

## Tratamento dos teoremas do valor médio em Análise Matemática I

da Costa Fernando, Euclides Faustino

Tratamento dos teoremas do valor médio em Análise Matemática I

Revista angolana de ciências, vol. 2, núm. 1, 2020

Universidade Rainha Njinga a Mbande, Angola

Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=704174676004>



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

## Tratamento dos teoremas do valor médio em Análise Matemática I


Treatment of average value theorems in Mathematical Analysis I

Tratamiento de teoremas del valor medio em Análisis Matemática I

Euclides Faustino da Costa Fernando

euclides\_fernando@yahoo.com.br

Instituto Superior de Ciências de Educação do Huambo, Angola

 <https://orcid.org/0000-0003-4658-653X>

Revista angolana de ciências, vol. 2, núm. 1, 2020

Universidade Rainha Njinga a Mbande, Angola

Recepción: 15 Abril 2020  
Aprobación: 15 Junio 2020

Redalyc: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=704174676004>

**Resumo:** Os teoremas fazem parte de um conjunto de ferramentas que têm-se mostrado mais eficiente na construção e desenvolvimento da capacidade de raciocinar logicamente dos estudantes. Geralmente, eles expressam as relações entre os conceitos definidos e requerem, como condição necessária, não só um tratamento adequado dos conceitos que estão relacionados entre si, como também da preparação da via para a sua obtenção do teorema, que passam pela busca da demonstração e a representação da sua demonstração, factores preponderantes para a assimilação do respectivo teorema. Contudo, no 1º ano do curso de Ensino da Matemática do ISCED-Huambo, o modo como são constituídos os procedimentos de demonstrações dos teoremas matemáticos, em geral, e dos teoremas do valor médio, em particular, apresenta algumas insuficiências. Assim, em função destas insuficiências, a presente pesquisa preocupou-se em como melhorar o processo de ensino-aprendizagem do tratamento de teoremas do valor médio. Por meio de uma sistematização, foi possível fundamentar o objecto de estudo e também o campo de acção. Os instrumentos aplicados permitiram constatar a insuficiência e serviram de base para a elaboração de uma estratégia didáctica para o tratamento de teoremas do valor médio na cadeira de Análise Matemática I no 1º ano do curso de Ensino da Matemática do ISCED-Huambo.

**Palavras-chave:** Tratamento de teoremas, teoremas do valor médio, estratégia didáctica.

**Abstract:** The theorems are part of the set tools that show more efficiency in construction and development of student's ability to think logically. Generally, they express the relationships between the defined concepts and required, as a necessary condition, not only adequate treatment of the concepts that are related to each other, as well as the preparation of the for their obtaining the theorem, which go through the pursuit of the demonstration and representation of its demonstration, major factors for the assimilation of the respective theorem. However, in the first year of the ISCED-Huambo Mathematics, the way in which the procedures for demonstrating mathematical theorems in general and the mean value theorems, in particular, have some shortcomings. Thus, due to these shortcomings, the present research was concerned with how to improve the teaching-learning process of treating theorems of the average value. Through systematization, it was possible to substantiate the object of study and also the field of action. The instruments applied found the insufficiency and served as the basis for the elaboration of a didactic strategy for the treatment of mean value theorems in the Mathematical Analysis in the 1st year of the Mathematics Teaching course from ISCED-Huambo.

**Keywords:** Treatment of theorems, mean value theorems, strategy didactics.

**Resumen:** Los teoremas son parte de un conjunto de herramientas que han demostrado ser más eficientes en la construcción y el desarrollo de la capacidad de razonamiento lógico de los estudiantes. En general, expresan las relaciones entre los conceptos definidos y requieren, como condición necesaria, no solo un tratamiento adecuado de los conceptos relacionados entre sí, sino también la preparación del camino para obtener el teorema, que pasa por la búsqueda de la demostración. y la representación de su demostración, factores preponderantes para la asimilación del teorema respectivo. Sin embargo, en el primer año del curso de Enseñanza de las Matemáticas en ISCED-Huambo, la forma en que se constituyen los procedimientos para demostrar los teoremas matemáticos, en general, y los teoremas del valor promedio, en particular, tiene algunas deficiencias. Por lo tanto, debido a estas deficiencias, la presente investigación se centró en cómo mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del tratamiento de teoremas de valor promedio. A través de la sistematización, fue posible justificar el objeto de estudio y también el campo de acción. Los instrumentos aplicados permitieron verificar la insuficiencia y sirvieron de base para la elaboración de una estrategia didáctica para el tratamiento de los teoremas del valor promedio en la asignatura de Análisis Matemático I en el 1er año del curso de Enseñanza de las Matemáticas en la ISCED-Huambo.

**Palabras clave:** Tratamiento de teoremas, teoremas de valor medio, estrategia didáctica.

## INTRODUÇÃO

Uma das ferramentas matemáticas mais eficaz na construção do pensamento criativo, lógico e dedutivo dos profissionais do ensino da Matemática é o uso de teoremas e mostram-se eficientes na construção e desenvolvimento da capacidade de raciocinar logicamente.

A constituição dos procedimentos de como se demonstram os teoremas matemáticos na mente é um processo bastante complexo e está intimamente relacionado com a natureza de como são tratados metodologicamente estes teoremas. Esta complexidade, por sua vez, pode afectar no desenvolvimento de capacidades, hábitos e habilidades criativas dos estudantes (Jungk, 1982).

O estudo feito em investigações a nível internacional e nacional permitiu constatar que vários autores já abordaram questões ligadas ao tratamento de teoremas e suas demonstrações, destacando-se os trabalhos desenvolvidos por Zilmer (1981), Jungk (1982), Ballester e outros (1992), Milián (2013), Sachipia (2014) e Delfino (2017).

Nestas investigações destacam-se, entre vários aspectos, o carácter subjectivo do tratamento de um teorema e, deste modo, para estes autores a demonstração é vista como algo que tem por fim último estabelecer uma verdade matemática não só para um indivíduo, mas também para uma sociedade. No entanto, o significado dela, o seu papel, a forma como é efectuada, verificada e concebida pode variar de pessoa para pessoa e de sociedade para sociedade.

Estas obras, de modo geral, realçam que a construção do conhecimento matemático não ocorre no vazio, isto é, o que um estudante aprende no dia de hoje servirá de alicerce para o que ele vai aprender num futuro próximo e isto, por sua vez, terá grandes implicações ao nível do processo de ensino-aprendizagem. Então, no que concerne à demonstração de teoremas e o seu tratamento deve-se ter em conta o que o estudante precisa ser encarado como alguém que está a aprender, deve-se ter em realce a manutenção da integridade do conceito de demonstração como foi compreendida e

exercitada ao longo da história da matemática e é preciso ter em conta que o conceito de demonstração tem um carácter social, ou seja, o que é dado como um argumento convincente por um indivíduo deve também ser compreendido por outros.

Por este motivo, objectiva-se neste trabalho, elaborar uma estratégia didáctica para o tratamento de teoremas do valor médio na cadeira de Análise Matemática I no 1º ano do curso de Ensino da Matemática do ISCED- Huambo.

## CONCEPÇÕES DE TEOREMAS E PROCEDIMENTOS

Ballester e outros (1992, p. 81) assinalam que em uma exposição sintética de uma teoria Matemática, recebem o nome de teorema, “aquelas proposições verdadeiras mais importantes da teoria, cujo valor de verdade pode ser estabelecido partindo dos axiomas e dos conceitos básicos”. Por outra parte, Cordero e Moreno (2008, p. 14) asseguram que teorema é uma proposição que precisa de ser demonstrada. E demonstrar um teorema não é nada mais que pôr em evidência a sua veracidade partindo de proposições conhecidas ou axiomas.

As definições anteriores têm um ponto em comum ao afirmarem que um teorema é uma proposição verdadeira, demonstrada numa teoria Matemática.

Para destacar a relevância de uns teoremas em relação a outros e também para indicar as relações existentes entre eles, tendo em conta a ordem escolhida para a sua exposição, utilizam-se também as denominações de Lema e Corolário.

Um corolário é um enunciado matemático justificado, que é uma consequência imediata da prova de outro teorema ou de uma definição, e cuja demonstração, portanto, fica bastante simplificada (Freitas & Viana, 2012, p. 23).

Lema é um enunciado matemático que é justificável, mas que é apresentado apenas como um passo para a demonstração de um teorema, que em si mesmo não tem importância (Freitas & Viana, 2012, p. 23).

Por outro lado, existem ainda outros elementos de suma importância na construção de toda teoria matemática. São os chamados procedimentos do trabalho mental para a solução de todo tipo de problemas matemáticos, os quais Ballester e outros (1992, p. 89) denominam-nos de procedimentos de solução. Estes procedimentos podem ser agrupados em duas grandes categorias: procedimentos algorítmicos e procedimentos heurísticos.

Os procedimentos algorítmicos são aqueles que empregam-se em aulas de resolução de problemas, isto é, onde já existe um algoritmo para a solução do mesmo (Sachipia, 2014, p. 13).

Para os procedimentos heurísticos, Sachipia (2014, p. 13), ao citar Ballester e outros (1992), realça que são aqueles que ajudam na realização consciente de actividades mentais complexas exigentes durante a solução de problemas, nos quais não existe ainda um algoritmo para a sua solução.

Estes podem dividir-se em princípios, regras e estratégias, que podem ser gerais e especiais.

Os princípios heurísticos são de grande utilidade para a busca de novos conhecimentos e também sugerem ideias para a solução de diferentes problemas. Dentro destes destacam-se a analogia (utilização de semelhanças), a redução (transformar o que é desconhecido em algo já conhecido) e a indução (chegar à hipótese de que existe uma relação geral) e a generalização (permite obter hipóteses para um conjunto de objectos, fenómenos ou relações, a partir da análise de um caso especial ou particular) (Sigarreta, Locaia, & Bermudo, 1996, p. 30).

Assim, um dos elementos de suma importância para a verificação de como os princípios heurísticos se manifestam em Análise Matemática é o tratamento de teoremas

## OS TEOREMAS DO VALOR MÉDIO

São conhecidos como teoremas do valor médio o teorema de Rolle, de Lagrange e de Cauchy.

Silva (2017, p. 39) destaca que o primeiro teorema do valor médio foi desenvolvido inicialmente por Lagrange, mais tarde, Cauchy apresentou o resultado deste teorema de forma mais geral.

Geralmente, usa-se a expressão “grupo de teoremas do valor médio” para identificar os três teoremas apresentados, em separado, pelos célebres matemáticos mencionados ao início desta epígrafe.

A compreensão dos teoremas do valor médio tem como requisito prévio o conhecimento do lema de Fermat:

Seja dada função  $f(x)$  definida num intervalo  $(a;b)$  e tal que em certo ponto  $c \in (a;b)$  alcança o seu valor máximo ou mínimo nesse intervalo. Se a derivada  $f'(x)$  existir, então  $f'(c) = 0$  (Martins, Salomé, Silva, & Pereira, 2018, p. 243).

### Teorema de Rolle.

Sejam  $a < b$  e  $f(x)$  uma função contínua em  $[a,b]$  e derivável em  $]a,b[$ . Então, se  $f(a) = f(b)$  existe um ponto  $c \in ]a,b[$  tal que  $f'(c) = 0$  (Stewart, 2013, p. 257)

### Teorema de Lagrange

Seja  $f(x)$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a,b]$  e derivável no aberto. Então existe  $c \in (a,b)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

Do ponto de vista geométrico, o teorema em referência tem uma interpretação similar ao de Rolle, uma vez que a existência de  $c \in (a,b)$  pois tal que  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  significa a existência de um ponto  $(c;f'(c))$  no gráfico de  $f(x)$  em que a tangente é paralela à secante definida pelos pontos  $A = (a; f(a))$  e  $B = (b; f(b))$  uma vez que os declives de ambas rectas são iguais (Sarrico, 2015, p. 130).

### Teorema de Cauchy.

Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  duas funções contínuas em  $[a; b]$  derivável nos pontos interiores de dito intervalo. Se  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a; b)$  então existe  $x \in (a; b)$  tal que  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ . É fácil notar que se  $g(x) = x$  então, o teorema do Lagrange é um caso particular deste teorema.

Sarrico (2015, p. 133) lembra que neste teorema não se pode afirmar que  $g(b) = g(a)$  porque, se tal fosse verificado, pelo teorema de Rolle existiria  $x \in (a; b)$  tal que  $g'(x) = 0$  o que contraria a hipótese  $g'(x) \neq 0$  em  $]a; b[$ .

## METODOLOGIA

O trabalho foi elaborado tendo em conta a abordagem descritiva, de natureza mista (qualitativa-quantitativa), que na visão de Prodanov e Freitas (2013, p. 36) serve para descrever factos observados, como as características de uma determinada população ou fenómeno e usa técnicas padronizadas de colecta de dados entre as quais destacam-se a entrevista, o formulário, o inquérito por questionário, o teste e a observação. Foi realizada uma análise documental baseada na teoria de Cellard (2012). Este autor considera que este tipo de método pode ser realizado em documentos públicos ou privados. Os privados, por sua vez, subdividem-se em arquivos privados e documentos pessoais (*ibidem*: 297). No caso desta investigação, esta pesquisa analisou documentos públicos como a Lei de Bases do Sistema de Educação e Ensino da República de Angola, de 2016, que sustenta a educação como pilar para a preparação dos indivíduos para responderem, de modo eficaz, às exigências da sociedade angolana.

Assim sendo, observou-se as aulas de Análise Matemática I quando foram abordados aspectos ligados ao tratamento dos teoremas do valor médio.

### Participantes no inquérito por questionário

A população estudada foi constituída por 5 professores de Análise Matemática do Departamento de Ciências Exactas do ISCED – Huambo e 46 estudantes do 2º ano de Matemática dos períodos regular e pós-laboral.

Para a redução dos riscos de conclusão do estudo desta investigação utilizou-se a triangulação de fontes que combinou métodos e fontes de colecta de dados qualitativos e quantitativos (entrevistas, questionários, observação e análise documentos, e outras), bem como diferentes métodos de análise dos dados como a análise do conteúdo, a análise do discurso, os métodos e as técnicas estatísticas descritivas e inferenciais (*Ibidem*).

## APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Quanto a recolha de dados, sua análise e interpretação foram considerados 19 indicadores agrupados em duas dimensões.

A primeira dimensão é a busca do teorema, que é o processo mediante o qual dirigem-se as acções dos alunos para estabelecer uma suposição, com a aplicação de recursos heurísticos. Possui 10 indicadores.

Em função dos instrumentos de recolha de dados usados, esta dimensão foi codificada para cada indicador, de forma ordenada e crescente, do seguinte modo:

- $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$  para a análise dos inquéritos aplicados aos estudantes;
- $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}$  para análise dos inquéritos aplicados aos professores;
- $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9, O_{10}$  para análise das aulas observadas de Análise Matemática I;

Por exemplo, os indicadores  $A_1, C_1$  e  $O_1$  correspondem ao nível de conhecimento sobre o campo de existência de funções de variável real para os três instrumentos usados para a recolha de dados. Ao passo que  $A_2, C_2$  e  $O_2$  são os mesmos indicadores para os três instrumentos e correspondem ao nível de conhecimento sobre limite de funções de variável real.

Esta mesma ideia de codificação é válida para os demais indicadores das duas dimensões de todos os instrumentos usados para a recolha de dados.

A segunda dimensão está relacionada com a demonstração e a sua representação, que é o processo orientado na procura da ideia da demonstração assim como na apresentação de um plano de solução de acordo com os meios disponíveis (figuras de análise, diferenciações, teoremas etc.). Nesta dimensão o processo é direccionado à execução da ideia e do plano de solução, destacando-se as inferências e as fundamentações que são necessárias dentro de uma exposição compreensível. Possui 9 indicadores, codificados da maneira que se segue:

- $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9$ , para a análise dos inquéritos aplicados aos estudantes;
- $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9$ , para análise dos inquéritos aplicados aos professores;
- $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$  para análise das aulas observadas de Análise Matemática I.

Para a validação dos indicadores das duas dimensões utilizaram-se os índices com as categorias de “Muito Bom”, “Bom”, “Regular” e “Baixo”, respectivamente, de uma escala qualitativa, de maneira que uma vez conhecido o valor do índice (1 para o índice “Muito Bom”, 2 para o índice “Bom”, 3 para o índice Regular e 4 para o índice “Baixo”) seja possível determinar a categoria da dimensão.

*O processamento de dados foi feito com base ao pacote de análise estatística Statistical Package for the Social Sciences, abreviadamente designado por SPSS. Santos (2018, p. 2) considera-o como uma ferramenta que pode ser facilmente manuseada e permite a realização da análise estatística e gráfica com uma amplitude de dados extraídos dos instrumentos aplicados.*



Nesta pesquisa o SPSS permitiu calcular automaticamente o valor da medida de tendência central mediana, visto que trata-se de uma variável ordinal, do tipo qualitativa discreta (López, s.d, p. 5).

Em função do exposto acima, apresenta-se, em guisa de continuação, a análise dos resultados dos instrumentos aplicados.

#### **Análise dos resultados dos inquéritos aplicados aos estudantes e professores e das aulas observadas.**

Após a aplicação dos inquéritos obteve-se a informação destes, o que permitiu a análise minuciosa de cada um dos seus aspectos, conforme será considerado nas tabelas que são apresentadas em parágrafos subsequentes.

**Tabela 1**

Análise dos resultados do inquérito aplicados aos estudantes sobre busca do teorema

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Nº										
Válido	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43
Ausente	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mediana	3,00	3,00	3,00	2,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00

Conforme se verifica na tabela 1, segundo a medida de tendência central mediana, os 10 indicadores relativos à busca do teorema (conteúdos conceituais de base) foram avaliados de regular, o que significa que o nível de conhecimento sobre a determinação do campo de existência e sua respectiva interpretação, a definição de limite de funções de variável real, interpretação dos continuidade de funções de variável real, o conhecimento sobre os procedimentos e cálculo de integrais definidas de funções de variável real, o conhecimento sobre proposições lógicas, conectores de proposições lógicas, a identificação dos teoremas do Valor Médio, o nível motivacional e as respostas que permitem obter resultados parciais que conduzem à formulação do teorema e sua respectiva via, são regulares. Somente o conhecimento sobre derivadas de funções de variável real é que se constatou como bom, o que pode considerar-se como regular o conhecimento necessário sobre a busca do teorema.

**Tabela 2**

Análise do inquérito aplicados aos estudantes sobre a demonstração do teorema

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9
Nº									
Válido	43	43	43	43	43	43	43	43	43
Ausente	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mediana	3,00	3,00	2,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00



Esta tabela, que corresponde aos resultados da medição dos indicadores da segunda dimensão, permite emitir o seguinte juízo de valor:

Todos os indicadores foram avaliados com o número 3, o que significa que o a descrição e visualização geométrica do resultado que vai se enunciar, a motivação da demonstração dos teoremas, a participação na escolha do método de demonstração mais adequado, a participação da elaboração e execução do plano de demonstração, o esclarecimento dos passos lógicos e os recursos auxiliares que se utilizam para a sua demonstração, a análise da validade de recíprocos e contra recíprocos dos teoremas do valor médio, a análise dos teoremas do valor médio como condições necessárias e suficientes, a possibilidade do emprego dos teoremas do valor médio em outros conteúdos da Análise Matemática I, a identificação de um teorema do valor médio que pode aplicar-se em determinados passos da solução de alguns problemas é regular.

A mesma análise é feita com o trabalho feito pelos professores de Análise Matemática I.

**Tabela 3**

Análise dos resultados do inquérito aplicados aos professores sobre a busca do teorema

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
<b>Nº válido</b>	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
<b>Ausente</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Mediana</b>	3,00	3,00	3,00	2,00	4,00	4,00	3,00	4,00	2,00	3,00

O procedimento usado para a análise da tabela 3 é similar ao que foi feito para a análise dos indicadores para as duas dimensões do inquérito aplicado aos estudantes.

Os nove indicadores foram avaliados com o número 3, o que significa que o nível de conhecimento sobre campo de existência, limite de funções, continuidade de funções, Integrais definidas de funções de uma variável real, o conhecimento sobre proposições lógicas, conectores de proposições lógicas, conhecimento dos teoremas do Valor Médio, o nível motivacional e as respostas que permitem obter resultados parciais que conduzem à formulação do teorema para os estudantes do ano em referência são regulares.

**Tabela 4**

Análise dos resultados do inquérito aplicados aos professores  
sobre a demonstração do teorema e a sua representação

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9
<b>Nº Válido</b>	5	5	5	5	5	5	5	5	5
<b>Ausente</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Mediana</b>	3,00	2,00	2,00	2,00	3,00	3,00	3,00	2,00	4,00

A tabela em referência corresponde aos resultados da medição dos indicadores da segunda dimensão do inquérito aplicados aos professores.

Tal como se observa, os indicadores que correspondem à descrição e visualização geométrica do resultado que se pretende enunciar, ao esclarece os passos lógicos e os recursos auxiliares que se utilizam para a sua demonstração, a análise e validade de recíprocos e contra recíprocos dos teoremas do valor médio bem como a análise dos teoremas do valor médio como condições necessárias e suficientes a foram avaliados como índice 3, o que significa que é regular.

A motivação da demonstração dos teoremas, a escolha do método de demonstração mais adequado, a participação da elaboração e execução do plano de demonstração assim como a possibilidade do emprego dos teoremas do valor médio em outros conteúdos da Análise Matemática classificou-se com o índice 2, traduzindo-se como boa.

Quanto a identificação de qual teorema do valor médio deve aplicar-se em determinados passos da solução de alguns problemas, a classificação obtida corresponde ao índice 4, o que significa estar a um nível baixo.

**Tabela 5**

Análise dos resultados das aulas observadas quanto a busca do teorema

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10
<b>Nº Válido</b>	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
<b>Ausente</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Mediana</b>	2,00	2,00	2,00	3,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00

É fácil notar, na presente tabela, que todos os indicadores, a exceção do nível de sobre as derivadas de funções de uma variável real, foram classificados com o índice 2, o que significa que em sala de aula a abordagem destes é regular, isto porque para a análise das aulas observadas foram tidos em conta apenas três índices (Bom, Regular e Baixo).

Tabela 6

Análise dos resultados das aulas observadas quanto a demonstração do teorema

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
Nº Válido	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Ausente	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mediana	3,00	2,00	2,00	3,00	2,00	3,00	3,00	2,00	1,00

Nas seis aulas observadas, a descrição e visualização geométrica do resultado que se pretende enunciar, a participação dos estudantes na elaboração e execução do plano de demonstração, análise da validade de recíprocos e contra recíprocos e a utilização dos teoremas do valor médio como condições necessárias e suficientes tem como índice 3, o que se traduz como baixa.

Nesta mesma tabela, a motivação da demonstração dos teoremas, a escolha do método de demonstração mais adequado pelos estudantes, o esclarecimento dos passos lógicos e os recursos auxiliares que são utilizados para uma demonstração e a possibilidade do emprego dos teoremas do valor médio em outros conteúdos da Análise Matemática I lhes é atribuída a classificação de 2, o que se traduz como regular.

Apenas a identificação do teorema do valor médio deve aplicar-se em determinados passos da solução de alguns problemas é que tem a classificação de bom.

A interpretação da triangulação metodológica dos indicadores das duas dimensões de todos os instrumentos utilizados, calculando a mediana é regular, o que significa a existência de insuficiências no tratamento dos teoremas do valor médio em Análise Matemática. Isto justifica a elaboração de uma estratégia didáctica para o tratamento dos teoremas do valor médio em Análise Matemática I.

#### Estratégia didáctica para o tratamento de teoremas do valor médio

Estratégia didáctica assume-se a definição apresentada por Castillo e Palacios (2011, p. 18), como sendo um sistema de acções que possibilitam a transformação do processo de ensino-aprendizagem, tendo como base os seus componentes pessoais e não pessoais.

A presente pesquisa assume esta definição de estratégia didáctica por ela estar direccionada ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem num intervalo de tempo concreto.

Objectivo da estratégia. elaborar um conjunto de acções sequenciadas e inter-relacionadas que contribuam na melhoria do tratamento dos teoremas do valor médio em Análise Matemática I

Primeira etapa. Diagnóstico do tratamento de teoremas do valor médio em Análise Matemática I

Acções do professor:

- Discutir metodologicamente com o colectivo de professores de Análise Matemática I os pressupostos a serem avaliados;

- Elaborar os instrumentos para a análise do estado actual do tratamento dos teoremas do valor médio.
- Aplicar os instrumentos elaborados
- Analisar os resultados da avaliação feita.

#### Acções dos estudantes e do grupo

- Participar de forma activa na resposta as questões que são apresentadas no instrumento;
- Analisar os resultados da avaliação feita;

#### Fase 1: Controlo das acções realizadas no diagnóstico

#### Segunda etapa: planificação do tratamento dos teoremas do valor médio.

#### Acções do professor:

- Identificar problemas motivacionais para a introdução dos teoremas;
- Prever a realização minuciosa da análise em que se apresenta e se descreve o teorema;
- Considerar as condições necessárias e as condições suficientes para a solução do problema apresentado;
- Considerar as partes que constituem os teoremas (hipótese e tese);
- Considerar as diferenças das partes e suas possíveis subdivisões;
- Identificar as relações que vinculam a hipótese ou a tese com as conclusões previstas;
- Determinar as bases de orientação para o asseguramento das condições prévias;
- Elaborar o objectivo do tratamento de cada um dos teoremas do valor médio;
- Determinar o teorema do valor médio a ser desenvolvido: Rolle, Lagrange e Cauchy;
- Elaborar uma síntese do fundamento matemático dos autores do teorema do valor médio;
- Determinar a via pela qual poderá ser demonstrado o teorema determinado;
- Identificar os conceitos básicos e necessários para a demonstração dos teoremas do valor médio;
- Planificar o tipo de demonstração que convém aplicar: directa, indirecta, por indução matemática, por redução ao absurdo, apresentação de um contra exemplo.
- Determinar os conhecimentos da Lógica Matemática que serão usados na demonstração dos teoremas;
- Prever as principais diferenças existentes entre os teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy;
- Considerar as características particulares de cada um dos teoremas;

- Considerar o tempo do processo de ensino-aprendizagem da demonstração do teorema do valor médio;
- Determinar as condições necessárias e suficientes para a demonstração dos teoremas;
- Determinar que via (indutiva ou de redução e via dedutiva) será usada para a demonstração do teorema.

Terceira etapa: processo de ensino-aprendizagem do tratamento dos teoremas do valor médio

O processo de ensino-aprendizagem do tratamento de teoremas do valor médio é desenvolvido em quatro fases:

#### 1ª Fase: Orientação do tratamento do teorema

Ocupa um lugar central, a criação de motivos no aluno. A motivação, baseia-se na necessidade de encontrar uma particularidade desconhecida para os estudantes até ao momento. Esta primeira fase do desenvolvimento culmina com a apresentação do carácter da particularidade que se deseja encontrar.

Acções do professor:

- Apresentar uma situação problemática que os estudantes não podem resolver com o conhecimento que dispõem;
- Constatar insuficiências no conhecimento de base que possuem os estudantes;
- Analisar e promover uma reflexão acerca da necessidade e utilidade do tratamento do teorema em questão;
- Apresentar e orientar ao objectivo

Acções dos estudantes:

- Analisar o problema apresentado e identificar as suas insuficiências para a solução da situação problemática apresentada;
- Apresentar as insuficiências que possuem ao darem os primeiros passos para a solução da problemática;
- Reflectir na necessidade da utilização do teorema a ser tratado;
- Seguir as orientações dadas pelo professor para o tratamento do teorema.

#### 2ª Fase: Trabalho com o tratamento dos teoremas

Consiste em encontrar uma ideia para a demonstração (solução do problema) e preparar um plano para sua realização. Requerer a precisão do objectivo da busca, tendo em conta as condições em que esta se vai desenvolver (meios disponíveis e tarefas resolvidas anteriormente). Esta fase corresponde à reflexão sobre os métodos que serão aplicados.

Se for seleccionada a via redutiva, os métodos que farão parte desta são:

- Comparação de magnitudes;
- Considerações de analogia;
- Formação de recíprocos;

- Generalização de casos particulares;
- Indução completa;
- Transformações algébricas.

Para buscar uma ideia e traçar um plano de demonstração utilizam-se recursos heurísticos. Não importa ler e decorar a demonstração, se não se presta suficiente atenção às reflexões que orientam o processo de indagação.

**Nesta fase, as acções do professor e dos estudantes serão as seguintes:**

Acções do professor:

- Promover a reflexão dos conceitos sobre a lógica matemática relacionados com o teorema do valor médio;
- Promover e orientar a análise da composição do teorema, hipótese e tese;
- Propiciar a análise da hipótese e das teses que compõem o teorema do valor médio;
- Oferecer orientações acerca do tratamento do teorema, através de perguntas de orientação;
- Disponibilizar recursos heurísticos para a busca do teorema e traçar o plano de execução;
- Promover, orientar a busca do recíproco e contra recíproco;
- Identificar, promover e propiciar as vias de demonstração para o teorema do valor médio definido;
- Orientar a representação gráfica dos teoremas em tratamento;
- Analisar as insuficiências e erros cometidos anteriormente na demonstração de um teorema ou uma proposição.

Acções dos estudantes e do grupo:

- Reflectir nos conceitos da lógica matemática que são necessários para o tratamento dos teoremas do valor médio;
- Analisar e discutir sobre os elementos que compõem um teorema;
- Identificar qual será a hipótese e a tese que estruturam o teorema do valor médio;
- Assimilar as orientações e analisar as perguntas e encontram a via preliminar o tratamento do teorema;
- Efectuar analogias para executar os passos necessários para o tratamento do teorema;
- Realizar acções para a busca do recíproco e contra recíproco;
- Identificar as vias da demonstração do teorema do valor médio;
- Representar graficamente os teoremas do valor médio para melhor compreensão da demonstração;
- Identificar os erros cometidos ao longo da demonstração.

### **3ª Fase: Apresentação do tratamento (Solução do problema)**

A apresentação do teorema conduz a suposição desejada, através do desenvolvimento da ideia e do plano de tratamento, aplicando os métodos

seleccionados. O resultado desta fase é o enunciado de uma proposição que expressa a regularidade que investiga-se.

A demonstração inicia-se com a motivação de sua necessidade. Alguns argumentos para despertar aos alunos o interesse para provar a veracidade de uma proposição dada baseiam-se na existência de recíprocos falsos, de proposições verdadeiras e na formulação de uma proposição universal, apesar de se analisar somente um número limitado de casos.

O primeiro passo é compreender o enunciado do teorema (que facilmente é alcançável por meio de uma leitura simples). Entre as acções que contribuem na compreensão do conteúdo do teorema destaca-se a análise da sua estrutura lógica. Para tal, existe a necessidade de serem feitas as seguintes perguntas:

- Trata-se de uma proposição universal?
- É uma proposição existencial?
- Esta formulada de maneira implicativa?
- Quais são as suas premissas?

Com essas perguntas em mente é possível, assim, construir uma figura geométrica, um gráfico ou uma tabela de análise.

A exemplo da fase anterior, ela terá acções do professor e também acções dos estudantes, tal como se segue abaixo.

Acções do professor:

- Propor um estudo minucioso do teorema para favorecer a compreensão;
- Promover, orientar a análise da composição do teorema e determinar sua estrutura lógica;
- Apresentar as vias diferentes, para o tratamento do teorema assim como a sua formulação em implicação ou bicondicional;
- Promover a reflexão dos conceitos, outros teoremas, propriedades que estão em correspondência com a premissa e/ou a tese;
- Sugerir a construção de figuras geométricas, gráficos, tabelas para a análise do teorema;
- Estimular a análise das condições necessárias, condições suficientes para o tratamento dos teoremas do valor médio;
- Orientar o uso de matérias informáticos para a representação gráfica de funções em que se aplicam os teoremas do valor médio;
- Promover o processo de comunicação entre estudantes-estudantes, estudantes-professores, e estudantes-grupo;
- Orientar, estimular e promover a aplicação do teorema do valor médio para a resolução de problemas;
- Oferecer ajuda e orientar a realização de resumos sobre os teoremas do valor médio, sua composição, suas partes e conhecimentos de base para a execução do tratamento;
- Promover a fundamentação de acordo a demonstração;
- Estimular a correcção de erros no caso de insuficiências de fundamentação.



### Acções dos estudantes

- Realizar o estudo detalhado do teorema do valor médio de modos a ajudá-los na compreensão do mesmo;
- Por meio da análise da composição do teorema, determinar a sua estrutura lógica;
- Utilizar as diferentes vias para o tratamento do teorema tendo em conta a formulação em aplicação;
- Reflectir sobre conceitos, propriedades e outros teoremas que estão em correspondência com a premissa, isto é, a tese;
- Construir figuras geométricas, gráficos e tabelas como meios auxiliares para a análise do teorema;
- Analisar as condições necessárias e suficientes para o tratamento dos teoremas do valor médio;
- Representar graficamente funções em que se aplicam o teorema do valor médio com o auxílio de matérias informáticas;
- Trocar ideias e partilhar informações necessárias para o tratamento de teoremas do valor médio;
- Aplicar os teoremas do valor médio na solução de problemas;
- Realizar resumos dos teoremas do valor médio, analisar a composição das suas partes e reforçar os conhecimentos de base para a execução do seu tratamento;
- Fundamentar as suas demonstrações;
- Corrigir os seus erros quando forem verificadas insuficiências na fundamentação.

#### 4ª Fase: Avaliação do tratamento e da via

Faz-se uma análise retrospectiva dos métodos aplicados com a finalidade de analisar criticamente a via utilizada para a busca do teorema e daí reflectir sobre a necessidade de aplicar uma demonstração. Eventualmente, realizase esta fase em outras análises sobre o enunciado da proposição e o lugar que este ocupa dentro da teoria estudada.

Em seguida apresentam-se um conjunto de orientações metodológicas que podem ser úteis para o trabalho com a estratégia, para compreender o problema, para encontrar a via de solução e da demonstração.

## CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS PARA TRABALHAR COM A ESTRÁTEGIA

Para que o trabalho com a presente estratégia tenha êxitos é necessário a existência de um trabalho de equipa aliado ao diálogo para proporcionar a coesão entre o professor, estudantes e o grupo como um todo para, no final, todos terem a oportunidade de trocar ideias, sustentar pontos de vistas divergentes e emitir pareceres favoráveis ou desfavoráveis.

A actividade docente permitirá que os estudantes formulem perguntas e tenham tempo suficiente para reflectir nelas.

Durante o tratamento do conteúdo, tanto a nível teórico como a nível de procedimento, para sua compreensão e estudo deve ser utilizada, como

referência, a análise das condições necessárias, condições suficientes e condições necessárias e suficientes e os seus procedimentos.

Por outro lado, para a introdução do conceito de derivada de funções de uma variável real, por exemplo, é salutar partir dos problemas geométricos.

Dentro dos conhecimentos que são sistematizados ao início de cada unidade temática e aqueles que são introduzidos como novos conteúdos, devem ser feito o tratamento didáctico dos conceitos matemáticos e das respectivas definições, as proposições e aos procedimentos de solução, dada a importância que tem o domínio de uma base conceitual sólida no desenvolvimento das habilidades matemáticas.

No processo para a obtenção de um teorema pode ser utilizada a via da dedução, através da aplicação de regras de inferência lógica, ou mediante a via de redução, por meio da aplicação de analogias.

Quanto aos métodos de demonstração, é necessário salientar que por mais que estejam presentes todos, a demonstração directa de proposições sob a forma de “se... então...”, é a mais usual.

Diante de uma exigência há que se ter em conta o que se pede, quanta informação já se tem do que é pedido, o que é necessário para responder, trata-se de uma definição, de um teorema, de um princípio, de uma lei ou então de uma propriedade. Em caso afirmativo, como é que estes elementos relacionam-se com o que se pede, saber se o que está a desenvolver é feito de forma correcta e, senão, que erros foram cometidos para a posterior corrigi-los.

Ao determinar a via de demonstração é preciso que sejam feitas as seguintes perguntas:

- Por que é feita desta forma?
- Anteriormente, já foi feito algo parecido?
- Esta orientação ajusta-se nesta situação? Relaciona-se com o que foi dado?
- Existe uma relação entre o desejado e o desconhecido?
- A ausência de relações significa efectuar transformações para chegar a algo desconhecido?
- O que foi feito até ao momento, caso esteja certo, deve ser verificado?
- Este procedimento ainda não foi desenvolvido, será que existe outra forma de fazê-lo?
- Existe a necessidade de verificar cada passo?

Quando as acções forem desenvolvidas pelo grupo, diante de uma proposta de solução apresentada por um estudante, é necessário prestar atenção ao motivo da utilização desta via e daí reflectir no que foi pensado anteriormente para que fosse possível chegar a esta conclusão, quanto já foi mencionado sobre o assunto.

## CONCLUSÕES

Com base ao estudo teórico e metodológico efectuado foi possível sistematizar os fundamentos que sustentam o processo de ensino-aprendizagem como um todo, reflectir sobre o processo de ensino-aprendizagem da Análise Matemática I, destacar o papel desempenhado por esta na formação de professores, tecer considerações pertinentes acerca do seu surgimento e evolução histórica. Também permitiram efectuar uma abordagem pormenorizada sobre como é feito o tratamento de teoremas no ensino desta cadeira e apresentar os conceitos básicos para a interpretação dos seus teoremas fundamentais.

O diagnóstico realizado permitiu caracterizar o estado actual do tratamento de teoremas do valor médio em Análise Matemática I, identificando-se como aspecto positivo as orientações metodológicas que os documentos normativos apresentam para o tratamento dos teoremas do valor médio em Análise Matemática I. As principais insuficiências estão no processo mediante o qual dirigem-se as acções dos alunos para estabelecer uma suposição, com a aplicação de recursos heurísticos, isto é, a busca do teorema e também no processo orientado na procura da ideia da demonstração e na apresentação de um plano de solução de acordo com os meios disponíveis.

A estratégia didáctica elaborada conta com um conjunto de acções sequenciadas e inter-relacionadas do professor, dos estudantes e do grupo que contribuem para a melhoria do tratamento dos teoremas do valor médio em Análise Matemática I, no primeiro ano do curso de Ensino da Matemática do ISCED-Huambo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arnaiz Rey, A., de Musholovela, J. da S. A., & González Fernández, A. (2019). *A virtualização no processo de ensino - aprendizagem das ciências exactas. RAC: Revista Angolana De Ciências*, 1(1), 117-135.
- Ballester, S., & et al. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación.*
- Cellard, A. (2012). Análise Documental. In J. Poupart, J.-P. Deslauriers, L. H. Groulx, A. Lapperrière, R. Mayer, & Á. Pires, *A pesquisa Qualitativa*. Petrópolis- Rio de Janeiro: Vozes.
- Cordero, M. T., & Moreno, C. B. (2008). *Algebra*. Colômbia: Universidad de la Frontera.
- Delfino, B. C. (2017). *Estrategia didáctica para el desarrollo de habilidades matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Análisis Matemático I. (Tese Doutoral, UCPEJV).*
- Freitas, R. D., & Viana, P. (2012). *Mini curso de Métodos de Provas. II Colóquio da Matemática da Região do Sull- 24 a 28 de Abril de 2012. Londrina, PR: Universidade estadual de Londrina.*
- Jiménez, M. H. (2000). *Propuesta para mejorar la referencia y aplicación de los saberes del Análisis Matemático en la formación de profesores. La Habana: s.ed.*

- Jungk, W. (1982). *Conferencias sobre metodología de la Enseñanza de la Matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.
- López, S. I. (s.d). *Operacionalización de Variables*. Colômbia: Universidad de Caldas.
- Martins, A., Salomé, H., Silva, L. d., & Pereira, J. C. (2018). *Matemática a preparar o exame 2018*. Lisboa: Raiz Editora.
- Milián, M. H. (2013). *Didáctica del Análisis Matemático en la Formación Profesional*. La Habana: UCPEJV
- Prodanov, C. C., & Freitas, E. C. (2013). *Metodologia do Trabalho Científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico*. Novo Hamburgo: Universidade Freevale.
- Sampedro Ruiz, R., Espindola Artola, A., Mola Reyes, C., & Sobrado Cardenas, E. (2019). *Sistema de ações para garantir a qualidade da comunicação em matemática nos estudantes universitários*. RAC: Revista Angolana De Ciências, 1(2), 243 - 254.
- Santos, A. (2018). *IBM SPSS como Ferramenta de Pesquisa Quantitativa*. Disponível em: <https://www.pucsp.br/sites/default/files/download/posgraduacao/programas/administracao/IBM-SPSS-como-ferramenta%20de-pesquisa-quantitativa-alexandra-santos.pdf>
- Santos, S. C., Delfino, B. C., & Sanganho, A. S. (2019). Demonstração de Proposições: Um instrumento fundamental para garantir a base na cadeira de Teoria dos Números do Instituto Superior de Ciências de Educação do Huambo. *Revista Órbita Pedagógica*. 7(1). 1-12.
- Sarrico, C. (2015). *Análise Matemática: Leituras e exercícios*. Lisboa: Gradiva.
- Sigarreta, J. M., Locaia, E., & Bermudo, S. (1996). Metodología para el tratamiento de los problemas matemáticos. Disponível em: <https://mydokument.com/metodologia-para-el-tratamiento-de-los-problemas-matematicos.html>
- Silva. (2017). *Teorema do valor médio e aplicações*. (Monografia de licenciatura, Universidade Estadual de Paraíba). Disponível em: [http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/13443/1/PDF %20-%20Paula %20Maria%20Gomes%20da%20Silva.pdf](http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/13443/1/PDF%20-%20Paula%20Maria%20Gomes%20da%20Silva.pdf)
- Sousa, J. B. M. (2016a). *Computadores no Ensino*. 1ra edição. Saarbrecken: Novas Edições Académicas
- Sousa, J. B. M. (2016b). Impacto das tecnologias de informação e comunicação no Instituto Superior de Ciências da Educação do Huambo, Angola. *REFCalE, Revista Formación y Calidad Educativa*. 4( 3), 72-76
- Sousa, J. B. M. (2016c). Orientações metodológicas para a utilização do Geogebra nas aulas de Geometria Descritiva. *Revista Magazine de las Ciencias*. 1(1), 61-66
- Sousa, J. B. M. (2016d). *Sistema de ações para favorecer a utilização do software derive nas aulas de Matemática*. *REFCalE, Revista Formación y Calidad Educativa*. 4( 2), 63-70
- Zilmer, W. (1981). *Complementos de Metodología de la Enseñanza de la*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.