Apertura (Guadalajara, Jal.)
ISSN: 1665-6180
ISSN: 2007-1094
Universidad de Guadalajara, Sistema de Universidad Virtual

Camacho Ríos, Alberto; Caldera Franco, Marisela Ivette; Valenzuela González, Verónica
Fidelidad en el uso de app para la resolución de ecuaciones diferenciales
Apertura (Guadalajara, Jal.), vol. 11, núm. 1, 2019, Abril-Septiembre, pp. 74-89
Universidad de Guadalajara, Sistema de Universidad Virtual

DOI: https://doi.org/10.32870/Ap.v11n1.1463 apertura

Abril 2019 | e-ISSN 2007-1094 | Volumen 11, número 1, pp. 74-89 | Universidad de Guadalajara
http://dx.doi.org/10.32870/Ap.v11n1.1463

Fidelidad en el uso de app para la resolución de ecuaciones diferenciales

Fidelity in the use of app for solving differential equations

Alberto Camacho Ríos* | Marisela Ivette Caldera Franco** | Verónica Valenzuela González***

Recepción del artículo: 26/9/2018 | Aceptación para publicación: 11/2/2019 | Publicación: 30/3/2019

RESUMEN

En este trabajo planteamos los resultados del uso de sistemas algebraicos computacionales conocidos como aplicaciones para programas de cómputo (app), de contenido matemático, que fueron incorporadas a dispositivos móviles de estudiantes de ingeniería en un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. El objetivo fue que los estudiantes adquirieran capacidades en el empleo de estas tecnologías para que resolvieran diferentes ecuaciones de las que se estudian en el curso, así como obtener la gráfica de su solución. Desde el concepto de *fidelidad* del software, se analizaron y manejaron aplicaciones como Differential Equations, Wolfram, Desmos, Photomath, entre otras, cuyos resultados destacan las de mayor utilidad. Con ello, elaboramos una situación didáctica mediante la cual interactuaron estudiantes con las app en la resolución de ecuaciones y en la graficación. Los hallazgos muestran deficiencias en la evolución de la interfaz de las app utilizadas, cuyo uso provoca fenómenos didácticos importantes.

Abstract

This report shows the results of using Computational Algebraic Applications (CAA) for mobile devices, intended as aid in college courses of Ordinary Differential Equations (ODE). The main purpose was for students to gain skills in such software so they could proficiently solve ODEs as well as to provide graphics from the solutions obtained. From the "fidelity" concept of the software, several applications were analyzed and evaluated such as: Differential Equations, Wolfram, Desmos, Photomath, among others. The given results proved than those applications were the most useful. With those results, a Didactic Situation was created in which students interacted with the app to solve equations and to graph results. The results shows some deficiencies in the evolution of the interface of the app that was used, this cause significant didactic phenomena.

Palabras clave
TIC, tecnología educativa, fenómeno didáctico, aplicación móvil, matemáticas

Keywords
TIC, educative technology, educational phenomenon, m-learning, mathematics

* Doctor en Matemática Educativa. Tecnológico Nacional de México/IT de Chihuahua II, México. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0685-4723 camachoalberto@hotmail.com | ** Doctora en Educación. Tecnológico Nacional de México/IT de Chihuahua II, México. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5574-5817, marisela.caldera@itchihuahuaii.edu.mx | *** Maestra en Educación. Tecnológico Nacional de México/IT de Chihuahua II, México. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4363-4930, vvalenzuelamx@yahoo.mx

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es mostrar resultados del uso de sistemas algebraicos computacionales (SAC), a través de dispositivos móviles en los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), con la finalidad de que los estudiantes adquieran capacidades y habilidades para su resolución. Nos interesamos por la "fidelidad" del lenguaje de los SAC respecto de las soluciones y gráficas de las EDO que determinan los estudiantes manualmente en sus cuadernos. Registramos, además, fenómenos didácticos que surgieron de manera inesperada y que destacan de los SAC.

El programa de EDO del Tecnológico Nacional de México (TecNM), que se desarrolla en las carreras de ingeniería, sugiere el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) para la adquisición de competencias que permitan la resolución simbólica y graficación de casos generales de ecuaciones. El programa se identifica con la clave ACF-0905 (TecNM, 2016) y con este se busca consolidar la formación matemática del estudiante. Es articulado en cinco temas o unidades principales, que son: ecuaciones diferenciales de primer orden, ecuaciones diferenciales de n-orden, transformada de Laplace, sistemas de ecuaciones diferenciales y series de Fourier.

Este programa tiene antecedente un curso de cálculo vectorial y otro de álgebra lineal. En las cinco unidades, las competencias didácticas específicas establecen la modelación de procesos dinámicos a través de ecuaciones diferenciales que los describan. Esto implica que los alumnos posean competencias genéricas: capacidad de abstracción,

Durante el curso, la elaboración de modelos es un problema importante. Las actividades se dividen entre los aspectos teóricos, las técnicas matemáticas elegidas para la resolución de ecuaciones y la práctica algorítmica necesaria para la misma resolución

análisis y síntesis que les ayuden, entre otras actividades, a "resolver ecuaciones diferenciales de primero y n-orden e interpretar gráficamente las soluciones utilizando las TIC y modelar situaciones en ingeniería al emplear ecuaciones diferenciales" (TecNM, 2016, p. 8).

Las EDO constituyen el eje central sobre el que sobreviven la ingeniería y la física, así como porciones de ciencias de la vida relacionadas con los modelos matemáticos. Durante el curso, la elaboración de modelos es un problema importante. Las actividades se dividen entre los aspectos teóricos, las técnicas matemáticas elegidas para la resolución de ecuaciones y la práctica algorítmica necesaria para la misma resolución. Ambas etapas, junto con la graficación de la solución y su interpretación, organizan la suma de un curso tradicional de EDO y se intercalan en cada uno de los temas.

Cuando la segunda etapa es rebasada por el aprendizaje de los métodos de solución de ecuaciones, a través de su ejercicio, es posible involucrar en la resolución cálculos y gráficas elaborados en software matemático, que proporcionan respuestas reales relacionadas con la naturaleza del problema modelado. Esas respuestas se describen a través de la variable dependiente, escrita comúnmente como $y(x)$, que representa la solución de la ecuación. El uso de software es, de ese modo, una síntesis importante de los esfuerzos operativos y cognitivos desarrollados por los estudiantes en sus cuadernos para determinar la solución y su gráfica.

Dentro del software que se sugiere en el programa de estudio, se encuentran SAC como Mathematica, Maple, Derive, Mathcad y Matlab (TecNM, 2016, p. 10). En el campo de la enseñanza del curso, el software toma diferentes vertientes de empleo. La más importante puede ser el establecimiento de ambientes tecnológicos para el aprendizaje de ese tipo de ecuaciones (Cortés Zabala, Guerrero Magaña, Morales Ontiveros y Pedroza Ceras, 2014). Otro caso es el uso de software matemático escolar con licencia para la resolución de problemas sujetos a la modelación desarrollada en los problemas asociados a la física-matemática.

La inteligencia artificial ha evolucionado y perfeccionado la interfaz y el lenguaje del software matemático comercial para su incorporación en aplicaciones móviles que pueden ser útiles en el salón de clase, proceso que ahora se reconoce como *mobile-learning*. La interfaz es el espacio de comunicación entre el usuario y el contenido electrónico de las computadoras, que procesa las representaciones solicitadas. Para la enseñanza de la matemática, permite la visualización de representaciones de conocimiento.

Hemos experimentado con este último tipo de software, que en adelante llamaremos aplicaciones matemáticas para Android (app.m),[1] y obtuvimos resultados alentadores que nos inducen a reconsiderar la inclusión de las TIC

[1] Del inglés, *app*: application a computer program. Aplicación que ayuda a los usuarios a resolver una tarea. Hemos agregado a la abreviatura la letra "m" para designarla como app.m, que en español toma el significado figurado de aplicaciones matemáticas para Android.

que se proponen en el programa. Su desarrollo de visualización y manipulación involucra entidades abstractas de la matemática: álgebra, vectores, objetos de la geometría, cálculo diferencial, ecuaciones diferenciales, entre otras, que abren nuevas perspectivas originales para su enseñanza. Además, todos los estudiantes del nivel de ingeniería cuentan con un dispositivo móvil (teléfono inteligente o tableta) con especificaciones homogéneas de usabilidad que hacen posible su aprovechamiento en el aula; son herramientas de gran conectividad que facilitan la descarga y ejecución de app.m vía internet.

Estas arquitecturas marcan una ruptura importante con el uso de software comercial. Ese tipo de herramientas cuentan con una buena cantidad de aspectos relacionados con su operatividad, que se convierten en un obstáculo para usarlas en el aula: su uso precisa de escritorio computacional, a la vez que su licencia tiene un costo excesivo para los estudiantes y las instituciones académicas. Asimismo, los tiempos didácticos durante los cuales se abordan los temas del curso, por lo general, no son suficientes para la incorporación de esas herramientas, y dejan, así, un hueco en la adquisición de capacidades de los estudiantes para utilizarlas. Es común que los profesores de los cursos de EDO desconozcan la existencia del software sugerido en el programa, así como su utilidad.

Planteamos el problema de experimentar en el curso SAC del tipo app.m que incluye paquetes y librerías como las contenidas en el software comercial que se sugiere en el programa. Para ello, diseñamos y aplicamos una situación didáctica (SD). La característica fundamental de esas app.m es su facilidad para descargarse a dispositivos móviles Android, e incluso a otros dispositivos de sistemas operativos diferentes.

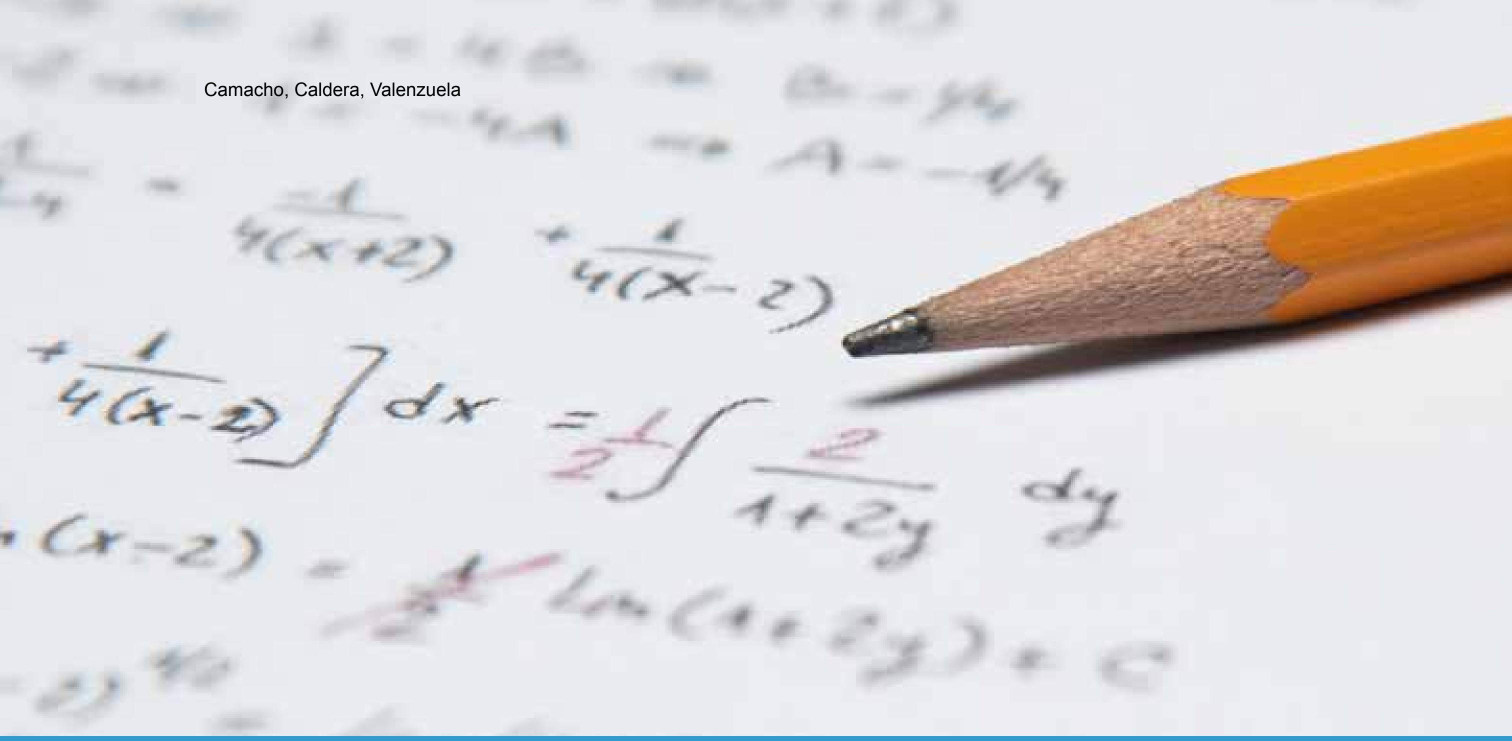
De esta forma, nos preocupamos porque la interfaz de las app.m comprendiera cierto grado de fidelidad respecto al lenguaje matemático que utilizan los estudiantes cuando resuelven EDO y, principalmente, en la gráfica que devuelven. En un segundo momento, centramos la atención en la identificación y el análisis de los fenómenos didácticos que surgieron en la experimentación, los cuales juegan un papel importante durante la inmersión de las app.m al salón de clase, al apoyar en la representación y las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Lo anterior se justifica debido a que las app.m permiten resolver los tipos más comunes de ecuaciones diferenciales que se ven en el curso; ayudan en la resolución de problemas que se modelan con estas últimas, ofrecen buena precisión en la gráfica de la solución, y crean, con su uso, capacidades y habilidades en el manejo de herramientas computacionales, así como condiciones para fincar "un pensamiento involucrado en la formulación de problemas y sus soluciones a través de agentes informáticos", que Wing (2006) ha llamado "pensamiento computacional".

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

La tendencia en el uso de SAC no es nueva y aparece recurrentemente en la bibliografía especializada

Asimismo, los tiempos didácticos durante los cuales se abordan los temas del curso, por lo general, no son suficientes para la incorporación de esas herramientas, y dejan, así, un hueco en la adquisición de capacidades de los estudiantes para utilizarlas



recomendada para el curso de EDO. Desde los años sesenta del siglo pasado, en obras como la de Rainville (1969) y Rainville, Bedient y Bedient (1998), se sugieren métodos numéricos; en la primera para la resolución de ecuaciones, mientras que en la segunda, al final de cada capítulo, se incluye el uso de SAC.

Los libros de texto más recomendados para el curso, como es el caso de Zill y Cullen (2018), sugieren recurrir a comandos numéricos de software comercial, como DSolve (en Mathematica) que, por su capacidad, presenta soluciones simbólicas de ecuaciones diferenciales; por ejemplo, la ecuación homogénea y su solución:

DSolve [y´´[x]+2y´[x]+2y[x] = 0, y[x], x]

Kreyszig (2011) utilizó Mathematica para elaborar las gráficas de solución de ecuaciones diferenciales de los ejemplos contenidos en su libro; incluye al final una guía para el uso del Maple y Mathematica. Por su lado, Edwards y Penney (2001) propusieron a sus lectores lo que llaman “proyectos de cómputo”, que son factibles de desarrollar en Maple, Mathematica y Matlab. Uno de estos ejemplos se muestra en el libro, de la siguiente manera:

> Investigación A. Trace (en Maple) un campo de dirección y curvas de solución típicas para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}$ = sen (x-y), con una ventana de -10 <x <10, -10 <y <10; varias curvas de solución que son líneas rectas deben ser visibles (p. 28).

Los ejemplos de los manuales escolares muestran la evolución de las instrucciones de programación para la resolución de EDO en software comercial, como Maple y Mathematica. La evolución del software tiene un paralelo con el uso de expresiones simbólicas como DSolve, en las diferentes aplicaciones, así como también Plot y Plot3D para la graficación de la solución. Lo más importante de esas instrucciones es que devuelven expresiones simbólicas para la solución, que se asemejan a las propias soluciones que obtienen de manera algorítmica los estudiantes en sus cuadernos. Además, esa evolución se caracteriza porque los mismos tipos de lenguajes informático e interfaz han sido heredados a las app.m. También se distingue una tendencia por intentar, desde los textos, crear capacidades en los estudiantes para el uso de software especializado en el estudio y la solución de EDO, a través de instrucciones de enseñanza ofrecidas; el ejemplo de Edwards y Penney (2001) ilustra bien esa tendencia.

Revisamos algunas de las investigaciones más recientes relacionadas con el uso de software de contenido matemático para su aplicación en los cursos de EDO del nivel superior de enseñanza. Una de estas fue la de Rackauckas (2018), quien, desde los lenguajes de programación realizó una comparación entre diferentes lenguajes de mayor uso para la resolución de EDO; entre los revisados se encuentran Matlab, R, Julia, Phyton, C, Mathematica, Maple y Fortran. Este autor hizo comparaciones entre las debilidades y fortalezas de cada lenguaje; los resultados de su investigación permitieron verificar que Julia "objetivamente tiene el conjunto de características más grande, rebasando a la mayoría de los otros [lenguajes] envolviéndolos con solucionadores comunes" (Rackauckas, 2018, p. 10). Julia es un lenguaje de programación de alto nivel que cuenta también con solucionadores para las ecuaciones diferenciales no ordinarias.

Por su lado, Rodríguez y Quiroz (2016) muestran el papel de la tecnología en el curso de EDO de ingeniería en su tránsito por las diversas etapas de la modelación matemática. Reportan el diseño de una situación específica en el contexto de circuitos eléctricos RC en el que se utilizan diversos recursos tecnológicos para el desarrollo de las actividades. Los recursos que destacan son el uso de una calculadora TI Nspire CX CAS, sensores de voltaje TI, navegador TI, circuito eléctrico, capacitor, resistencia, baterías y conectores.

En tanto, Mosquera y Vivas (2017) seleccionaron recursos de las app.m más actuales para realizar un análisis comparativo de sus funciones orientadas al desarrollo de competencias matemáticas de aprendizaje para el curso de cálculo diferencial. Como resultado de la evaluación, obtuvieron tres app.m que cumplieron con diferentes estándares que se impusieron; estas fueron MalMath, Symbolab y Grapher. De los estándares que asignaron, sobresalen la portabilidad del software, los requisitos de un sistema operativo Android para los móviles, el interés de que fuera software libre, la facilidad de instalación y operación y la interfaz gráfica que no requiere del desarrollo de código de programación.

Los criterios de calidad para el uso de las mejores app.m en el aula se caracterizan porque la mayoría de estas han sido diseñadas y construidas con estándares de calidad semejantes a los que se impusieron investigadores como Mosquera y Vivas (2017). Actualmente, algunos de esos criterios han sido rebasados por la creciente evolución de la tecnología celular; por ejemplo, es generalizado que los estudiantes cuenten con un móvil de sistema operativo Android. La mayoría de las app.m que se encuentran libres son fáciles de cargar y, por sus propias limitaciones, la interfaz gráfica no permite desarrollar el código de programación. Ante esto, creemos que los investigadores mencionados, y otros que aquí no se citan, pasan por alto uno de los elementos más importantes de las app.m, que tiene que ver con la "fidelidad" con que estas devuelven las soluciones de las ecuaciones diferenciales y sus gráficas.

TRANSPOSICIÓN INFORMÁTICA

Esta es una frase acuñada por Balacheff (1994), al extender el fenómeno de la "transposición didáctica" definido por Chevallard (1985), el cual se entiende como la reproducción de una situación que involucra conocimientos de la matemática escolar en contextos diferentes a los que fue producida y con formas de expresión también distintas. En tanto, la transposición informática refiere la introducción de software en el ámbito de la enseñanza de la matemática, cuyas consecuencias complican la simple transposición didáctica de conocimientos, debido a que su inclusión en los cursos de matemáticas determina restricciones y obstáculos en los que intervienen la representación y el procesamiento interno de la computadora, así como el de la representación y procesamiento de la interfaz.

Irrupción de conocimientos externos al aula

En los acercamientos de la informática hacia la enseñanza de la matemática importa estudiar la introducción de conocimientos y conceptos externos al saber escolar, así como las herramientas y técnicas que esa irrupción ocasiona. El objetivo de su análisis es asumir el control de la asociación que ocurre entre los conocimientos y las técnicas involucradas, además del surgimiento de fenómenos didácticos originados por la irrupción. En torno a la incorporación de herramientas informáticas al aula, Artigue (2015) concluye que el uso de ese tipo de tecnologías no está exento de conflictos.

En el sentido de la inmersión de conocimientos externos a la enseñanza de la matemática, Camacho y Romo-Vázquez (2015) desarrollaron la deconstrucción del concepto matemático de *gradiente* en un contexto no matemático, la topografía. Del proceso de deconstrucción resultaron numerosas técnicas que les permitieron establecer una definición mixta del concepto para su enseñanza en el aula.

En los acercamientos de la informática hacia la enseñanza de la matemática importa estudiar la introducción de conocimientos y conceptos externos al saber escolar, así como las herramientas y técnicas que esa irrupción ocasiona

Por su lado, Artigue (1997) experimentó con estudiantes de secundaria (Liceo francés) la inmersión y uso de DERIVE en las operaciones con fracciones aritméticas y analizó dos fenómenos didácticos que surgieron con el uso de paréntesis. La interfaz DERIVE elimina en pantalla una cantidad de paréntesis inútiles, que se diferencian de aquellos incluidos en los cálculos en el cuaderno de los estudiantes. Esas acciones del software provocaron confusiones semióticas en los estudiantes, debido a que la devolución de resultados en pantalla no se corresponde con lo determinado en su cuaderno.

Fenómenos didácticos

Aun cuando en el artículo de Artigue (1997) no se aclara, entendemos por "fenómenos didácticos" aquellos problemas de enseñanza provocados por la transposición informática de agentes externos, al ponerlos en interacción con el conocimiento matemático escolar. Surgen como perturbaciones que alteran el orden de la actividad didáctica y se diferencian entre semióticos, cognitivos y epistemológicos (el caso experimentado por Artigue resulta ser una perturbación de tipo semiótico). En los tres casos, esas perturbaciones inducen a errores en la toma de decisiones algorítmicas, o bien, en la determinación de la solución de problemas de la matemática escolar.

Concepto de fidelidad

Estas situaciones se deben analizar, como lo estima Balacheff (1994), en términos de la fidelidad que alcanzan respecto al fenómeno con el que se les confronta; por ejemplo, en los ambientes computacionales de simulación de fenómenos de la física-matemática, cuando nos cuestionamos qué tan cerca coincide el entorno simulado con el mundo real, esa cercanía se reconoce como *fidelidad*. Una simulación de alta fidelidad es aquella casi indistinguible de la realidad. Wenger (1987) introdujo el concepto *fidelidad epistémica*, con el que es posible calificar la diferencia entre representación física y conocimiento de referencia, fincados en un nivel epistémico.

En ese sentido, la investigación a través de los procesos que ocurren durante la transposición informática debería medir la fidelidad que "designa el trabajo sobre el conocimiento que permite una representación simbólica y la implementación de esta representación mediante un dispositivo informático, ya sea para mostrar el conocimiento o para manipularlo"[2] (Balacheff, 1994, p. 11). En el ámbito de este acercamiento, la transposición adquiere una importancia particular, significa una contextualización del conocimiento que puede tener consecuencias importantes en los resultados de aprendizaje.

El concepto de fidelidad es una norma con la que pretendemos que las distorsiones y perturbaciones epistémicas provocadas por la asociación del conocimiento matemático y el software sean mínimas. Ante ello, nos hacemos las siguientes preguntas: ¿qué relación mantiene la interfaz de las app.m y su uso confrontado en una situación didáctica? y ¿qué consecuencias puede tener esta relación en el aprendizaje de la matemática que resultará de la interacción con este software?

En los dominios informáticos y del aula, la fidelidad se debe mirar a través de la distancia que separa el ámbito escolar del software y que toma dos rutas que se complementan. La primera relacionada con el trabajo que realiza el software sobre el conocimiento escolar, cuya manipulación alude una asociación de contextos instalados en un entorno epistemológico. La segunda va de lado de la interfaz del software y refiere el parentesco simbólico de los elementos que la integran con aquellos que se comunican en el aula.

El concepto de fidelidad es una norma con la que pretendemos minimizar las distorsiones y perturbaciones epistémicas provocadas por la asociación del conocimiento matemático y el software

Software de alta fidelidad. Mathematica

Un software matemático de alta fidelidad (AF) se distingue por las características funcionales y semióticas de su interfaz de usuario, que conforman el "dominio de validez de sus representaciones" (Balacheff, 1994). Si nos ceñimos a la parte que nos interesa de ese dominio, por un lado, encontramos la entrada y salida de información numérica y simbólica y, por otro, la resolución de las gráficas que devuelve. Un software de AF es Mathematica. En sus versiones más avanzadas, utiliza resolución numérica y exacta para la solución de EDO de valor inicial. Ofrece una interfaz de alto nivel para todas las bases de datos estándares. Mathematica se identifica porque los símbolos que aparecen en su teclado de información son casi idénticos a los que utilizan los estudiantes en su cuaderno, mientras que la resolución de las gráficas que devuelve son de alta calidad y completamente interactivas (es el caso de la imagen izquierda de la figura 1, la interfaz y lo que representa "se ven igual").

En la gráfica citada fue necesario incluir el signo "×" [por] para que funcionen las operaciones de multiplicación en la expresión que se pidió

[2] Cuando Balacheff habla de software o dispositivos informáticos, se refiere a las versiones de aquellos que se encontraban en uso a mediados de los años noventa del siglo pasado, como Derive y Cabri Géomèter. En su artículo no concibe el uso de dispositivos móviles en la enseñanza, y se preocupa, principalmente, por el software citado, así como por grandes proyectos de ambientes informáticos, tutoriales como Geometry-Tutor y micromundos; es el caso de Logo.

graficar. Esto no sucede con las versiones más actuales del software, por ejemplo, la 11.3, lo cual demerita la AF debido a que en los cuadernos de los estudiantes ese símbolo es innecesario. Podemos estimar que el software Mathematica 10.4, es de AF en un 99% por la necesidad que implica incorporar en su dominio el símbolo ×. Si revisamos la gráfica que devuelve, se observa con buena resolución; incluso, es posible utilizar otro tipo de coloreado, si así se desea; sin embargo, no aparecen las flechas de los ejes *x*, *y*, aunque es posible incluirlos. Cada defecto, o falta, de la interfaz del software puede demeritar un punto sobre el porcentaje que determina su fidelidad.

Software matemático de buena fidelidad

En el caso de las app.m, el criterio de discriminación se aplica por igual; se utiliza como referente de comparación el software de AF. Habría que mirar que este último es funcional en escritorio y que las app.m, en la forma en que se emplean en el aula, lo hacen directamente en el móvil de los estudiantes. Esta diferencia es un criterio discriminatorio fuerte que ayuda a caracterizar las app.m como de buena fidelidad (la interfaz y lo que representa “se ven casi igual”), en cierto porcentaje respecto de aquellos softwares de AF, sobre todo por factores vinculados a la resolución de las gráficas que devuelve.

En la imagen derecha de la figura 1 hemos dispuesto la misma gráfica de la función elaborada en Mathematica. La gráfica de la derecha se aprecia más densa o “granulosa” que la de la izquierda, es decir, sus pixeles no se encuentran distribuidos sobre la imagen de manera homogénea, como en la primera, o bien, el modelo de distribución de pixeles es distinto que en el software de AF. En cuanto a la calidad, la imagen izquierda es de una resolución aproximada de unos 100 × 100 pixeles, mientras que la derecha, de 50 × 50 pixeles.

Aun cuando la misma gráfica elaborada en diferentes softwares solo muestra la diferencia granulosa entre ambas (lo cual puede deberse al tipo de función), en otras situaciones esa diferencia es más acentuada en las app.m (en este caso, en el dominio de Desmos). Esto último lleva a confundir al usuario en su percepción, al presentarse un “fenómeno de perturbación cognitiva” en el momento en que los estudiantes interpretan la gráfica.

METODOLOGÍA

El diseño de la investigación responde a una metodología interna basada sobre el análisis de situaciones didácticas (SD) en las que se involucran herramientas informáticas app.m. En este caso,

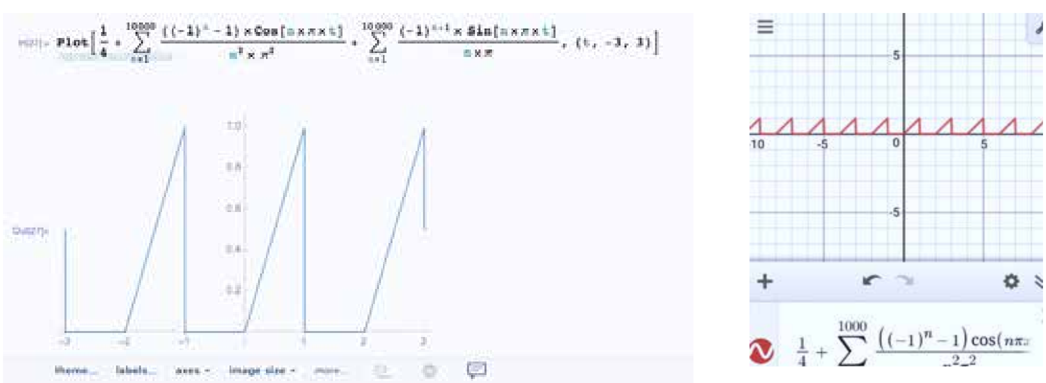


Figura 1. A la izquierda, gráfica elaborada en Mathematica 10.4, software de alta fidelidad. A la derecha, la misma gráfica elaborada en Desmos, software de buena fidelidad.
Fuente: elaboración propia.

diseñamos y aplicamos una SD (con mayor precisión: un examen) y acompañamos esta intervención con un proceso de investigación, orientado a verificar los resultados de los participantes.

Para el desarrollo de la adquisición y verificación de las capacidades que adquieren los estudiantes con el uso de app.m, formulamos actividades elaboradas a partir de un proceso inductivo, que concluye con la aplicación de la SD y el análisis de resultados. Las actividades fueron las siguientes:

- Resolución y graficación de los tipos de EDO que se sugieren en un programa de forma tradicional, es decir, sin el uso del software.
- Una revisión de diferentes app.m, que considera que sean portables en el sistema operativo Android de los móviles de los estudiantes, que sean sencillas de cargar, que sea software libre, que la interfaz gráfica no permita el desarrollo de código de programación y, principalmente, que el lenguaje informático, gráfico y en editor de ecuaciones que devuelva en pantalla, sea lo más fiel al lenguaje matemático-escolar natural (LMEN) que resulta de resolver las EDO en el cuaderno de los estudiantes.
- No discutiremos la descripción de los móviles de los estudiantes y descarga de las app.m, ya que tomamos en cuenta que la mayoría contienen un sistema operativo Android y que bajar las app.m al dispositivo no significó problema en ningún caso.
- Uso experimental de las app.m en la resolución de EDO y su gráfica, que conduzcan a la adquisición de habilidades y capacidades.
- Elección de problemas del curso para el diseño de una SD, en cuya resolución se verifiquen las capacidades adquiridas.
- Aplicación grupal de la SD.
- Análisis de resultados del uso de las app.m y de los fenómenos didácticos que de ahí surgen.

Por las características de la investigación, no nos interesamos por obtener resultados cuantitativos, ya que no manipulamos variables de forma deliberada en virtud de que solo nos proponemos describir e interpretar resultados en un momento único, que puede ser reproducible en cursos posteriores; nos importa más valorar las decisiones cognitivas que se verifican en los resultados de los alumnos al abordar los problemas que proponemos.

Dispositivos móviles y app.m

A lo largo del primer semestre de 2018, revisamos el software app.m que estudiantes del curso de EDO bajaron a sus móviles, con el objetivo de uso ya comentado; entre otros, y por su denominación común, Differential Equations, Geogebra, Calculadora de Integrales, WolframAlpha y graficadores como Desmos y Photomath. La mayoría de estos son app.m libres de licencia y se bajan con facilidad a los dispositivos móviles Android de la mayoría de los estudiantes. Cumplen, en lo general, con los atributos planteados anteriormente. Cada uno se descargó conforme su uso se volvía necesario en cada tema del curso, bajo la consigna de que devolvieran en pantalla lo más próximo a un LMEN.

El primero de estos fue el graficador Photomath, que sirvió para elaborar gráficas de las soluciones de EDO de primero y n-orden. Después siguió WolframAlpha, que se utilizó también en algunos casos para graficar familias de soluciones de los diferentes tipos de EDO. En algunos de estos, y conforme avanzamos en el curso, como Mathematics, Maths Differential Equations, Mathway, Malmath, observamos que, para algunas de las ecuaciones, no cumplían con la característica

Por las características de la investigación, no nos interesamos por obtener resultados cuantitativos

En las SD se pueden incluir tareas, ejercicios de clase, exámenes, uso de software, elaboración de modelos, proyectos y prácticas, que garanticen una respuesta aceptada de los involucrados

fundamental de fidelidad del LMEN respecto del lenguaje impuesto en el dominio de la interfaz, de modo que se fueron descartando poco a poco.

Al llegar a la etapa de los temas de transformada de Laplace (tercero y cuarto del curso), notamos que no existen app.m evolucionadas para resolver EDO que les involucren, y se cuenta solo con software de escritorio. Ante esto, el curso siguió en el orden tradicional, es decir, resolución de EDO de condiciones iniciales utilizando transformada de Laplace, cuya solución fue interpretada en algún graficador app.m. Para el quinto tema del curso, series de Fourier, nos interesamos por las graficadores que devolvieran la gráfica solución de ecuaciones diferenciales, que representan los sistemas físicos masa-resorte, cuya función ordenadora fuera periódica en un intervalo dado. En este caso, y por las condiciones impuestas, solo Desmos devolvió gráficas en el orden requerido.

Descripción de las app.m elegidas

Los dos graficadores app.m que rescatamos de la experiencia en el curso fueron Photomath y Desmos, mientras que los solucionadores de EDO fueron WolframAlpha y Differential Equations.[3] Debido a que en el artículo mostramos una experiencia didáctica en la que involucramos la graficación con Desmos, en seguida describimos sus atributos principales sin considerar las demás app.m mencionadas.

Desmos es una herramienta app.m desarrollada en la ciudad de San Francisco, Estados Unidos, que, entre otras características, puede accederse con facilidad en línea (www.desmos.com), desde un dispositivo móvil (tableta o teléfono inteligente). No requiere usuario, es multiidioma y es colaborativa. El dominio de su interfaz posee un editor de ecuaciones semejante al de Mathematica, en el que se teclean expresiones en el mismo orden de las que se ven en el salón de clase. Las gráficas que devuelve se concentran en una cuadrícula que parte de dos ejes centrales x, y (ver figura 2), los cuales, además, se pueden distinguir utilizando diferentes colores si se desea. El control del editor de ecuaciones se encuentra debajo de la cuadrícula, con una paleta en la que se concentran las diferentes funciones y símbolos más utilizados.

Situación didáctica

Una SD refiere la elaboración de actividades articuladas y orientadas para que los estudiantes involucrados desarrollen competencias específicas. Las actividades son ordenadas en secuencias didácticas para dar solución a conflictos cognitivos que son presentados en las actividades. Esa articulación permite llevar un control cuidadoso de los medios informáticos y conocimientos implícitos. En las SD se pueden incluir tareas, ejercicios de clase, exámenes, uso de software, elaboración de modelos, proyectos, así como pequeñas elaboraciones y prácticas, que garanticen una respuesta aceptada por parte de los involucrados.

La intención de poner en situación a un estudiante o grupo de estudiantes significa experimentar con ellos nuevas creaciones que todavía no tienen una aceptación explícita en el salón de clase, o bien, la búsqueda de descifrar algo

[3] Ver la opinión sobre Differential Equations de Rackauckas (2018) en las conclusiones.

apertura Año 19 – Vol. 11, núm. 1 – Abril 2019 – e-ISSN 2007-1094

escondido en la elaboración de la SD, a través de mezclar diferentes saberes y áreas del conocimiento para llegar a su resolución. En nuestro caso, buscamos que los estudiantes interactúen con las app.m y reconozcan en el dominio de la interfaz los objetos de la matemática escolar que, en cierta medida, asumiremos como la norma que garantiza la fidelidad entre los dos ambientes.

Diseño de la SD y problematización del ítem elegido

Nuestro objetivo en el diseño de SD prevé la siguiente serie de secuencias S:

> S.1) Proveer a un grupo de 20 estudiantes del curso de EDO, del cuarto y quinto semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales,[4] de un objeto matemático que represente la solución en serie de Fourier de una ecuación diferencial.
> S.2) Nos interesa que los estudiantes tecleen esta solución en la app.m cargada en su móvil, en este caso el graficador Desmos.
> S.3) Esa acción convierte al objeto matemático en informático, dispuesto en su interfaz.
> S.4) La siguiente secuencia consiste en obtener la gráfica en la app.m de la expresión así tecleada.
> S.5) Se identifica en la gráfica el objeto matemático, al que corresponde la solución en serie de Fourier dada.

Problematización y elección de ítems

La puesta en situación de los estudiantes se coloca en el escenario de un examen ordinario de la quinta unidad del curso, presentado a finales del primer semestre de 2018, con una duración aproximada de una hora y veinte minutos; el ítem elegido es el segundo de tres que se propusieron. El examen fue elaborado a partir de la inclusión de uno de sus ítems en el contenido de un libro de texto empleado comúnmente por profesores y estudiantes en la institución donde realizamos la investigación. El ítem elegido fue seleccionado entre otros que se encuentran en Edwards y Penney (2001, problema 16, sección 9.2, p. 595) y se describe como se muestra a continuación.

> La función que se muestra en (1) expresada en serie de Fourier, corresponde a un desarrollo de la forma:

$$f(t)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi t)}{n^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(n\pi t)}{n}\quad ...(1),$$

> con período $f(t)=f(t+2)$.

El ítem se problematizó con el uso del software y conocimientos involucrados en sentido inverso de la forma en que se propone en el libro citado. Su planteamiento es el siguiente:

a) Considere que f es una función de período 2 tal que $f(t)=0$, si $-1 < t < 0$ y $f(t)=t$ si $0 < t < 1$. Pruebe que:
$$f(t)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi t)}{n^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(n\pi t)}{n}$$
b) Trace ahora la gráfica de f indicando el valor de cada discontinuidad.

Además, el profesor del curso empleó la ecuación (1) para solicitar a los estudiantes las siguientes actividades:

1) Teclear la ecuación en Desmos, 2) pedir en la interfaz gráfica y 3) determinar la función

> En nuestro caso, buscamos que los estudiantes interactúen con las app.m y reconozcan en el dominio de la interfaz los objetos de la matemática escolar

[4] Instituto Tecnológico de Chihuahua II, TecNM. Al ser alumnos de la carrera de Sistemas Computacionales, los estudiantes se encuentran en el ambiente requerido del uso de app.m. Reconocen fácilmente los términos usuales de esa disciplina, como código de programación, interfaz, entre otros.

$f\,(t)$ que corresponde a la serie de Fourier dada.

A lo largo del trabajo en el aula de las técnicas relacionadas con el tema, los estudiantes graficaron en Desmos una considerable cantidad de funciones expresadas en serie de Fourier y soluciones de EDO de condiciones iniciales, cuya función ordenadora es periódica, como la que se muestra en (1). A diferencia de esas actividades, el ítem que se presenta en la SD es en sentido inverso, es decir, se va del desarrollo de funciones en serie de Fourier y se pide "regresar" y reconocer la función matemática de origen; en esa interacción la app.m sirve de puente. Esta última actividad no es cotidiana en un curso tradicional. Desde nuestro punto de vista, el ítem en sí mismo representa un desafío para los estudiantes, no obstante que con un mínimo del uso de la app.m se llega a su resolución. Ello da lugar a que fuera considerado como el más sencillo de resolver, de modo que la mayoría de los estudiantes optaron por abordarlo.

Conflicto cognitivo

Se presenta un conflicto cognitivo al pedir a los estudiantes verificar el objeto matemático que resulta a través de la gráfica que devuelve Desmos de la serie de Fourier. Los estudiantes deben reconocer que ese objeto representa dos líneas rectas unidas en el origen, "dientes de sierra", según los autores del libro, de la forma:

$$f(t)=\begin{cases} 0, -1 < t < 0 \\ t, 0 < t < 1 \end{cases} \ldots(2)$$

de período $f(t)=f(t+2)$.

Sin embargo, al asumir la autoridad del texto, el profesor no advirtió que la expresión (1) no corresponde a la solución esperada (2), ya que es error de los autores del libro. La expresión real para la solución esperada es:

$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1)\cos(n\pi t)}{n^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(n\pi t)}{n}\ldots(3)$$

bajo las mismas condiciones del período. La gráfica esperada para la ecuación (1) se muestra en la interfaz de la app.m en la figura 2, así como la expresión tecleada en el editor de ecuaciones del software, mientras que la gráfica que determina la función (3) se aprecia en la figura 1.

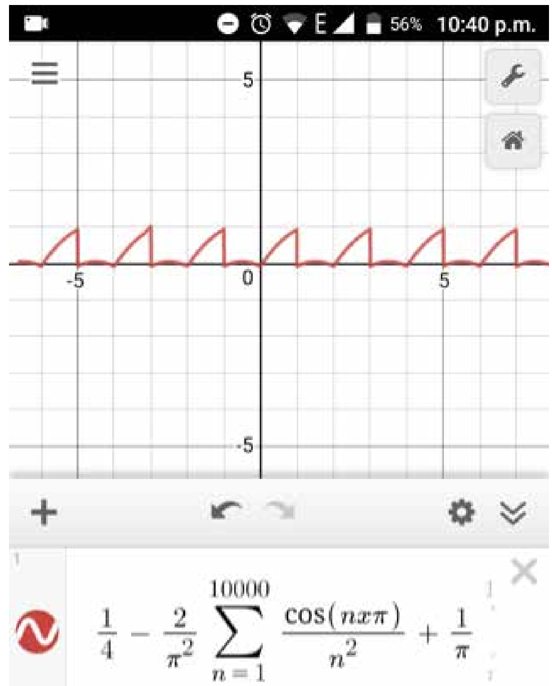


Figura 2. Abajo, la expresión tecleada en Desmos para $n = 10\,000$ valores. Arriba, gráfica de la expresión devuelta.
Fuente: elaboración propia.

Al no advertir el error, el profesor planteó el ítem en la forma que sugiere la función en (1), y asumió que la respuesta esperada debía ser la que se muestra en (2). Para un estudiante que ha logrado manejar adecuadamente Desmos durante el semestre, teclear y llegar a la gráfica le lleva de dos a tres minutos. Le toma otros cinco minutos transcribir al cuaderno la gráfica correspondiente, cuya interacción lo remita a tomar una decisión cognitiva para la expresión matemática devuelta.

RESULTADOS

De los 20 estudiantes que aplicaron para el examen, nueve llegaron a resultados “aceptables” en la solución esperada por el profesor para el problema colocado en la SD, siete de ellos lo resolvieron equivocadamente y cuatro no lo eligieron como parte de su evaluación. Los once estudiantes que no resolvieron el problema aplicaron para la etapa de regularización de la quinta unidad, para la cual se elaboraron de nuevo tres problemas, incluyendo uno semejante al que se exhibe en la SD.

En seguida mostramos las regularidades más sobresalientes de los resultados que se obtuvieron con el uso de las app.m durante el desarrollo de la SD, con el error comentado.

En la gráfica devuelta por Desmos para el problema planteado en la SD (ver figura 3) se muestra el resultado de uno de los estudiantes que corresponde al esperado por el profesor, es decir,

$$f(t)=\begin{cases} 0, -1<t<0 \\ t, 0<t<1 \end{cases}$$

cuya regularidad se verifica en cinco de los nueve estudiantes.

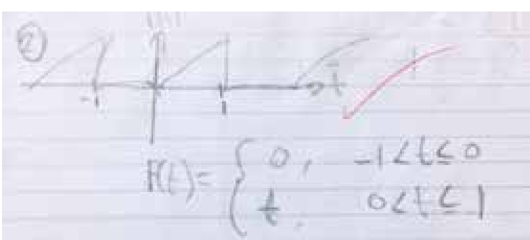


Figura 3. Elaboración en el cuaderno de la gráfica devuelta por Desmos.

En esa realización, el estudiante dio un valor máximo a la sumatoria de n=100 términos, que da lugar a que las “rectas” esperadas se mustren “curveadas”, lo cual se percibe en la gráfica trasladada al cuaderno. Sin embargo, esto no fue obstáculo para que los cinco estudiantes decidieran por la expresión esperada. Incluso, tres de ellos trasladaron la gráfica al cuaderno evitando el curveado y dejaron las rectas tal como las esperaba el profesor, sin percatarse del error en que incurrían.

En la gráfica de la figura 4, otro de los alumnos exageró más las curvas y a la sumatoria le dio un valor para n=10 000 términos, que le convenció de que las curvas devueltas eran la gráfica correspondiente al desarrollo de Fourier, dado en la SD.

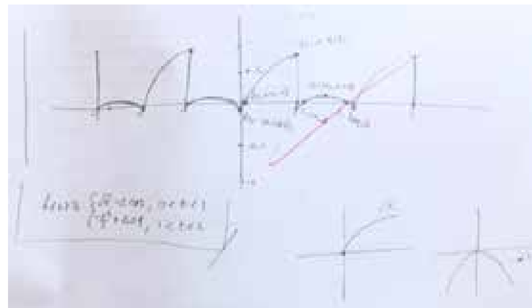


Figura 4. Elaboración en el cuaderno de la gráfica devuelta por Desmos (en este caso, el alumno interpretó la gráfica esperada como dos curvas).

En ese escenario, el alumno amplificó la imagen resultante en la interfaz de la app.m y observó que la curva que se acomoda al eje x corta en dos puntos cuyas coordenadas se obtuvieron con el software; estimó también aquellas en las que se encuentran los pliegues de ambas, así como las que corresponden al valor máximo de la primera. En ese momento, el interés del alumno era determinar las expresiones analíticas de cada curva y utilizó para esto las coordenadas rectangulares descritas, así como la visión que tenía del comportamiento tendencial de cada una. Supuso la primera, que se encuentra entre 1 < t < 2, como una parábola invertida y la otra, ubicada entre 0 < t < 1, como una función radical $\sqrt{t}$ trasladada sobre el eje y. Ante esto, expresó la función esperada, como:

$$f(t)=\begin{cases} \sqrt{t}-0.083, 0<t<1 \\ \dfrac{-t^2+0.04}{2}, 1<t<2 \end{cases}$$

Otro de los estudiantes usó el mismo criterio y concluyó que la función esperada era una recta, aquella que se encuentra entre $0 < t < 1$, y una parábola invertida trasladada sobre el eje x, la ubicada en el intervalo $1 < t < 2$. Escribió la función en la forma:

$$f(t)=\begin{cases} t-0.083, & 0<t<1 \\ -t^2+2t-0.917, & 1<t<2 \end{cases}$$

Los otros dos estudiantes realizaron operaciones semejantes.

DISCUSIÓN

El efecto granular de las gráficas devueltas llevó a los primeros cinco estudiantes a tomar una decisión equivocada, que se manifiesta como un fenómeno de perturbación cognitiva por la representación mental que se hicieron de la función esperada. En la figura 2 apreciamos que las ondulaciones que determinan ambas curvas se confunden en el entorno de la interfaz de la app.m. La que se encuentra sobre el eje $f(t)=t$, plegándose a este último, y la otra, asemejándose a la recta, lo que provoca el fenómeno.

Ante estos resultados, la gráfica dispuesta en la figura 3 representa un modelo del comportamiento de los estudiantes, que deriva de la gráfica devuelta en la interfaz de la app.m y de la representación que hicieron a través de su nivel de diagnóstico. Esas decisiones aparecen como importantes ante el posible diseño de una "modelización" de situaciones que involucran a los estudiantes. Esto que actualmente se conoce como tutoriales.

Sin embargo, la aplicación de la SD muestra que las app.m pueden ser utilizadas por los estudiantes como ambientes tecnológicos escolares de apoyo en la resolución de problemas, sin necesidad de recurrir a software especializado o comercial. En estos software las acciones y respuestas de los alumnos son dinámicas y determinan que las app.m aparezcan como esenciales en la resolución de EDO y la graficación de sus soluciones.

CONCLUSIONES

La inmersión del software app.m en el curso de EDO suministra diferencias epistemológicas significativas entre la representación simbólica de las gráficas que aporta su interfaz y el referente de conocimiento que permite a los estudiantes su elaboración. La representación simbólica es determinada por la limitada resolución en las gráficas devueltas, que provoca una serie de fenómenos didácticos durante su interacción con el conocimiento matemático escolar.

Los fenómenos toman dos vertientes, la primera destaca del avance de la tecnología de software, que deja ver que los dispositivos móviles en que se depositan las app.m promueven estos últimos, por el reducido tamaño de su interfaz, o bien, por razones tecnológicas de su estructura de programación. Con todo lo anterior, la identificación de ese tipo de fenómenos permiten entender las limitaciones de las app.m utilizadas.

La segunda vertiente es más compleja y determina decisiones equivocadas en los estudiantes alrededor de las funciones esperadas ante el problema. No obstante, esas decisiones se pueden salvar a través de convenciones previas acordadas en grupo, que llevarían a cuestionar el diseño de SD.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, Michèle. (1997). Le logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomènes didactiques lies à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, (33), pp. 133-169. https://doi.org/10.1023/A:1002996128978

Artigue, Michèle. (2015). Tecnologías de la información y de la comunicación y aprendizaje basado en la investigación: ¿qué sinergias?, en Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (ed.). *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 17-27). España.

Balacheff, Nicolas. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (14), pp. 9-42. Recuperado de: https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190648/

Camacho, Alberto & Romo-Vázquez, Avenilde. (2015). Déconstruction-construction d'un concept mathématique, en L. Theis (ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage.* Àlger, Afrique (pp. 443-453). –Actes du colloque EMF2015– GT5.

Chevallard, Yves. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble, Francia: Editions La Pensée Sauvage. Recuperado de: https://www.persee.fr/docAsPDF/rfp_0556 7807_1986_num_76_1_2401_t1_0089_0000_1.pdf

Cortés Zabala, José Carlos; Guerrero Magaña, Lourdes; Morales Ontiveros, Christian y Pedroza Ceras, Lourdes. (2014). Tecnologías de la información y la comunicación (TIC): aplicaciones tecnológicas para el aprendizaje de las matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *39*, pp. 141-161[A1]. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4870037

Edwards, Henry y Penney, David. (2001). *Ecuaciones diferenciales*. Prentice-Hall.

Kreyszig, Erwin. (2011). *Advanced engineering mathematics*. EUA: John Wiley and Sons Inc.

Mosquera, Mauricio y Vivas, Sandra. (2017). Análisis comparativo de software matemático para la formación de competencias de aprendizaje en cálculo diferencial. *Revista Plumilla Educativa*, pp. 98-113. Recuperado de: http://revistasum.umanizales.edu.co/ojs/index.php/plumillaeducativa/article/view/2476/2802

Rackauckas, Christopher. (2018). A Comparison Between Differential Equation Solver Suites Matlab, R, Julia, Phyton, C, Mathematica, Maple, and Fortran. *The Winnower*. Recuperado de: https://thewinnower.com/papers/9318-a-comparison-between-differential-equation-solver-suites-in-matlab-r-julia-python-c-mathematica-maple-and-fortran

Rainville, Earl. (1969). *Ecuaciones diferenciales elementales*. Ciudad de México: Trillas.

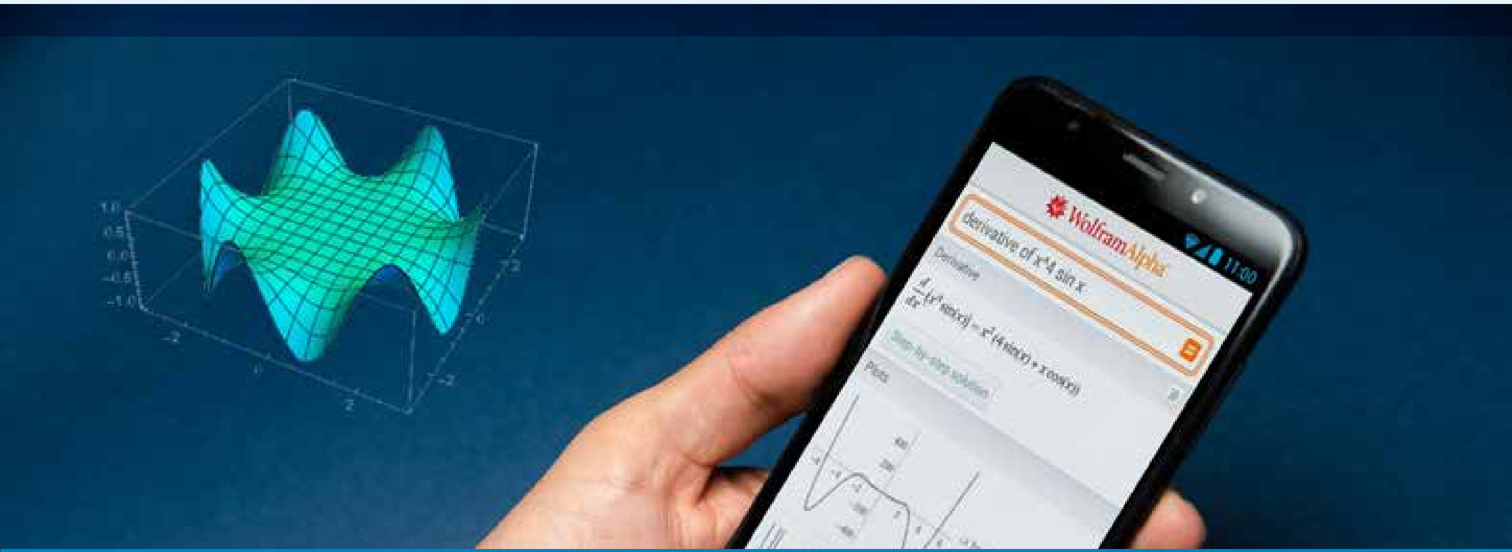
Rainville, Earl; Bedient Philip & Bedient, Richard. (1998). *Ecuaciones diferenciales.* Estado de México: Prentice Hall.

Rodríguez, Ruth y Quiroz, Samantha. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), pp. 99-124. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1914

TecNM. (2016). Ecuaciones diferenciales ordinarias. Plan de estudios de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales. México.

Wing, Jeannette. (2006). Computational thinking. View point. *Communication of ACM*, *49*(3), p. 35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Zill, David y Cullen, Michael. (2018). *Matemáticas avanzadas para ingeniería. Ecuaciones diferenciales.* México: McGraw-Hill.



CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO:

Camacho Ríos, Alberto; Caldera Franco, Marisela Ivette y Valenzuela González, Verónica. (2019). Fidelidad en el uso de app para la resolución de ecuaciones diferenciales. *Apertura*, *11*(1), pp. 74-89. http://dx.doi.org/10.32870/Ap.v11n1.1463