Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades, SOCIOTAM
ISSN: 1405-3543
hmcappello@gmail.com
Universidad Autónoma de Tamaulipas
México

RESÉNDIZ BALDERAS, Evelia; GONZÁLEZ SALAZAR, Carlos Alberto; CONTRERAS REYES, Julio César

PROTOTIPOS GEOMÉTRICOS EN EL APRENDIZAJE DE EJES DE SIMETRÍA. TERCER GRADO DE PRIMARIA

Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades, SOCIOTAM, vol. XXVIII, núm. 2, 2018
Universidad Autónoma de Tamaulipas
México

PROTOTIPOS GEOMÉTRICOS EN EL APRENDIZAJE DE EJES DE SIMETRÍA. TERCER GRADO DE PRIMARIA

Evelia RESÉNDIZ BALDERAS, Carlos Alberto GONZÁLEZ SALAZAR y Julio César CONTRERAS REYES
Universidad Autónoma de Tamaulipas, México

RESUMEN
Este trabajo presenta un estudio de caso que documenta la implementación de una situación de aprendizaje diseñada para el desarrollo en la comprensión de los ejes de simetría, trabajando en específico el caso de los triángulos.
La investigación se llevó a cabo con estudiantes de tercer grado de Primaria. Estuvo conformada por cuatro momentos: observaciones frente a grupo, diseño de la situación de aprendizaje, implementación y redacción del informe correspondiente.
Se evitó utilizar representaciones geométricas estereotipadas, contribuyendo con ello al desarrollo de la visualización espacial en los estudiantes.
Como fundamento teórico se utilizó la teoría socioepistemológica de la matemática educativa propuesta por Cantoral (2014), que contempla dimensiones sociales, cognitivas, epistemológicas y didácticas.
Palabras clave: ejes de simetría, geometría, socioepistemología.

PROTOTYPES IN THE LEARNING OF SYMMETRY AXES IN THIRD-GRADE STUDENTS

ABSTRACT
This study presents a case study that analyzes the implementation of a teaching situation used in the learning of symmetry axes, specifically in triangles.
The participants were third-grade elementary students. It was implemented in four stages: Group observations, a design of a teaching situation, implementation, and writing of the report.
It was avoided the use of stereotyped presentations, in order to develop the students' spatial visualization.
As a theoretical background, the socio-epistemological contribution of Cantoral (2014) was used, which includes social, cognitive, epistemological, and didactic dimensions.
Keywords: Symmetry axes, geometry, socio-epistemology.

INTRODUCCIÓN

La educación es un proceso muy complejo, en el que intervienen múltiples actores, los cuales se ven afectados por una gran variedad de factores dentro y fuera del aula. En los últimos años, la matemática educativa ha tenido un creciente interés, por considerar –para el estudio de la realidad educativa– cuestiones de tipo contextual, afectivo, social, político, moral y de equidad.

Al respecto, Artigue (2013:47) mencionó que "no se puede negar que en las dos últimas décadas hemos visto importantes cambios, y en particular la influencia creciente de los enfoques socioculturales". La matemática educativa es considerada por muchos no sólo una práctica, sino una disciplina científica o un campo de investigación, con sus propios objetos de estudio (Artigue, 2013; Cantoral *et al.*, 2014).

El objetivo de esta investigación es atender algunas de las problemáticas que existen en la geometría escolar para los primeros años de escolaridad. En especial, se buscó trabajar con el obstáculo que representa la utilización de prototipos geométricos en el aprendizaje de ejes de simetría para el tercer grado de Primaria. Ello contribuiría en el desarrollo de la visualización espacial de los estudiantes y, en general, abonaría al desarrollo de su pensamiento matemático.

Por lo general, en geometría se utilizan palabras como punta, recta, plano, triángulo, polígono, entre otras. Estos términos se utilizan para designar figuras geométricas, las cuales se consideran como representaciones generales o ideas de una determinada categoría de objetos (Reséndiz *et al.*, 2016).

Respecto a esto, Godino y Ruiz (2002) mencionan que uno de los grandes problemas didácticos es que usualmente se utilizan las mismas palabras para hacer referencia a los objetos matemáticos abstractos y a la realidad concreta; incluso dentro de los libros de texto no se suele hacer esta diferenciación. El desarrollo del pensamiento matemático tiene como una de sus principales bases el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico. Frostig (1978, citado en Uribe *et al.,* 2014:145), menciona que el desarrollo del pensamiento espacial tiene la finalidad de desarrollar "la facultad de reconocer y discriminar estímulos visuales e interpretarlos asociándolos con experiencias anteriores".

Reséndiz *et al.* (2016:30) definen como *visualización* a las distintas actividades que se relacionan con "el estudio de las posibles formas en las que el pensamiento visual puede provocar atracciones y generalizaciones en el proceso de transformación en pensamiento abstracto".

Tomando en cuenta que el campo de estudio con el que se trabajaría es el matemático, se optó por utilizar el término *visualización matemática.*

En Cantoral *et al.* (2000) se emplea el término *pensamiento matemático* para referirse a las maneras en cómo piensan las personas que se dedican profesionalmente a la matemática. El pensamiento matemático incluye, por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y, por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis.

Entre los estudiantes, el pensamiento matemático se desarrolla en la medida en que ellos estén en condiciones de tomar el control de sus propias actividades matemáticas, organizadas por su profesor. Esta manera de pensar aparece progresivamente en el alumno, a partir de múltiples condiciones estructurales; debe, por así decirlo, ser el resultado de confrontaciones con cierto tipo de obstáculos encontrados durante su actividad (Cordero, 2006).

Por su parte, Cantoral y Montiel (2001) afirman que cada vez que se usa una estrategia de graficación, ya sea para construir, interpretar o transformar una forma gráfica, se está desarrollando, al mismo tiempo, una manera particular de pensamiento matemático en el lector.

En cuanto a la visualización, diversos autores la han abordado en sus trabajos de investigación. Tal es el caso de Cantoral *et al.* (2000), quienes afirman que se entiende por *visualización* la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido, se trata de un proceso mental muy utilizado en distintas áreas del conocimiento matemático y, en general, del científico.

El término visualización proviene de la palabra griega *theorein* (teorema) que significa "contemplar". La imagen evoca la idea, como la sombra a la realidad. También se señala que el acto de visualización es considerado como un aspecto esencial a desarrollar en las actividades de los estudiantes, utilizando para ello el manejo de una gran diversidad de representaciones de los objetos matemáticos en la investigación (Aparicio *et al.*, 2003).

Por otro lado, Arcavi y Hadas (2000) afirman que la visualización generalmente se refiere a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar sobre información visual.

El término visualización se emplea, por lo general, con referencia a figuras o representaciones gráficas externas o internas; es decir, sobre un soporte material –papel, pantalla, etc.– o en la mente (Duval, 1999). El pensamiento visual está fuertemente ligado a la capacidad para la formación de imágenes mentales, así como para visualizar cualquier concepto matemático o problema. Para ello, se requiere la habilidad para interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente y expresarla sobre un soporte material.

Durante la indagación bibliográfica se encontraron investigaciones como las realizadas por Fripp y Varela (2012), Reséndiz *et al.* (2016), Scaglia y Moriena (2005) y Rey (2004), donde se documenta que, usualmente, la enseñanza de la geometría se hace con escasas representaciones de objetos matemáticos. Esto trae como consecuencia que los alumnos le asignen pseudopropiedades a las representaciones geométricas. Al respecto, Reséndiz *et al.* (2016: 40) mencionan que por la "falta de experiencias variadas (y en contextos diferentes) de los alumnos con objetos geométricos, la construcción de significados que se hacen sobre el objeto queda limitada".

Estas escasas representaciones geométricas son denominadas prototipos o estereotipos geométricos. Scaglia y Moriena (2005) definen a los prototipos geométricos como modelos que son utilizados como puntos de referencia cognitivos y se construyen, entre otras razones, por la frecuente utilización de representaciones gráficas estereotipadas durante la enseñanza de los conceptos geométricos.

En Barrantes y Zapata (2008) se menciona que existen diversos obstáculos y errores de la geometría escolar, clasificando estas dificultades en: simbología visual del concepto, distractores de orientación, distractores de estructuración e imágenes reales de conceptos. Dichos errores son replicados constantemente por los libros de texto y los profesores, lo que ocasiona dificultades en temas geométricos de mayor complejidad.

Cuando los estudiantes se encuentran con representaciones de figuras geométricas no estereotipadas tienden a rechazarlas: "Si el dibujo posee características visuales distintas a las del modelo, algunos alumnos no reconocen o rechazan esa representación gráfica, sin analizar si responde o no a la definición del concepto" (Scaglia y Moriena, 2005:106).

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Hoy en día se sabe que los estudiantes, al enfrentarse a un nuevo conocimiento, nunca parten de cero, debido a que siempre llevan consigo sapiencias y experiencias previas, que les facilitarán la adquisición de este nuevo saber (Sierspinska, 1994; Candela, 1999; Sfard, 2002).

Sin embargo, algunos de estos conocimientos previos, más que representar una ventaja para la adquisición de nuevos conocimientos, en realidad son obstáculos que impiden la apropiación de nuevas cogniciones, convirtiéndose en obstáculos de aprendizaje (Bohorquez *et al.,* 2009).

En el caso de la geometría escolar, estos obstáculos se generan debido a que, tradicionalmente, los profesores únicamente muestran a los estudiantes representaciones de figuras geométricas con configuraciones preestablecidas, denominadas *prototipos geométricos* (Rey, 2004; Scaglia y Moriena, 2005). Ello puede privar a los alumnos de la posibilidad de ampliar su concepto de representaciones geométricas, ya que al estar muy presentes en su formación académica, en ocasiones es complicado re-significarlas.

El primer acercamiento formal al estudio de la simetría en México se realiza durante el tercer grado de Primaria. Según los *Aprendizajes Clave,* propuestos para este grado por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017:230), es mediante el sub-eje "Figuras y cuerpos geométricos" –perteneciente al eje temático "Forma, espacio y medida”– que se tiene, como aprendizaje esperado, que los estudiantes logren construir y analizar triángulos, por medio del estudio de sus características, como sus lados y su eje de simetría.

Lo más importante de este contenido matemático es reconocer las distintas y variadas características de las representaciones gráficas de los triángulos, y cómo éstas afectan sus ejes de simetría. Es necesario mencionar que la enseñanza de los ejes de simetría no está exenta del gran problema que representa la utilización de prototipos geométricos (Bohorquez *et al.*, 2009).

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Debido a las características de la investigación, se optó por emplear la teoría socioepistemológica de la matemática educativa como referente teórico, debido a que este enfoque nos brinda categorías, métodos y herramientas que permiten el estudio de la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral *et al.*, 2014*)*.

Esta teoría considera como válido cualquier tipo de conocimiento –ya sea de origen popular, técnico o culto– para estudiar los fenómenos didácticos ligados al saber matemático. Una de sus múltiples tareas es el estudio de dichos fenómenos, relacionados con la construcción del conocimiento matemático, buscando también la democratización del conocimiento y oponiéndose a las prácticas denominadas “tradicionales” (Cantoral *et al.*, 2014).

Simetría

La simetría es un concepto que usualmente se relaciona con cuestiones de orden, estética y perfección. Este concepto se encuentra presente en distintas disciplinas y contextos de la vida, como son la naturaleza, la arquitectura, el arte y la ciencia (Morones, 2002; Olkhovaia, 2005; Bohorquez *et al.*, 2009).

Bohorquez *et al.* (2009:478) retoman las aportaciones de Weyl (1989), mencionando que el concepto de simetría puede entenderse desde diferentes maneras: desde una idea relacionada con la proporción o desde una perspectiva más matemática y formal, como una "invariabilidad de una configuración de elementos bajo un grupo de transformaciones automórficas".

Para fines de esta investigación se utilizará la definición propuesta por Soto (2011) para simetría y eje de simetría. Se entiende a la *simetría* como una propiedad presente en algunas representaciones geométricas, las cuales cuentan con una correspondencia en su tamaño y forma respecto a una línea o segmento. El *eje de simetría* es el segmento que divide una figura geométrica en dos partes iguales.

La utilización de los prototipos geométricos antes mencionados por Barrantes *et al.*, (2014) también afecta al entendimiento de la simetría en el ámbito escolar, debido a que los alumnos suelen utilizar representaciones con configuraciones estereotipadas para identificar los ejes de simetría.

Al respecto, Bohorquez *et al.* (2009) documentan la preferencia de los estudiantes por utilizar representaciones geométricas simétricas para la resolución de problemas geométricos. Menciona que, cuando se les solicita a los estudiantes la demostración de propiedades generales de, por ejemplo, los triángulos, se opta con frecuencia por utilizar el triángulo isósceles, lo que ocasiona que se introduzcan "arbitrariamente condiciones no dadas en el enunciado".

La simetría ha gozado de un gran prestigio desde tiempos remotos, siendo asociada con la perfección y el balance de las cosas. Vitruvius (1914), citado en

Bohorquez *et al.* (2009), documenta que el arquitecto griego Vitrubio (70 a.C.-25 a.C.) señalaba en su obra, *Los diez libros de arquitectura,* que el diseño de un edificio dependía en gran medida de su simetría. Dichos principios deben ser fundamentales para los arquitectos en la elaboración de cualquier proyecto de construcción.

Morones (2002:173) menciona que los antiguos griegos consideraban al círculo y a la esfera como objetos perfectos de dos y tres dimensiones respectivamente. Esto, debido a que "El círculo es simétrico respecto a cualquier línea recta que pase por su centro y la esfera lo es respecto a cualquier plano que la corte pasando por su centro".

Otro campo de estudio en donde la simetría juega un papel fundamental es en la física, debido a que la simetría guarda una gran relación con la explicación de conceptos fundamentales de esta ciencia y sus leyes de conservación (Morones, 2002).

La simetría no sólo se ha utilizado para cuestiones artísticas, ha tenido también gran relevancia en el campo de las matemáticas y las físicas. Son incontables las situaciones en las cuales se puede hacer uso de la simetría para la explicación de algunos fenómenos o para la modelación de otros (Bohorquez *et al.,* 2009).

METODOLOGÍA

Debido a las características y posición teórica, esta investigación es de tipo cualitativo y de corte socioepistemológico. Esta investigación se organizó con cuatro etapas: observaciones frente a grupo, diseño de la situación de aprendizaje, implementación y redacción del informe correspondiente.

Durante el primer momento de la investigación se realizaron observaciones en un grupo de tercer grado de Primaria, con el objetivo de conocer aspectos característicos y distintivos de la clase, como la dinámica del grupo, su interacción, sus intereses, motivaciones y conocimientos previos.

En la segunda etapa –diseño de la situación de aprendizaje– se consideraron todos los elementos mencionados anteriormente para el desarrollo de una situación, adaptados lo mejor posible a las características particulares del grupo.

En la tercera etapa se implementó la situación de aprendizaje con el mismo grupo con el que se habían realizado previamente las observaciones, dividiéndola en tres fases: inicio, desarrollo y cierre.

DISEÑO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Para el desarrollo de la situación de aprendizaje, así como para el análisis de las observaciones, utilizamos como referente teórico la teoría socioepistemológica de la matemática educativa, la cual contempla para el análisis de educación matemática dimensiones sociales, cognitivas, epistemológicas y didácticas (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014).

Dimensión social

Al momento de diseñar la situación de aprendizaje, se planeó que los estudiantes pudieran trabajar en equipos de no más de cuatro integrantes, debido a que consideramos fundamental el trabajo colaborativo para la adquisición del conocimiento matemático. Son los alumnos –mediante sus aportaciones y contrastes de ideas– quienes realizan una construcción consensada de su conocimiento, de una manera más sólida.

En la teoría socioepistemológica se entiende a la matemática como una parte de la cultura, que se deriva de la actividad humana. Para esta perspectiva teórica, "la significación que construirá a partir de la actividad de relacionarse al saber matemático como aquél que es producto de la cultura, le permitirá entender aquellas nociones que las miradas platónicas consideran como la matemática escolar" (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014:367).

Dimensión cognitiva

Los alumnos suelen acostumbrarse a representaciones geométricas estereotipadas, por lo que solamente cuando los objetos están en cierta posición y tienen un diseño con características muy generales, los pueden identificar. Pero al momento de pasar al reconocimiento de representaciones geométricas con características no "convencionales", suelen tener dificultades, ya que sólo veían esa representación general como la única, afectando su panorama general en este conocimiento (Scaglia y Moriena, 2005).

Contemplando esta problemática, se plantearon actividades en las cuales el alumno pudiera manipular el material didáctico, teniendo la posibilidad de interactuar con él, medirlo, recortarlo, doblarlo, e incluso rayar sobre su superficie, para que sean ellos mismos quienes vayan descubriendo y construyendo su conocimiento.

También se les solicita a los alumnos que expresen distintas configuraciones y que debatan entre ellos si la figura presentada por sus compañeros cumple con su definición personal de ésta.

Dimensión epistemológica

La epistemología es una rama de la filosofía, que tiene como principal objetivo el estudio de los problemas que rodean al conocimiento científico. Su raíz etimológica proviene del griego *episteme*, que significa "conocimiento verdadero", siendo utilizado usualmente para referirse solamente al conocimiento científico. Se describe como una ciencia que se encarga de la discusión sobre la misma ciencia y, en consecuencia, sobre el conocimiento mismo (Martínez y Ríos, 2006).

La teoría socioepistemológica contempla como saber una gran variedad de verdades relativas, aceptando como válidos el saber popular, el saber culto y el saber técnico, debido a que, en su conjunto, conforman sabiduría humana. Es debido a esto que es importante el análisis de las distintas prácticas de las comunidades, en busca de sus valores epistémicos (Cantoral *et al.*, 2014).

Dimensión didáctica

Para el diseño de la situación de aprendizaje se buscó que los estudiantes estuvieran en contacto con diversas representaciones geométricas no prototípicas, las cuales pudieran recortar y manipular, trazando su eje de simetría de una manera mucho más dinámica a la convencional.

Ballester (2009) menciona que la utilización de recursos manipulativos para la enseñanza de geometría resulta dinámico y motivante para los alumnos. Rojas *et al.* (2012) señalan que la enseñanza de la geometría del espacio se favorece con el desarrollo de la visualización en dos direcciones. Por un lado, la construcción mental de objetos y procesos que un individuo asocia con objetos o sucesos percibidos por él como externos y, por otro, la construcción en algún medio externo de objetos o sucesos que el individuo identifica con objetos y procesos en su mente.

ANÁLISIS DE DATOS

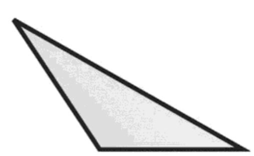
Implementación de la situación de aprendizaje

Como actividad inicial de la situación de aprendizaje, se realizó un diagnóstico de los conocimientos previos con los que contaban los estudiantes. Se solicitó la participación de algunos estudiantes para que pasaran al pizarrón y dibujaran alguna representación de lo que ellos interpretaban como un triángulo.

La única condición para la actividad era que las representaciones dibujadas en el pizarrón no fueran iguales a las que ya se habían colocado anteriormente. Una vez que todos los participantes dibujaron su propuesta en el pizarrón, se les solicitó en grupo que debatieran entre ellos y comentaran si las formas plasmadas por sus compañeros efectivamente eran triángulos o no.

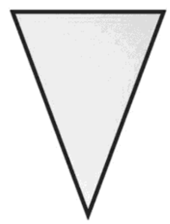
Uno de los alumnos que participó en el pizarrón realizó un triángulo escaleno con uno de sus ángulos muy pronunciado (Figura 1). Al momento de preguntar a los demás compañeros si la representación elaborada era un triángulo o no, la mayoría de ellos la desconocía como tal, argumentando que no podía serlo, debido a que "estaba chueco".

Figura 1



Posteriormente se puso a discusión el triángulo isósceles elaborado por una alumna. Este triángulo contaba con la característica de estar apoyado en unos de sus vértices (Figura 2). Al cuestionar a los estudiantes si la figura elaborada por su compañera era un triángulo o no, se obtuvieron respuestas similares a las de la primera participación. La mayoría de ellos argumentaba que la figura era similar a un triángulo, pero lo descartaban, debido a que la figura se encontraba "al revés".

Figura 2



Esto evidencia que, en cursos pasados, sus profesores o libros de texto sólo utilizaban escasas representaciones de figuras geométricas, lo que los privaba de ampliar su concepto y percepción. Ello les daba una visión muy limitada, corriendo el riesgo de ser un obstáculo para el estudio de temas de mayor complejidad (Rey, 2004).

ACTIVIDAD DE DESARROLLO

Para la actividad de desarrollo, se organizaron equipos de cuatro integrantes. Se les entregaron tres hojas, cada una contenía un determinado tipo de triángulo –escaleno, isósceles o equilátero– (Figuras 3, 4, 5). Estos triángulos estaban representados de tal manera que contaran con distintas y variadas configuraciones en su posición, tamaño y medidas de sus ángulos (en los casos de los triángulos isósceles y escalenos). Posteriormente se les solicitó que recortaran las formas, para que las pudieran manipular y relacionarse con ellas. El objetivo de esta actividad era que localizaran los ejes de simetría de cada triángulo, en caso de existir.

Figura 3

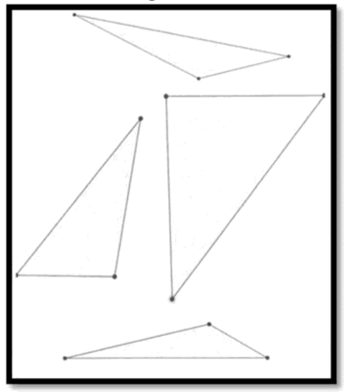


Figura 4

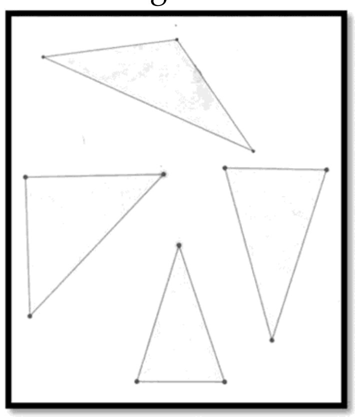
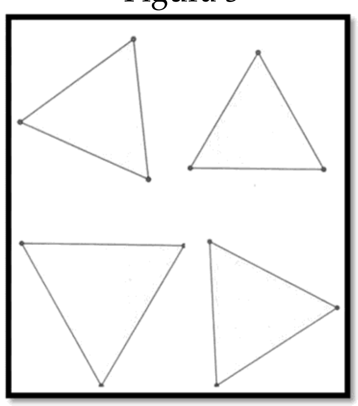


Figura 5



Para ello, se les pidió que doblaran las figuras por la mitad, de tal manera que identificaran, si después de los dobleces, las partes resultantes eran exactamente iguales o no. En caso de serlo, se les solicitó que marcaran la línea que dividía la figura en partes iguales.

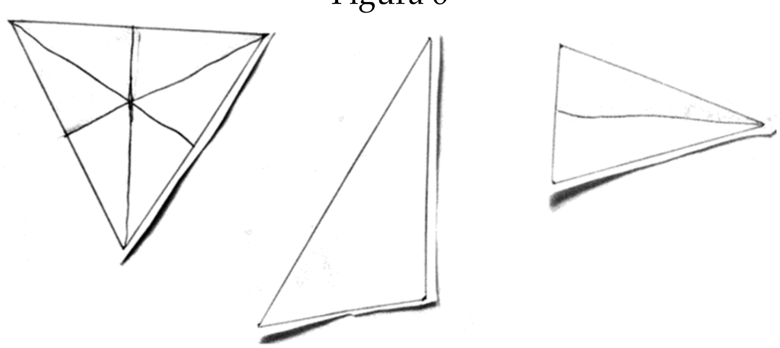
Se pudo identificar que el trabajo colaborativo era algo que en un principio se le dificultó a la mayoría de los estudiantes. Con el transcurso de la actividad, comenzaron a relacionarse de una mejor manera, teniendo la necesidad de intercambiar opiniones y estrategias entre los compañeros, lo que les permitió llegar a un consenso en la construcción de su aprendizaje.

Así, los estudiantes se pudieron percatar que las estrategias empleadas para marcar los ejes de simetría de los triángulos equiláteros no producían los mismos resultados con los triángulos isósceles y daban resultados nulos con triángulos escalenos.

Esto fue enriquecedor para ellos, pues pudieron identificar que hay triángulos que cuentan con tres ejes de simetría (equiláteros), algunos tienen un solo eje de simetría (isósceles) y otros no cuentan con ningún eje de simetría (escalenos).

Las siguientes son algunas de las figuras con las que los estudiantes trabajaron, manipulándolas, recortándolas, doblándolas y señalando su eje de simetría en caso de que existiera.

Figura 6



Como segunda parte de la actividad de desarrollo, se les entregaron hojas de trabajo similares a las que les habían proporcionado con anterioridad. Para esta tarea sólo tenían que marcar los ejes de simetría con lápiz, sin poder doblar o recortar el material. Fue relativamente sencillo para los estudiantes marcar los ejes de simetría de cada triángulo, debido a que antes de señalarlos, discutían entre ellos los conocimientos que habían construido con el ejercicio anterior, como las características de los triángulos y sus respectivos ejes de simetría.

En las figuras 6, 7 y 8 se pueden apreciar las hojas con las que trabajaron los equipos; elegimos las actividades de un equipo de forma aleatoria. Se puede observar que los alumnos dejaron la hoja con triángulos escalenos sin marcas, lo que evidencia que los alumnos pudieron identificar que, por las características de estas figuras, no cuentan con ningún eje de simetría (Figura 7). En el caso de los triángulos isósceles, los estudiantes pudieron identificar cuáles eran los lados similares, lo que les sirvió para marcar su eje de simetría (Figura 8).

Los estudiantes tuvieron algunas complicaciones con la hoja que contenía triángulos equiláteros, debido a que se les dificultó un poco encontrar el punto medio de los lados para conectarlo con su vértice opuesto, marcando así el eje de simetría. Aún y con este detalle de imprecisión, los estudiantes pudieron identificar que este tipo de triángulos cuenta con tres ejes de simetría (Figura 9).

Figura 7

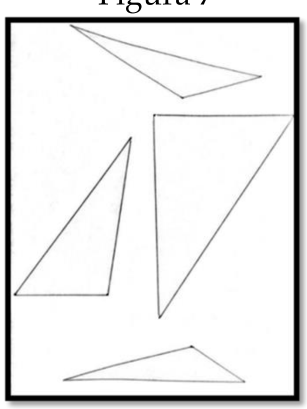


Figura 8

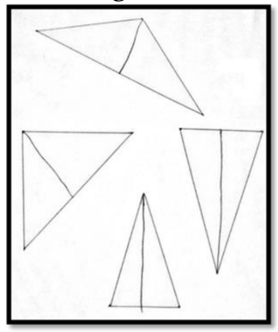
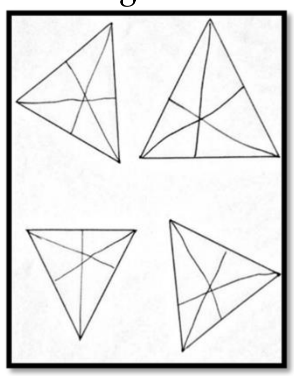


Figura 9



ACTIVIDAD DE CIERRE

Como actividad de cierre se le solicitó a cada equipo que eligiera a un integrante de su equipo para exponer, al resto de sus compañeros, cuáles habían sido las estrategias empleadas para el desarrollo de las actividades, así como las conclusiones grupales a las que se había llegado.

Esta actividad tenía como objetivo que los estudiantes recapitularan y discutieran los conocimientos que ellos habían construido en grupo.

> Alumna (AA): *Este es el triángulo que no se puede doblar a la mitad.*
>
> Maestro (M): *¿Por qué no se puede?*
>
> AA: *Porque éste es más largo, éste es más corto y éste mucho más chico.* (refiriéndose a los lados del triángulo)

M: *Entonces, ¿cómo son sus lados?*

AA: *Éste mide 10, éste mide 7, éste mide 14. Si se dobla, no quedan igual los pedazos.*

La anterior transcripción fue la participación de una alumna sobre las conclusiones a las que había llegado su equipo. La figura que ella describía era un triángulo escaleno utilizado durante la actividad de desarrollo. La alumna comentó que todos los lados de ese triángulo eran distintos: "éste es más largo, éste es más corto y éste mucho más chico", no identificando ningún eje de simetría: "si se dobla no quedan igual los pedazos".

Para la geometría del espacio se requiere que los estudiantes visualicen constantemente, mediante una interacción sujeto-objeto. Esto contribuye a que se puedan activar, estimular y desarrollar los procesos lógicos del pensamiento, para obtener un nuevo conocimiento geométrico espacial, haciendo que los alumnos tengan la posibilidad de reflexionar, profundizar, definir, valorar, argumentar y plantear conjeturas (Rojas *et al.*, 2012).

AA: *Este triángulo primero se dobla a la mitad, después lo volteamos y también lo podemos doblar a la mitad, y por último, si se vuelve a girar, también se dobla a la mitad. Se puede doblar tres veces, de diferentes maneras, y en las tres quedan las mitades iguales.*

M: *¿Cómo son sus lados entre sí?*

AA: *Los tres son iguales.*

Como se puede observar, la alumna identificó algunas de las características del triángulo equilátero, puesto que en su conclusión comentó que "los tres son iguales", haciendo referencia a sus lados. También mencionó que el triángulo equilátero cuenta con tres ejes de simetría: "se puede doblar tres veces, de diferentes maneras, y en las tres quedan las mitades iguales."

Las representaciones gráficas permiten al alumno comprender los conceptos de manera más motivante que si no se usan, o si sólo se aplican formas verbales o descriptivas. Por lo tanto, comprobamos que la representación por medios visuales es una importante manera de comunicar la geometría (Ballester, 2009).

Para el caso de los triángulos escalenos tomamos como referencia la participación de un alumno de otro equipo:

> Alumno (AO): *Este triángulo lo doblo, y después lo abro, sólo se puede doblar una vez.*
>
> M: *¿Entonces cómo son sus lados entre sí?*
>
> AO: (los mide) *Éste mide 9, éste mide 9 y éste mide 13. Tiene dos lados iguales y uno más grande.*
>
> M: *¿Entonces, cuántos ejes de simetría tiene?*
>
> AO: *Tiene una… y dos, tiene dos ejes.*

El alumno comentó que el triángulo isósceles tenía dos de sus lados iguales y uno distinto. Lo que nos parece interesante destacar fue que, en primera instancia, comentó que solamente se podía doblar una vez el triángulo, pero al cuestionarle por los ejes de simetría resultantes, mencionó que la figura tenía dos, debido a que confundió el eje de simetría con los dos triángulos internos que se producían con el doblez de la figura.

En el aprendizaje de la geometría es de suma importancia el proceso cognitivo que representa la visualización. En primera instancia, se requiere de la representación gráfica (dibujo) para la construcción de la representación mental (figura); esto, sumado a los elementos característicos de las figuras y cuerpos geométricos, es la manera en como los estudiantes pueden desarrollar el razonamiento para la resolución de problemas geométricos (Reséndiz *et al.,* 2016).

CONCLUSIONES

Durante la investigación se analizaron distintas problemáticas de la enseñanza tradicional de la geometría, como la utilización de prototipos geométricos y el obstáculo que representaban para el desarrollo del pensamiento geométrico y matemático. Al finalizar, consideramos que se obtuvieron los objetivos planteados, debido a que los estudiantes pudieron ampliar su concepto sobre representaciones geométricas, construyendo su conocimiento de una forma colaborativa.

Consideramos importante la utilización de diversas representaciones geométricas en las clases de geometría, así como de material didáctico concreto. Esto ayudaría a una mejor consolidación de los aprendizajes y a un mayor desarrollo en la visualización espacial de los estudiantes.

Uno de los principales aciertos del diseño de la situación de aprendizaje fue el involucramiento que se tuvo con el grupo. Consideramos que uno de los factores determinantes de una práctica educativa efectiva es conocer el contexto en el que se desenvuelven los estudiantes, sus intereses, sus dudas, sus opiniones y la forma en la que se relacionan con sus pares, de manera que el diseño realizado sea lo más personalizado posible, para las necesidades específicas del grupo en cuestión.

Es importante para el alumno familiarizarse con las representaciones de los objetos geométricos a partir de su descripción verbal, lo cual permitirá dirigir tanto la interpretación de sus íconos como el reconocimiento del objeto por medio de ellos. Ello conlleva a la necesidad de ofrecer ejemplos variados de la manifestación del objeto a comprender.

Por lo general, la enseñanza de la geometría se aborda a partir de representaciones únicas de los objetos geométricos, lo que trae como consecuencia que los alumnos asignen pseudo-propiedades a los objetos, tales como la posición y la dimensión (Fripp y Varela, 2012). Es decir, a causa de la falta de experiencias variadas –y en contextos diferentes– con los objetos geométricos, la construcción de los significados que los alumnos hacen sobre éstos es limitada.

REFERENCIAS

ARCAVI, A. y HADAS, N. (2000). "Computer Meditated Learning: An Example of an Approach", *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 5(2), pp. 63-85.

ARTIGUE, M. (2013). "La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados", *Desafíos. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* 11, pp. 43-59.

APARICIO, E.; CANTORAL, R. y RODRÍGUEZ, F. (2003) "Visualización y tecnología: un enfoque a las aproximaciones sucesivas", en Delgado, J.R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 16 (1), La Habana, Cuba, p. 457.

BALLESTER, S. (2009) "Didáctica de la geometría", *Revista Digital Innovación y Experiencias,* 20, pp. 1-8.

BARRANTES, M.; BALLETBO, I. y LÓPEZ, M. (2014). "La componente visual en geometría en los libros de texto de secundaria", *Revista Premisa,* 16 (62).

BARRANTES, M. y ZAPATA, M. (2008). "Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas", *Campo Abierto,* 27 (1), pp. 55-71.

BOHORQUEZ, H.; FRANCHI, L.; HERNÁNDEZ, A.; SALCEDO, S. y MORÁN, R. (2009). "La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría", *Educere,* 13 (45), pp. 477-489.

CANTORAL, R.; FARFÁN, R.; CORDERO, F.; ALANÍS, J.A.; RODRÍGUEZ, R. y GARZA, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático,* México, Trillas.

CANTORAL, R. y MONTIEL, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático,* México, Prentice Hall.

CANTORAL, R.; REYES-GASPERINI, D. y MONTIEL, G. (2014). "Socioepistemología, matemáticas y realidad", *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* 7 (3), pp. 91-116.

CANDELA, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso,* México, Paidós.

CORDERO, F. (2006). "La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del dME", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 19, México, Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C., pp. 824-830.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega Restrepo, Trad.) (título original: *Semiosis et Penseé Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels),* Colombia, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

FRIPP, A. y VARELA, C. (2012). "Pensar geométricamente", *4º Congreso Uruguayo de Educación Matemática.* Consultado el 10 de diciembre de 2018 de: http://semur.edu.uy/curem/actas/ procesadas1348011188/actas.pdf

GODINO, J. y RUÍZ, F. (2002). *Geometría y didáctica para maestros. Manual para el estudiante.* Consultado el 10 de diciembre de 2018 de: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

MARTÍNEZ, A. y RÍOS, F. (2006). "Los conceptos de conocimiento, epistemología y paradigma, como base diferencial en la orientación metodológica del trabajo de grado", *Cinta de Moebios,* 25, pp. 1-13.

MORONES, R. (2002). "La simetría izquierda-derecha en la naturaleza", *Ciencia UANL,* pp. 173-179.

OLKHOVAIA, E. (2005). "La unidad del mundo y la simetría", *Franciscanum. Revista de las Ciencias del Espíritu,* 140, pp. 75-84.

RESÉNDIZ, E.; CORREA, S.; SALAZAR, M. y SÁNCHEZ, G. (2016). *Diseño de objetivos de aprendizaje de matemáticas básicas (Geometría),* México, Pearon Educación.

REY, J. (2004). "Dificultades generadas por los prototipos geométricos, cuando los modelos ayudan, pero no tanto", *En Premisa,* 6 (22), p. 7-32.

REYES-GASPERINI, D. y CANTORAL, R. (2014). "Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático", *Boletim de Educação Matemática,* 28 (48), pp. 360-382.

RODRÍGUEZ, R. (2005). "La geometría y los niveles de aprendizaje", en R. Cantoral (Coord.), *Desarrollo del pensamiento matemático,* México, Trillas.

ROJAS, O.; CRUZ, M.; ESCALONA, M.; ESTRADA, M. y SÁNCHEZ, J. (2012). "El principio heurístico de la visualización y su carácter rector para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 25, pp. 44-54.

SCAGLIA, S. y MORIENA, S. (2005). "Prototipos y estereotipos en geometría", *Educación Matemática,* 17 (3), pp. 105-120.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA (2017). "Aprendizajes clave para la educación integral", *Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica,* México.

SOTO, E. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos.* Consultado el 20 de noviembre de 2018 de: http://www.aprendematematicas.org.mx/.

SIERSPINSKA, A. (1994). *Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education*, Londres, The Falmer Press Ltd.

SFARD, A. (2002). "Learning Mathematics as Developing a Discourse", en R. Speiser y C. Maher (Eds.), *Proceedings of 21st Conference of PME-NA USA,* Columbus, Ohio, Clearing House for Science, Mathematics and Environmental Education, pp. 23-44.

URIBE, S.; CÁRDENAS, O. y BECERRA, J. (2014). "Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños", *Educación Matemática,* 26 (2), pp. 135-160.

Evelia RESÉNDIZ BALDERAS

Maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa (1994) y doctora en Ciencias en Matemática Educativa (2004) por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Instituto Politécnico Nacional). Investigadora asociada al Centro Multidisciplinario de Investigaciones Regionales, Universidad Autónoma de Tamaulipas (UAT). Profesora de tiempo completo de la Unidad Académica

Multidisciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades (UAT). Miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel 1.
Línea de investigación: discurso matemático en el aula.
Correo Elec.: erbalderas@docentes.uat.edu.mx

Carlos Alberto GONZÁLEZ SALAZAR

Estudiante de la Licenciatura en Ciencias de la Educación con acentuación en Enseñanza de las Matemáticas, en la Universidad Autónoma de Tamaulipas (UAT). Ha participado en congresos nacionales e internacionales relacionados con la enseñanza de las matemáticas, en eventos de difusión de la ciencia. Ha fungido como juez en las Olimpiadas de Matemáticas de Tamaulipas.
Línea de investigación: discurso matemático en el aula.
Correo Elec.: a2153030001@alumnos.uat.edu.mx

Julio César CONTRERAS REYES

Estudiante de la Licenciatura en Ciencias de la Educación con acentuación en la Enseñanza de las Matemáticas, en la Universidad Autónoma de Tamaulipas (UAT). Ha participado en congresos internacionales relacionados con la enseñanza de las matemáticas. Ha fungido como evaluador en la Olimpiada de Matemáticas Tamaulipas.
Línea de investigación: discurso matemático en el aula.
Correo Elec.: julio_43@live.com.mx