lambda B"] \arrow[d, "A\otimes_\Lambda \beta"'] & A' \otimes_\Lambda B \arrow[d, "A'\otimes_\Lambda \beta"] \\ A \otimes_\Lambda B' \arrow[r, "\alpha\otimes_\Lambda B'"'] & A' \otimes_\Lambda B' \end{tikzcd}$$

$iv)$ Claramente este diagrama conmuta. □

Análogamente a la demostración del teorema 4.2; usando las proposiciones 3.3 y 3.12, la conmutatividad de los diagramas (3.5), (3.6), (3.9) y (3.10) se puede demostrar el teorema siguiente.

**Teorema 3.1.** *Los bifuntores $Tor^\Lambda_n(-,-)$ y $\overline{Tor_n}^\Lambda(-,-) : \mathfrak{m}^r_\Lambda \times \mathfrak{m}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab};\ n = 0,1,2,\ldots$ son naturalmente equivalentes.*

**4. Relativización de la Equivalencia Natural.** Dado un morfismo de anillos unitarios $\gamma : R \to S$, entonces el funtor de cambio de anillos es $U = U^\gamma : \mathfrak{m}^l_S \longrightarrow \mathfrak{m}^l_R$.
Abreviando la palabra epimorfismo escribiremos simplemente epi.

**Teorema 4.1.** [2, E IX.1.5] *Sea $\mathscr{E}_0' = \{\varepsilon' : B \to C$ epi en $\mathfrak{m}^l_S \mid U\varepsilon' : UB \to UC$ se descompone en $\mathfrak{m}^l_R\}$, entonces $\mathscr{E}_0'$ es una clase proyectiva.*

*Demostración:* Sea $\mathfrak{A}' = \mathfrak{m}^l_S$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{m}^l_R$ y $\mathscr{E}$ la clase proyectiva de epimorfismos de $R-$módulos izquierdos que se descomponen. Puesto que el funtor $U$ es fiel, tiene adjunto izquierdo y preserva epimorfismos, por [2, T IX.4.1] deducimos que $\mathscr{E}_0' = U^{-1}(\mathscr{E})$ es una clase proyectiva. □

Sean $R^{op}$, $S^{op}$ anillos opuestos de los anillos $R$ y $S$, respectivamente. El morfismo inducido de anillos unitarios $\overline{\gamma} : R^{op} \to S^{op}$ tal que $\overline{\gamma}(r) = \gamma(r)$, da origen al funtor de cambio de anillos
$\overline{U} = U^{\overline{\gamma}} : \mathfrak{m}^l_{S^{op}} \longrightarrow \mathfrak{m}^l_{R^{op}}$.
Sea $\overline{\mathscr{E}}'_0 = \{\varepsilon' : B \to C$ *epi* en $\mathfrak{m}^l_{S^{op}} \mid \overline{U}\varepsilon' : \overline{U}B \to \overline{U}C$ se descompone en $\mathfrak{m}^l_{R^{op}}\}$, entonces por el teorema anterior $\overline{\mathscr{E}}'_0$ es una clase proyectiva.
Así, $\mathscr{E}_0'$ es una clase proyectiva de epimorfismos de $S$-módulos izquierdos que se descomponen como morfismos de $R$-módulos izquierdos, y $\overline{\mathscr{E}}'_0$ es una clase proyectiva de epimorfismos de $S$-módulos derechos que se descomponen como morfismos de $R$-módulos derechos.
Para simplificar la notación, en lugar de $\mathscr{E}_0'$ y $\overline{\mathscr{E}}'_0$ escribiremos $\mathscr{E}$ y $\overline{\mathscr{E}}$, respectivamente.

El objetivo en esta sección es demostrar que los bifuntores $Tor^\gamma_n(-,-)$ y
$\overline{Tor_n}^\gamma(-,-) : (\mathfrak{m}^r_S, \overline{\mathscr{E}}) \times (\mathfrak{m}^l_S, \mathscr{E}) \to \mathfrak{Ab};\ n = 0,1,2,\ldots$ son naturalmente equivalentes.
Sea $\Psi_n : Tor^\gamma_n(-,-) \longrightarrow \overline{Tor_n}^\gamma(-,-)$, dado un objeto $(A,B) \in |\mathfrak{m}^r_S \times \mathfrak{m}^l_S|$ debemos obtener un morfismo $\Psi^{A,B}_n : Tor^\gamma_n(A,B) \longrightarrow \overline{Tor_n}^\gamma(A,B)$ en $\mathfrak{Ab}$; dado un morfismo $(\alpha,\beta)$ en $\mathfrak{m}^r_S \times \mathfrak{m}^l_S$, donde $\alpha : A \to A'$, $\beta : B \to B'$, debemos verificar que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} Tor^\gamma_n(A,B) \arrow[r, "\Psi^{A,B}_n"] \arrow[d, "Tor^\gamma_n(\alpha,\beta)"'] & \overline{Tor_n}^\gamma(A,B) \arrow[d, "\overline{Tor_n}^\gamma(\alpha,\beta)"] \\ Tor^\gamma_n(A',B') \arrow[r, "\Psi^{A',B'}_n"] & \overline{Tor_n}^\gamma(A',B') \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

conmuta en $\mathfrak{Ab}$, cuyas filas son isomorfismos (ver [2, II.4]).

**4.1. Los Bifuntores $Tor^\gamma_n$.** Usando los $S$-módulos derechos $\overline{\mathscr{E}}$-proyectivos se garantiza la existencia de los bifuntores $Tor^\gamma_n(-,-) : \mathfrak{m}^r_S \times \mathfrak{m}^l_S \to \mathfrak{Ab}$ para $n = 1,2,\ldots$; que son covariantes en la primera variable y covariantes en la segunda variable (ver [2, IX.4]).

**Proposición 4.1.** *Si $B$ es un $S$-módulo izquierdo, entonces $(-) \otimes_S B : \mathfrak{m}^r_S \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante aditivo.*

**Proposición 4.2.** *Sea $B$ un $S$-módulo izquierdo, entonces el funtor $(-) \otimes_S B : \mathfrak{m}^r_S \to \mathfrak{Ab}$ es $\overline{\mathscr{E}}$-exacto derecho.*

*Demostración:* Se realiza como en Proposición 4.9. □

Puesto que $(-) \otimes_S B$ es un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas cuyo dominio está dotado de una clase proyectiva $\overline{\mathscr{E}}$, podemos definir los funtores $\overline{\mathscr{E}}$-derivados izquierdos de $(-) \otimes_S B$.

**Definición 4.1.** *El funtor $Tor^\gamma_n(-,B) : \mathfrak{m}^r_S \to \mathfrak{Ab}$ se define como*

$$Tor^\gamma_n(-,B) := L^{\overline{\mathscr{E}}}_n((-) \otimes_S B),\ n = 0,1,2,\ldots\ .$$

*Esto significa que el grupo abeliano $Tor_n^{\gamma}(A,B)$ es calculado eligiendo una resolución $\overline{\mathscr{E}}$-proyectiva $\mathcal{P}$ de $A$ y tomando la $n$-ésima homología del complejo de cadenas $\mathcal{P}\otimes_S B$.*

Sea $\mathcal{P}:\cdots\longrightarrow P_{n+1}\xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n\xrightarrow{\partial_n} P_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_0\longrightarrow 0$, entonces $\mathcal{P}\otimes_S B:\cdots\longrightarrow P_{n+1}\otimes_S B\xrightarrow{\partial_{n+1*}} P_n\otimes_S B\xrightarrow{\partial_{n*}} P_{n-1}\otimes_S B\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_0\otimes_S B\longrightarrow 0$ es un complejo de cadenas.

Puesto que el funtor $(-)\otimes_S B$ es $\overline{\mathscr{E}}$-exacto derecho y $P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow A\longrightarrow 0$ es una sucesión $\overline{\mathscr{E}}$-exacta, se sigue que $P_1\otimes_S B\longrightarrow P_0\otimes_S B\longrightarrow A\otimes_S B\longrightarrow 0$ es una sucesión exacta.
Entonces $Tor_0^{\gamma}(A,B)=A\otimes_S B$.
Consideremos las presentaciones $\overline{\mathscr{E}}$-proyectivas $R_1\overset{\mu_1}{\rightarrowtail} P_0\overset{\varepsilon_0}{\twoheadrightarrow} A$ de $A$; $R_2\overset{\mu_2}{\rightarrowtail} P_1\overset{\varepsilon_1}{\twoheadrightarrow} R_1$ de $R_1$; $R_3\overset{\mu_3}{\rightarrowtail} P_2\overset{\varepsilon_2}{\twoheadrightarrow} R_2$ de $R_2$. Puesto que $(-)\otimes_S B$ es $\overline{\mathscr{E}}$-exacto derecho, vemos que $R_1\otimes_S B\xrightarrow{\mu_{1*}} P_0\otimes_S B\xrightarrow{\varepsilon_{0*}} A\bigotimes_S B\longrightarrow 0$, $R_2\otimes_S B\xrightarrow{\mu_{2*}} P_1\otimes_S B\xrightarrow{\varepsilon_{1*}} R_1\otimes_S B\longrightarrow 0$ y $R_3\otimes_S B\xrightarrow{\mu_{3*}} P_2\otimes_S B\xrightarrow{\varepsilon_{2*}} R_2\otimes_S B\longrightarrow 0$ son sucesiones exactas, donde $\partial_{1*}=\mu_{1*}\varepsilon_{1*}$ y $\partial_{2*}=\mu_{2*}\varepsilon_{2*}$ .

$$\text{En general, } Tor_n^{\gamma}(A,B)=\frac{Ker\partial_{n*}}{Im\partial_{n+1*}} \text{ para } n\geq 1\,, \tag{4.2}$$

donde $\partial_{n*}=\partial_n\otimes_S B$ .

**Definición 4.2.** *Un $S$-módulo izquierdo $Q$ es $\mathscr{E}$-plano si el funtor $(-)\otimes_S Q$ es $\overline{\mathscr{E}}$-exacto.*

**Proposición 4.3.** *Si $Q$ es un $S$-módulo izquierdo $\mathscr{E}$-proyectivo, entonces*
$Tor_n^{\gamma}(A,Q)=0$ *para* $n=1,2,\dots$ .

*Demostración:* Sea $\mathcal{P}$ una resolución $\overline{\mathscr{E}}$-proyectiva de $A$ como en la Definición 4.1. Por el hecho que el funtor $(-)\otimes_S Q$ es $\overline{\mathscr{E}}$-exacto, los morfismos $\mu_{1*}$ y $\mu_{2*}$ son monomorfismos. Pero $Ker\partial_{1*}=Ker\varepsilon_{1*}=R_2\otimes_S Q$ & $Im\partial_{2*}=Im\mu_{2*}=R_2\otimes_S Q$, luego $Tor_1^{\gamma}(A,Q)=\dfrac{R_2\otimes_S Q}{R_2\otimes_S Q}=0$. Sea $R_n=Im\partial_n$. Tomando $B=Q$ y $n\geq 2$ en (4.2) $Tor_n^{\gamma}(A,Q)=\dfrac{R_{n+1}\otimes_S Q}{R_{n+1}\otimes_S Q}=0$. □

Dados un $S$-módulo derecho $A$ y una sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta de $S$-módulos izquierdos $B'\rightarrowtail B\twoheadrightarrow B''$. Sea $P$ un $S$-módulo derecho $\overline{\mathscr{E}}$-proyectivo, por un resultado análogo a [2, P III.7.4] $P$ es un $S$-módulo $\overline{\mathscr{E}}$-Plano. Así, por la Definición 4.4 la sucesión $P\otimes_S B'\rightarrowtail P\otimes_S B\twoheadrightarrow P\otimes_S B''$ es una sucesión exacta corta de grupos abelianos.
Para cada $S$-módulo izquierdo $B$, el funtor $(-)\otimes_S B:\mathfrak{m}_S^r\to\mathfrak{Ab}$ es covariante y aditivo.
Las sucesiones de funtores aditivos y transformaciones naturales
$(-)\otimes_S B'\longrightarrow(-)\otimes_S B\longrightarrow(-)\otimes_S B''$ es exacta sobre $\overline{\mathscr{E}}$-proyectivos. Si $\mathcal{P}$ es una resolución $\overline{\mathscr{E}}$-proyectiva de $A$, entonces $\mathcal{P}\otimes_S B'\rightarrowtail\mathcal{P}\otimes_S B\twoheadrightarrow\mathcal{P}\otimes_S B''$ es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. Aplicando [2, T IV.2.1] obtenemos la $Tor$-sucesión exacta larga en la segunda variable

$$\cdots\longrightarrow Tor_n^{\gamma}(A,B')\longrightarrow Tor_n^{\gamma}(A,B)\longrightarrow Tor_n^{\gamma}(A,B'')\xrightarrow{\omega_n} Tor_{n-1}^{\gamma}(A,B')\longrightarrow\cdots \tag{4.3}$$

Esta sucesión es natural con respecto a la primera variable y a la sucesión exacta corta en la segunda variable.

**Proposición 4.4.** *Sea $\alpha:A\to A'$ un morfismo de $S$-módulos derechos y sea*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "\alpha'"] \arrow[d, "\phi'"] & A \arrow[r, two heads, "\alpha''"] \arrow[d, "\phi"] & A'' \arrow[d, "\phi''"] \\ C' \arrow[r, tail, "\vartheta'"] & C \arrow[r, two heads, "\vartheta''"] & C'' \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

*un diagrama conmutativo de $S$-módulos izquierdos con filas $\mathscr{E}$-exactas cortas. Entonces los diagramas siguientes son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & Tor_n^{\gamma}(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & Tor_n^{\gamma}(A,B'') \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A',B') \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A',B) \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A',B'') \arrow[r, "\omega_n"] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A',B') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & Tor_n^{\gamma}(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_*"] & Tor_n^{\gamma}(A,B'') \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\phi''_*"'] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A,C') \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A,C) \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A,C'') \arrow[r, "\omega_n"] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A,C') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

*Demostración:* Se realiza como en Proposición 4.12. □

Dado $B$ un $S$-módulo izquierdo y $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ una sucesión $\overline{\mathscr{E}}$-exacta corta de $S$-módulos derechos. Por el Lema 2.1 podemos considerar $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}''$ como resoluciones $\overline{\mathscr{E}}$-proyectivas de $A'$, $A$ y $A''$, respectivamente, donde $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \oplus \mathcal{P}''$ tales que $\mathcal{P}' \rightarrowtail \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{P}''$ es una sucesión $\overline{\mathscr{E}}$-exacta corta de complejos de cadenas. Del hecho que el funtor $(-) \otimes_S B$ es aditivo y covariante, sabemos que $\mathcal{P}' \otimes_S B \rightarrowtail \mathcal{P} \otimes_S B \twoheadrightarrow \mathcal{P}'' \otimes_S B$ es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. Aplicando [2, T IV.2.1] obtenemos la $Tor$-sucesión exacta larga en la primera variable

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^{\gamma}(A', B) \longrightarrow Tor_n^{\gamma}(A, B) \longrightarrow Tor_n^{\gamma}(A'', B) \xrightarrow{\omega_n} Tor_{n-1}^{\gamma}(A', B) \longrightarrow \cdots \tag{4.7}$$

Esta sucesión es natural con respecto a la segunda variable y a la sucesión exacta corta en la primera variable.

**Proposición 4.5.** *Sea $\beta : B \to B'$ un morfismo de $S$-módulos izquierdos y sea (4.4) un diagrama conmutativo de $S$-módulos derechos con filas sucesiones $\overline{\mathscr{E}}$-exactas cortas. Entonces los diagramas siguientes son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A', B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & Tor_n^{\gamma}(A, B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & Tor_n^{\gamma}(A'', B) \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\beta_*"'] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A', B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A', B') \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A, B') \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A'', B') \arrow[r, "\omega_n"] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A', B') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.8}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A', B) \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & Tor_n^{\gamma}(A, B) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_*"] & Tor_n^{\gamma}(A'', B) \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\phi''_*"'] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A', B) \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(C', B) \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(C, B) \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(C'', B) \arrow[r, "\omega_n"] & Tor_{n-1}^{\gamma}(C', B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

*Demostración:* Se realiza como en Proposición 4.11. □

La prueba de la proposición siguiente se deja al lector

**Proposición 4.6.** *Sea*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}: & \cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & P_n \arrow[rr, "\partial_n"] \arrow[dr, two heads, "\varepsilon"'] & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & 0 \\
& & & & R_n = Im\partial_n \arrow[ur, tail, "\mu"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

*una resolución $\overline{\mathscr{E}}$-proyectiva de un $S$-módulo derecho $A$, entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow Tor_n^{\gamma}(A, B) \longrightarrow R_n \otimes_S B \xrightarrow{\mu_*} P_{n-1} \otimes_S B$$

*es exacta para $n \geq 1$ .*

**Proposición 4.7.** $Tor_n^{\gamma}(-,-) : \mathfrak{m}_S^r \times \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$ *es un bifuntor para $n = 1, 2, \ldots$.*

*Demostración:* Se realiza como en Proposición 4.14. □

**4.2. Los Bifuntores $\overline{Tor}_n^{\gamma}$.** Usando los $S$-módulos izquierdos $\mathscr{E}$-proyectivos se garantiza la existencia de los bifuntores $\overline{Tor}_n^{\gamma}(-,-) : \mathfrak{m}_S^r \times \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$ para $n = 1, 2, \ldots$; que son covariantes en la primera variable y covariantes en la segunda variable.

**Proposición 4.8.** *Si $A$ es un $S$-módulo derecho, entonces $A \otimes_S (-) : \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante aditivo.*

La proposición siguiente es una versión relativa de la parte $ii)$ de [2, P III.7.3].

**Proposición 4.9.** *Sea $A$ un $S$-módulo derecho, entonces el funtor $A \otimes_S (-) : \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$ es $\mathscr{E}$-exacto derecho.*

*Demostración:* Sea $B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \longrightarrow 0$ una sucesión $\mathscr{E}$-exacta de $S$-módulos izquierdos, entonces debemos probar que

$$A \otimes_S B' \xrightarrow{f_*} A \otimes_S B \xrightarrow{g_*} A \otimes_S B'' \longrightarrow 0 \tag{4.10}$$

es una sucesión exacta.

En efecto, el funtor $A \otimes_S (-) : \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$ es adjunto izquierdo del funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,-) : \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{m}_S^l$ (ver [2, P III.7.2]). Puesto que $g \in \mathscr{E}$, $g$ es un epimorfismo de la categoría abeliana $\mathfrak{m}_S^l$.

Pero $A\otimes_S(-)$ tiene adjunto derecho, luego $g_* = A\otimes_S g$ es un epimorfismo en $\mathfrak{Ab}$. Si $k = ker(g)$, $coker(k) = coker(ker(g)) = g$. Como $A\otimes_S(-)$ tiene adjunto derecho, el morfismo $A\otimes_S g$ es el conúcleo de $k_* = A\otimes_S k$. Esto equivale a que la sucesión $A\otimes_S Ker(g) \xrightarrow{k_*} A\otimes_S B \xrightarrow{g_*} A\otimes_S B'' \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathfrak{Ab}$.

Supongamos que en la categoría abeliana $\mathfrak{m}^l_S$, $f = \mu\varepsilon$ donde $\varepsilon \in \mathscr{E}$. Aplicando el funtor $A\otimes_S(-)$ obtenemos que $A\otimes_S f = (A\otimes_S\mu)(A\otimes_S\varepsilon)$ donde $A\otimes_S\varepsilon$ es un epimorfismo. Como $Im(f) = Ker(g)$, $\mu = k$; de modo que $Im(f_*) = Im(A\otimes_S f) = Im(A\otimes_S k) = Ker(g_*)$. Por lo tanto, la sucesión $A\otimes_S B' \xrightarrow{f_*} A\otimes_S B \xrightarrow{g_*} A\otimes_S B'' \longrightarrow 0$ es exacta. □

Puesto que $A\otimes_S(-)$ es un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas cuyo dominio está dotado de una clase proyectiva $\mathscr{E}$, podemos definir los funtores $\mathscr{E}$-derivados izquierdos de $A\otimes_S(-)$.

**Definición 4.3.** *El funtor* $\overline{Tor}_n^{\gamma}(A,-) : (\mathfrak{m}^l_S, \mathscr{E}) \to \mathfrak{Ab}$ *se define como*

$$\overline{Tor}_n^{\gamma}(A,-) := L_n^{\mathscr{E}}(A\otimes_S(-)),\ n = 0,1,2,\dots\ .$$

*Esto significa que el grupo abeliano* $\overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B)$ *es calculado eligiendo una resolución* $\mathscr{E}$*-proyectiva* $\mathcal{Q}$ *de* $B$ *y tomando la* $n$*-ésima homología del complejo de cadenas* $A\otimes_S\mathcal{Q}$. Sea $\mathcal{Q} : \cdots \longrightarrow Q_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} Q_n \xrightarrow{\partial_n} Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_0 \longrightarrow 0$, entonces $A\otimes_S\mathcal{Q} : \cdots \longrightarrow A\otimes_S Q_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1*}} A\otimes_S Q_n \xrightarrow{\partial_{n*}} A\otimes_S Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A\otimes_S Q_0 \longrightarrow 0$ es un complejo de cadenas.

Puesto que el funtor $A\otimes_S(-)$ es $\mathscr{E}$-exacto derecho y $Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$ es una sucesión $\mathscr{E}$-exacta, se sigue que $A\otimes_S Q_1 \longrightarrow A\otimes_S Q_0 \longrightarrow A\otimes_S B \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta.

Entonces $\overline{Tor}_0^{\gamma}(A,B) = A\otimes_S B$.

Consideremos las presentaciones $\mathscr{E}$-proyectivas $K_1 \overset{\mu_1}{\rightarrowtail} Q_0 \overset{\varepsilon_0}{\twoheadrightarrow} B$ de $B$; $K_2 \overset{\mu_2}{\rightarrowtail} Q_1 \overset{\varepsilon_1}{\twoheadrightarrow} K_1$ de $K_1$; $K_3 \overset{\mu_3}{\rightarrowtail} Q_2 \overset{\varepsilon_2}{\twoheadrightarrow} K_2$ de $K_2$. Puesto que $A\otimes_S(-)$ es $\mathscr{E}$-exacto derecho, vemos que $A\otimes_S K_1 \xrightarrow{\mu_{1*}} A\otimes_S Q_0 \xrightarrow{\varepsilon_{0*}} A\otimes_S B \longrightarrow 0$, $A\otimes_S K_2 \xrightarrow{\mu_{2*}} A\otimes_S Q_1 \xrightarrow{\varepsilon_{1*}} A\otimes_S K_1 \longrightarrow 0$ y $A\otimes_S K_3 \xrightarrow{\mu_{3*}} A\otimes_S Q_2 \xrightarrow{\varepsilon_{2*}} A\otimes_S K_2 \longrightarrow 0$ son sucesiones exactas, donde $\partial_{1*} = \mu_{1*}\varepsilon_{1*}$ y $\partial_{2*} = \mu_{2*}\varepsilon_{2*}$.

$$\text{En general, } \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B) = \frac{Ker\partial_{n*}}{Im\partial_{n+1*}} \text{ para } n \geq 1\,, \tag{4.11}$$

donde $\partial_{n*} = A\otimes_S\partial_n$ .

**Definición 4.4.** *Un* $S$*-módulo derecho* $P$ *es* $\overline{\mathscr{E}}$*-plano si el funtor* $P\otimes_S(-)$ *es* $\mathscr{E}$*-exacto.*

**Proposición 4.10.** *Si* $Q$ *es un* $S$*-módulo izquierdo* $\mathscr{E}$*-proyectivo, entonces*

$$\overline{Tor}_n^{\gamma}(A,Q) = 0 \ \ para \ \ n = 1,2,\dots\ .$$

*Demostración:* Puesto que $\mathcal{Q} : \cdots \longrightarrow Q_1 = 0 \xrightarrow{\partial_1} Q_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$ donde $Q_0 = Q$, es una resolución $\mathscr{E}$-proyectiva de $Q$, por (4.11) para $n \geq 1$ y $B = Q$ se sigue que $\overline{Tor}_n^{\gamma}(A,Q) = \dfrac{Ker\partial_{n*}}{Im\partial_{n+1*}} = 0$. □

Sea $A$ un $S$-módulo derecho y $f : M \to M'$ un morfismo de $S$-módulos izquierdos. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ resoluciones $\mathscr{E}$-proyectivas de $M$ y $M'$, respectivamente. Por el teorema 2.1, existe una aplicación de cadenas $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$. Puesto que $A\otimes_S(-)$ es un funtor covariante, $A\otimes_S f : A\otimes_S\mathcal{R} \to A\otimes_S\mathcal{R}'$ es una aplicación de cadenas. Tomando la $n$-ésima homología obtenemos el morfismo

$$\overline{Tor}_n^{\gamma}(A,f) : \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,M) \to \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,M')\,. \tag{4.12}$$

Dado $A$ un $S$-módulo derecho y $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ una sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta de $S$-módulos izquierdos. Por el Lema 2.1 podemos considerar $\mathcal{Q}'$, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}''$ como resoluciones $\mathscr{E}$-proyectivas de $B'$, $B$ y $B''$, respectivamente, donde $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'\oplus\mathcal{Q}''$ y tal que $\mathcal{Q}' \rightarrowtail \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}''$ es una sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta de complejos de cadenas. Del hecho que el funtor $A\otimes_S(-)$ es aditivo y covariante, sabemos que $A\otimes_S\mathcal{Q}' \rightarrowtail A\otimes_S\mathcal{Q} \twoheadrightarrow A\otimes_S\mathcal{Q}''$ es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. Aplicando [2, T IV.2.1] obtenemos la $\overline{Tor}$-sucesión exacta larga en la segunda variable

$$\cdots \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B') \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B) \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B'') \xrightarrow{\varpi_n} \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A,B') \longrightarrow \cdots \tag{4.13}$$

La proposición siguiente afirma que sucesión (4.13) es natural con respecto a la primera variable y a la sucesión exacta corta en la segunda variable.

**Proposición 4.11.** *Sea $\alpha : A \to A'$ un morfismo de $S$-módulos derechos y sea (3.4) un diagrama conmutativo de $S$-módulos izquierdos con filas sucesiones $\mathscr{E}$-exactas cortas. Entonces los diagramas siguientes son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B'') \arrow[r, "\varpi_n"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A',B') \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A',B) \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A',B'') \arrow[r, "\varpi_n"] & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A',B') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.14}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_*"] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B'') \arrow[r, "\varpi_n"] \arrow[d, "\phi''_*"'] & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,C') \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,C) \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,C'') \arrow[r, "\varpi_n"] & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A,C') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.15}$$

*Demostración:* Sabemos que $A \otimes_S (-) : \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante para cada $A \in |\mathfrak{m}_S^r|$ fijo. Sea $\alpha_* : A \otimes_S (-) \to A' \otimes_S (-)$ la transformación natural inducida por el morfismo $\alpha : A \to A'$. Como $B' \overset{\beta'}{\rightarrowtail} B \overset{\beta''}{\twoheadrightarrow} B''$ es una sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta de $S$-módulos izquierdos, por el Lema 2.1 podemos considerar que $\mathcal{Q}'$, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}''$ son resoluciones $\mathscr{E}$-proyectivas de $B'$, $B$ y $B''$, respectivamente, donde $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' \oplus \mathcal{Q}''$ y tal que $\mathcal{Q}' \rightarrowtail \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}''$ es una sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta de complejos de cadenas. Aplicando el funtor covariante aditivo $A \otimes_S (-)$, obtenemos la sucesión exacta corta de complejos de cadenas $A \otimes_S \mathcal{Q}' \rightarrowtail A \otimes_S \mathcal{Q} \twoheadrightarrow A \otimes_S \mathcal{Q}''$ para cada $S$-módulo derecho $A$. Puesto que $\alpha_*$ es una transformación natural, el diagrama de complejos de cadenas siguiente es conmutativo y tiene filas sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_S \mathcal{Q}' \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha_*"] & A \otimes_S \mathcal{Q} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\alpha_*"] & A \otimes_S \mathcal{Q}'' \arrow[d, "\alpha_*"] \\
A' \otimes_S \mathcal{Q}' \arrow[r, tail] & A' \otimes_S \mathcal{Q} \arrow[r, two heads] & A' \otimes_S \mathcal{Q}''
\end{tikzcd}$$

Utilizando la proposición 3.4 obtenemos el diagrama conmutativo (4.14).

Por otro lado, del hecho que $C' \overset{\vartheta'}{\rightarrowtail} C \overset{\vartheta''}{\twoheadrightarrow} C''$ es una sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta de $S$-módulos izquierdos, como antes podemos obtener una sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta de complejos de cadenas $\mathcal{R}' \rightarrowtail \mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{R}''$, donde $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}''$ y tales que $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}''$ son resoluciones $\mathscr{E}$-proyectivas de $C'$, $C$ y $C''$, respectivamente. Luego $A \otimes_S \mathcal{R}' \rightarrowtail A \otimes_S \mathcal{R} \twoheadrightarrow A \otimes_S \mathcal{R}''$ es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. A partir del diagrama conmutativo (3.4) podemos obtener el diagrama conmutativo siguiente de complejos de cadenas

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}' \arrow[r, tail, "\beta'"] \arrow[d, "\phi'"] & \mathcal{Q} \arrow[r, two heads, "\beta''"] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{Q}'' \arrow[d, "\phi''"] \\
\mathcal{R}' \arrow[r, tail, "\vartheta'"] & \mathcal{R} \arrow[r, two heads, "\vartheta''"] & \mathcal{R}''
\end{tikzcd}$$

Pero $A \otimes_S (-)$ es un funtor covariante aditivo, luego

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_S \mathcal{Q}' \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi'_*"] & A \otimes_S \mathcal{Q} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi_*"] & A \otimes_S \mathcal{Q}'' \arrow[d, "\phi''_*"] \\
A \otimes_S \mathcal{R}'' \arrow[r, tail] & A \otimes_S \mathcal{R} \arrow[r, two heads] & A \otimes_S \mathcal{R}''
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de complejos de cadenas con filas sucesiones exactas cortas. Por Proposición 3.4 obtenemos el diagrama conmutativo (4.15). □

Dado $B$ un $S$-módulo izquierdo y $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ una sucesión $\overline{\mathscr{E}}$-exacta corta de $S$-módulos derechos. Sea $Q$ un $S$-módulo izquierdo $\mathscr{E}$-proyectivo, por un resultado análogo a [2, P III.7.4] $Q$ es un $S$-módulo $\mathscr{E}$-plano. Así, la sucesión $A' \otimes_S Q \rightarrowtail A \otimes_S Q \longrightarrow A'' \otimes_S Q$ es una sucesión exacta corta de grupos abelianos.

Para cada $S$-módulo derecho $A$, el funtor $A \otimes_S (-) : \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$ es covariante aditivo.

La sucesión de funtores aditivos y transformaciones naturales $A' \otimes_S (-) \longrightarrow A \otimes_S (-) \longrightarrow A'' \otimes_S (-)$

es exacta sobre $\mathscr{E}$-proyectivos. Si $\mathcal{Q}$ es una resolución $\mathscr{E}$-proyectiva de $B$, entonces $A'\otimes_S \mathcal{Q} \rightarrowtail A\otimes_S \mathcal{Q} \twoheadrightarrow A''\otimes_S \mathcal{Q}$ es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. Aplicando [2, T IV.2.1] obtenemos la $\overline{Tor}$-sucesión exacta larga en la primera variable

$$\cdots \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\gamma}(A',B) \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B) \longrightarrow \overline{Tor}_n^{\gamma}(A'',B) \xrightarrow{\overline{\omega}_n} \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A',B) \longrightarrow \cdots \tag{4.16}$$

Esta sucesión es natural respecto a la sucesión exacta corta en la primera variable y a la segunda variable:

**Proposición 4.12.** *Sea $\beta : B \to B'$ un morfismo de $S$-módulos izquierdos y sea (4.4) un diagrama conmutativo de $S$-módulos derechos con filas sucesiones $\overline{\mathscr{E}}$-exactas cortas. Entonces los diagramas siguientes son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A',B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A'',B) \arrow[r, "\overline{\omega}_n"] \arrow[d, "\beta_*"'] & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A',B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A',B') \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B') \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A'',B') \arrow[r, "\overline{\omega}_n"] & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A',B') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.17}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A',B) \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_*"] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A'',B) \arrow[r, "\overline{\omega}_n"] \arrow[d, "\phi''_*"'] & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A',B) \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(C',B) \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(C,B) \arrow[r] & \overline{Tor}_n^{\gamma}(C'',B) \arrow[r, "\overline{\omega}_n"] & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(C',B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.18}$$

*Demostración:* Sabemos que $A\otimes_S(-) : \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante para cada $A \in |\mathfrak{m}_S^r|$ fijo. Sean $\tau' : A'\otimes_S(-) \to A\otimes_S(-)$ y $\tau'' : A\otimes_S(-) \to A''\otimes_S(-)$ transformaciones naturales inducidas por $\alpha'$ y $\alpha''$, entonces por un resultado análogo a [2, P III.7.4] la sucesión $A'\otimes_S Q \overset{\tau' Q}{\rightarrowtail} A\otimes_S Q \overset{\tau'' Q}{\twoheadrightarrow} A''\otimes_S Q$ es exacta corta para cada $S$-módulo izquierdo $\mathscr{E}$-proyectivo $Q$.
Sean $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}'$ resoluciones $\mathscr{E}$-proyectivas de $B$ y $B'$, respectivamente. Entonces $\beta : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ es la aplicación de cadenas inducida por $\beta : B \to B'$. Utilizando los funtores covariantes $A'\otimes_S(-)$, $A\otimes_S(-)$ y $A''\otimes_S(-)$ se obtiene las aplicaciones de cadenas $A'\otimes_S \mathcal{Q} \to A'\otimes_S \mathcal{Q}'$, $A\otimes_S \mathcal{Q} \to A\otimes_S \mathcal{Q}'$ y $A''\otimes_S \mathcal{Q} \to A''\otimes_S \mathcal{Q}'$. Puesto que $\tau'$ y $\tau''$ son transformaciones naturales, el diagrama de complejos de cadenas siguiente es conmutativo y tiene filas sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd}
A'\otimes_S \mathcal{Q} \arrow[r, tail] \arrow[d, "\beta_*"] & A\otimes_S \mathcal{Q} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta_*"] & A''\otimes_S \mathcal{Q} \arrow[d, "\beta_*"] \\
A'\otimes_S \mathcal{Q}' \arrow[r, tail] & A\otimes_S \mathcal{Q}' \arrow[r, two heads] & A''\otimes_S \mathcal{Q}'
\end{tikzcd}$$

Aplicando a este diagrama la proposición 3.4 obtenemos el diagrama conmutativo (4.17).

A partir del diagrama conmutativo (4.4) podemos obtener

$$\begin{tikzcd}
A'\otimes_S(-) \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, "\varphi'"] & A\otimes_S(-) \arrow[r, "\tau''"] \arrow[d, "\varphi"] & A''\otimes_S(-) \arrow[d, "\varphi''"] \\
C'\otimes_S(-) \arrow[r, "\sigma'"] & C\otimes_S(-) \arrow[r, "\sigma''"] & C''\otimes_S(-)
\end{tikzcd}$$

el cual es un diagrama conmutativo de funtores aditivos y transformaciones naturales tales que las filas son exactas sobre $\mathscr{E}$-proyectivos.
Puesto que $\mathcal{Q}$ es una resolución $\mathscr{E}$-proyectiva de $B$, el diagrama de complejos de cadenas siguiente es conmutativo con filas sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd}
A'\otimes_S \mathcal{Q} \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi''_*"] & A\otimes_S \mathcal{Q} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi_*"] & A''\otimes_S \mathcal{Q} \arrow[d, "\phi'_*"] \\
C'\otimes_S \mathcal{Q} \arrow[r, tail] & C\otimes_S \mathcal{Q} \arrow[r, two heads] & C''\otimes_S \mathcal{Q}
\end{tikzcd}$$

Por la proposición 3.4 obtenemos el diagrama conmutativo (4.18). □

La prueba de la proposición siguiente se deja al lector

**Proposición 4.13.** *Sea*

$$\mathcal{Q}: \quad \cdots \longrightarrow Q_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} Q_n \xrightarrow{\partial_n} Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_0 \longrightarrow 0, \qquad Q_n \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} S_n = Im\partial_n \overset{\nu}{\rightarrowtail} Q_{n-1}$$

*una resolución $\mathscr{E}$-proyectiva de un $S$-módulo izquierdo $B$, entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \longrightarrow A \otimes_S K_n \xrightarrow{\nu_*} A \otimes_S Q_{n-1}$$

*es exacta para $n \geq 1$.*

**Proposición 4.14.** $\overline{Tor_n}^{\gamma}(-,-) : \mathfrak{m}_S^r \times \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$ *es un bifuntor para $n = 1, 2, \ldots$.*

*Demostración:* Probaremos esta proposición con los cuatro items siguientes $i)$, $ii)$,$iii)$ y $iv)$ :

$i)$ Sea $F_A : \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$ dado por $F_A = \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,-)$, entonces por la Definición 4.3 $F_A$ es un funtor covariante para $n = 1, 2, \ldots$ tal que $F_A(B) = \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B)$.

$ii)$ Sea $F_B : \mathfrak{m}_S^r \to \mathfrak{Ab}$ dado por $F_B = \overline{Tor_n}^{\gamma}(-,B)$, entonces $F_B$ es un funtor covariante. Esta afirmación probaremos con los cuatro items siguientes:

(1) Dado $A \in |\mathfrak{m}_S^r| \mapsto \overline{Tor_n}^{\gamma}(-,B)(A) = \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \in |\mathfrak{Ab}|$ por ser un subgrupo de un grupo abeliano.

(2) Dado $(f : A \to A') \mapsto \overline{Tor_n}^{\gamma}(f,B) : \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \to \overline{Tor_n}^{\gamma}(A',B)$ es definido por $\overline{Tor_n}^{\gamma}(f,B)(\overline{x}) = [f \otimes 1_{K_n}](\overline{x})$ . Utilizando la proposición 4.13 podemos obtener el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_*"'] & A \otimes_S K_n \arrow[r, "\nu_*"] \arrow[d, "f_*"'] & A \otimes_S Q_{n-1} \arrow[d, "f_*"] \\
0 \arrow[r] & \overline{Tor_n}^{\gamma}(A',B) \arrow[r] & A' \otimes_S K_n \arrow[r, "\nu_*"'] & A' \otimes_S Q_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Ahora, del hecho que $\overline{x} \in \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B)$, $\nu_*(\overline{x}) = 0$. Pero $\nu_*[f_*(\overline{x})] = f_*[\nu_*(\overline{x})] = 0$, luego $f_*(\overline{x}) \in \overline{Tor_n}^{\gamma}(A',B)$.

(3) $\overline{Tor_n}^{\gamma}(1_A,B) = 1_{\overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B)}$ para todo $A \in |\mathfrak{m}_S^r|$.
En efecto, por (2) para $f = 1_A$ y $A' = A$:

$$\begin{aligned}
\overline{Tor_n}^{\gamma}(1_A,B)(\overline{x}) &= [1_A \otimes 1_{K_n}](\overline{x}), \quad \overline{x} \in \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \\
&= 1_{A \otimes K_n}(\overline{x}) = 1_{\overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B)}(\overline{x}) .
\end{aligned}$$

(4) Si $f : A \to A'$, $f' : A' \to A''$ son morfismos de $S$-módulos derechos, entonces

$$\overline{Tor_n}^{\gamma}(f'f,B) = \overline{Tor_n}^{\gamma}(f',B)\overline{Tor_n}^{\gamma}(f,B) .$$

En efecto, por (2) $\overline{Tor_n}^{\gamma}(f'f,B) : \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \to \overline{Tor_n}^{\gamma}(A'',B)$ es tal que

$$\begin{aligned}
\overline{Tor_n}^{\gamma}(f'f,B)(\overline{x}) &= [f'f \otimes 1_{K_n}](\overline{x}), \quad \overline{x} \in \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \\
&= \overline{Tor_n}^{\gamma}(f',B)[f \otimes 1_{K_n}](\overline{x}) \\
&= \overline{Tor_n}^{\gamma}(f',B)\overline{Tor_n}^{\gamma}(f,B)(\overline{x}) .
\end{aligned}$$

$iii)$ Por $i)$ y (1) resulta que $F_A(B) = F_B(A)$ .

Consideremos $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$, $C_1 = A$, $C_1' = A'$, $C_2 = B$, $C_2' = B'$, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{m}_S^r$ y $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{m}_S^l$ para obtener el diagrama (3.7)

$$\begin{tikzcd}
\overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \arrow[r, "\overline{Tor_n}^{\gamma}(\alpha{,}B)"] \arrow[d, "\overline{Tor_n}^{\gamma}(A{,}\beta)"'] & \overline{Tor_n}^{\gamma}(A',B) \arrow[d, "\overline{Tor_n}^{\gamma}(A'{,}\beta)"] \\
\overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B') \arrow[r, "\overline{Tor_n}^{\gamma}(\alpha{,}B')"'] & \overline{Tor_n}^{\gamma}(A',B')
\end{tikzcd} \tag{4.19}$$

$iv)$ Afirmamos que este diagrama conmuta.

Sean $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}'$ resoluciones $\mathscr{E}$-proyectivas de $B$ y $B'$, respectivamente. Por el teorema 2.1 existe una aplicación de cadenas $\beta : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ inducido por $\beta$. En virtud de la proposición 4.13 las sucesiones

$$0 \longrightarrow \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \longrightarrow A \otimes_S K_n \xrightarrow{\nu_*} A \otimes_S Q_{n-1} ,$$
$$0 \longrightarrow \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B') \longrightarrow A \otimes_S K_n' \xrightarrow{\nu_*} A \otimes_S Q_{n-1}'$$

son exactas, donde $K_n = Im\partial_n$ y $K'_n = Im\partial'_n$ .
Observando el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta"] & Q_n \arrow[r, two heads, "\partial"] \arrow[d, "\beta"] & K_n \arrow[d, dashed, "\beta_K"] \\ Q'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"] & Q'_n \arrow[r, "\partial'"] & K'_n \end{tikzcd}$$

y las igualdades $\partial'\beta\partial = \partial'\partial'\beta = 0$, vemos que $Ker\partial_n = Im\partial_{n+1} \subseteq Ker(\partial'\beta)$. Por lo tanto existe un único morfismo $\beta_K : K_n \to K'_n$ tal que $\beta_K\partial = \partial'\beta$.
Así, para $\overline{x} \in \overline{Tor_n}^{\gamma}(A, B)$, $\overline{Tor_n}^{\gamma}(A, \beta)(\overline{x}) = [1_A \otimes \beta_K](\overline{x})$. Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes_S K_n \arrow[r, "\alpha\otimes 1_{K_n}"] \arrow[d, "1_A\otimes\beta_K"'] & A' \otimes_S K_n \arrow[d, "1_{A'}\otimes\beta_K"] \\ A \otimes_S K'_n \arrow[r, "\alpha\otimes 1_{K'_n}"'] & A' \otimes_S K'_n \end{tikzcd}$$

vemos que $\overline{Tor_n}^{\gamma}(A', \beta)\overline{Tor_n}^{\gamma}(\alpha, B)(\overline{x}) = [(1_{A'} \otimes \beta_K)(\alpha \otimes 1_{K_n})](\overline{x}) = [\alpha \otimes \beta_K](\overline{x})$ .
Por otro lado $\overline{Tor_n}^{\gamma}(\alpha, B')\overline{Tor_n}^{\gamma}(A, \beta)(\overline{x}) = [(\alpha\otimes 1_{K'_n})(1_A\otimes\beta_K)](\overline{x}) = [\alpha\otimes\beta_K](\overline{x})$ . Así, el diagrama (4.19) conmuta. $\square$

**Teorema 4.2.** *Los bifuntores* $Tor_n^{\gamma}(-,-)$ *y* $\overline{Tor_n}^{\gamma}(-,-) : \mathfrak{m}_S^r \times \mathfrak{m}_S^l \to \mathfrak{Ab}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ *son naturalmente equivalentes.*

*Demostración:* Definamos inductivamente la equivalencia natural $\Psi_n : Tor_n^{\gamma}(-,-) \xrightarrow{\sim} \overline{Tor_n}^{\gamma}(-,-)$.

$i)$ Si $n = 0$, probemos que $\Psi_0 : Tor_0^{\gamma}(-,-) \xrightarrow{\sim} \overline{Tor_0}^{\gamma}(-,-)$ es una equivalencia natural.
Recordemos que $Tor_0^{\gamma}(A, B) = \overline{Tor_0}^{\gamma}(A, B) = A \otimes_S B$ para todo $A \in |\mathfrak{m}_S^r|$ y $B \in |\mathfrak{m}_S^l|$.

Sea $R \overset{\nu}{\rightarrowtail} P \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} B$ una presentación $\mathscr{E}$-proyectiva de $B$, entonces obtenemos de (4.3) y (4.13) las sucesiones exactas largas correspondientes :

$$\begin{aligned} &\cdots \to Tor_n^{\gamma}(A, R) \to Tor_n^{\gamma}(A, P) \to Tor_n^{\gamma}(A, B) \xrightarrow{\omega_n} Tor_{n-1}^{\gamma}(A, R) \to \cdots \\ &\cdots \to Tor_1^{\gamma}(A, B) \xrightarrow{\omega_1} A \otimes_S R \to A \otimes_S P \to A \otimes_S B \to 0 \, ; \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} &\cdots \to \overline{Tor_n}^{\gamma}(A, R) \to \overline{Tor_n}^{\gamma}(A, P) \to \overline{Tor_n}^{\gamma}(A, B) \xrightarrow{\overline{\omega}_n} \overline{Tor_{n-1}}^{\gamma}(A, R) \to \cdots \\ &\cdots \to \overline{Tor_1}^{\gamma}(A, B) \xrightarrow{\overline{\omega}_1} A \otimes_S R \to A \otimes_S P \to A \otimes_S B \to 0 \, . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Por lo tanto, $\Psi_0^{A,B} := 1_{A\otimes_S B}$.

Claramente $\Psi_0$ es natural con respecto a la primera variable y a la segunda variable; en consecuencia, $\Psi_0$ es una equivalencia natural.

Con (4.20) y (4.21), definimos $\Psi_1^{A,B}$ exigiendo la conmutatividad del diagrama y morfismo núcleo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Tor_1^{\gamma}(A, B) \arrow[r, "\omega_1"] \arrow[d, dashed, "\cong"', "\Psi_1^{A,B}"] & A \otimes_S R \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \otimes_S P \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \overline{Tor_1}^{\gamma}(A, B) \arrow[r, "\overline{\omega}_1"] & A \otimes_S R \arrow[r] & A \otimes_S P \end{tikzcd}$$

Por las proposiciones 4.3 y 4.10 sabemos que $Tor_n^{\gamma}(A, P) = 0 = \overline{Tor_n}^{\gamma}(A, P)$ para $n = 1, 2 \ldots$ y para el $\mathscr{E}$-proyectivo $P$.
$ii)$ *Hipótesis de inducción.* Supongamos que el teorema es cierto para $n - 1 > 0$.
Con las sucesiones exactas largas (4.20) y (4.21) podemos construir el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Tor_n^{\gamma}(A, B) \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, dashed, "\Psi_n^{A,B}"] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A, R) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_{n-1}^{A,R}"] & 0 \arrow[r] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A, B) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_{n-1}^{A,B}"] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \overline{Tor_n}^{\gamma}(A, B) \arrow[r, "\overline{\omega}_n"] & \overline{Tor_{n-1}}^{\gamma}(A, R) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \overline{Tor_{n-1}}^{\gamma}(A, B) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Observando este diagrama deducimos que $\omega_n$, $\overline{\omega}_n$ son isomorfismos y por hipótesis de inducción, $\Psi^{A,R}_{n-1}$ es un isomorfismo, entonces definimos el isomorfismo $\Psi^{A,B}_n$ de manera que el diagrama sea conmutativo por

$$\Psi^{A,B}_n = (\overline{\omega}_n)^{-1}\Psi^{A,R}_{n-1}\omega_n \ . \tag{4.22}$$

(a) Afirmamos que $\Psi_n$ es natural en $B$ para $n \geq 1$. Para ello consideramos un morfismo $\beta : B \to B'$ en $\mathfrak{m}^l_S$ y un $S$-módulo derecho fijo $A$, y debemos verificar que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Tor^{\gamma}_n(A,B) \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[d, "\Psi^{A,B}_n"'] & Tor^{\gamma}_n(A,B') \arrow[d, "\Psi^{A,B'}_n"] \\
\overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \arrow[r, "\beta_*"] & \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B')
\end{tikzcd}$$

(b) Afirmamos que $\Psi_n$ es natural en $A$ para $n \geq 1$. Para ello consideramos un morfismo $\alpha : A \to A'$ en $\mathfrak{m}^r_S$ y un $S$-módulo izquierdo fijo $B$, y debemos verificar que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Tor^{\gamma}_n(A,B) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\Psi^{A,B}_n"'] & Tor^{\gamma}_n(A',B) \arrow[d, "\Psi^{A',B}_n"] \\
\overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \arrow[r, "\alpha_*"] & \overline{Tor_n}^{\gamma}(A',B)
\end{tikzcd}$$

(c) Afirmamos que $\Psi_n$ no depende de la presentación $\mathscr{E}$-proyectiva elegida de $B$ para $n \geq 1$. Para probar (a) y (c) consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"] & P \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
R' \arrow[r, tail] & P' \arrow[r, two heads] & B'
\end{tikzcd}$$

con el cual construimos el diagrama siguiente y debemos verificar que dicho diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& Tor^{\gamma}_n(A,B') \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dd, "\Psi^{A,B'}_n"] & & Tor^{\gamma}_{n-1}(A,R') \arrow[dd, "\Psi^{A,R'}_{n-1}"] \\
Tor^{\gamma}_n(A,B) \arrow[ur, "\beta_*"] \arrow[rr, "\omega"'] \arrow[dd, "\Psi^{A,B}_n"'] & & Tor^{\gamma}_{n-1}(A,R) \arrow[ur, "\phi_*"'] \arrow[dd, "\Psi^{A,R}_{n-1}"] & \\
& \overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B') \arrow[rr, "\overline{\omega}"'] & & \overline{Tor}^{\gamma}_{n-1}(A,R') \\
\overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \arrow[ur, "\beta_*"] \arrow[rr, tail, two heads, "\overline{\omega}"'] & & \overline{Tor}^{\gamma}_{n-1}(A,R) \arrow[ur, "\phi_*"] \arrow[ll, bend right, "\overline{\omega}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Probamos la afirmación (a). Considerando (4.22) y, la conmutatividad de los diagramas (4.6) y (4.15) deducimos que su cara izquierda es conmutativa; es decir, $\beta_*\Psi^{A,B}_n = \Psi^{A,B'}_n\beta_*$.

Haciendo $\beta = 1_B$ en la afirmación (a) probemos (c).
Para dos presentaciones $\mathscr{E}$-proyectivas de $B : R \rightarrowtail P \twoheadrightarrow B$ y $R' \rightarrowtail P' \twoheadrightarrow B$, haciendo $\beta = 1_B$ en la afirmación (a) obtenemos $\beta_*\Psi^{A,B}_n = \Psi^{A,B'}_n\beta_*$, de modo que $\Psi^{R'}_n = \Psi^{A,B}_n 1_{Tor^{\gamma}_n(A,B)} = \Psi^{A,B}_n = 1_{\overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B)}\Psi^{A,B}_n = \Psi^{R}_n$, donde $\Psi^{R'}_n = (\overline{\omega})^{-1}\Psi^{A,R'}_{n-1}\omega$ y $\Psi^{R}_n = (\overline{\omega})^{-1}\Psi^{A,R}_{n-1}\omega$. Por consiguiente, $\Psi^{A,B}_n$ no depende de la presentación $\mathscr{E}$-proyectiva de $B$.

Probemos la afirmación (b), como sigue :
Del hecho que $\alpha : A \longrightarrow A'$ sabemos que $\overline{Tor_n}^{\gamma}(A,B) \xrightarrow{\alpha_*} \overline{Tor_n}^{\gamma}(A',B)$. Considerando la presentación

$\mathscr{E}$-proyectiva de $B : R \rightarrowtail P \twoheadrightarrow B$, construimos el paralelogramo siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & Tor_n^{\gamma}(A',B) \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dd, "\Psi_n^{A',B}"] & & Tor_{n-1}^{\gamma}(A',R) \arrow[dd, "\Psi_{n-1}^{A',R}"] \\
Tor_n^{\gamma}(A,B) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[rr, "\omega"'] \arrow[dd, "\Psi_n^{A,B}"'] & & Tor_{n-1}^{\gamma}(A,R) \arrow[ur, "\alpha_*"'] \arrow[dd, "\Psi_{n-1}^{A,R}"] & \\
 & \overline{Tor}_n^{\gamma}(A',B) \arrow[rr, "\overline{\omega}"'] & & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A',R) \\
\overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[rr, tail, two heads, "\overline{\omega}"'] & & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A,R) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[ll, bend right, "\overline{\omega}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Considerando (4.22) y, la conmutatividad de los diagramas (4.5) y (4.14) vemos que su cara izquierda es conmutativa. $\square$

Usando la conmutatividad de los diagramas (4.6) y (4.15) se puede demostrar la proposición siguiente.

**Proposición 4.15.** *Para cualquier $S$-módulo derecho $A$ y cualquier sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ de $S$-módulos izquierdos el diagrama siguiente es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
Tor_n^{\gamma}(A,B'') \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\Psi_n^{A,B''}"'] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A,B') \arrow[d, "\Psi_{n-1}^{A,B'}"] \\
\overline{Tor}_n^{\gamma}(A,B'') \arrow[r, "\overline{\omega}"] & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A,B')
\end{tikzcd} \tag{4.23}$$

Usando la conmutatividad de los diagramas (4.9) y (4.18) se puede demostrar la proposición siguiente, que nos dice que $\Psi_n$ es compatible con $\omega$ en la primera variable.

**Proposición 4.16.** *Para cualquier sucesión $\overline{\mathscr{E}}$-exacta corta $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ de $S$-módulos derechos y cualquier $S$-módulo izquierdo $B$ el diagrama siguiente es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
Tor_n^{\gamma}(A'',B) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\Psi_n^{A'',B}"'] & Tor_{n-1}^{\gamma}(A',B) \arrow[d, "\Psi_{n-1}^{A',B}"] \\
\overline{Tor}_n^{\gamma}(A'',B) \arrow[r, "\overline{\omega}"] & \overline{Tor}_{n-1}^{\gamma}(A',B)
\end{tikzcd} \tag{4.24}$$

Según el teorema 4.2, la proposición 4.15 y la proposición 4.16 usamos la notación $Tor$ aún para calcular $Tor_n^{\gamma}(A,B)$ vía resolución $\mathscr{E}$-proyectiva en la segunda variable cuando $A$ es un $S$-módulo derecho (fijo). Así, en lugar de $\overline{Tor}_n^{\gamma}(A,-)$ escribiremos $Tor_n^{\gamma}(A,-)$. Entonces, las propiedades básicas de los funtores $Tor_n^{\gamma}(A,-) : (\mathfrak{m}_S^l, \mathscr{E}) \to \mathfrak{Ab}$ son dadas en el resultado siguiente.

**Teorema 4.3.** *Existen grupos abelianos $Tor_n^{\gamma}(A,B)$ para cada $S$-módulo izquierdo $B$, junto con los morfismos de conección $\omega_n : Tor_n^{\gamma}(A,B'') \to Tor_{n-1}^{\gamma}(A,B')$ para cada sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ en $\mathfrak{m}_S^l$ tales que se cumplen las propiedades siguientes:*

1. *$Tor_n^{\gamma}(A,B) = 0$ para $n < 0$.*
2. *$Tor_0^{\gamma}(A,B)$ es naturalmente isomorfo a $A \otimes_S B$.*
3. *$Tor_n^{\gamma}(A,B) = 0$ para $n > 0$ si $B$ es $\mathscr{E}$-proyectivo.*
4. *La sucesión siguiente es exacta*

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^{\gamma}(A,B') \longrightarrow Tor_n^{\gamma}(A,B) \longrightarrow Tor_n^{\gamma}(A,B'') \xrightarrow{\omega_n} Tor_{n-1}^{\gamma}(A,B') \longrightarrow \cdots$$

*Demostración:* Se sigue de la definición 4.3, la proposición 4.10 y la sucesión exacta larga (4.13). $\square$

**5. Propiedades de HH de Productos Cruzados de Hopf.** Sea $K$ un anillo conmutativo unitario. Un $K$-módulo $A$ es una $K$-álgebra si $A$ es un anillo y $\forall \alpha \in K, \forall a, b \in A$ se tiene $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$. Un morfismo de $K$-álgebras $f : A \to B$ es un morfismo de $K$-módulos y a su vez morfismo de anillos.

**Ejemplo 5.1.** *$Alg_K$ es una categoría, cuyos objetos son las $K$-álgebras, morfismos son morfismos de $K$-álgebras y el producto de estos morfismos es la composición de morfismos de $K$-álgebras.* Se verifican los tres axiomas de categoría para $Alg_K$ como en el Ejemplo 5.3.

**Definición 5.1.** *Sea $K$ un anillo conmutativo y $A$ una $K-$álgebra. Se define el álgebra envolvente de $A$ como $A^e := A \otimes_K A^{op}$, donde la multiplicación es dada por $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes db$.*

**Proposición 5.1.** *Si $A$ es una $K$-álgebra, entonces :*

*1. $A$ es $A^e-$módulo izquierdo.*
*2. $A$ es $A^e-$módulo derecho.*

*Demostración:*

1. Puesto que $A$ tiene una estructura de grupo aditivo abeliano, definimos la multiplicación por un escalar mediante $(r \otimes s) \cdot a = ras$ para $r \in A, s \in A$ y $r \otimes s \in A \otimes A^{op} = A^e$ .
   Se cumplen los 4 axiomas de módulo izquierdo:
   $$(r_1 \otimes s_1 + r_2 \otimes s_2) \cdot a = (r_1 \otimes s_1) \cdot a + (r_2 \otimes s_2) \cdot a,$$
   $$((r_1 \otimes s_1)(r_2 \otimes s_2)) \cdot a = (r_1 \otimes s_1) \cdot ((r_2 \otimes s_2) \cdot a), \quad (1 \otimes 1) \cdot a = a$$
   $$\& \ (r \otimes s) \cdot (a_1 + a_2) = (r \otimes s) \cdot a_1 + (r \otimes s) \cdot a_2 \, .$$
   Por consiguiente, $A$ es $A^e$-módulo izquierdo.
2. Puesto que $A$ tiene una estructura de grupo aditivo abeliano, definimos la multiplicación por un escalar mediante $a \cdot (r \otimes s) = sar$ para $r \in A, s \in A$ y $r \otimes s \in A \otimes A^{op} = A^e$ .
   Se cumplen los 4 axiomas de módulo derecho. Por lo tanto, $A$ es $A^e$-módulo derecho.

$\square$

**Corolario 5.1.** *Si $M$ es un $A$-bimódulo, entonces $M$ es un $A^e$-módulo izquierdo.*

**Ejemplo 5.2.** *La aplicación $\gamma : A \to A^e$ dada por $\gamma(r) = r \otimes 1$ es un morfismo de anillos.*

Sea $K$ un anillo conmutativo unitario. Sean $A$ una $K-$álgebra y $H$ una $K-$álgebra de Hopf.

**Definición 5.2.** [8] *Dadas una acción débil de $H$ sobre $A$, $\sigma : H \times H \to A$ una aplicación $K-$bilineal, el $K-$módulo $A \otimes_K H$ provisto de multiplicación dada por*

$$(a \otimes h)(b \otimes \ell) = ab^{h^{(1)}} \sigma(h^{(2)}, \ell^{(1)}) \otimes h^{(3)} \ell^{(2)}, \tag{5.1}$$

*se llama producto cruzado (de Hopf) de $A$ por $H$, y se denota por $A \#_\sigma H$, si la multiplicación es asociativa y tiene como elemento unitario $1_A \otimes 1_H$.*

**Definición 5.3.** *Sean $E = A \#_\sigma H$, $E' = A' \#_{\sigma'} H'$. Un morfismo de productos cruzados de Hopf $\varphi : E \to E'$ es una aplicación $K$-lineal $\varphi = f \otimes g : A \otimes H \to A' \otimes H'$ tal que*

$$\varphi((a \otimes h)(b \otimes l)) = f(a) f(b)^{g(h)^{(1)}} \sigma'(g(h)^{(2)}, g(l)^{(1)}) \otimes g(h)^{(3)} g(l)^{(2)}, \tag{5.2}$$

*$\varphi(1_A \otimes 1_H)) = 1_{A'} \otimes 1_{H'}$, donde $f : A \to A'$ es un morfismo de $K$-álgebras, $g : H \to H'$ es un morfismo de $K$-álgebras de Hopf.*

**Definición 5.4.** *Sean $\varphi : E \to E'$, $\varphi' : E' \to E''$ morfismos de productos cruzados. Se define la composición $\varphi'\varphi : E \to E''$ por $\varphi'\varphi = f'f \otimes g'g : A \otimes H \to A'' \otimes H''$, donde $f'f : A \to A''$ es un morfismo de $K$-álgebras, $g'g : H \to H''$ es un morfismo de $K$-álgebras de Hopf.* Es claro que $\varphi'\varphi$ preserva la multiplicación y el elemento unitario.

**Ejemplo 5.3.** *$Cp$ es una categoría, cuyos objetos son productos cruzados de Hopf, cuyos morfismos son morfismos de productos cruzados y el producto de sus morfismos es la composición de aplicaciones.*
Se satisfacen los tres axiomas de categoría para $Cp$ :

CAT 1. Sea $f \in Cp(E_1, F_1) \cap Cp(E_2, F_2)$, entonces $E_1 = E_2$ y $F_1 = F_2$ en $Cp$.

CAT 2. Dados $f \in Cp(E_1, E_2),\ g \in Cp(E_2, E_3)$ y $h \in Cp(E_3, E_4)$, entonces $h(gf) = (hg)f$ en $Cp$.
En efecto, puesto que un producto cruzado es un $K$-módulo y $Cp(E_1, E_2) \subseteq \mathfrak{m}^l_K(E_1, E_2)$, sabemos que $f \in Cp(E_1, E_2),\ g \in Cp(E_2, E_3)$ y $h \in Cp(E_3, E_4)$ implica que $f \in \mathfrak{m}^l_K(E_1, E_2)$, $g \in \mathfrak{m}^l_K(E_2, E_3)$ y $h \in \mathfrak{m}^l_K(E_3, E_4)$. Entonces se cumple $h(gf) = (hg)f$ en $\mathfrak{m}^l_K$.
Como la composición de morfismos de productos cruzados preserva la multiplicación y el elemento unitario, vemos que $h(gf) = (hg)f$ en $Cp$.

CAT 3. Dado $E_1 \in |Cp|$, existe $1_{E_1} \in Cp(E_1, E_1)$ morfismo identidad de $E_1$ tal que para cualesquiera $f \in Cp(E_1, E_2)$ y $g \in Cp(E_3, E_1)$ se tiene $f \circ 1_{E_1} = f$ y $1_{E_1} \circ g = g$ en $Cp$. En efecto:
De $E_1 \in |Cp|,\ f \in Cp(E_1, E_2)$ y $g \in Cp(E_3, E_1)$ obtenemos que $E_1 \in |\mathfrak{m}^l_K|$, $f \in \mathfrak{m}^l_K(E_1, E_2)$ y $g \in \mathfrak{m}^l_K(E_3, E_1)$. Entonces existe $1_{E_1} \in \mathfrak{m}^l_K(E_1, E_1)$ el morfismo identidad de $E_1$ tal que
$$f \circ 1_{E_1} = f \quad \text{y} \quad 1_{E_1} \circ g = g \quad \text{en } \mathfrak{m}^l_K. \tag{5.3}$$
Claramente, $1_{E_1}$ preserva la multiplicación y el elemento unitario, de modo que $1_{E_1} \in Cp(E_1, E_1)$.
Luego, de (5.3) obtenemos que $f \circ 1_{E_1} = f$ y $1_{E_1} \circ g = g$ en $Cp$. $\square$

Sea $E = A \#_\sigma H$ un producto cruzado, entonces vemos que $E$ es una $K$-álgebra y existe un morfismo de anillos unitarios $\gamma : E \to E^e$. Sea $\mathscr{E}$ la clase proyectiva de epimorfismos de $E^e$-módulos izquierdos que se descomponen como morfismos de $E$-módulos izquierdos (Teorema 4.1).

Recordando que $E \otimes_{E^e} (-) : (\mathfrak{m}^l_{E^e}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas, podemos definir los funtores $\mathscr{E}$-derivados izquierdos de $E \otimes_{E^e} (-)$.

Por [1] la homología de Hochschild de un producto cruzado $E$ es la homología de $E \otimes_{E^e} (X_*, d_*)$, donde $(X_*, d_*)$ es una resolución proyectiva relativa de $E$, considerando [2, p. 319] podemos dar la siguiente.

**Definición 5.5.** *Sea $E$ un producto cruzado. El $n-$ésimo funtor de homología de Hochschild de $E$ denotado por $H_n(-, E) : (\mathfrak{m}^l_{E^e}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{Ab}$ se define como*

$$H_n(-, E) := L^{\mathscr{E}}_n(E \otimes_{E^e} (-)),\ n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

*Si $M$ es un $E^e$-módulo izquierdo ($M$ es un $E$-bimódulo), obtenemos que $H_n(M, E) = Tor^{\gamma}_n(E, M)$. Dado $f : M \to M'$ un morfismo de $E^e$-módulos izquierdos, por (4.12) $H_n(f, E) = Tor^{\gamma}_n(E, f)$.*

Las propiedades del funtor de homología de Hochschild de un producto producto cruzado $E$, $H_*(-, E)$, son dadas mediante el corolario y el teorema siguientes.

**Corolario 5.2.** *Dados $E = A\#_\sigma H$ un producto cruzado y $N$ un $E^e$-módulo izquierdo. Existen grupos abelianos $H_n(N, E)$, los morfismos de conección $\omega_n : H_n(M'', E) \to H_{n-1}(M', E)$ para cada sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ en $\mathfrak{m}^l_{E^e}$ tales que se cumplen las propiedades siguientes:*

1. *$H_n(N, E) = 0$ para $n < 0$.*
2. *$H_0(N, E)$ es naturalmente isomorfo a $E \otimes_{E^e} N$.*
3. *$H_n(N, E) = 0$ para $n > 0$ si $N$ es $\mathscr{E}$-proyectivo.*
4. *La sucesión siguiente es exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_n(M', E) \longrightarrow H_n(M, E) \longrightarrow H_n(M'', E) \xrightarrow{\omega_n} H_n(M', E) \longrightarrow \cdots$$

*Demostración:* Se sigue del teorema 4.3. □

**Teorema 5.1.** *$H_*(-, E) = \{H_n(-, E)\}$ es el $\mathscr{E}$-satélite izquierdo del funtor aditivo $E \otimes_{E^e} (-) : (\mathfrak{m}^l_{E^e}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{Ab}$.*

*Demostración:* Por la Definición 5.5, la Definición 4.3, la sucesión exacta larga (4.13), el diagrama conmutativo (4.15) y la proposición 2.2, resulta que $\{H_n(-, E)\}$ es una sucesión $\mathscr{E}$-conectada de funtores de $(\mathfrak{m}^l_{E^e}, \mathscr{E})$ en $\mathfrak{Ab}$ (ver [2, IX.3]).

Por otro lado, conforme a la proposición 4.9 el funtor $E \otimes_{E^e} (-) : (\mathfrak{m}^l_{E^e}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{Ab}$ es $\mathscr{E}$-exacto derecho. De [2, T IX.2.7] se sigue que los funtores $H_0(-, E) := L^{\mathscr{E}}_0(E \otimes_{E^e} (-))$ y $E \otimes_{E^e} (-)$ son naturalmente equivalentes. Luego, podemos escribir $H_0(-, E) = E \otimes_{E^e} (-)$. Para que $H_*(-, E)$ sea el $\mathscr{E}$-satélite izquierdo de $E \otimes_{E^e} (-)$ debe satisfacer la propiedad universal siguiente.

Para cada sucesión $\mathscr{E}$-conectada de funtores, $T = \{T_n\}$, de $(\mathfrak{m}^l_{E^e}, \mathscr{E})$ en $\mathfrak{Ab}$ y cada transformación natural $\psi : T_0 \to H_0(-, E)$ existe un único morfismo de sucesiones $\mathscr{E}$-conectadas denotado por $\Psi = \{\psi_n\} : T \to H_*(-, E)$ con $\psi_0 = \psi$ (ver [2, IX.3]).

Por el corolario 5.2 la transformación natural $\psi_n = 0$ para $n < 0$, $\psi_0 := \psi$. Definimos inductivamente $\psi_n : T_n \to H_n(-, E)$ para $n > 0$. Supongamos que hemos definido de modo único $\psi_k$ para $0 \le k \le n-1$, y conmuta con $\omega_k$ como en

$$\begin{tikzcd}
T_k(M'') \arrow[r, "\omega_k"] \arrow[d, "\psi_k M''"'] & T_{k-1}(M') \arrow[d, "\psi_{k-1} M'"] \\
H_k(M'', E) \arrow[r, "\omega_k"] & H_{k-1}(M', E)
\end{tikzcd}$$

para toda sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$. Procedemos a definir $\psi_n$.

Sea $K \rightarrowtail P \twoheadrightarrow M$ una presentación $\mathscr{E}$-proyectiva de $M$. Entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & T_n P \arrow[r] & T_n M \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, dashed, "\psi_n M"] & T_{n-1} K \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n-1} K"] & T_{n-1} P \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n-1} P"] & \cdots \\
& 0 \arrow[r] & H_n(M, E) \arrow[r, "\omega_n"] & H_{n-1}(K, E) \arrow[r] & H_{n-1}(P, E) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

con fila inferior exacta. Esto produce un único morfismo $\psi_n M : T_n M \to H_n(M, E)$ mediante $\psi_n M = (\omega_n)^{-1} \psi_{n-1} K \omega_n$.

Debemos probar que $\psi_n$ es una transformación natural, independiente de la elección de presentación $\mathscr{E}$-proyectiva de $M$ (ver en la prueba del teorema 4.2 las partes (a) y (c) ).

Consideremos el morfismo de presentaciones $\mathscr{E}$-proyectivas

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"] & P \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[d, "\alpha"] \\
K' \arrow[r, tail] & P' \arrow[r, two heads] & M'
\end{tikzcd}$$

Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} T_nM \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\psi_n M"'] & T_nM' \arrow[d, "\psi_n M'"] \\ H_n(M,E) \arrow[r, "\alpha_*"] & H_n(M',E) \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

conmuta.
En efecto, podemos incrustar el diagrama (5.4) en el cubo

$$\begin{tikzcd} & T_nM' \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dd, "\psi_n M'"] & & T_{n-1}K' \arrow[dd, "\psi_{n-1}K'"] \\ T_nM \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dd, "\psi_n M"'] & & T_{n-1}K \arrow[ur, "\phi_*"'] \arrow[dd, "\psi_{n-1}K"] & \\ & H_n(M',E) \arrow[rr, "\omega"] & & H_{n-1}(K',E) \\ H_n(M,E) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[rr, tail, "\omega"'] & & H_{n-1}(K,E) \arrow[ur, "\phi_*"'] \arrow[ll, bend right, "\omega^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Del hecho que las cinco caras del cubo conmutan, se deduce que la cara izquierda también conmuta. Tomando $M = M'$, se ve que $\psi_n$ no depende de la presentación $\mathscr{E}$-proyectiva de $M$.
Por la proposición 4.15 para la sucesión $\mathscr{E}$-exacta corta $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ de $E^e$-módulos izquierdos el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} T_nM'' \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\psi_n M''"'] & T_{n-1}M' \arrow[d, "\psi_{n-1}M'"] \\ H_n(M'',E) \arrow[r, "\omega_n"] & H_{n-1}(M',E) \end{tikzcd}$$

Esto completa la prueba. □

Dando la definición siguiente

**Definición 5.6.** *Sea $E$ un producto cruzado. El $n-$ésimo funtor de cohomología de Hochschild de $E$ denotado por $H^n(-,E) : (\mathfrak{m}^l_{E^e}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{Ab}$ se define como*

$$H^n(-,E) := R^n_{\mathscr{E}}(Hom_{E^e}(-,E)),\ n = 0,1,2,\dots\ .$$

y denotando $H^*(-,E) = \{H^n(-,E)\}$, se puede demostrar el resultado siguiente

**Teorema 5.2.** *$H^*(-,E)$ es el $\mathscr{E}$-satélite derecho del funtor aditivo $Hom_{E^e}(-,E) : (\mathfrak{m}^l_{E^e}, \mathscr{E}) \to \mathfrak{Ab}$.*

Dado un morfismo de anillos unitarios $\gamma : R \to S$. Si $F : \mathfrak{m}^l_S \longrightarrow \mathfrak{m}^l_R$ es el funtor de cambio de anillos, por la prueba de [6, Teorema 4] sabemos que $\mathscr{M}' = F^{-1}(\mathscr{M})$ es una clase inyectiva de monomorfismos de $S-$módulos izquierdos que se descomponen como morfismos de $R-$módulos izquierdos. Denotando $\overline{Ext}^*_\gamma(A,-) = \{\overline{Ext}^n_\gamma(A,-)\}$, donde

$$\overline{Ext}^n_\gamma(A,-) := R^n_{\mathscr{M}'}(Hom_S(A,-)),\ n = 0,1,2,\dots$$

obtenemos el siguiente

**Corolario 5.3.** *$\overline{Ext}^*_\gamma(A,-)$ es el $\mathscr{M}'$-satélite derecho del funtor aditivo $Hom_S(A,-) : (\mathfrak{m}^l_S, \mathscr{M}') \to \mathfrak{Ab}$.*

**Lema 5.1.** [9, Lema 2.2.5] *Sean $g : A \longrightarrow A'$ un morfismo de $K$-álgebras asociativas y $f : M \longrightarrow M'$ un morfismo de $A'$-bimódulos. Estos inducen el diagrama conmutativo siguiente*

$$\begin{tikzcd} C_n(A,M) \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "b_n"'] & C_n(A',M') \arrow[d, "b_n"] \\ C_{n-1}(A,M) \arrow[r, "h_{n-1}"'] & C_{n-1}(A',M') \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

*Por lo tanto tenemos una aplicación de $K$-módulos graduados $h_* : H_n(A,M) \longrightarrow H_n(A',M')$*

$$\overline{m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n} \mapsto \overline{f(m) \otimes g(a_1) \otimes \cdots \otimes g(a_n)}.$$

**Corolario 5.4.** [9, Corolario 2.2.8] *$HH_*$ es un funtor covariante de la categoría de $K$-álgebras asociativas con unidad en la categoría de $K$-módulos graduados.*

Considerando $M = A$, $M' = A'$, $g : A \to A'$ y $f = g$ en el lema anterior, vemos que $HH_n(g) : HH_n(A) \to HH_n(A')$ se define por

$$\overline{a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n} \mapsto \overline{g(a_0) \otimes g(a_1) \otimes \cdots \otimes g(a_n)}.$$

Dado $A \in |Alg_K|$, haciendo $g = 1_A$ se ve que $HH_n(1_A) = 1_{HH_n(A)}$.
Si $g : A \to B,\ g' : B \to C$ son morfismos de $K$-álgebras,

$$\begin{aligned} HH_n(g'g)(\overline{a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n}) &= \overline{g'g(a_0) \otimes g'g(a_1) \otimes \cdots \otimes g'g(a_n)} \\ &= HH_n(g')HH_n(g)(\overline{a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n}). \end{aligned}$$

Por consiguiente, $HH_n(-) : \mathrm{Alg}_K \to \mathfrak{m}^l_K$ es un funtor covariante para $n \geq 0$.

Recordando que un producto cruzado $E$ es una $K$-álgebra. Por la proposición 5.1, $E$ es un $E^e$-módulo derecho y $E$ es un $E^e$-módulo izquierdo. Tomando $M = E$ en la Definición 5.5

$$HH_n(E) := H_n(E, E) = Tor^{\gamma}_n(E, E) = L^{\mathscr{E}}_n(E \otimes_{E^e} (-))(E).$$

Conforme a Odabasi S. [tesis doctoral]-Universidad de Murcia (2014), la categoría de productos cruzados es una subcategoría de una categoría de $K$-álgebras ya que cada producto cruzado de Hopf es una $K$-álgebra, un morfismo de productos cruzados es un morfismo de $K$-álgebras y cada morfismo identidad de un producto cruzado es un morfismo identidad de la $K$-álgebra correspondiente.

**Observación 5.1.** *Se tiene $HH_*|_{Cp} : Cp \to \mathfrak{m}^{\mathbb{Z}}_K$; es decir, $HH_*$ de productos cruzados es un funtor covariante de la categoría de productos cruzados en la categoría de $K$-módulos graduados.*

## 6. Conclusiones.

1. La clase proyectiva $\overline{\mathscr{E}}$ de epimorfismos en $\mathfrak{m}^r_S$ es importante en la equivalencia natural de los bifuntores $Tor^{\gamma}_n(-,-)$ y $\overline{Tor_n}^{\gamma}(-,-)$.
2. Las homologías de Hochschild de un producto cruzado vistas como funtores son los funtores derivados relativos izquierdos de un funtor aditivo.
3. $H_*(-, E)$ es el $\mathscr{E}$-satélite izquierdo del funtor aditivo $E \otimes_{E^e} (-)$ ( Teorema 5.1 ).
4. Si $N$ es un módulo izquierdo sobre el producto cruzado $E$, entonces $H_n(E^e \otimes_E N, E) = 0$ para $n > 0$ por la afirmación del teorema 4.1, [6, Proposición 14] y parte 3 del corolario 5.2.

**7. Agradecimientos.** El presente trabajo surge del estudio de la homología de Hochschild de un producto cruzado de Hopf realizado en la tesis de doctorado de Matemática en IMCA-UNI. El autor agradece a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno por la licencia otorgada para publicaciones en revistas indexadas; al Instituto de Matemática y Ciencias Afines por dar un espacio para hacer investigaciones en el doctorado de Matemática. Asimismo, el autor expresa su agradecimiento especial a Dr. Christian Valqui por orientarlo y por permitir participar en el grupo de investigación " Algebra y Geometría no conmutativa".

## ORCID and License

Felipe Clímaco Ccolque T. https://orcid.org/0000-0002-9440-3569



# Referencias


[1] Carboni G, Guccione JA, Guccione JJ. Cyclic Homology of Hopf Crossed Products. Advances in Mathematics. 2010; 223:840-872.

[2] Hilton PJ, Stammbach U. A course in Homological Algebra. New York Heidelberg Berlin: Springer Verlag; 1971.

[3] Hochschild G. Relative Homological Algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 1956; 82:246-269.

[4] Cartan H, Eilenberg S. Homological Algebra. Princeton, New Jersey: Princeton University Press; 1956.

[5] Ccolque Taipe FC. Sucesiones Espectrales, Homología de Complejos Filtrados y Derivación de Funtores Compuestos. [Tesis de maestría]. Lima : Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería; 2009.

[6] Ccolque T FC. Caracterización de Proyectivos Relativos e Inyectivos Relativos. Selecciones Matemáticas. 2020; 7(2):276-288. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.02.10

[7] De la Rosa Reyes JF. Categoría de Módulos.[Internet- Memoria]. San Cristóbal de la Laguna : sección de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de la Laguna; 14 de julio de 2015. N.I.F. 54.111.182-W. Disponible en https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/1104/Categoria+de+Modulos.pdf;jsessionid=B145EFC3CEDF635926AAF5A392898C04?sequence=1

[8] Guccione JA, Guccione JJ. Hochschild (co)homology of Hopf crossed products. K-theory. 2002; 25(2):138-169.

[9] La Rosa Obando LB. Homología de Hochschild y Homología Cíclica. [Tesis de Licenciatura]. Lima : Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería; 2010.