Scientia Et Technica
ISSN: 0122-1701
scientia@utp.edu.co
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia

Ávila, J.; Grajales, A.; Perdomo-Hernández, L. C.
El orden de especialización en estructuras débiles generalizadas
Scientia Et Technica, vol. 24, núm. 4, 2019, Julio-Septiembre, pp. 628-635
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia

Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84961238012

Cómo citar el artículo
Número completo
Más información del artículo
Página de la revista en redalyc.org

Sistema de Información Científica Redalyc
Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

The specialization order in generalized weak structures

El orden de especialización en estructuras débiles generalizadas

J. Ávila; A. Grajales; L. C. Perdomo-Hernández

***Abstract*— In topology it is well-known that it is possible to move from topology to partial ordered sets and vice versa, using the specialization order and Alexandrov's topology among others. This relationship has allowed to obtain important theoretical results, which have been generalized when considering preorder relations or better yet binary relations. Following the classical methodology of mathematical works, that is, using theorems, propositions, corollaries, examples and counterexamples, in this work we develop a theory of the specialization order in generalized weak structures. We relate several topological concepts with ordered set concepts and study the set of T_0 structures on the set X whose specialization order coincides with an initial order $\leq$. Finally we prove that this set has as a maximum element Alexandroff's topology, but in general it does not have a minimum element.**

***Index Terms*— generalized weak structure, specialization order, topological space.**

***Resumen*— En topología es bien conocido que podemos pasar de espacios topológicos a conjuntos ordenados y viceversa usando el orden de especialización y la topología de Alexandrov, entre otras. Esta relación ha permitido obtener importantes resultados teóricos, los cuales se han generalizado al considerar relaciones de preorden o mejor aún relaciones binarias. Siguiendo la metodología clásica de los trabajos en matemáticas, es decir usando teoremas, proposiciones, corolarios, ejemplos y contraejemplos, en este trabajo desarrollamos una teoría del orden de especialización en estructuras débiles generalizadas. Relacionamos varios conceptos topológicos con conceptos de conjuntos ordenados y estudiamos el conjunto de estructuras T_0 sobre el conjunto X cuyo orden de especialización coincide con un orden inicial $\leq$. Finalmente probamos que este conjunto tiene como elemento máximo a la topología de Alexandroff $\tau_{\leq}$, pero en general no tiene elemento mínimo.**

***Palabras claves*— espacio topológico, estructura débil generalizada, orden de especialización.**

Este manuscrito fue enviado el 23 de enero de 2019 y aceptado el 18 de noviembre de 2019

Este trabajo fue parcialmente financiado por la Oficina de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad del Tolima. Proyecto titulado "Algunas nociones topológicas en estructuras débiles generalizadas" código 310112.

J. Ávila, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia (e-mail: javila@ut.edu.co).

A. Grajales, Departamento de Matemáticas, Colegio Sapiencia, Medellín, Colombia (e-mail: manuzuzu1996@gmail.com).

L. C. Perdomo-Hernández, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia (e-mail: lcperdomoh@ut.edu.co).

I. Introducción

UN tema clásico en matemáticas desde comienzos del siglo XX y hasta la actualidad ha sido la relación entre topología y orden. Varias de estas relaciones aparecieron en los trabajos de P. Alexandroff en 1935 [4] y A. W. Tucker en 1936 [14]. Ellos describieron una correspondencia uno a uno entre las topologías principales y los órdenes parciales. Así mismo, F. Lorrain en 1969 [12] relacionó los espacios topológicos saturados, con los conjuntos preordenados. Esto lo hizo usando isomorfismos de categorías e isomorfismos de retículos completos, obteniendo resultados sobre la conexidad, convergencia y continuidad en dichos espacios. También, S. Andima y W. J. Thron en 1978 [6], demostraron que una serie de propiedades topológicas (axiomas bajos de separación) son inducidas por el orden y mostraron algunas características nuevas sugeridas por las propiedades de orden.

Dado un espacio topológico (X,τ), sobre X se define la relación $\sim$ como $x \sim y$ si y solo si $x \in \overline{\{y\}}$, la cual resulta ser un preorden. Si el espacio es T_0 es un orden, el cual se conoce como *orden de especialización*.

Este orden de especialización es una herramienta muy útil en topología, pues gracias a él se han introducido nuevas clases de espacios topológicos y se han relacionado nociones topológicas con nociones de orden y viceversa (ver [1], [4], [6], [12]). Por este motivo resultó natural estudiar varios de estos resultados, en contextos más generales, es decir, estudiar topologías asociadas a relaciones y viceversa. Dichas relaciones podrían ser de preorden o algún otro tipo de relación binaria (ver [2], [3], [5], [11]).

Note que, en lo dicho anteriormente, se está tomando una relación más general sobre el conjunto y luego se asocian algunas topologías correspondientes, teniendo en cuenta lo conocido para relaciones de orden. Pero otro camino sería considerar una noción más general de espacio topológico y determinar si es posible asociar un orden o algún otro tipo de relación, definida análogamente al orden de especialización.

El estudio de estructuras más generales que la topológica ha dado origen a numerosas investigaciones. Maki en 1996 [13] definió las *estructuras minimales* como colecciones que contienen al conjunto vacío y a todo el espacio. Donado en 1999 [10] hizo un estudio muy completo e interesante sobre nociones topológicas en colecciones. Császár en 2002 [8] consideró colecciones cerradas para uniones, las cuales llamó *topologías generalizadas*. También Császár en 2011 [9] introdujo las *estructuras débiles*, las cuales son colecciones de conjuntos conteniendo al conjunto vacío sin otras restricciones. Recientemente, Ávila y Molina en 2012 [7] introdujeron las *estructuras débiles generalizadas*, las cuales son colecciones cualesquiera de subconjuntos. Todos estos conceptos han permitido generalizar o extender muchos resultados topológicos a estos nuevos contextos.

II. Estructuras Débiles Generalizadas

En esta sección presentamos algunos conceptos topológicos, pero en un ambiente más general como lo son las estructuras débiles generalizadas [7].

Definición 2.1. Una estructura débil generalizada (o estructura) sobre el conjunto no vacío X, es una clase no vacía g de subconjuntos de X.

Al par (X, g) donde X es un conjunto y g una estructura sobre X lo denominaremos espacio. Los elementos de g se llamarán $g-$abiertos y el complemento de un $g-$abierto se denomina $g-$cerrado.

Definición 2.2. Sean (X, g) un espacio y $A \subseteq X$. Entonces:

1. $x \in X$ es punto interior de A si existe un $g-$abierto U tal que $x \in U \subseteq A$. El $g-$interior de A se denota $i_g(A)$.
2. $x \in X$ es un punto clausura de A si para cada $g-$abierto U con $x \in U$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$. La $g-$clausura de A se denota $c_g(A)$.
3. $x \in X$ es un punto frontera de A si para cada $g-$abierto U con $x \in U$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap A^c \neq \emptyset$. La $g-$frontera de A se denota $b_g(A)$.
4. $x \in X$ es un punto exterior de A si existe un $g-$abierto U tal que $x \in U \subseteq A^c$. El $g-$exterior de A se denota $e_g(A)$.

Definición 2.3. Sea (X, g) un espacio. El conjunto $A \subseteq X$ se llama g −denso si $c_g(A) = X$.

El siguiente resultado muestra algunas propiedades que cumple la $g-$clausura en las estructuras débiles generalizadas [7].

Proposición 2.4. Sean (X, g) un espacio y $A, B \subseteq X$. Se tienen las siguientes propiedades*:*

1. $A \subseteq c_g(A)$.

2. Si $A^c \in g$, entonces $c_g(A) = A$.

3. Si $A \subseteq B$, entonces $c_g(A) \subseteq c_g(B)$.

4. $c_g(c_g(A)) = c_g(A)$.

En [7] se prueba que la $g-$clusura de un conjunto A es igual a la intersección de todos los conjuntos $g-$cerrados que contienen a A. De esta forma si g es cerrada para uniones, entonces la $g-$clausura de un conjunto es un $g-$cerrado. Además, se obtiene el siguiente resultado bastante útil en algunos casos.

Proposición 2.5. Sean (X, g) un espacio y $A \subseteq X$. Si g es cerrada para uniones, entonces A es $g-$cerrado, si y sólo si, $c_g(A) = A$.

Demostración. Si A es un conjunto $g-$cerrado, entonces A es el menor conjunto $g-$cerrado que se contiene a sí mismo, luego la intersección de los $g-$cerrados que contienen a A es A. Es decir, $c_g(A) = A$. Por otro lado, si g es cerrada para uniones, entonces $c_g(A)$ es un conjunto $g-$cerrado y como $c_g(A) = A$ se tiene que A es $g-$cerrado. □

Es claro que las estructuras cerradas para uniones son las mismas topologías generalizadas [8].

Proposición 2.6. Sean (X, g) un espacio y $x, y \in X$. Si $y \in c_g(\{x\})$, entonces $c_g(\{y\}) \subseteq c_g(\{x\})$.

Demostración. Si $y \in c_g(\{x\})$, entonces $\{y\} \subseteq c_g(\{x\})$. Por 3 y 4 de la Proposición 2.4 se tiene que $c_g(\{y\}) \subseteq c_g(c_g(\{x\}))$. Es decir, $c_g(\{y\}) \subseteq c_g(\{x\})$. □

En adelante, $c_g(\{x\})$ será denotada como $c_g(x)$.

III. Resultados

A. El Orden de Especialización

En esta sección mostramos que a los espacios $g - T_0$ puede asociarse un orden naturalmente y se prueban varios resultados análogos a los obtenidos en el caso topológico.

Proposición 3.1.1. Sean g una estructura sobre X y $\leq_g$ la relación sobre X definida por $x \leq_g y$, si y sólo si, $x \in c_g(y)$. Entonces $\leq_g$ es una relación de preorden.

Demostración. Sean $x, y, z \in X$. Como $x \in c_g(x)$, entonces $x \leq_g y$. Ahora si $x \leq_g y$ e $y \leq_g z$, entonces $x \in c_g(y)$ e $y \in$

$c_g(z)$ y por la Proposición 2.6, se tiene que $c_g(y) \subseteq c_g(z)$. Así, $x \in c_g(z)$ y por tanto $x \leq_g z$. □

Definición 3.1.2. Decimos que el espacio (X,g) es $g - T_0$, si para cada par de puntos distintos $x,y \in X$, existe un g −abierto U que contiene a uno de los puntos y no al otro.

De igual manera que en el caso topológico, si el espacio es $g - T_0$ la relación $\leq_g$ es de orden, como se muestra a continuación.

Proposición 3.1.3. Sea (X,g) un espacio. La relación $\leq_g$ es de orden, si y sólo si, X es $g - T_0$.

Demostración. Sean $x,y \in X$ distintos. Pueden suceder los siguientes casos:

1. Si $x \nleq_g y$, entonces $x \notin c_g(y)$. Luego existe un g −abierto que contiene a x y no contiene a y.

2. Si $y \nleq_g x$, entonces como en el caso anterior se llega a que existe un g −abierto que contiene a y y no contiene a x.

3. Si $x \nleq_g y$ y $y \nleq_g x$, entonces llegamos a uno de los casos anteriores.

Por tanto X es $g - T_0$.

Para el recíproco basta probar que la relación $\leq_g$ es antisimétrica. Sean $x,y \in X$ tales que $x \leq_g y$ y $y \leq_g x$. Si $x \neq y$ entonces todo g −abierto que contiene a x contiene a y y todo g −abierto que contiene a y contiene a x. Es decir, X no es $g - T_0$, que es contradictorio. Luego $x = y$ y así $\leq_g$ es antisimétrica. □

Ejemplo 3.1.4. Sean $X = \{a,b,c,d,e,f,t,h,i,j\}$ y $g = \{X,\{j\},\{i,j\},\{h,j\},\{t,h,j\},\{f,h,i,j\},\{e,f,h,i,j\}\} \cup \{\{d,f,t,h,i,j\},\{c,d,e,f,t,h,i,j\},\{b,d,f,t,h,i,j\}\}$. Es claro que X es $g - T_0$. Nótese que $c_g(a) = \{a\}$, $c_g(b) = \{a,b\}$, $c_g(c) = \{a,c\}$, $c_g(d) = \{a,b,c,d\}$, $c_g(e) = \{a,c,e\}$, $c_g(f) = \{a,b,c,d,e,f\}$, $c_g(t) = \{a,b,c,d,t\}$, $c_g(h) = \{a,b,c,d,e,f,t,h\}$, $c_g(i) = \{a,b,c,d,e,f,i\}$, $c_g(j) = X$. Luego se tiene el siguiente conjunto ordenado:

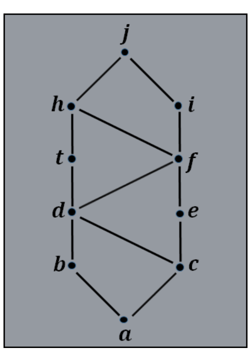

Fig. 1. Conjunto ordenado asociado al espacio del Ejemplo 3.1.4.

Definición 3.1.5. Un espacio (X,g) es $g - T_1$, si para cada par de puntos distintos $x,y \in X$, existen g −abiertos U,V tales que $x \in U$, $y \notin U$ y $x \notin V$, $y \in V$.

Proposición 3.1.6. Sea el espacio (X,g). La relación $\leq_g$ es de igualdad, si y sólo si, X es $g - T_1$.

Demostración. Sean $x,y \in X$ distintos. Entonces $x \nleq_g y$ y $y \nleq_g x$. Luego $x \notin c_g(y)$ e $y \notin c_g(x)$. Esto quiere decir, que existen g −abiertos U,V tales que $x \in U$ e $y \notin U$ y $x \notin V$ e $y \in V$. Es decir, X es $g - T_1$.

Sean $x,y \in X$ tales que $y \leq_g x$. Si $y \neq x$ entonces por hipótesis existe un g −abierto U tal que $y \in U$ y $x \notin U$. Es decir $y \notin c_g(x)$ y así $y \nleq_g x$, lo cual es contradictorio. Por tanto $y = x$. □

Ejemplo 3.1.7. Sea $X = \mathbb{N}$ y $= \{\{0\},\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\},\ldots\}$, entonces X es $g - T_1$. Para determinar el conjunto ordenado asociado a esta estructura note que $c_g(0) = \{0\}$, $c_g(1) = \{1\}$, $c_g(2) = \{2\}$ y en general $c_g(n) = \{n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente tenemos el siguiente conjunto ordenado.

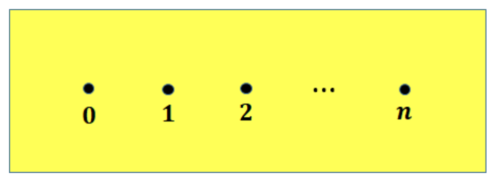

Fig. 2. Conjunto ordenado asociado al espacio del Ejemplo 3.1.7.

La siguiente proposición relaciona algunos elementos especiales de los conjuntos ordenados con nociones topológicas pero para estructuras débiles generalizadas. Como puede observarse son análogas a las obtenidas para el caso topológico [14].

Proposición 3.1.8. Sea X un espacio $g - T_0$ y $\leq_g$ su orden de especialización. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. Sea M la intersección de todos los g −cerrados no vacíos. Entonces $b \in X$ es el elemento mínimo de $(X,\leq_g)$, si y solo si, $b \in M$.

2. El elemento $m \in X$ es minimal en $(X,\leq_g)$, si y solo si, $c_g(m) = \{m\}$.

3. El elemento $a \in X$ es el máximo de $(X,\leq_g)$, si y solo si, $\{a\}$ es g −denso.

4. Si para $t \in X$ el conjunto $\{t\}$ es un g −abierto, entonces t es maximal en $(X,\leq_g)$. El recíproco se tiene si X es finito y g es cerrada para intersecciones.

5. Si X es finito, entonces el conjunto A de todos los elementos maximales de $(X,\leq_g)$, es g −denso. Además si g es cerrada

para intersecciones, entonces A es el menor de los conjuntos g −densos.

Demostración. 1. Supongamos que $b \notin M$. Entonces existe un g −cerrado no vacío F tal que $b \notin F$. Así $b \in F^c$ que es un g −abierto y para $t \in F$ se tiene que $b \notin c_g(t)$. Es decir, $b \nleq_g t$ y entonces b no es el elemento mínimo de $(X, \leq_g)$.

Recíprocamente, si b no es el mínimo de $(X, \leq_g)$ entonces existe $t \in X$ tal que $b \nleq_g t$. Así $b \notin c_g(t)$ y entonces existe un g −abierto V con $b \in V$ y $V \cap \{t\} = \emptyset$. Luego $b \notin V^c$ que es un g −cerrado no vacío y esto implica que $b \notin M$.

2. Basta observar que $c_g(m) \neq \{m\}$, si y solo si, existe $t \neq m$ tal que $t \in c_g(m)$, si y solo si, existe $t \neq m$ con $t \leq_g m$, si y solo si, m no es minimal en $(X, \leq_g)$.

3. Basta observar que a es máximo, si y solo si, $b \leq_g a$ para todo $b \in X$, si y sólo si, $b \in c_g(a)$ para todo $b \in X$, si y solo si, $\{a\}$ es g −denso.

4. Sea $y \in X$ tal que $t \leq_g y$. Si $y \neq t$, tenemos que $t \notin c_g(y)$ ya que $\{t\}$ es g −abierto. Luego $y = t$ y así t es maximal en $(X, \leq_g)$.

Para el recíproco, sean $x \in X$ un elemento maximal y $\{x\}^c = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Entonces $x \nleq_g y_i$ para cada y_i, $i = \{1,2, \dots, n\}$. Es decir, existen g −abiertos V_i, $i = \{1,2, \dots, n\}$ tales que $x \in V_i$ y $y_i \notin V_i$. Así $\{x\} = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ es un conjunto g −abierto por hipótesis.

5. Sea A el conjunto de los elementos maximales de $(X, \leq_g)$ y sea $y \in X$. Si y es maximal, entonces $y \in A \subseteq c_g(A)$. Si y no es maximal, entonces existe un $x \in X$ tal que $y \leq_g x$, con x maximal. Luego $y \in c_g(x) \subseteq c_g(A)$. Así todo elemento de X es un elemento de $c_g(A)$. Es decir, A es g −denso.

Finalmente, si $B \subseteq X$ y $A \nsubseteq B$, entonces existe $x \in A$ con $x \notin B$. Por el ítem 4, el conjunto $\{x\}$ es g −abierto y esto implica que $x \notin c_g(B)$. Es decir, B no es g −denso. □

Note que el conjunto M del ítem 1 de la Proposición 3.8 es vacío o unitario. En efecto, supongamos que M es no vacío y que $x, y \in M$ con $x \neq y$. Como X es $g - T_0$ existe un g −abierto que contiene a un punto y no al otro. Supongamos que existe $V \in g$ tal que $x \in V$ y $y \notin V$. Entonces V^c es un g −cerrado y $x \notin V^c$. Así $x \notin M$ lo cual es contradictorio.

Ya que el máximo de un conjunto ordenado, cuando existe, es único entonces el ítem 3 de la Proposición 3.1.8 implica que en los espacios $g - T_0$ existe a lo más un punto g −denso.

Si el conjunto X es finito y la colección g es cerrada para intersecciones y uniones (es decir g es una topología), entonces el ítem 2 implica que el conjunto de elementos minimales de $(X, \leq_g)$ es cerrado. Y el ítem 4 implica que el conjunto de elementos maximales de $(X, \leq_g)$ es abierto.

En la segunda parte de los ítem 4 y 5 de la Proposición 3.1.8, la condición de que la colección g sea cerrada para intersecciones, es una condición necesaria pero no suficiente como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.9. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $g = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{d\}\}$. Es claro que (X, g) es una estructura $g - T_0$. Veamos cual es el conjunto ordenado asociado a este espacio. Nótese que $c_g(a) = \{a, b, c\}$, $c_g(b) = \{b\}$, $c_g(c) = \{c\}$, $c_g(d) = \{d\}$. Se tiene entonces el siguiente conjunto ordenado:

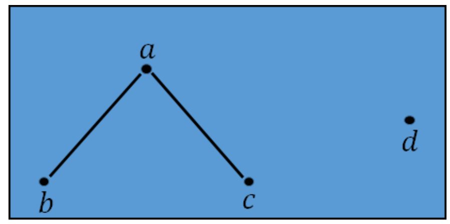

Fig. 3. Conjunto ordenado asociado al espacio del Ejemplo 3.1.9

Como se puede ver, el elemento a es maximal en $(X, \leq_g)$ pero el conjunto $\{a\}$ no es g −abierto. Además el conjunto $\{b, c, d\}$ es g −denso pero no contiene al conjunto de elementos maximales $\{a, d\}$. Note finalmente que el elemento c es minimal en $(X, \leq_g)$, pero $\{c\}$ no es g −cerrado.

De acuerdo a lo explicado anteriormente podemos concluir que el orden de especialización puede verse como un puente entre las estructuras $g - T_0$ sobre X y los órdenes sobre X. Esto permite plantear el siguiente problema análogo al caso topológico.

Dada una relación de orden $\leq$ sobre X, ¿cuáles son las estructuras T_0 sobre X cuyo orden de especialización coincide con el orden inicial $\leq$?. Esto se ilustra en la siguiente Figura.

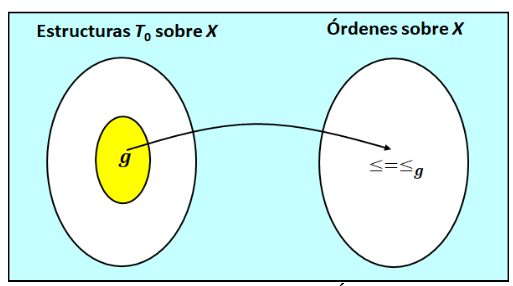

Fig. 4. Estructuras T_0 vs. Órdenes.

En las secciones siguientes se mostrarán algunas situaciones, en general distintas, que solucionan el problema anterior.

B. *Estructura $g_\leq$*

En esta sección mostramos una estructura $g - T_0$ sobre el conjunto X, cuyo orden de especialización coincide con un orden inicial $\leq$ sobre X. Además, caracterizamos algunas propiedades de esta estructura en términos del orden.

Recordemos que si $(Y, \preccurlyeq)$ es un conjunto ordenado, entonces para $y \in Y$ definimos los conjuntos $\uparrow y = \{t \in Y : y \preccurlyeq t\}$ y $\downarrow y = \{t \in Y : t \preccurlyeq y\}$.

Definición 3.2.1. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Llamaremos $g_{\leq}$ a la estructura dada por la colección $g_{\leq} = \{\uparrow x : x \in X\}$.

Es claro que los $g_{\leq}$ $-$abiertos de $g_{\leq}$ son todos los elementos de la forma $\uparrow x$ para cada $x \in X$. Sin embargo no siempre se tiene que la unión de $g_{\leq}$ $-$abiertos sea un $g_{\leq}$ $-$abierto**,** como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.2. Sea $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, con el orden dado por el siguiente diagrama de Hasse.

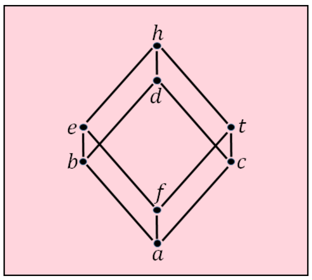

Fig. 5. Conjunto ordenado del Ejemplo 3.2.2

Entonces $g_{\leq}$ está dada por $g_{\leq} = \big\{X, \{h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{t, h\}, \{b, d, e, h\}, \{c, t, d, h\}, \{f, e, t, h\}\big\}$ y claramente esta colección no es cerrada para uniones.

En la siguiente proposición mostramos que la colección $g_{\leq}$ es una solución al problema planteado al final de la sección anterior.

Proposición 3.2.3. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y consideremos la estructura $g_{\leq}$ sobre X. Entonces:

1. $(X, g_{\leq})$ es un espacio $g - T_0$.

2. El orden de especialización para $g_{\leq}$ es $\leq$.

Demostración. 1. Sean $x, y \in X$ distintos. Pueden suceder los siguientes casos:

a. Si $x \leq y$ se tiene que $y \in \uparrow y$ que es g $-$abierto y $x \notin \uparrow y$.

b. Si $y \leq x$ entonces hallamos el g $-$abierto $\uparrow x$ que contiene a x y no a y.

c. Si $x \nleq y$ e $y \nleq x$, entonces se llega a uno de los casos anteriores.

En conclusión existe un abierto que contiene a un punto y no al otro. Es decir, $(X, g_{\leq})$ es $g - T_0$.

2. Probemos que $x \leq_{g_{\leq}} y$, si y sólo si, $x \leq y$.

$\Rightarrow$ Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq_{g_{\leq}} y$. Entonces $x \in c_{g_{\leq}}(y)$, lo que quiere decir, que todo $g_{\leq}$ $-$abierto que contiene a x contiene también a y. En particular, $x \in \uparrow x$ y entonces $y \in \uparrow x$. Es decir, $x \leq y$.

$\Leftarrow$ Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ y sea $\uparrow z$ un $g_{\leq}$ $-$abierto que contiene a x. Entonces $x \in \uparrow z$ y como $x \leq y$, tenemos que $y \in \uparrow z$. Es decir, todo $g_{\leq}$ $-$abierto que contiene a x contiene a y. Luego $x \in c_{g_{\leq}}(y)$ y así $x \leq_{g_{\leq}} y$. □

Note que si tomamos la topología $\tau_{\leq} = \langle g_{\leq} \rangle$ entonces $\tau_{\leq}$ es una topología T_0. Esta topología $\tau_{\leq}$ es llamada **Topología de Alexandroff** y puede probarse que es la mayor topología T_0 sobre X, cuyo orden de especialización coincide con el orden inicial $\leq$ (ver [1]).

En la siguiente proposición se caracterizan el operador interior y clausura en el espacio $(X, g_{\leq})$, en términos del orden de especialización. Y también se relaciona el orden con la frontera y el exterior. Resultados análogos a los obtenidos en el caso topológico [14].

Proposición 3.2.4. Sean $\leq$ el orden de especialización de $(X, g_{\leq})$ y $A \subseteq X$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $i_{g_{\leq}}(A) = \{x \in A : x \leq y$ implica $y \in A\}$.

2. $c_{g_{\leq}}(A) = \{y \in X : y \leq z$ para algún $z \in A\}$.

3. Si $x, y \in X$ con $x < y$ entonces $x \in b_{g_{\leq}}(\uparrow y)$.

4. Si $x \nleq z$ para cada $z \in (\uparrow y)$, entonces $x \in e_{g_{\leq}}(\uparrow y)$.

Demostración. 1. Sean $x \in i_{g_{\leq}}(A)$ y $y \in X$ tal que $x \leq y$. Entonces existe un $g_{\leq}$ $-$abierto G tal que $x \in G \subseteq A$. Ya que $x \in c_{g_{\leq}}(y)$, se tiene que todo $g_{\leq}$ $-$abierto que contiene a x también contiene a y. Así $y \in G$ y por tanto $y \in A$.

Por otro lado, sea $x \in A$ con la condición que para cada $y \in X$ con $x \leq y$ se tiene que $y \in A$. Es claro que el conjunto $\uparrow x$ es g $-$abierto y $x \in \uparrow x$. Ahora si $t \in \uparrow x$ entonces $x \leq t$ y esto implica que $t \in A$. Por tanto $x \in \uparrow x \subseteq A$ y así $x \in i_{g_{\leq}}(A)$.

2. Si $t \in c_{g_{\leq}}(A)$, entonces $\uparrow t \cap A \neq \emptyset$. Si $z \in \uparrow t \cap A$ entonces $t \leq z$ y $z \in A$.

Por otro lado, sean $y \in X$ y $z \in A$ con $y \leq z$. Si G es un $g_{\leq}$ $-$abierto con $y \in G$, entonces $z \in G$ y así $G \cap A \neq \emptyset$. Es decir, $y \in c_{g_{\leq}}(A)$.

3. Sean $x < y$ y G un $g_{\leq}$ $-$abierto con $x \in G$. Entonces, $y \in G$ y así $G \cap \uparrow y \neq \emptyset$. Además, como $x \in (\uparrow y)^c$ se tiene que $G \cap (\uparrow y)^c \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in b_{g_{\leq}}(\uparrow y)$.

4. Es claro que $x \in \uparrow x$ y que $\uparrow x$ es un $g_{\leq}$ −abierto. Además por hipótesis tenemos que si $t \in \uparrow x$ entonces $t \notin \uparrow y$. Es decir, $\uparrow x \subseteq (\uparrow y)^c$ y así $x \in i_{g_{\leq}}(\uparrow y)^c = e_{g_{\leq}}(\uparrow y)$.

C. Colecciones $h_{\leq}$ y $h'_{\leq}$

De la misma forma que la sección anterior, a partir de un orden fijo mostraremos dos estructuras, cuyo orden de especialización coincide con el orden inicial.

Definición 3.3.1. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Llamaremos $h_{\leq}$ a la estructura dada por la colección $h_{\leq} = \{(\downarrow x)^c : x \in X\}$.

De manera similar a la Proposición 3.2.3 el siguiente resultado muestra que el orden de especialización de $h_{\leq}$ coincide con $\leq$.

Proposición 3.3.2. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y consideremos la colección $h_{\leq}$ sobre X. Entonces:

1. El espacio $(X, h_{\leq})$ es $h_{\leq} - T_0$.

2. El orden de especialización para $h_{\leq}$ es $\leq$.

Demostración. 1. Sean $x, y \in X$ distintos. Pueden suceder los siguientes casos:

a. Si $x \leq y$ se tiene que $y \in (\downarrow x)^c$ y $x \notin (\downarrow x)^c$. Es decir, existe un $h_{\leq}$ −abierto que contiene a y y no a x.

b. Si $y \leq x$, entonces razonando como el caso anterior encontramos un $h_{\leq}$ −abierto que contiene a x y no a y.

c. Si $x \nleq y$ y $y \nleq x$, entonces $(\downarrow y)^c$ es un $h_{\leq}$ −abierto que contiene a x y no a y.

En conclusión el espacio $(X, h_{\leq})$ es $h_{\leq} - T_0$.

2. Para $x, y \in X$, debemos probar que $x \leq_{h_{\leq}} y$, si y sólo si, $x \leq y$. Si $x \nleq y$ entonces $x \notin \downarrow y$. Así $(\downarrow y)^c$ es un $h_{\leq}$ −abierto que contiene a x y no a y. Luego $x \notin c_{h_{\leq}}(y)$ y por tanto $x \nleq_{h_{\leq}} y$. Por otro lado, supongamos que $x \leq y$ y sea $(\downarrow z)^c$, $z \in X$, un $h_{\leq}$ −abierto tal que $x \in (\downarrow z)^c$. Entonces $x \notin \downarrow z$ y así $x \nleq z$, lo cual implica que $y \nleq z$. Así $y \notin \downarrow z$ y entonces $y \in (\downarrow z)^c$. Concluimos entonces que todo $h_{\leq}$ −abierto que contiene a x también contiene a y. Es decir, $x \in c_{h_{\leq}}(y)$ y por tanto $x \leq_{h_{\leq}} y$. □

Veamos ahora una estructura similar a la colección anterior.

Definición 3.3.3. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Llamaremos $h'_{\leq}$ a la estructura dada por la colección $h'_{\leq} = \{A \subseteq X : A \text{ es intersección finita de elementos de } h_{\leq}\}$.

Es claro que $h_{\leq} \subseteq h'_{\leq}$, por consiguiente el espacio $(X, h'_{\leq})$ es $h'_{\leq} - T_0$ y siguiendo la demostración de la Proposición 3.3.2 ítem 2 se prueba que su orden de especialización también coincide con $\leq$.

Si tomamos la topología $\mu_{\leq} = \langle h_{\leq} \rangle$ entonces $\mu_{\leq}$ es una topología T_0. Esta topología $\mu_{\leq}$ es llamada **Topología Débil** y puede probarse que es la menor topología T_0 sobre X, cuyo orden de especialización coincide con el orden inicial $\leq$ (ver [1]).

Además si $\leq$ es un orden sobre X y δ es una topología T_0 sobre X cuyo orden de especialización coincide con $\leq$, entonces $\mu_{\leq} \subseteq \delta \subseteq \tau_{\leq}$. Es decir, el conjunto de topologías T_0 sobre X cuyo orden de especialización coincide con $\leq$ tiene mínimo y máximo.

Podría pensarse que las estructuras $g_{\leq}$, $h_{\leq}$ y $h'_{\leq}$ están relacionadas entre sí por inclusión. Aunque siempre se tiene $h_{\leq} \subseteq h'_{\leq}$, estas estructuras podrían no estar relacionadas con $g_{\leq}$ como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.4. Sea $X = \{a, b, c, d\}$, con el orden dado por el siguiente diagrama de Hasse.

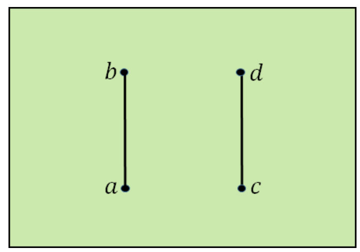

Fig. 6. Conjunto ordenado del Ejemplo 3.3.4

Aplicando la definición de las colecciones $g_{\leq}, h_{\leq}$ y $h'_{\leq}$ obtenemos las siguientes estructuras para X:

$$g_{\leq} = \{\{b\}, \{a, b\}, \{d\}, \{c, d\}\}$$

$$h_{\leq} = \{\{b, c, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b\}\}$$

$$h'_{\leq} = \{\{b, c, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{b\}, \{d\}, \emptyset, X\}$$

Observe que $h_{\leq} \subseteq h'_{\leq}$ pero $h_{\leq} \nsubseteq g_{\leq}$, $h'_{\leq} \nsubseteq g_{\leq}$, $g_{\leq} \nsubseteq h_{\leq}$, $g_{\leq} \nsubseteq h'_{\leq}$. Además cualquier estructura T_0 contenida en $g_{\leq}$tiene orden de especialización distinto del orden inicial. Esto significa que la estructura $g_{\leq}$ es un elemento minimal en el conjunto de todas las estructuras T_0 sobre X cuyo orden de especialización coincide con el orden inicial y que este conjunto no tiene mínimo, ya que $g_{\leq} \nsubseteq h_{\leq}$.

Para el problema que nos ocupa hemos encontrado explícitamente cinco soluciones, dos de las cuales son las topologías $\mu_{\leq}$ y $\tau_{\leq}$. Y las otras topologías T_0 que son solución de nuestro problema se encuentran entre estas dos [1]. La siguiente figura ilustra esta situación.

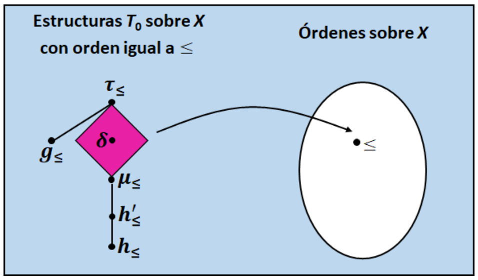

Fig. 7. Estructuras T_0 que coinciden con $\leq$

Observe que en la figura anterior la topología $\tau_{\leq}$ aparece como la mayor estructura de aquellas que solucionan nuestro problema. Los siguientes resultados muestran que esto es lo que sucede realmente.

Proposición 3.3.5. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Si α es una estructura T_0 sobre X, cuyo orden de especialización $\leq_{\alpha}$ coincide con el orden $\leq$ entonces la topología τ_{α} generada por α, es T_0 y su orden de especialización $\leq_{\tau_{\alpha}}$ también coincide con $\leq$.

Demostración. Ya que α es una estructura T_0 y $\alpha \subseteq \tau_{\alpha}$ resulta que τ_{α} también es una estructura T_0. En este caso una topología T_0.

Debemos probar que para todo $x, y \in X$ $x \leq_{\tau_{\alpha}} y$ si y solo si $x \leq y$. Si $x \leq_{\tau_{\alpha}} y$ entonces $x \in c_{\tau_{\alpha}}(y)$, lo cual significa que cada τ_{α} $-$abierto que contiene a x también contiene a y. Así si A es un α $-$abierto con $x \in A$ se tiene que $y \in A$. Es decir, $x \in c_{\alpha}(y)$ y esto implica que $x \leq_{\alpha} y$. Luego $x \leq y$.

Por otro lado, si $x \leq y$ entonces $x \leq_{\alpha} y$ y esto implica que $x \in c_{\alpha}(y)$. Sea B un τ_{α} $-$abierto que contiene a x. Como $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ con A_i una intersección finita de elementos de α para cada $i \in I$, entonces $x \in A_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$. Si $A_{i_0} = M_{i_0}^1 \cap M_{i_0}^2 \cap \ldots \cap M_{i_0}^n$ con $M_{i_0}^j \in \alpha$ para cada $j = 1,2 \ldots, n$ entonces $x \in M_{i_0}^j$ para cada $j = 1,2, \ldots, n$. Ahora ya que $x \in c_{\alpha}(y)$ concluimos que $y \in M_{i_0}^j$ para cada $j = 1,2, \ldots, n$. Es decir, $y \in A_{i_0}$ y así $y \in B$. Luego $x \in c_{\tau_{\alpha}}(y)$ y así $x \leq_{\tau_{\alpha}} y$. □

Corolario 3.3.6. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. La mayor estructura T_0 sobre X tal que su orden de especialización coincide con $\leq$ es la topología $\tau_{\leq}$.

Demostración. Sea α una estructura T_0 sobre X tal que $\leq_{\alpha} = \leq$. Por la Proposición 3.3.5 la topología generada por α, $\tau_{\alpha} = \langle \alpha \rangle$, es una topología T_0 tal que $\leq_{\tau_{\alpha}} = \leq$. Ya que $\tau_{\leq}$ es la mayor topología T_0 con esta propiedad concluimos que $\alpha \subseteq \tau_{\alpha} \subseteq \tau_{\leq}$. □

IV. Conclusiones

Los resultados obtenidos en este trabajo pueden resumirse en las siguientes líneas.

1) Se demostró que a todo espacio (X, g) puede asociarse un preorden de especialización, el cual es orden si y sólo si el espacio es $g - T_0$ (Proposiciones 3.1.1 y 3.1.3). Además se probó que dicha relación es la igualdad si y sólo si el espacio es $g - T_1$ (Proposición 3.1.6).
2) Si X es un espacio $g - T_0$, se relacionaron diversos conceptos del conjunto ordenado $(X, \leq_g)$ con aquellos del espacio topológico (Proposición 3.1.8). Por ejemplo se caracterizó el elemento mínimo con cierta propiedad de los g $-$cerrados, un elemento minimal con la g $-$clausura y el elemento máximo con la g $-$densidad, entre otras propiedades.
3) Dada una relación de orden $\leq$ sobre X, determinamos cinco estructuras T_0 sobre X cuyo orden de especialización coincide con el orden inicial $\leq$ (Proposiciones 3.2.3 y 3.3.2). Ellas son $g_{\leq}, h_{\leq}, h'_{\leq}$ junto con las dos topologías $\tau_{\leq} = \langle g_{\leq} \rangle$ y $\mu_{\leq} = \langle h_{\leq} \rangle$.
4) Para un orden dado $\leq$ sobre X, se caracterizaron el operador interior y clausura en el espacio $(X, g_{\leq})$, en términos del mismo orden. Además también se relacionaron la frontera y el exterior con el orden dado (Proposición 3.2.4).
5) Se probó que dada una relación de orden $\leq$ sobre el conjunto X, el conjunto de estructuras T_0 sobre X cuyo orden de especialización coincide con $\leq$ tiene como elemento máximo a la topología de Alexandroff $\tau_{\leq}$ (Corolario 3.3.6).
6) En el caso topológico es bien sabido que la topología débil $\mu_{\leq}$ es la topología más pequeña cuyo orden de especialización coincide con el orden inicial. Para el caso de estructuras mostramos mediante un ejemplo (Ejemplo 3.3.4) que el conjunto de estructuras T_0 cuyo orden de especialización coincide con el orden inicial no necesariamente tiene elemento mínimo.
7) El comentario anterior sugiere realizar un estudio sobre qué propiedades debe tener una relación de orden $\leq$ sobre el conjunto X para que el conjunto de estructuras T_0 sobre X cuyo orden de especialización coincide con el orden $\leq$, tenga elemento mínimo.
8) En el caso topológico el problema tratado en este trabajo conduce a la interesante *topología de Scott* y también a importantes clases de topologías, como las *concordantes* y las *consistentes* [1]. Sería interesante realizar un trabajo donde se estudien las estructuras asociadas a estas topologías, las relaciones entre ellas y determinar si satisfacen propiedades análogas a las obtenidas en el caso topológico.

Referencias

[1] L. Acosta, "Topologías consistentes," *Bol. Mat. Nueva Serie*, vol. 5, no. 1, pp 15-26, 1998.

[2] L. Acosta y E. Lozano, “Una adjunción entre relaciones binarias y espacios topológicos,” *Bol. Mat. Nueva Serie*, vol. 3, no. 1, pp. 37-41, 1996.
[3] L. Acosta y M. Rubio, “Topología de Scott para relaciones de Preorden,” *Bol. Mat. Nueva Serie*, vol. 9, no. 1, pp. 1-10, 2002.
[4] P. Alexandroff, “Sur les espaces discrets,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 200, pp. 1649-1651, 1935.
[5] A. A. Allam, M. Y. Bakeir and E. A. Abo-Tabl, “Some methods for generating topologies by relations,” *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 31, no. 1, pp. 35-45, 2008.
[6] S. Andima and W. J. Thron, “Order-induced topological properties,” *Pac. J. Math.*, vol. 75, no. 2, pp. 297-318, 1978.
[7] J. Ávila and F. Molina, “Generalized weak structures,” *Int. Math. Forum*, vol. 7, no. 52, pp. 2589-2595, 2012.
[8] Á. Császár, “Generalized topology, generalized continuity,” *Acta Math. Hungar.*, vol. 96, no. 4, pp. 351-357, 2002.
[9] Á. Császár, “Weak structures,” *Acta Math. Hungar.*, vol. 131, no. 1-2, pp. 193-195, 2011.
[10] A. Donado, *Topología y Colecciones*, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 1999.
[11] E. Induráin and V. Knoblauch, “On topological spaces whose topology is induced by a binary relation,” *Quaest. Math.*, vol. 36, no. 1, pp. 47-65, 2013.
[12] F. Lorrain, “Notes on topological spaces with minimum neighborhoods,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 76, pp. 616-627, 1969.
[13] H. Maki, *On generalizing semi-open and preopen sets*, Yatsushiro College of Technology: Report for Meeting on Topological Spaces Theory and Its Applications, pp. 13-18, 1996.
[14] G. N. Rubiano, “Sobre el número de topologías en un conjunto finito,” *Bol. Mat. Nueva Serie*, vol. 13, no. 2, pp. 136-158, 2006.
[15] A. W. Tucker, “Cell spaces,” *Ann. Math.*, vol. 37, pp. 92-100, 1936.

Jesús Ávila. Nació en el Líbano (Tolima) en el año 1972. Estudió Licenciatura en Matemáticas y Física en la Universidad del Tolima, graduado en el año 1995. Realizó estudios de Maestría en Matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá, graduado en el año 2002. Doctor en Matemáticas de la Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Brasil), graduado en el año 2008. Actualmente se desempeña como docente de planta de la Universidad del Tolima. Sus áreas de interés son álgebra y topología.

Adriana Marcela Grajales Arenas. Nació en 1990 en la ciudad de Ibagué. Graduada en 2007 como Técnica en Administración Agropecuaria de la Universidad del Tolima y como Profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística de la Universidad del Tolima en el año 2013. Desde el año 2014 se ha desempeñado como maestra de matemáticas en la institución educativa Nuestra Señora del Carmen y en el megacolegio Antonio Nariño, de fe y alegría en Ibagué. En 2015 realizó un diplomado en teología dogmática como formación para realizar misiones en la asociación privada de fieles, Lazos de Amor Mariano por 3 años en Ecuador, Perú, Aruba y Curazao. En la actualidad se encuentra realizando un diplomado en pedagogía en la Universidad Tecnológica de Pereira sede de Medellín y hace parte del equipo de la corporación e institución educativa colegio Sapiencia de la ciudad de Medellín, donde ejerce como encargada del departamento de matemáticas.

Leidy Carolina Perdomo Hernández. Nació en Ibagué - Tolima en el año 1990. Realizó sus estudios de pregrado en la Universidad del Tolima obteniendo su título de profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística en el año 2013. Posteriormente realizó sus estudios de posgrado en la misma universidad, obteniendo su título de Magister en Matemáticas en mayo del año 2019. Ha trabajado desde el año 2014 hasta la actualidad como docente catedrática del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Tolima.