

Pseudo Herono trikampiai, kuri# vienos arba dviej# kraštini# ilgi# kvadratai – pirminiai skaičiai

Maz#tisa, Edmundas; Melni#enkob, Grigorijus

Pseudo Herono trikampiai, kuri# vienos arba dviej# kraštini# ilgi# kvadratai – pirminiai skaičiai

Lietuvos matematikos rinkinys, vol. 62 Ser. B, 2021

Vilniaus Universitetas, Lituania

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=692674125009>

DOI: <https://doi.org/10.15388/LMR.2021.25231>



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional.

Pseudo Herono trikampiai, kurių vienos arba dviejų kraštinių ilgių kvadratai – pirminiai skaičiai

Pseudo-Heronian triangles whose squares of the lengths of one or two sides are prime numbers

Edmundas Mazėtisa edmundas.mazetis@mif.vu.lt
Vilniaus universitetas, Lithuania

 <https://orcid.org/0000-0001-8604-9179>

Grigorijus Melničenkob gmelnicenko@gmail.com
Vytauto Didžiojo universitetas, Lithuania

Lietuvos matematikos rinkinys, vol. 62
Ser. B, 2021

Vilniaus Universitetas, Lithuania

Recepción: 17 Junio 2021
Publicación: 20 Diciembre 2021

DOI: [https://doi.org/10.15388/](https://doi.org/10.15388/LMR.2021.25231)
LMR.2021.25231

Redalyc: [https://www.redalyc.org/](https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=692674125009)
articulo.oa?id=692674125009

Summary: Autoriai [4] straipsnyje apibrėžė pseudo Herono trikampio, kurio kraštinių ilgių kvadratai yra sveikieji skaičiai, o dviguba ploto reikšmė irgi sveikasis skaičius, sąvoką. Šiame darbe nagrinėjamas atskiras tokių trikampių atvejis, kai dviejų jo kraštinių ilgių kvadratai yra $4k + 1$ pavidalo pirminiai skaičiai. Įrodoma, kad bet kuriems dviems duotiesiems pavidalo $4k + 1$ pavidalo pirminiams skaičiams egzistuoja pseudo Herono trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose, o dviejų kraštinių ilgių kvadratai lygūs tiems duotiesiems skaičiams. Be to įrodyta, kad tokių trikampių yra baigtinis skaičius. Taip pat įrodoma, kad bet kuriam duotajam pavidalo $4k + 1$ pirminiam skaičiui egzistuoja lygiašoniai pseudo Herono trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškai, jų šoninių kraštinių ilgių kvadratai lygūs duotajam skaičiui, o tokių trikampių yra baigtinis skaičius.

Keywords: Herono trikampis, pseudo Herono trikampis, pirminiai skaičiai, dviejų sveikųjų 1 skaičių kvadratų suma.

Abstract: The authors introduced the concept of a pseudo-Heron triangle, such that squares of sides are integers, and the area is an integer multiplied by 2. The article investigates the case of pseudo-Heron triangles such that the squares of the two sides of the pseudo-Heron triangle are primes of the form $4k + 1$. It is proved that for any two predetermined prime numbers of the form $4k + 1$ there exist pseudo-Heron triangles with vertices on an integer lattice, such that these two primes are the sides of these triangles and such triangles have a finite number. It is also proved that for any predetermined prime number of the form $4k + 1$, there are isosceles triangles with vertices on an integer lattice, such that this prime is equal to the values of two sides and there are only a finite number of such triangles.

Keywords: Heronian triangles, pseudo-Heronian triangles, prime numbers, sum of squares of two numbers.

1. Įvadas ir rezultatų formulavimas

Gera žinoma Ferma teorema teigia, kad kiekvienas pavidalo $4k + 1$ pirminis skaičius p išreiškiamas dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma $p = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$ be to išraiška $p = a^2 + b^2$ yra vienintelė (jei nekreipiame dėmesio į skaičių a ir b sukeitimą vietomis ir jų ženklų kombinacijas). Ferma šį faktą pavadino „fundamentaliąja

stačiųjų trikampių teorema“ (“the fundamental theorem on right-angled triangles”) [5]

Iš šios teoremos seka, kad egzistuoja vienintelis statusis trikampis, kurio įžambinės ilgis lygus $\sqrt{p}$, o statinių ilgiai yra sveikieji skaičiai.

Apibrėšime pseudo Herono trikampių sąvoką, kurios atskiras atvejis yra Herono trikampiai.

1 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgių kvadratai yra sveikieji skaičiai, o dvi- guba ploto reikšmė – irgi sveikasis skaičius, vadinamas pseudo Herono trikampiu.

Pažymėtina, kad mokyklinėje geometrijoje dažnai susiduriama su pseudo Herono trikampiais. Pavyzdžiui, trikampis, kurio kraštinės lygios Herono trikampio pusiau- kraštinėms, arba trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškai, yra pseudo Herono trikampiai. Statusis trikampis, kurio statinių ilgiai – sveikieji skaičiai, irgi yra atskiras pseudo Herono trikampio atvejis.

Pagrindinius šio darbo rezultatus išreiškia dvi teoremos:

1 teorema. Bet kuriems dviem duotiesiems $4k + 1$ pavidalo pirminiams skaičiams egzistuoja lygiai aštuoni pseudo Herono trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose, dviejų kraštinių ilgių kvadratai lygūs tiems duotiesiems skaičiams.

2 teorema. Bet kuriam duotajam pavidalo $4k + 1$ pirminiam skaičiui egzistuoja lygiai penki lygiašoniai pseudo Herono trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškai, jų šoninių kraštinių ilgių kvadratai lygūs duotajam skaičiui.

2 Pagrindinių rezultatų įrodymas

3 teorema [Ferma]. Bet kuriam duotajam pavidalo $4k + 1$ pirminiam skaičiui p egzistuoja vienintelis statusis pseudo Herono trikampis, kurio įžambinės ilgio kvadratas lygus p , o statinių ilgiai yra sveikieji skaičiai. Tokio trikampio viršūnės gali būti patalpintos gardelės Z^2 taškuose.

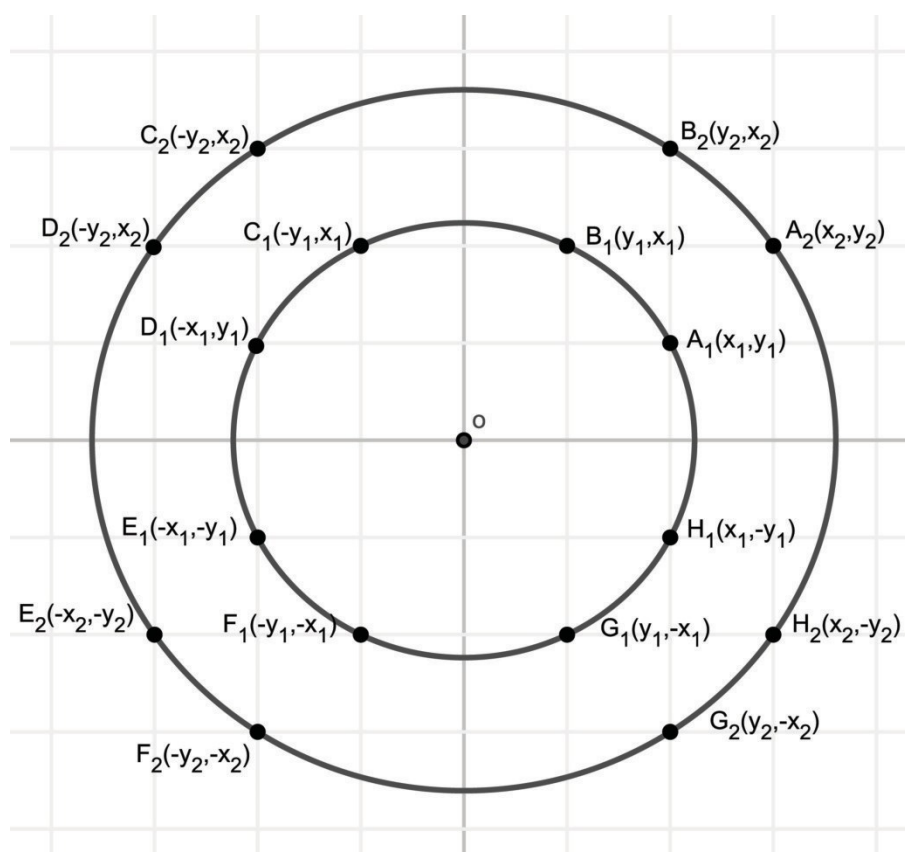
Teoremos įrodymą galima rasti [2] ir [1] darbuose.

Plokštumoje nagrinėkime stačiakampę Dekarto koordinatinių sistemą ir joje sveikaskaitę gardelę Z^2 .

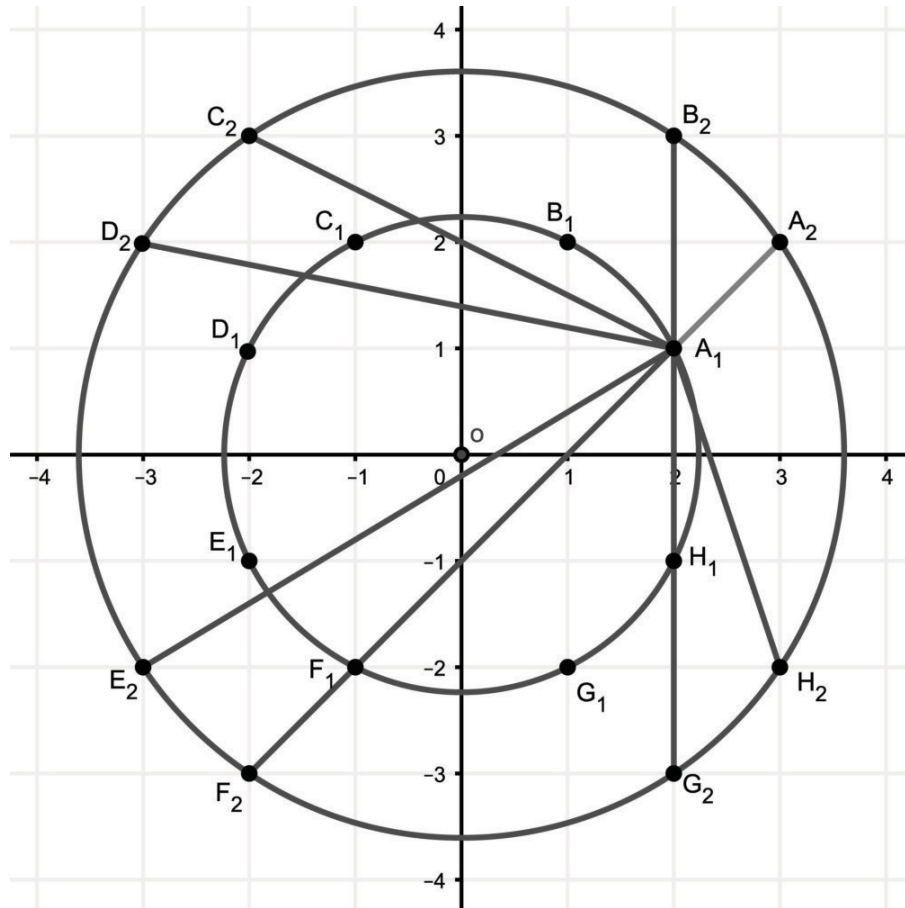
2 apibrėžimas. Sakysime, kad trikampio OAC viršūnės yra sveikaskaitės gardelės Z^2 taškuose, o taškas O yra koordinatinių sistemos pradžios taškas. Tuomet kraštinę AC vadinsime trikampio OAC pagrindu.

Teoremos 1 įrodymas. Pirmiausia teoremą įrodysime, kai viena trikampio viršūnė yra koordinatinių pradžios taške O . Sakysime, kad p_1 ir p_2 yra du skirtingi pavidalo $4k + 1$ pirminiai skaičiai, tai pagal Ferma teoremą teisingos lygybės $p_1 = x_1^2$ ir $p_2 = x_2^2 + y_2^2$ su $x_1 > 0, y_1 > 0, x_2 > 0, y_2 > 0$ sveikieji skaičiai. Sakysime, kad $p_1 < p_2$. Sveikaskaitėje gardelėje Z^2 pažymėkime taškus, kuriuos pavadinkime žemutine grupe (1 pav. atitinka atvejį $p_1 = 5$):

$$A_1(x_1, y_1), B_1(y_1, x_1), C_1(-y_1, x_1), D_1(-x_1, y_1), E_1(-x_1, y_1), F_1(-y_1, -x_1), G_1(y_1, -x_1), H_1(x_1, -y_1),$$



1 pav



2 pav.

Pastebėkime, kad

$$\sqrt{p_1} = OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = OE_1 = OF_1 = OG_1 = OH_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Toje pačioje girdelėje Z^2 pažymėkime taškus, kuriuos pavadinsime viršutine grupe:

$$A_2(x_2, y_2), B_2(y_2, x_2), C_2(-y_2, x_2), D_2(-x_2, y_2), E_2(-x_2, y_2), F_2(-y_2, -x_2), G_2(y_2, x), H_1$$

Akivaizdu, kad toje pačioje girdelėje Z^2 pažymėkime taškus, kuriuos pavadinsime viršutine grupe:

$$\sqrt{p_2} = OA_2 = OB_2 = OC_2 = OD_2 = OE_2 = OF_2 = OG_2 = OH_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

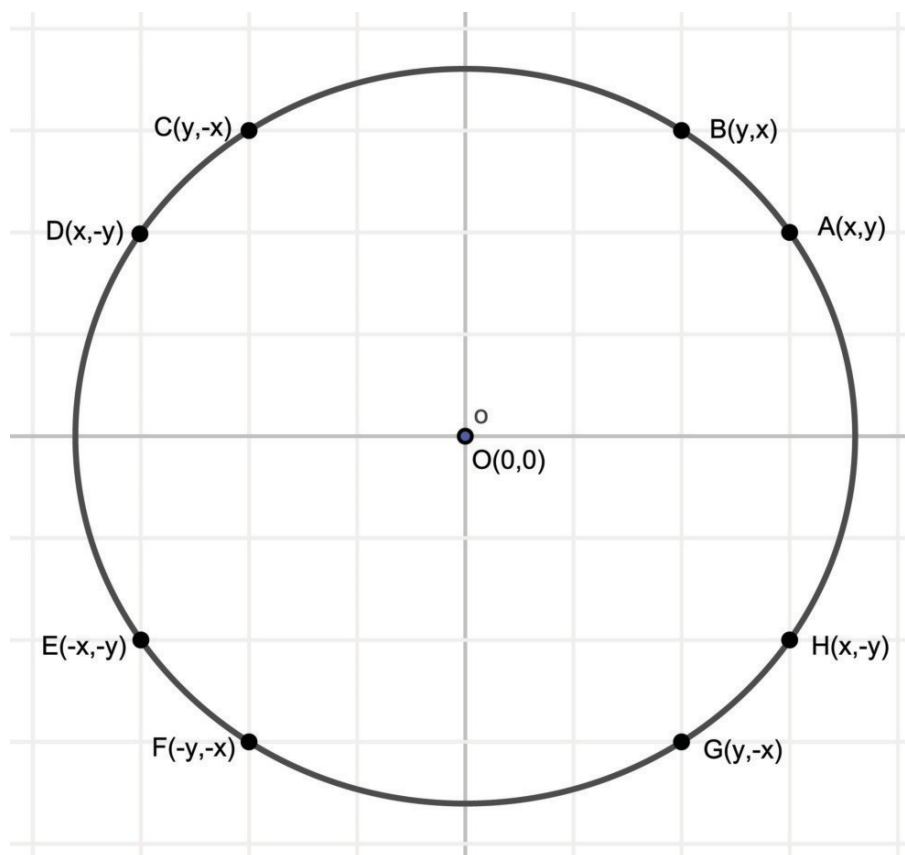
Pastebėkime, kad atstumai nuo bet kurio žemutinės grupės taško iki bet kurio viršutinės grupės taško yra lygūs vienam iš šių skaičių.

Nesunkiai patikriname, kad visi šie 8 atstumai yra skirtingi. Iš čia seka, kad jungdami atkarpomis žemutinės grupės taškus su viršutinės grupės taškais, gauname trikampių pagrindus (2 pav. nubrėžti tie pagrindai, kai $p_1 = 5, p_2 = 13$, o visi pagrindai išeina iš taško $A_1(x_1, y_1)$. Iš (1) lygybių

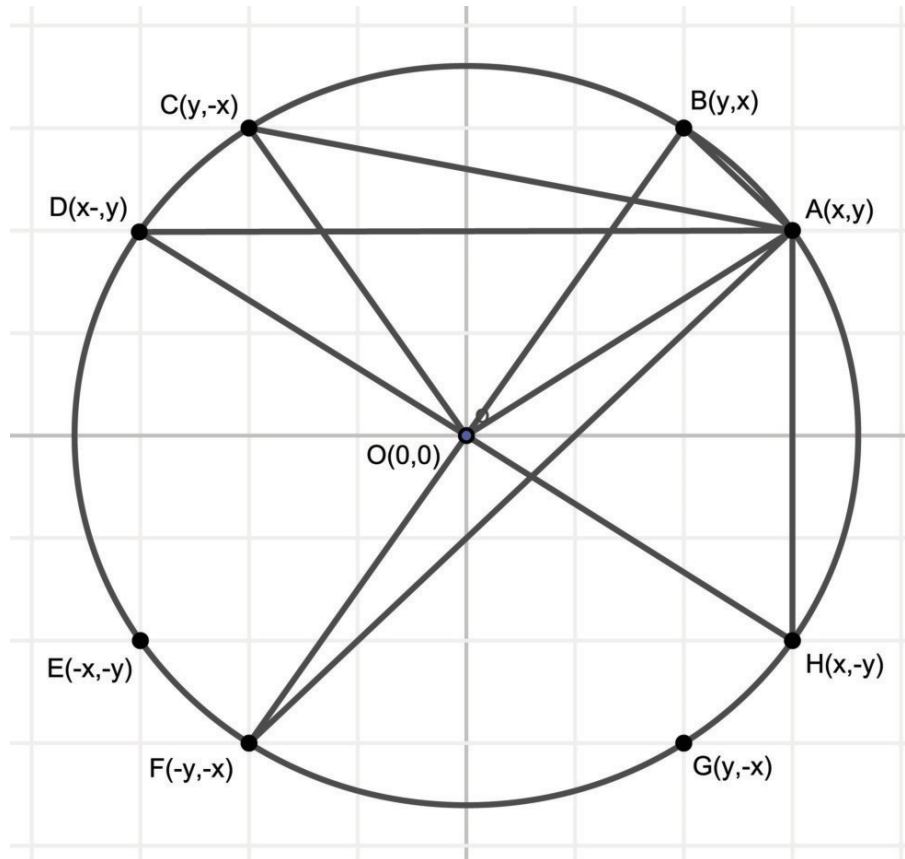
gauname, kad visi tie 8 trikampiai yra skirtingi. Taigi gavome 8 skirtingus trikampius, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės Z^2 taškai, o duotieji pirminiai skaičiai p_1 ir p_2 yra tų trikampių kraštinių ilgių kvadratai. Šie 8 trikampiai yra pseudo Herono trikampiai [4].

Dabar sakykime, kad MNK yra trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės Z^2 taškuose, $MN = \sqrt{p_1}$, $MK = \sqrt{p_2}$, o viršūnė M nesutampa su koordinačių sistemos pradžios tašku O .

Atikimi tiesogini plokštumos judesi kuriuo taškai ir . atvaizduojami atitinkamai į taškus M ir N . Kadangi $MN = OA_1 = \sqrt{p_1}$, tai toks judesys egzistuoja ir yra vienintelis. Sakykime, kad taško . vaizdas yra sveikaskaitės gardelės taškas $L(x, y)$. Kadangi $x^2 + y^2 = p_2$, tai iš Ferma teoremos išplaukia, kad taškas . sutampa su vienu iš viršutinės grupės taškų.



3 pav



4 pav

Teoremos 2 įrodymas. Iš Ferma teoremos seka, kad bet kuriam pavidalo $4k + 1$ pirminiam skaičiui p teisinga lygybė $p = x^2 + y^2$, $x > 0$, $y > 0$ sveikieji skaičiai, ir $x > y$. Sveikaskaitėje gardelėje Z^2 pažymėkime taškus $A(x, y)$, $B(y, x)$, $C(-y, x)$, $D(-x, y)$, $E(-x, -y)$, $F(-y, -x)$, $G(y, -x)$, $H(x, -y)$ (3 pav. brėžinys atliktas, kai $p = 13$). Akivaizdu, kad

$$\sqrt{p} = OA = OB = OC = OD = OE = OF = OG = OH = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

Nesunkiai randame, kad skirtingi atstumai tarp bet kurių dviejų iš taškų (2) yra lygūs vienam iš šių skaičių:

$$\sqrt{(y-x)^2 + (x-y)^2} = \sqrt{2(x-y)^2}, \quad \sqrt{(y-x)^2 + (x+y)^2} = \sqrt{2(x^2+y^2)}, \quad \sqrt{(y+x)^2 + (x+y)^2} = \sqrt{2(x+y)^2}, \quad \sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2} = 2\sqrt{(x^2-y^2)}, \quad \sqrt{(x+x)^2 + (y+y)^2} = 2x, \quad \sqrt{(x-x)^2 + (y+y)^2} = 2y$$

Sujungę koordinačių pradžios tašką $O(0, 0)$ atkarpomis su taškais (2), gauname lygiašonius trikampius, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės Z^2 taškai, o jų dviejų šoninių kraštinių kvadratai lygūs duotajam pirminiam skaičiui p . Atstumas, lygus skaičiui $2\sqrt{x^2 + y^2}$, negali būti lygiašonio trikampio pagrindu, nes iš (3) lygybės gauname, kad jo viršūnės yra vienoje tiesėje. Iš (4) lygybių išplaukia, kad yra 5 skirtingi lygiašoniai trikampiai, kurių šoninių kraštinių kvadratai lygūs p , o viršūnės yra

gardelės Z^2 taškai. 4 pav. parodyti tie penki trikampiai, kurių pagrindai, išeina iš gardelės taško $A(x, y)$, kai $p = 13$. Šie 5 trikampiai yra pseudo Herono trikampiai [4].

Analogiškai samprotavimai kaip ir 1 teoremos įrodyme leidžia daryti išvadą, kad bet kuris lygiašonis trikampis, kurio viršūnės yra gardelės Z^2 taškai, o dviejų šoninių kraštinių ilgių lygus $\sqrt{p}$ yra lygus vienam is gauutu ju penkiu trikampiu.

Iš 1 teoremos įrodymo neišplaukia, kad pseudo Herono trikampiai, kurių dviejų kraštinių kvadratai yra duotieji pirminiai skaičiai, yra tik tie 8 trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose. Gali būti pseudo Herono trikampių, kurie pasižymi minėtomis savybėmis, bet nėra tokios sveikaskaitės gardelės, kurios taškai būtų tų trikampių viršūnės. Analogiškai iš 2 teoremos įrodymo neišplaukia, kad lygiašonių pseudo Herono trikampių, kurių šoninių kraštinių ilgio kvadratas yra duotasis pirminis skaičius, yra tik 5 trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose, nes gali būti trikampių, tenkinančių šią sąlygą, kurių viršūnės nėra sveikaskaitės gardelės taškuose.

Autoriai [4] darbe įrodė, kad bet kuriam pseudo Herono trikampiui egzistuoja panašus jam trikampis, kurio viršūnės yra gardelės Z^2 taškuose. Yra žinoma, kad bet kurio Herono trikampo viršūnės galima patalpinti sveikaskaitės gardelės taškuose [3, 6]. Analogiška prielaida pseudo Herono trikampiams (žr. [4] darbo 1 problemą) yra neįrodyta. Jei šios prielaidos teiginys būtų teisingas, tuomet bet kuriems duotiems $4k + 1$ pavidalo pirminiams skaičiams p_1 ir p_2 ($p_1 \neq p_2$) egzistuočių tik 8 pseudo Herono trikampiai, kurių dviejų kraštinių ilgių kvadratai būtų lygūs duotiesiems skaičiams. Taip pat bet kuriam $4k + 1$ pavidalo pirminiam skaičiui . egzistuočių tik 5 skirtingi lygiašoniai pseudo Herono trikampiai, kurių šoninių kraštinių ilgių kvadratai būtų lygūs tam pirminiam skaičiui. Literatūra

Literatūra

- H. Davenport. *Vyšshaya Arifmetika*. FML, Moscow, 1965 (in Russian).
- H. Davenport. *Higher Arithmetic*. 8th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- J.S. Marshall, A.R. Perlis. Heronian tetrahedra are lattice tetrahedra. *Amer. Math. Monthly*, **120**(2):140–149, 2013.
- E. Mazetis, G. Melničenko. Trikampio kampų kotangentų racionaliosios reikšmės. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **55**:84–89, 2014.
- D. Vella, A. Vella, J. Wolf. An extension of the fundamental theorem on rightangled triangles. *Math. Gazette*, **89**:237–244, 2005.
- P. Yiu. Heronian triangles are lattice triangles. *Amer. Math. Monthly*, **108**(3):261–263, 2001.