



Revista Digital: Matemática, Educación e Internet

ISSN: 1659-0643

revistadigitalmatematica@itcr.ac.cr

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Costa Rica

Itzá-Ortíz, Benjamín A.; Rodríguez-Torres, Erika E.; Tetlalmatzi-Montiel, Margarita

Caracterización elemental con elipses tangentes a una recta y  
un círculo de la envolvente convexa de un cierto par de círculos

Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, vol. 24, núm. 2, 2024, Marzo-Agosto, pp. 1-10

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cartago, Costa Rica

DOI: <https://doi.org/10.18845/rdmei.v24i2.6885>

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=607975560001>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica Redalyc

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso  
abierto



## Caracterización elemental con elipses tangentes a una recta y un círculo de la envolvente convexa de un cierto par de círculos.

| Elementary characterization with ellipses tangent to a line and a circle of the convex hull of a certain pair of circles. |

Benjamín A. Itzá-Ortíz<sup>1</sup>

itza@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Hidalgo, México

Erika E. Rodríguez-Torres<sup>2</sup>

erikart@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Hidalgo, México

Margarita Tetlalmatzi-Montiel<sup>3</sup>

tmontiel@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Hidalgo, México

Recibido: 3 de junio de 2023

Aceptado: 5 de Agosto de 2023

**Resumen:** En este trabajo se presenta una caracterización de la envolvente convexa de los círculos  $(x - 1)^2 + y^2 = 1/4$  y  $(x + 1)^2 + y^2 = 1/4$  por medio de la unión de las elipses  $x^2 + 5y^2 - 4xy = 1/4$ ,  $x^2 + 5y^2 + 4xy = 1/4$  y la familia de las elipses centradas en el origen que, en cuatro puntos diferentes, son tangentes a dichos círculos y a los bordes superior e inferior de la envolvente convexa, empleando geometría analítica y derivación implícita.

**Palabras Clave:** Envolvente convexa, elipses, geometría analítica.

**Abstract:** In this work is given a characterization of the convex hull of the circles  $(x - 1)^2 + y^2 = 1/4$  and  $(x + 1)^2 + y^2 = 1/4$  through the union of the ellipses  $x^2 + 5y^2 - 4xy = 1/4$ ,  $x^2 + 5y^2 + 4xy = 1/4$ , and the family of the ellipses centered at the origin that, at four different points, are tangent to these circles and to the upper and lower edges of the convex hull, using analytic geometry and implicit derivation.

**Keywords:** Convex hull, ellipses, analytic geometry.

<sup>1</sup>Benjamín Alfonso Itzá-Ortiz. Profesor Investigador del Área Académica de Matemáticas y Física, UA EH, México. Dirección postal: Pachuquilla, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. Código postal: 42180. Correo electrónico: itza@uaeh.edu.mx

<sup>2</sup>Erika Elizabeth Rodríguez-Torres. Profesora Investigadora del Área Académica de Matemáticas y Física, UA EH, México. Dirección postal: Pachuquilla, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. Código postal: 42180. Correo electrónico: erikart@uaeh.edu.mx

<sup>3</sup>Margarita Tetlalmatzi-Montiel. Profesora Investigadora del Área Académica de Matemáticas y Física, UA EH, México. Dirección postal: Plutarco Elías Calles, Pachuca, Hidalgo, México. Código postal: 42035. Correo electrónico: tmontiel@uaeh.edu.mx

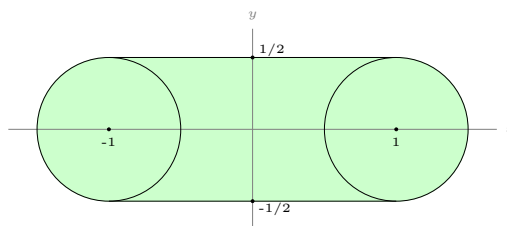
## 1. Introducción

Nos parece interesante y curioso que proporcionar soluciones a problemas matemáticos con herramientas elementales, como son la geometría analítica y la derivación implícita, permita visualizar aspectos diferentes a los observados con matemáticas más avanzadas. Por ejemplo, en [5], utilizando herramientas de matemáticas elementales tales como la desigualdad de Ptolomeo y el problema de Herón, se logra hacer una contribución en el cálculo del rango numérico de ciertos operadores tridimensionales asociados a sucesiones biinfinitas pseudoergódicas. Posteriormente, este estudio derivó en otros trabajos donde se aplicarían técnicas especializadas de la teoría de operadores [6, 7, 8].

Dos conceptos necesarios en este trabajo son los siguientes. El primero, un subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  es convexo si el segmento de recta que une a cualquier par de puntos en  $C$  se encuentra completamente contenido en  $C$ . El segundo, la componente convexa de un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  es el conjunto convexo más pequeño que lo contiene, en ocasiones a la componente convexa se le llama envolvente convexa. En lo sucesivo nos restringiremos al plano euclidiano.

Las componentes convexas tienen diversas aplicaciones. Por ejemplo, en estadística multivariada es de interés observar la envolvente convexa de los datos que se desean analizar [4], incluso algunos lenguajes de programación, como **R**, pueden determinarla con sólo proporcionar los datos de interés [13]. En probabilidad aparecen, por ejemplo, en el teorema de Wendel (1962) donde se entrelazan la probabilidad y la geometría, este resultado se ha usado en geometría computacional [1]. Precisamente, uno de los principales problemas de la geometría computacional es la elaboración de algoritmos para encontrar envolventes convexas, algoritmos empleados en la creación de ambientes virtuales [3]. También se encuentran aplicaciones de las componentes convexas en problemas de optimización, particularmente en la optimización convexa [2] y en geometría resulta de interés el análisis de sus propiedades geométricas y topológicas [11]. También se aplican en el estudio de la relación de las componentes convexas con el rango numérico de operadores acotados en espacios de Hilbert [6, 9].

En este trabajo nos interesa la envolvente convexa  $\Gamma$  de los círculos con centro en los puntos  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  y radio  $1/2$ , esta es la región verde mostrada en la figura 1. Observe que el segmento que une al punto  $(-1, 1/2)$  con  $(1, 1/2)$  y el que une al punto  $(-1, -1/2)$  con  $(1, -1/2)$  pertenecen a dicha envolvente convexa.



**Figura 1:** Envolvente convexa  $\Gamma$  de los dos círculos.

En los artículos [6, 9] se demuestra que  $\Gamma$  es igual a la unión infinita de cierta familia de elipses, digamos  $\mathcal{A}$ . El objetivo en este artículo es demostrar con geometría analítica y derivación implícita que  $\mathcal{A}$  es igual a la unión de las elipses  $x^2 + 5y^2 - 4xy = 1/4$ ,  $x^2 + 5y^2 + 4xy = 1/4$  y las elipses con centro en el origen y tangentes en cuatro puntos diferentes a: i) el segmento que une el punto  $(-1, 1/2)$  con  $(1, 1/2)$ , ii) el segmento que une el punto  $(-1, -1/2)$  con  $(1, -1/2)$ , iii) el círculo con radio  $1/2$  y centro en  $(1, 0)$ , iv) el círculo con radio  $1/2$  y centro en  $(-1, 0)$ . Esto proporciona otra caracterización de  $\Gamma$ . Esta caracterización es una ligera variante de la presentada en [9]. Nos parece interesante que al analizar el problema de la envolvente convexa  $\Gamma$  con herramientas elementales se han proporcionado algunos nuevos detalles, como son los contraejemplos que se muestran más adelante. Uno pudiera preguntarse si hay otros escenarios en donde la envolvente convexa de dos círculos es la unión de alguna familia de elipses. La respuesta es afirmativa, esto es en vista del teorema 2.8 en [6] y el ejemplo 2.10 en [8].

Este artículo está dividido en siete secciones. En la sección 2 se presenta a la familia de elipses  $\mathcal{A}$  que motiva este trabajo. En la sección 3 se encuentra la ecuación general de las elipses con centro en el origen. En la sección 4 se determinan las ecuaciones de las rectas tangentes necesarias. En la sección 5 se demuestra el resultado principal de este trabajo. En la sección 6 se ilustran unos contraejemplos. Y, en la sección 7 se presentan las conclusiones.

## 2. La familia de elipses

Comencemos definiendo la familia de elipses que motivan este artículo, su definición original está en [6, Definición 3.1] y en [9, Definición 1.1]

### Definición 1

Para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , se denota por  $\gamma_\theta$  a la elipse con focos en  $\pm\sqrt{1+e^{i\theta}}$  y longitud de eje mayor igual a  $1+|1+e^{i\theta}|$ .

En la definición anterior se está empleando variable compleja, pero basta con conocer sus valores equivalentes en coordenadas cartesianas. Para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 1+e^{i\theta} &= (1+\cos(\theta), \sin(\theta)) \\ &= (2\cos^2(\theta/2), 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)) \\ &= 2\cos(\theta/2)(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)) \end{aligned}$$

Como  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ , y en consecuencia  $\cos(\theta/2) \geq 0$ , queda bien definido  $|1+e^{i\theta}| = 2\cos(\theta/2)$ , así como los puntos  $\pm\sqrt{2\cos(\theta/2)}(\cos(\theta/4), \sin(\theta/4))$ . Con esto, la definición anterior es equivalente a la siguiente definición.

### Definición 2

Para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , se denota por  $\gamma_\theta$  a la elipse con focos en  $\pm\sqrt{2\cos(\theta/2)}(\cos(\theta/4), \sin(\theta/4))$  y cuya longitud del eje mayor es  $1+2\cos(\theta/2)$ .

Observe que, por la ubicación de los focos, las elipses tienen centro en el origen.

La ecuación de estas elipses  $\gamma_\theta$  se obtiene en [6, 9], esta es

$$x^2 + y^2(5 + 4\cos(\theta)) - 4xy\sin(\theta) = \left(\cos(\theta) + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Note que, para que sea una elipse debe ocurrir que  $\cos(\theta) \neq -1/2$ . Tenemos  $\cos(\theta) = -1/2$  cuando  $\theta = \pm 2\pi/3$ , dando las elipses degeneradas  $x^2 \pm 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 0$ , es decir las rectas  $y = \pm x/\sqrt{3}$ .

## 3. Elipses con centro en el origen

Antes de continuar, es necesario tener la ecuación general de las elipses con centro en el origen. Un punto  $(x, y)$  pertenece a una elipse si la suma de las distancias del punto a cada uno de los focos es igual a la longitud del eje mayor [10]. Al considerar elipses con centro en el origen, los focos son

diametralmente opuestos respecto al origen, por lo que son de la forma  $(r, s)$  y  $(-r, -s)$ . Si la longitud del eje mayor es  $2a$  y  $(x, y)$  es un punto en la elipse, se tiene

$$\sqrt{(x-r)^2 + (y-s)^2} + \sqrt{(x+r)^2 + (y+s)^2} = 2a.$$

Esta ecuación se puede simplificar pasando una de las raíces al lado derecho y elevando al cuadrado, simplificando resulta

$$a\sqrt{(x+r)^2 + (y+s)^2} = a^2 + xr + ys.$$

Nuevamente, elevamos al cuadrado y simplificamos, resulta

$$x^2(a^2 - r^2) + y^2(a^2 - s^2) - 2xyrs + a^2(r^2 + s^2 - a^2) = 0.$$

Con esto, las elipses centradas en el origen tienen la forma general  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$ , cuando  $A \neq 0$  se puede considerar como

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0. \quad (2)$$

Observe que si  $F = 0$  se tiene una elipse degenerada. En este caso, la ecuación (2) es equivalente a  $(x + \frac{B}{2}y)^2 + \frac{1}{4}y^2(4C - B^2) = 0$ , si  $4C - B^2 = 0$  se reduce a la línea  $x + \frac{B}{2}y = 0$  y si  $4C - B^2 > 0$  se reduce al origen  $(0, 0)$  [12].

## 4. Las rectas tangentes

En esta sección se van a determinar las ecuaciones de las rectas tangentes necesarias en la demostración del resultado principal.

Primero, observe que la recta que pasa por los puntos  $(-1, 1/2)$  y  $(1, 1/2)$  es  $y = 1/2$ . Como la recta tangente a una recta es la misma recta, la tangente en cualquier punto del segmento que une los puntos  $(-1, 1/2)$  y  $(1, 1/2)$  es precisamente  $y = 1/2$ .

Ahora, se calcula la recta tangente de la ecuación

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + F = 0. \quad (3)$$

Derivando implícitamente se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + By + D}{Bx + 2Cy}. \quad (4)$$

Si  $(a, b)$  satisface la ecuación (3), al evaluar este punto en la ecuación (4) se obtiene la pendiente de la recta tangente de la gráfica de la ecuación (3) en dicho punto.

Para el círculo  $(x-1)^2 + y^2 = 1/4$ , como es de la forma de la ecuación (3), empleando la ecuación (4), la recta tangente en el punto  $(a, b)$  es

$$y - b = \frac{1-a}{b}(x - a).$$

Recordando que el punto  $(a, b)$  está en el círculo, esta ecuación se puede reescribir como

$$by = (1-a)x + \left(a - \frac{3}{4}\right). \quad (5)$$

Similarmente, la elipse  $x^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$  es de la forma de la ecuación (3), empleando nuevamente la ecuación (4), la recta tangente en el punto  $(a, b)$  es

$$-\left(\frac{B}{2}a + Cb\right)y = \left(a + \frac{B}{2}b\right)x + F. \quad (6)$$

En particular, la ecuación de la recta tangente de la elipse con ecuación (1) que pasa por el punto  $(a, b)$  es

$$(2a \sin(\theta) - b(5 + 4 \cos(\theta)))y = (a - 2b \sin(\theta))x - \left(\cos(\theta) + \frac{1}{2}\right)^2.$$

## 5. La misma familia de elipses

Antes de demostrar el resultado principal se definen los siguientes conjuntos.

Sea  $\mathcal{A}$  la familia de las elipses  $\gamma_\theta$  para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , de la definición 2.

Sea  $\mathcal{B}$  la unión de las elipses que tienen centro en el origen y que son tangentes en cuatro puntos diferentes a: i) el segmento que une el punto  $(-1, 1/2)$  con  $(1, 1/2)$ , ii) el segmento que une el punto  $(-1, -1/2)$  con  $(1, -1/2)$ , iii) el círculo con radio  $1/2$  y centro en  $(1, 0)$ , iv) el círculo con radio  $1/2$  y centro en  $(-1, 0)$ .

Sea  $\mathcal{C}$  la unión de las elipses con centro en el origen y que son tangentes en dos puntos diferentes a: i) el segmento que une el punto  $(-1, 1/2)$  con  $(1, 1/2)$ , sin considerar los puntos de los extremos, ii) el círculo con radio  $1/2$  y centro en  $(1, 0)$ , sin el punto  $(1, -1/2)$ .

Un primer planteamiento del resultado principal es el siguiente.

### Resultado

La familia  $\mathcal{A}$  es igual a la unión de  $\mathcal{B}$  y las elipses  $x^2 + 5y^2 - 4xy = 1/4$  y  $x^2 + 5y^2 + 4xy = 1/4$ .

Sin embargo, dado que las elipses están centradas en el origen y por la simetría de los dos segmentos y los dos círculos, basta con demostrar el siguiente teorema.

### Teorema 1

La familia  $\mathcal{A}$  es igual a la unión de  $\mathcal{C}$  y las elipses  $x^2 + 5y^2 - 4xy = 1/4$  y  $x^2 + 5y^2 + 4xy = 1/4$ .

Algunas de las elipses en  $\mathcal{A}$  se muestran en la figura 2. La elipse verde tiene ecuación  $x^2 + y^2 = 1/4$ , que es un círculo, la azul tiene ecuación  $x^2 + 9y^2 = 9/4$ , la ecuación de la roja es  $x^2 + 5y^2 - 4xy = 1/4$  y la café es  $x^2 + 1.49y^2 + 1.92xy = 0.14$ , empleando  $\theta = \pm\pi$ ,  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1$  y  $\theta = -2.64$ , respectivamente, en la ecuación (1).

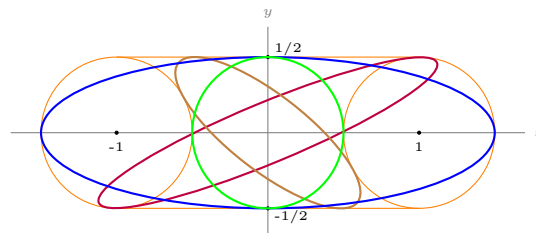


Figura 2: Ejemplos de elipses.

En la demostración del teorema empleamos los siguientes lemas.

**Lema 1** Para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , la elipse con ecuación (1) tiene centro en el origen y es tangente al círculo  $(x-1)^2 + y^2 = 1/4$  en el punto  $(1 + \cos(\theta)/2, \sin(\theta)/2)$  y al segmento que une el punto  $(-1, 1/2)$  con  $(1, 1/2)$  en el punto  $(\sin(\theta), 1/2)$ .

La demostración se puede ver en [9], donde el resultado se demuestra, sin pérdida de generalidad, para  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Note que demostrar que dos curvas son tangentes en un punto  $P(x_1, y_1)$  es equivalente a demostrar que las rectas tangentes respectivas en el punto  $P(x_1, y_1)$  son la misma recta.

**Lema 2** Si una elipse pertenece a  $\mathcal{C}$ , entonces la elipse tiene ecuación (1) para algún  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

*Demostración.* Recordemos que  $\mathcal{C}$  es la unión de las elipses con centro en el origen y que son tangentes en dos puntos diferentes a: i) el segmento que une al punto  $(-1, 1/2)$  con  $(1, 1/2)$ , sin considerar los puntos de los extremos, ii) el círculo con radio  $1/2$  y centro en  $(1, 0)$ , sin el punto  $(1, -1/2)$ . Por lo que si una elipse está en  $\mathcal{C}$ , su ecuación es de la forma de la ecuación (2), y su recta tangente en el punto  $P(x_1, y_1)$  tiene ecuación de la forma de la ecuación (6).

La recta que pasa por los puntos  $(-1, 1/2)$  y  $(1, 1/2)$  es  $y = 1/2$ . Ya que solo nos interesa la tangencia de la elipse con el segmento que une el punto  $(-1, 1/2)$  con  $(1, 1/2)$ , sin incluir estos puntos, se puede considerar que ocurre en puntos de la forma  $(\sin(\theta), 1/2)$ , para  $\theta \in [-\pi, \pi]$  y  $\theta \neq \pm\pi/2$ . Note que  $(\sin(\pi/2), 1/2)$  y  $(\sin(-\pi/2), 1/2)$  son los puntos extremos del segmento. Fijemos esta  $\theta$ . Si la elipse y  $y = 1/2$  son tangentes, el coeficiente de  $y$  de la tangente de la elipse (6) no puede ser cero. Así, la ecuación de la tangente de la elipse queda como

$$y = -\frac{\sin(\theta) + \frac{B}{4}}{\frac{B}{2}\sin(\theta) + \frac{C}{2}}x - \frac{F}{\frac{B}{2}\sin(\theta) + \frac{C}{2}}.$$

La tangente de la elipse y la recta  $y = 1/2$  son iguales si

$$\frac{\sin(\theta) + \frac{B}{4}}{\frac{B}{2}\sin(\theta) + \frac{C}{2}} = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{F}{\frac{B}{2}\sin(\theta) + \frac{C}{2}} = \frac{1}{2}.$$

De la primera identidad tenemos  $B = -4\sin(\theta)$  y de la segunda identidad  $F = -(B/4)\sin(\theta) - (C/4) = \sin^2(\theta) - C/4$ . Sustituyendo en la ecuación de la elipse, esta queda

$$x^2 - 4xy\sin(\theta) + Cy^2 + \sin^2(\theta) - C/4 = 0. \quad (7)$$

Ahora, la ecuación de una tangente del círculo  $(x-1)^2 + y^2 = 1/4$  que pasa por el punto  $P(x_1, y_1)$  es como en la ecuación (5). Primero consideremos el caso en que los coeficientes de  $y$  en ambas ecuaciones de las rectas tangentes no son cero. Ya que la elipse y el círculo son tangentes en el punto  $P(x_1, y_1)$  si sus rectas tangentes respectivas en este punto son iguales, al igualar estas rectas se tiene

$$\frac{x_1 - 2y_1\sin(\theta)}{2x_1\sin(\theta) - Cy_1} = \frac{1 - x_1}{y_1} \quad \text{y} \quad \frac{\sin^2(\theta) - \frac{C}{4}}{2x_1\sin(\theta) - Cy_1} = \frac{x_1 - \frac{3}{4}}{y_1},$$

realizando los productos cruzados y simplificando, obtenemos

$$2y_1^2\sin(\theta) - 2x_1^2\sin(\theta) + x_1y_1(C-1) + 2x_1\sin(\theta) - Cy_1 = 0$$

$$2x_1^2\sin(\theta) - Cx_1y_1 - \frac{3}{2}x_1\sin(\theta) - y_1(\sin^2(\theta) - C) = 0.$$

Después de simplificar la suma de estas ecuaciones, resulta

$$2y_1^2 \sin(\theta) - y_1(x_1 + \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2}x_1 \sin(\theta) = 0.$$

Es una ecuación cuadrática en  $y_1$ , cuyo discriminante es

$$(x_1 + \sin^2(\theta))^2 - 4(2 \sin(\theta)) \left( \frac{1}{2}x_1 \sin(\theta) \right) = (x_1 - \sin^2(\theta))^2.$$

El caso  $\sin(\theta) = 0$  se analiza más adelante. Si  $\sin(\theta) \neq 0$ , obtenemos que las soluciones de la cuadrática son

$$y_{11} = \frac{\sin(\theta)}{2} \quad \text{y} \quad y_{12} = \frac{x_1}{2 \sin(\theta)}.$$

Estos puntos están tanto en el círculo como en la elipse. Al sustituir  $y_{11}$  en el círculo, queda

$$(x - 1)^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{4} = \frac{1}{4},$$

de donde resulta  $x_{11} = 1 + \frac{1}{2} \cos(\theta)$ . Ahora, sustituyendo  $x_{11}$  y  $y_{11}$  en la ecuación (7), se tiene

$$(1 + \frac{1}{2} \cos(\theta))^2 - 2(1 + \frac{1}{2} \cos(\theta)) \sin^2(\theta) - \frac{C}{4} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 0.$$

Simplificando, da

$$\cos^2(\theta)(5 + 4 \cos(\theta) - C) = 0.$$

Si  $C = 5 + 4 \cos(\theta)$  se sustituye en la ecuación (7), al simplificar se obtiene precisamente la ecuación de la elipse (1), como se quería. Si  $\cos(\theta) = 0$  se tiene  $\theta = \pm\pi/2$ , que no se consideran por corresponder a los extremos del segmento.

Con la segunda raíz, al sustituir  $y_{12}$  en la ecuación (7) y simplificar, se llega a

$$(x^2 - \sin^2(\theta))(C - 4 \sin^2(\theta)) = 0$$

Si  $C = 4 \sin^2(\theta)$  se sustituye en la ecuación (7), se obtiene  $(x - 2y \sin(\theta))^2 = 0$ , que no es una elipse, por lo que  $C$  no puede tomar este valor. Con esto, debe ser  $x_{12}^2 = \sin^2(\theta)$ . Sustituyendo  $x_{12}$  y  $y_{12}$  en la ecuación del círculo se obtienen los puntos  $(1, 1/2)$  y  $(1, -1/2)$ , puntos descartados en las hipótesis del lema, por lo que se descarta  $y_{12}$ .

Falta analizar lo que ocurre cuando los coeficientes de  $y$  en las tangentes de la elipse y del círculo que pasan por el punto  $P(x_1, y_1)$  son cero, esto ocurre cuando  $Cy_1 - 2x_1 \sin(\theta) = 0$  y  $y_1 = 0$ , respectivamente. Ya que  $x_1$  no puede ser también cero, necesariamente  $\sin(\theta) = 0$ , por lo que  $\theta$  es  $0, \pi$  o  $-\pi$ . Con esto, en la ecuación de la elipse (2),  $B = 0$  y  $F = -C/4$  quedando la elipse  $x^2 + Cy^2 = C/4$ . De la ecuación del círculo,  $y = 0$  ocurre cuando  $x = 1/2$  y  $x = 3/2$ , sustituyendo en la ecuación de la elipse anterior, resultan los casos en que  $C = 1$  y  $C = 9$ , que corresponden al círculo  $x^2 + y^2 = 1/4$  y a la elipse  $x^2 + 9y^2 = 9/4$ , precisamente la ecuación (1) cuando  $\theta$  es  $\pm\pi$  y cero, respectivamente.  $\square$

Ya que la ecuación de  $\gamma_\theta$  es precisamente la ecuación (1), la demostración del teorema se sigue de los dos lemas anteriores y del hecho de que las elipses  $x^2 - 4xy + 5y^2 = 1/4$  y  $x^2 + 4xy + 5y^2 = 1/4$ , coincidiendo con la ecuación (1) cuando  $\theta$  es  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ , respectivamente. En consecuencia, se tiene una nueva caracterización de la envolvente convexa  $\Gamma$ .



## 6. Contraejemplos

Es importante notar que los puntos de intersección de las elipses con los segmentos y los círculos son cuatro puntos diferentes, salvo en los extremos de los segmentos. Y en el caso de los extremos se proporcionaron las dos elipses  $x^2 + 5y^2 - 4xy = 1/4$  y  $x^2 + 5y^2 + 4xy = 1/4$ . La razón de esto es que hay una cantidad infinita de elipses que son tangentes a: i) la recta  $y = 1/2$  y el círculo  $(x + 1)^2 + y^2 = 1/4$  en el punto  $(-1, 1/2)$ , ii) la recta  $y = -1/2$  y el círculo  $(x - 1)^2 + y^2 = 1/4$  en el punto  $(1, -1/2)$ .

Para ver esto, considere las elipses con ecuación (7) y  $\theta = -\pi/2$ , esta es

$$x^2 + 4xy + Cy^2 + 1 - C/4 = 0. \quad (8)$$

Observe que sólo puede ser una elipse si  $C > 4$  [10]. Al restar las ecuaciones (8) y  $(x - 1)^2 + y^2 = 1/4$ , se obtiene una ecuación cuadrática en  $y$  cuyas soluciones son

$$y_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{-8x + (C - 1)}{2(C - 1)}.$$

De la primera identidad, la elipse y el círculo se cortan en el punto  $(1, -1/2)$ . Las pendientes de las rectas tangentes de la elipse (8) son de la forma

$$m_1 = -\frac{x + 2y}{2x + Cy},$$

y las del círculo son

$$m_2 = \frac{1 - x}{y}.$$

Ambas pendientes son cero en el punto  $(1, -1/2)$ , es decir, para cada  $C > 4$  la elipse y el círculo son tangentes en este punto. Evaluando  $m_1$  en el punto  $(-1, 1/2)$  da cero, y así, la elipse es tangente con la recta  $y = 1/2$  en este punto. Demostrando así que, para cada  $C > 4$  la elipse con ecuación (8) es tangente a la recta  $y = 1/2$  en el punto  $(-1, 1/2)$  y al círculo  $(x - 1)^2 + y^2 = 1/4$  en el punto  $(1, -1/2)$ . Ejemplos de estas elipses son  $x^2 + 5y^2 + 4xy = 1/4$ , y

$$x^2 + 4xy + \frac{645}{25}y^2 + 1 - \frac{1}{4} \frac{645}{25} = 0,$$

las elipses azul y roja de la figura 3, respectivamente. Note que, la primera elipse se encuentra dentro de la envolvente convexa  $\Gamma$ , pero la segunda no. De hecho, se puede demostrar que las elipses con ecuación (8) están dentro de la componente convexa cuando  $4 < C \leq 5$ .

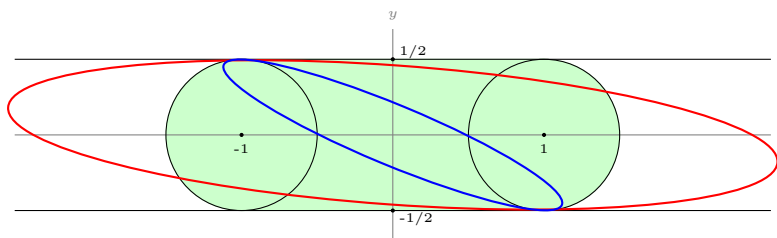


Figura 3: Contraejemplos.

Por simetría, algo similar ocurre con las elipses  $x^2 - 4xy + Cy^2 + 1 - C/4 = 0$

Concluimos esta sección con un resultado que nos parece interesante. En este se afirma que la circunferencia con centro en  $(-\cos(\theta), \sin(\theta))$  y radio igual al eje mayor de  $\gamma_\theta$ , es decir  $2 \cos(\theta/2) + 1$ , es tangente a la circunferencia con centro en  $(1, 0)$  y radio 1. Se deja al lector los detalles de la prueba.

**Teorema 2**

Sea  $\theta \in [-\pi, \pi)$ . La circunferencia con centro en  $-(\cos(\theta), \sin(\theta))$  y radio  $2 \cos(\theta/2) + 1$  es tangente a la circunferencia con centro en  $(1, 0)$  y radio 1.

## 7. Conclusiones

En el fondo, el problema planteado en este trabajo es geométrico, por lo que se presta a hacer simulaciones y experimentos con herramientas como Geogebra. Una de las intenciones de emplear geometría analítica y derivación implícita en las demostraciones de la caracterización de la envolvente convexa  $\Gamma$  y del contraejemplo, es hacer accesible el artículo a estudiantes de los primeros semestres de licenciatura y, posiblemente, de nivel bachilleres. Otra es, tratar de descubrir aspectos que se escaparon al analizar el problema con matemáticas más avanzadas de las empleadas aquí.

Se encontró una nueva caracterización de la familia de elipses  $\gamma_\theta$  de la definición 2. Lo cual da otra perspectiva para entender esta familia de elipses y su envolvente convexa.

Es importante resaltar que en el resultado principal las elipses son tangentes en cuatro puntos diferentes a los dos círculos y a los bordes superior e inferior de la componente convexa, y que con esto faltan los extremos de los bordes donde las elipses respectivas solo son tangentes en dos puntos, por lo que es necesario agregar las elipses  $x^2 + 5y^2 - 4xy = 1/4$  y  $x^2 + 5y^2 + 4xy = 1/4$ .

Por la simetría de la componente convexa se podría pensar que basta emplear elipses tangentes en dos puntos diferentes al borde superior y a uno de los círculos, pero se encuentra que deben ser excluidos los extremos de los bordes ya que por ellos pasa una cantidad infinita de elipses que cumplen con estas tangencias. Estos detalles se encontraron al estudiar el problema con geometría analítica.

Este trabajo está relacionado con temas de matemáticas avanzadas y, por ende, permite dar un vistazo a resultados en los que el estado del arte es requerido.

## 8. Bibliografía

- [1] Alon, N., Spencer, J. H. (2016). *The probability method*. John Wiley & Sons, Inc, Wiley series in discrete mathematics and optimization, cuarta edición.
- [2] Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge University Press.
- [3] Expósito Polo, J. D. (2009). "Estudio y visualización de envolventes convexas y triangulaciones con direcciones restringidas en Geometría Computacional". Trabajo de fin de carrera, Ingeniería informática, Escuela Politécnica, Universidad de Alcalá, 258p. <https://ordend.web.uah.es/files/TFC-TriangulacionesRestringidas-Memoria.pdf>.
- [4] Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J. (2017). *The elements of statistical learning. Data mining, inference and prediction*. Segunda edición. Springer.
- [5] Hernández-Becerra C., Itzá-Ortiz B. A. (2016). "A class of tridiagonal operators associated to some subshifts". *Open mathematics*, vol. 14, 352–360. <https://doi.org/10.1515/math-2016-0031>
- [6] Itzá-Ortiz B. A., Martínez-Avendaño R. A. (2021). "The numerical range of a class of periodic tridiagonal operators". *Linear and multilinear algebra*, vol. 69, 786–806. <https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1706438>.

- [7] Itzá-Ortiz B. A., Martínez-Avendaño R. A., Nakazato H. (2021). "The numerical range of some periodic tridiagonal operators is the convex hull of the numerical ranges of two finite matrices". *Linear and multilinear algebra*, vol. 69, 2830-2849. <https://doi.org/10.1080/03081087.2021.1957760>
- [8] Itzá-Ortiz B. A., Martínez-Avendaño R. A., Nakazato H. (2022). "The numerical range of a periodic tridiagonal operator reduces to the numerical range of a finite matrix". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 506, 125713. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125713>
- [9] Itzá-Ortiz B. A. , Martínez-Avendaño R. A., Nopal-Coello V., Villarroel-Flores R. (2022) "Sobre la igualdad entre la envolvente convexa de dos círculos con la unión de cierta familia de elipses". *Pädi. Boletín científico de ciencias básicas e ingeniería del ICBI*, vol. 10, no. especial, 52-58. <https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial.8444>.
- [10] Lehmann C. H.(2018). *Geometría analítica*. Limusa, México.
- [11] Leonard, E. and Lewis, J. E. (2015). *Geometry of Convex Sets*. Wiley, New Jersey.
- [12] Spain, B.(1963). *Analitical geometry*. The Macmillan company.
- [13] Zeltermán, D.(2015). *Applied multivariate statistics with R*. Springer.