Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad - CTS
ISSN: 1668-0030
ISSN: 1850-0013
secretaria@revistacts.net
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
Argentina

Fernández Agis, Domingo; Ramírez Naranjo, Jabel A
Muros: orden matemático y ontología del desorden. Reflexiones sobre el legado de Alexandre Grothenkieck
Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad - CTS, vol. 16, núm. 48, 2021, Septiembre-Diciembre, pp. 249-272
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
Buenos Aires, Argentina

Muros: orden matemático y ontología del desorden. Reflexiones sobre el legado de Alexandre Grothendieck *

Paredes: Ordem matemática e ontologia da desordem. Reflexões sobre o legado de Alexandre Grothendieck

Walls: Mathematical Order and Ontology of Disorder. Reflections on the Legacy of Alexandre Grothendieck

Domingo Fernández Agis y Jabel A. Ramírez Naranjo **

La matemática ha buscado en sus orígenes dotar de expresión formal a la presencia de un orden subyacente al caos. Cuando no ha encontrado o no ha logrado formalizar regularidades subyacentes, ha creado recursos formales para permitirnos habitar el desorden. ¿Qué ha aportado la irrupción de la tecnología computacional en esas estrategias? El legado de Alexandre Grothendieck.

Palabras clave: epistemología; computabilidad; racionalidad; esencia; matemáticas

A matemática originalmente procurou dar expressão formal à presença de uma ordem subjacente ao caos. Quando não encontrou ou não formalizou regularidades subjacentes, criou recursos formais que nos permitem habitar a desordem. O que o surgimento da tecnologia de computador contribuiu para essas estratégias? O legado de Alexandre Grothendieck.

Palavras-chave: epistemologia; computabilidade; racionalidade; essência; matemática

In its origins, mathematics has sought to give formal expression to an order underlying chaos. When it has not found it or has failed to formalize underlying regularities, it has created formal resources to allow us to inhabit disorder. What has the emergence of computer technology contributed to these strategies? The legacy of Alexandre Grothendieck.

Keywords: *epistemology; computability; rationality; essence; mathematics*

* Recepción del artículo: 03/01/2021. Entrega de la evaluación final: 07/04/2021.
** *Domingo Fernández Agis:* Departamento de Historia y Filosofía de la Ciencia, Universidad de La Laguna (ULL), España. Correo electrónico: dferagi@ull.edu.es. *Jabel A. Ramírez Naranjo:* Grupo de Investigación Social en Innovación, Universidad de La Laguna (ULL), España. Correo electrónico: jabel.ramirez.82@ull.edu.es.

> “Sin consideración, sin piedad, sin pudor
> en torno mío han levantado altas y sólidas murallas.
> Y ahora permanezco aquí en mi soledad.
> Meditando en mi destino: la suerte roe mi espíritu;
> tanto como tenía que hacer.
> ¿Cómo no advertí que levantaban esos muros?
> No escuché trabajar a los obreros ni sus voces.
> Silenciosamente me tapiaron el mundo”
> Konstantin Kavafis

> *“Wir müssen wissen, wir werden wissen”*[1]
> David Hilbert

Introducción

La razón matemática es profundamente humana, pues es expresión del deseo de comprender el orden subyacente a la realidad percibida. Su soporte y configuración hacen pensar en lo que nos aleja de lo concreto, pero no es así, pues en ella nos encontramos con lo que más puede acercarnos a lo próximo que, sin embargo, por los recursos más comunes que se ponen en uso en el pensar, nos parece lo más lejano.

Mostrar la proximidad real del álgebra a la geometría como hizo Alexandre Grothendieck es un excelente ejemplo de lo que antes decíamos. Si la expresión algebraica se funde con la expresión geométrica es porque los pasos decisivos que él nos enseñó a dar nos permiten mirar por encima de los muros que canalizan el pensar. No hay mayor sensación de libertad que aquella que se deriva de la amplitud de la mirada. La razón matemática muestra que el más claro límite deriva del limitar.

En efecto, la operación de la abstracción, que constituye el fundamento principal de la matemática, actúa mediante un alejamiento de los objetos que permite que puedan ser abarcados, en conjunto, con la mirada. Es la distancia, que se impone en la visión intelectual a los rasgos particulares de cada ente real, la que a la postre posibilita que pueda percibirse lo común entre lo diverso y, por tanto, escindir las características universales que se encuentran entremezcladas en la multiplicidad de lo concreto. Es una operación, en cierta manera, opuesta al logos clásico, que buscaba clasificar y ordenar la realidad a través de la separación de los rasgos particulares presentes entre lo informe de lo homogéneo e indiferenciado.

La operación abstractiva, que da nacimiento al saber científico basado en conceptos universales e incondicionados expresados en un sentido aristotélico mediante la forma, cuando es llevada al más alto grado de sus posibilidades, a una generalidad en la búsqueda de lo común en lo diverso —que tendría como límite la unidad de lo real—, causa como contrapartida una pérdida de la conexión con la realidad misma de lo experimentable: es la osamenta vaciada de pulpa, de cualquier indicio

1. “Debemos conocer, y conoceremos.”

de materialidad. Su poderosa estructura fuerza al pensamiento a avanzar bajo la dirección que marca el discurrir entre los muros que erige, mostrando como ajenos entes que en la naturaleza pueden llegar a estar fuertemente vinculados. Los muros que construye mediante las conexiones de conceptos devienen murallas que, en su función de bastión contra lo irracional, lo arbitrario y lo singular, provocan también una enajenación del pensamiento. Es, por tanto, labor de suma importancia la construcción tanto de arcos entre muros que comuniquen las estructuras epistemológicas como de pórticos que abran y atraviesen determinados constructos, y también de bulevares donde se permita la circulación del pensamiento en plena libertad, sin temor a una pérdida de su legitimidad y de su rigor.

Por último, no debería pasar inadvertido otro peligro que subyace a la construcción de muros: la aparición del laberinto. No en pocas ocasiones, el despliegue y la subsunción de estructuras abstractas conduce, si somos capaces de percibirlo, a la figura del laberinto. Tal y como su etimología indica, un laberinto es un artificio que se despliega en el interior de sí mismo. Es la obra de un ente que elige desarrollarse hacia su propia interioridad en lugar de establecer vínculos con el exterior, dando lugar en su disposición estructural a una maraña de elementos que se cruzan y envuelven hasta provocar la confusión y el extravío de aquél que se adentre en él. La dinámica constructiva de las estructuras matemáticas que siguen el método axiomático puede llegar a presentar las características de un laberinto formalizado; en efecto, el repliegue sobre sí misma de cada área de la matemática pura y el encadenamiento estricto de enunciados cada vez más específicos y alejados de otras partes de la propia matemática, llegan a investir al edificio conceptual de una complejidad en la que es fácil perderse y que requiere, para que pueda estar dotado de firmeza epistémica, que se busquen vías de comunicación con otras áreas de la matemática. Sería posible realizar una analogía entre los laberintos matemáticos y los arquitectónicos. Umberto Eco, en "Apostillas a *El nombre de la rosa*" (Eco, 1985, pp. 60-62), identifica tres clases de laberintos diferentes: el laberinto clásico o de Teseo, el laberinto manierista y el laberinto rizomático. El primer tipo de laberinto sería tal que no habría posibilidad de extraviarse, puesto que la entrada se comunica con la salida de forma directa mediante el hilo de Ariadna. Su desafío radica en enfrentarse a lo que ineludiblemente encontraremos en el centro. El laberinto manierista, sin embargo, se caracteriza porque su finalidad es provocar la perdida en su interior. Posee una sola salida y multitud de caminos. Por último, estaría el laberinto rizomático, en el que cualquier camino puede conectarse con cualquier otro y, por tanto, no posee una estructura espacial definida, ni centro, ni límites, ni salida.

La analogía entre estructuras matemáticas y la tipología de los laberintos reseñada es clara: el laberinto de Teseo es la estructura clásica de representación del formalismo axiomático, en la que se debe cumplir el ideal del encadenamiento deductivo perfecto entre enunciados. En esta estructura, que se basa en la creencia en la existencia de la verdad matemática pura, el tránsito entre axiomas y conclusiones viene sobredeterminado, así como estaba prefijado el camino entre la entrada y el centro del laberinto. Es un ideal peligroso, porque en el centro siempre hay un minotauro representado por la desvinculación entre la técnica formalista y el pensamiento. Lo cual transformaría a las leyes formales en puros y ciegos automatismos.

En el laberinto manierista, empero, no existe la certeza, solo lo aproximadamente verdadero o lo probable. Su peligro no consiste, como en el anterior, en la existencia de un monstruo que nos aguarda en forma de verdad monolítica y anquilosada, desconectada de toda noción ajena a sus premisas, sino precisamente en la incapacidad de encontrar una salida y morir vagando por sus corredores. Esto es, en la ramificación y disgregación de los problemas sin lograr la culminación en ninguno de ellos. Ejemplos de este fenómeno serían las conjeturas y los planteamientos sin solución analítica o exacta.

Por último, el laberinto rizomático tendría su paralelismo en la matemática que elude la cristalización en una estructura per se. Pura fluidez, puro hacer pragmático, en el que se llegan a contravenir leyes que en la primera clase se consideran ineluctables, pero que en la estructura del rizoma llegan a adquirir una cualidad de superfluidad. El rizoma, en determinadas circunstancias, puede adoptar la estructura temporal de raíz, y entonces estar relacionado con el laberinto manierista de lo aproximado y lo probabilístico. Suele ser el caso de las matemáticas aplicadas, donde ni se puede obtener la certeza, ni se escatima la innovación epistemológica allí donde sea necesaria, aun a costa de la contravención de los procedimientos clásicos.

La tecnología computacional ha supuesto, sin duda, la emergencia de nuevas posibilidades jamás avizoradas. La amalgama de las capacidades de la máquina con la aritmetización del análisis ha producido, más allá del consabido incremento exponencial de la potencia de cálculo, la reordenación de gran parte del edificio conceptual de la matemática. Efectivamente, constreñido entre los límites de la eficiencia y el coste computacionales, se encuentra el modelo algorítmico de pensamiento. El algoritmo ha introducido una nueva cualidad matemática denominada recursividad. Mediante ella, la inferencia paso por paso, propia del método axiomático que nos condenaba al primer laberinto, deja de tener tanta importancia y cesa de constituir la única fuente de aseguramiento de la aproximación a la verdad matemática. El algoritmo permite que la verdad no proceda solamente por intensión, sino que más bien comience a hacerlo por extensión, tomando como origen de lo cierto la proyección epistémica que genera la totalidad del algoritmo cuando se ejecuta en un computador.

Esto significa que el segundo laberinto puede ser completamente reconstituido, ya que la aritmética en punto flotante permite que la operación de la aproximación deje de ser una entelequia condenada a la incertidumbre, y que, mediada por nuevos conceptos matemáticos como los de la estabilidad y la convergencia, pueda asentarse como un recurso totalmente válido.

La nueva perspectiva que se abre con ello impulsa la irrupción de modelos de la realidad física, del espacio y el tiempo, en la configuración del hacer matemático; lo cual permite que la concepción rizomática de la matemática también acontezca en el horizonte de posibilidades. Un hacer matemático sin jerarquías claras, con la preponderancia del pragmatismo finalista, y en el que el método del ensayo y error, practicado de forma inteligente, se hace absolutamente legítimo.

Todo lo anterior sin duda modifica el mapa de las regularidades subyacentes en el modelo abstracto de la realidad que constituye la matemática, ampliándolo y haciéndolo aún más complejo con la aparición de nuevas categorías epistémicas.

Muros: orden matemático y desorden matematizable

No constituye en absoluto una muestra de originalidad intelectual el intento de vincular la estructura de las formas más abstractas de conocimiento con el orden interno del conocimiento mismo. Cuando se ha hablado de conocimiento puro, para referirse a dichas formas se pensaba ante todo en que la carencia de contenidos materiales concretos, vinculaba necesariamente tales configuraciones con la dimensión esencial del conocer y de la realidad misma. No en vano, para Kant, en el ámbito de la lógica, la pregunta esencial es: "¿cómo se conocerá el entendimiento a sí mismo?" (Kant, 2002, p. 51).

Todo ello pondría de relieve el carácter ridículo que tiene todo empeño en limitarse a utilizar el lenguaje religioso o metafísico, para intentar decir lo que se tendría que llegar a expresar con respecto a lo impensado y lo impensable. Sin duda, ese empeño encierra en sí la más grande de las utopías imaginables, pero el resultado del aludido enfoque sería vergonzante y ni tan siquiera nos conduciría a la entrada del laberinto.

Para evitar, al menos en parte, la confusión que esa aproximación a la mística genera, sería preciso aprender a pensar sin palabras o, cuando menos, recordar cómo se piensa sin el apoyo de un código lingüístico de uso común. Sin embargo, pocas vías conducen de una forma más directa a la frustración. Tras vivir tal experiencia, habría que tener el valor de permanecer callado el mayor tiempo posible.

Recordemos que la tesis de Church-Turing sostiene que todo problema efectivamente calculable o decidible es, asimismo, computable por una máquina de Turing. De igual forma, todo problema computable por una máquina de Turing es igualmente calculable por un método efectivo o decidible. Sin embargo, esta estimulante tesis es indemostrable al relacionar una noción y un concepto de condición dispar. No obstante, puede considerarse como una hipótesis plausible.

Por su parte, el teorema de Löwenheim-Skolem sostiene que, si un conjunto de fórmulas cualesquiera es simultáneamente satisfacible en cualquier dominio no vacío, entonces es simultáneamente satisfacible en un dominio enumerable. El corolario que parece desprenderse del Teorema de Leopold Löwenheim y Thoralf Skolem es la eliminación de la posibilidad de aplicar el concepto de satisfacibilidad a un conjunto infinito. Con ello quedaría justificado el postulado que sostiene que la operación de la razón no es completamente matematizable. Esta conclusión debería impulsar un replanteamiento de la actividad filosófica y no solo promover una reinterpretación de la potencia real de cálculo que tienen las ciencias formales.

A su vez, el teorema de la compacidad nos dice que, si tomamos un subconjunto finito de fórmulas de un conjunto infinito, y comprobamos que ese subconjunto de fórmulas es satisfacible, entonces podemos concluir que todo el conjunto infinito lo es también. Como sucede a menudo en otros procesos demostrativos, aquí el paso a la conclusión se realiza mediante inducción semiótica. En efecto, el teorema de la compacidad sería inconcebible sin tomar como base la idea de la homogeneidad estructural de las fórmulas del sistema. Si se toma en consideración la existencia del azar, se entiende desde la perspectiva enunciada que éste no debe afectar a la estructura del cálculo ni a sus elementos básicos.

Podríamos pensar qué clase de infinito es ése al que se alude, que es representado a partir de un esquema lineal y se mueve siempre en una dirección exclusiva y excluyente. Frente a ello tendríamos que pensar en la distancia que existe entre el algoritmo y el cálculo efectivo. De igual manera, tendríamos que concluir que, si ese infinito es numerable, lo es porque pueden enumerarse sus elementos, en la medida en que tal conjunto es resultado de la sucesión constante y continua de ellos. Por eso no es más que una línea en el horizonte y podríamos, incluso, interrogarnos sobre su carácter imaginario. En efecto, tal vez lo sea, como lo son también otras líneas de fuerza de nuestro conocimiento del mundo.

El impulso a conocer orienta nuestra mirada, pero antes de mirar nos decimos a nosotros mismos que vamos a hacerlo. Así, mientras sin palabras afirmamos eso, sucede lo que queríamos mirar sin que lleguemos casi nunca a verlo. Tan solo vemos nuestro deseo de ver, escrito en el sombrío muro del lenguaje. Una idea análoga la encontramos en la obra de Michel Foucault, *El pensamiento del afuera* (2014), donde reflexiona sobre la aparición, en el lenguaje propio de la literatura, de un movimiento de alejamiento de sí mismo basado en la materialidad del lenguaje y en el trazo de un límite entre el interior y el exterior del discurso. Nos dice en tal sentido que:

> "… un tránsito al afuera del lenguaje escapa del modo de ser del discurso —es decir, a la dinastía de la representación—, y la palabra literaria se desarrolla a partir de sí misma, formando una red en la que cada punto, distinto de los demás, a distancia incluso de los más próximos, se sitúa por relación a todos los otros en un espacio que los contiene y los separa al mismo tiempo" (Foucault, 2014, p. 12).

Lo expresado en la cita precedente describe aquellas modalidades del discurso en las que el lenguaje no se identifica consigo mismo, buscando un punto de máxima actualización, sino, por el contrario, se aleja de sí mismo todo lo posible al salir a una exterioridad de un espacio neutro y vacío. En este "fuera de sí mismo" desvela su propio ser (Foucault, 2014, p. 12).

Si adoptamos un punto de vista análogo en el ámbito del saber matemático, veremos que a través de la identificación de muchas de sus características epistémicas podemos identificar un movimiento similar al del lenguaje entre el exterior y el interior, como en la separación provocada en un territorio por la presencia de un muro. Algunas de estas características son: una estructuración abstracta conectada a un orden interior del conocimiento vaciado de toda materialidad, una determinación de su decidibilidad por medio de la aplicación de esquemas generales de la computabilidad, una imposibilidad de la aplicación del concepto de satisfacibilidad en conjuntos infinitos, junto a la posibilidad paradójica de prolongar enunciados satisfacibles por inducción semiótica entre subconjuntos finitos y conjuntos infinitos, señalando así el carácter homogéneo de las estructuras de un sistema. También serían características una opacidad epistémica entre el encadenamiento de enunciados, especialmente los de carácter algorítmico, y una capacidad de generación de nuevas estructuras desnaturalizadas respecto de sus predecesoras.

Si prestamos atención, comprenderemos que en todas ellas se revela un juego dialéctico entre partes situadas en posiciones de distinto nivel topológico que parece establecer relaciones de concordancia, equivalencia o proximidad entre entes procedentes de dichos niveles. Por tanto, no es descartable un origen dialéctico para la demostración matemática.

> "El logos es un arma de destrucción, el laberinto de la razón sólo aparentemente es un edificio. Este período primitivo de la dialéctica, cuyos artífices han caído en el olvido, ha construido sus profundos senderos anudando universales y palabras; luego de repente aparece alguien que en los flancos de aquellas galerías descubre aperturas, pasajes cada vez más numerosos, hasta el punto de que las paredes se revelarán inconsistentes. Es el demonio deductivo quien lo lleva a cabo, quien une abstracciones en dirección descendente, abarcando sinópticamente todos los presupuestos. La culminación de la dialéctica es así la demostración, pero el ímpetu juvenil, con el que esta fue inventada, violentamente aplicada y agotada —como por una sed devoradora— en todas sus confluencias, la vació rápidamente y mostró su carácter destructor; por consiguiente, cuando el arte dialéctico aparece por primera vez a plena luz, su parábola está ya en el apogeo" (Colli, 1996, pp. 224-225).

La razón es para Colli un laberinto cuyas paredes dialécticas han sido horadadas hasta el punto de volverse inconsistentes. Todo ello por causa de un uso desmesurado y violento de la deducción durante los prolegómenos griegos de la operación dialéctica sobre el logos. Entendemos por deducción la búsqueda de relaciones entre enunciados cuyo nivel de certeza —el de las relaciones— es superior al de los términos que pone en conexión. Como consecuencia, se producirá una serie de encadenamientos de certeza siempre creciente prolongados hasta un límite absoluto e inalcanzable. Esta ansiedad por abarcar sinópticamente todos los presupuestos convierte a la razón en su propio verdugo. Sin embargo, por medio de esta destrucción de un orden emergente podemos colegir esa relación entre dialéctica y deducción, llegando a estar seguros de que esas dimensiones de exterioridad e interioridad son puramente genéticas para las matemáticas. Finalmente, todo procede de la necesidad originaria del establecimiento de un orden que conduzca a la armonía en las estructuras matemáticas, puesto que, haciendo referencia a las sabias palabras de Filolao, podemos afirmar que "las cosas similares y de la misma índole no tienen necesidad alguna de armonía, pero aquellas que son desemejantes y de índole y orden diferentes requieren que se las encierre juntas bajo llave con una armonía capaz de contenerlas en un orden" (VV.AA., 1986, p. 133).

Siguiendo con la idea del muro como separación, es pertinente observar que, contemplado desde cierto ángulo, un muro revela, al mismo tiempo, que es un factor de aislamiento y un objeto de una insospechada materialidad, a pesar de su extraña evanescencia, pero también un objeto que tiende a separar y separarse de su entorno. Visto frontalmente, un muro proporciona una impresión de solidez y continuidad, haciéndonos creer que hay toda una construcción que se prolonga y mantiene en pie tras él. Pero tal vez no haya nada tras él, siendo entonces el muro la fachada que oculta un vacío, una carencia. Pese a ello, en el muro puede inscribirse un signo de salvación, ya que el muro también puede representar la continuidad y, a la vez, la ruptura del tiempo. Por ejemplo, el muro en ruinas ilustra la idea de una separación que el tiempo está en trance de borrar. El muro puede asimismo representar la inesperada y fresca solidez de una separación fraguada siglos atrás.

Es difícil, entonces, de soslayar la visión del muro en su solidez como un límite que puede tanto protegernos de un vacío exterior como impedirnos el acceso a un contenido interior. Lo importante de esto no es la materialización de una de las dos casuísticas, sino la incapacidad de conocer en cuál de los dos casos nos encontramos. Por tanto, lo que constituye una cuestión muy relevante es la patente imposibilidad que se elabora a partir del concepto de límite: el impedimento de pasar al otro lado. Limitar el número de posibilidades equivale a forzar el seguimiento de los caminos dados. El muro debe la naturaleza de la trama que lo hace posible a su existencia como límite y a su poder generador de exclusión.

Precisamente en matemáticas, el límite es, recogiendo una idea expresada por Weil (2001), ese punto que tarde o temprano está condenado a tropezar con una imposibilidad que obligará al nacimiento de nuevas nociones. El suceso del nacimiento es completamente imprevisible, y los puntos en donde se producen concentran armonía y belleza. Son los puntos armónicos (Weil, 2001, p. 726). Los muros de las estructuras matemáticas, que en sus comienzos fueron erigidos como trama de relación de las regularidades de la realidad, también encerrarían en sí mismos esos puntos que nos permitirían saltar de un sentido a otro aparentemente alejado, funcionando como herramientas para proporcionar orden allí donde en apariencia solo hay espacio vacío y caos. La clave de esos saltos, de esos puentes de los que hablamos en un principio, que impedirían vagar eternamente por el laberinto, se encuentra en la belleza.

Para Weil, la belleza en las matemáticas se caracteriza por varias líneas abiertas. La primera sería la presencia de una cierta resistencia al movimiento formalizante, tanto en dirección ascendente como en dirección descendente de los encadenamientos lógicos. La segunda, y la más enjundiosa, sería la manifestación de concordancias misteriosas tanto dentro de las propias matemáticas como en relación con el mundo sensible, y también con las verdades trascendentes. Esto explicaría que “mediante las matemáticas, las verdades trascendentes presenten sus símbolos en las mismas necesidades mecánicas que rigen la materia. De ahí también que la belleza matemática conduzca a la noción de Orden del Mundo” (Weil, 2001, p. 736).

La belleza surte en este ámbito el efecto de introducir armonía entre elementos que podrían ser considerados heterogéneos. La trascendencia y la *physis* se relacionan con la matemática por medio de estos lugares, estos *topos atopos* que comunican los muros y trascienden los límites impuestos, dando paso a nuevas estructuras de materiales y técnicas constructivas diferentes.

Es innegable que la forma de relación entre la *physis* y la matemática pasa por las técnicas computacionales. La recursividad y la verdad aproximada que caracterizan a las operaciones del computador, dan la entrada en la physis al mundo de la abstracción matemática. En efecto, como se dijo en la introducción, no es que simplemente el mayor poder de cálculo haya facilitado la resolución de modelos complejos a los que la mente humana difícilmente podría tener acceso, sino que los contenidos epistemológicos que aporta el computador permiten una nueva relación entre la abstracción y lo material concreto. Los símbolos tienen ahora conexión estrecha con los entes físicos, lo cual culmina en la emergencia de la representación de sistemas reales. El computador y la matemática computacional nos permiten representar en tiempo real la evolución de un fenómeno físico: una tormenta, por ejemplo. Es decir, podemos observar con los sentidos dichos fenómenos en desarrollo. Eso jamás podría haber ocurrido a través de cálculos humanos, incluso aunque estos fueran mejorados.

El computador introduce nuevas propiedades semánticas en las matemáticas, puesto que otorga un significado representacional a la construcción simbólica. Los símbolos que, combinados entre sí, producían estructuras abstractas caracterizadas por un alejamiento patente de todo significado material, ahora pueden recoger mediante modelos numéricos una dimensión más cercana a la matriz de la experiencia sensible. Las cualidades fundamentales de la *physis* como la transformación, la generación y la corrupción, y el movimiento, son ahora plenamente compatibles con las cualidades que aporta la matemática computacional: la aproximación, la perturbación, la estratificación semántica, la opacidad epistémica, la iteratividad o la interpolación. Ahora el sustrato simbólico se reviste de nuevo de la pulpa que le fue arrancada a la realidad sensible mediante el proceso matemático de la abstracción, volviendo a configurar una realidad encarnada, aunque sea por mera aproximación. Esto es una forma de decir que la tecnología computacional permite dar el salto por encima del muro, conectando la interioridad de la abstracción con la exterioridad de la *physis*. Sin embargo, no siempre conduce este medio a fines dotados de sentido. También ha de tenerse en cuenta el peligro del desbordamiento de las estructuras y el extravío en el infinito del crecimiento numérico descontrolado. La misma violencia que podían infligir los encadenamientos deductivos, y que arruinaron los procesos dialécticos originarios, es ahora multiplicada por muchos órdenes de magnitud con las operaciones de redondeo y truncamiento de los computadores, dando fácilmente al traste con cualquier capacidad representacional de los esquemas numéricos de partida.

Además, no siempre se toman presupuestos epistemológicos con contenido real; en muchas ocasiones se oculta una simplificación del contenido epistémico de los enunciados de partida por medio de una complejización vacía de los enunciados matemáticos y de los cálculos numéricos, pretendiendo que su mera operatividad justifique los resultados, por muy alejados que se hallen de la realidad física, social o humana en general. En este caso se comprueba la incapacidad de las potencialidades computacionales de captar las dimensiones cualitativas complejas, y de reducir cualquier elemento cognoscitivo a un continente simbólico como las variables de una ecuación.

No obstante, a pesar de la presencia de límites también en la computación, no ha cesado de ampliarse el desarrollo de nuevas estrategias algorítmicas, con el objetivo de suplir las carencias respecto a lo cualitativo de las que adolece la matemática. Numerosos avances han sido realizados en esta dirección en los últimos tiempos, dando lugar al nacimiento de la inteligencia artificial, el aprendizaje automático y, en general, a un movimiento de reducción de las distancias epistemológicas que existen entre la máquina y el ser humano.

Inteligencia artificial, robótica y vida cotidiana

Al acercarnos a la relación entre los ordenadores y los seres humanos, lo primero que advertimos es que controlar la conexión con la máquina no es fácil. De hecho, no se puede conseguir sin lograr previamente cierta desconexión. No hay interruptor ni conector que pueda servir fehacientemente para ello. De ahí suelen surgir nuestras primeras inquietudes, pero de ellas se derivan otras aún más preocupantes. En ese sentido, habría que afrontar estas dos cuestiones cruciales: i) ¿qué hemos de temer más, que los robots se humanicen o que los humanos se roboticen?; y ii) ¿puede un robot tener una identidad cuando es reproductible, con absoluta exactitud y precisión, hasta el infinito?

En el futuro próximo, humanos y robots tendrán que aprender a convivir. El mundo del futuro no podrá sostenerse si no logran construir una cultura de convivencia. Por ejemplo, se están produciendo avances muy notables en ámbitos como el tratamiento de información y el manejo de imágenes. Observamos cómo, a partir de los datos acumulados y sometidos a procesos de selección pautados, las máquinas muestran ya la capacidad de comprender conceptos. Por ejemplo, el reconocimiento de un animal, partiendo de fragmentos de imágenes e imágenes distorsionadas, sugiere que se ha comprendido el "concepto" que define a dicho animal.

Todos estos progresos se están aplicando exitosamente en la medicina, permitiendo el manejo rápido, por parte de los profesionales, de una ingente cantidad de información. También se están utilizando en las tareas de diagnóstico de enfermedades. Podemos hablar, en ese sentido, de las experiencias desarrolladas por IBM, con millones de historias médicas digitalizadas. En definitiva, en las tareas de diagnóstico, la IA ha alcanzado niveles de comprensión de datos que han llevado a descubrir nuevos indicios para el diagnóstico de enfermedades mentales, a partir de indicadores de comportamiento recogidos en grabaciones de vídeo de entrevistas con hipotéticos pacientes psiquiátricos. Es, por tanto, un hecho constatable que el *big data* está transformando la *praxis* médica.

Pero no hay que olvidar las dificultades que entraña el progreso de la inteligencia artificial, que han llevado a ciertos investigadores a hablar de "estupidez artificial". En ese sentido, lo que llamamos "sentido común" es algo difícil de desarrollar en una máquina. Por otro lado, se plantea cada vez con más fundamento el problema del control de la IA, pensando en que podemos desarrollar formas de inteligencia artificial que lleguen a operar de modo completamente autónomo e interfieran con los intereses humanos.

Por último, habría que abordar la cuestión de las relaciones afectivas (amorosas o de amistad) entre humanos y máquinas. Tendríamos que preguntarnos acerca de todo lo que puede cambiar en este sentido en la sociedad del futuro. Desde tal perspectiva, si las relaciones amorosas y de amistad entre humanos y máquinas llegan a ser más fluidas y placenteras que las relaciones entre humanos, ¿qué efectos tendrá esto sobre estas últimas formas de relación?

Todas estas posibilidades en ciernes parecen desprenderse de algunos enunciados epistemológicos que convergen en la siguiente afirmación: la distancia cognitiva entre seres humanos y computadoras está reduciéndose. Con esto queremos decir que, a causa tanto del desarrollo tecnológico como de la evolución cultural, los humanos y las máquinas empiezan a compartir, cada vez con mayor frecuencia y de manera más intensa, escenarios de actuación en los que coinciden sus capacidades de manipulación y transmisión de la información.

Por un lado, es un hecho notorio la cada vez mayor competencia de los computadores —por medio en gran medida de los avances en matemática computacional— para utilizar ingentes cantidades de datos derivando de ellos nuevos conocimientos. Además, los límites de influencia y actuación de los computadores se han ensanchado, puesto que los interfaces que los ponen en comunicación con la realidad del mundo físico se han multiplicado. Todo ello, junto con una voluntaria cesión de territorio intelectual por parte de los humanos que, conscientes de sus límites a la hora de controlar las operaciones cognitivas de las máquinas, programan los sistemas con técnicas que tienden al autoaprendizaje y a la autonomía en la toma de decisiones; todo ello, decimos, ha provocado que las máquinas puedan entrar, con mayor frecuencia y penetración, en contacto directo con la realidad sensible o con su espejo informacional,[2] y operar con los datos de la realidad humana, aprender de ellos, elaborar modelos o inferencias muy precisas y, por último, tomar decisiones que afectan a dispositivos que actúan sobre elementos físicos o sociales.

Pero, por otro lado, el despliegue cognitivo de las máquinas, esto es, la mejora de las facultades relativas a la adquisición, el manejo y la generación de información, y sobre todo a la capacidad de crear conocimiento eficaz en la realidad humana, se ha visto estimulado y catalizado por la inercia cultural hacia la digitalización del mundo. Los espacios de relación entre humanos y máquinas se han ampliado, y previsiblemente lo seguirán haciendo de forma acelerada, porque se ha producido un volcado masivo de las relaciones, procesos y eventos sociales en la dimensión digital. En efecto, si prestamos atención al mundo que nos rodea, veremos cómo prácticamente cualquier interacción entre humanos socialmente relevante está actualmente mediada por computadores y además se lleva a cabo en el mundo simbólico de lo digital. El ocio, el trabajo, la vida civil y política, las relaciones de amistad o amorosas, incluso en la faceta más íntima de la sexualidad, todo ello ha sido traspasado en gran medida y en muy poco tiempo a una dimensión digital que se desarrolla a través de pantallas.

2. Denotamos con esta expresión a las enormes bases de datos que continuamente almacenan las características y los cambios de la realidad física y social en forma de cantidades numéricas o símbolos.

En esta dimensión las computadoras no se limitan a servir como simples medios de interacción, o facilitadores de tareas que quizás en el mundo físico serían engorrosas, aumentando la eficiencia del esfuerzo humano, sino que ellas mismas ejercen una presión acerca de los criterios y las formas que deben seguirse para interactuar y para elegir, dando lugar a lo que comúnmente se denomina la "tiranía del algoritmo". Es cierto que suele decirse que, puesto que los algoritmos han sido, de momento, programados por humanos, en realidad la influencia algorítmica no es sino una vía de trasladar el criterio de los propios programadores, y por derivación de las entidades socioeconómicas que los han contratado, sobre los usuarios. Por lo tanto, el algoritmo no sería más que una digitalización de la dinámica de los sistemas de estimulación del consumo y del control social.

Ahora bien, admitiendo que, ciertamente, el fin último del *hardware* y del *software* es servir de instrumento para fines que sobrepasan el *ethos* de los computadores, denotaría falta de visión el ignorar que hay una aportación esencial de la computación, una proyección de su forma de ser en el mundo, de su manera de relacionarse con la realidad, que altera de manera ostensible el desarrollo de los procesos que en base a ella se gestionan. En otras palabras, la tecnología computacional, consistente en un híbrido entre matemática computacional, algorítmica y computadores, no es un medio transparente.

Los algoritmos que gobiernan los procesos de inteligencia artificial, aprendizaje automático o procesamiento semántico, en su manera de operar aplican generalmente técnicas matemáticas de optimización, maximización o minimización de funciones objetivo. Las funciones serán de naturaleza muy variada según la técnica de la que se trate, pero prácticamente en todos los casos habrá una función que recibirá valores de entrada y arrojará valores de salida. Por lo tanto, cualquier criterio que se establezca por parte del algoritmo para realizar juicios o llegar a conclusiones deberá pasar por el proceso de conversión del objeto del que se trate en una unidad, muchas veces un punto en un plano geométrico, identificado por un valor numérico. El valor será contabilizado con alguna clase de medida, por ejemplo, una distancia euclídea, y sometido al paso por una función. En definitiva, cualquier aspecto de la realidad será transformado en un valor numérico y manipulado con criterios de máximos o mínimos, sumatorios y ponderaciones, regresiones lineales, operaciones matriciales, programación lineal, etc.

A pesar de la complejidad que posean las estructuras matemáticas de las técnicas computacionales mencionadas, sus presupuestos epistemológicos son tremendamente simples y se reducen a conceptos derivados de ideas tales como el máximo beneficio, el mínimo coste, la dominación del fuerte sobre el débil, el equilibrio entre pérdidas y ganancias, la elección del mínimo daño, etc.

En un movimiento inverso, estos patrones que imponen los algoritmos en sus resultados oraculares son recogidos por los propios seres humanos, que los asimilan, asumiendo como lógica y normal esta clase de reduccionismo epistémico. Por ello, por ejemplo, una de las principales quejas de los directores de cine sobre las plataformas de contenidos online se basa en críticas relativas al empobrecimiento temático que provoca el uso de un algoritmo de selección, puesto que aplica un criterio darwiniano de maximización de contenidos acordes al gusto del público, eliminando de forma progresiva todo el cine que no cumple con criterios de éxito de visionado, o de aparición en las películas de elementos clasificados como exitosos (temática, estructura narrativa, roles de género, o aspectos visuales); esto elimina la posibilidad de ofrecer un cine que aporte nuevas miradas o elaboraciones críticas. Sin embargo, el público lo asume como natural y benigno, puesto que, al fin y al cabo, le proporciona productos de su gusto, que va siendo cada vez más simple y encerrado en sí mismo.

En consecuencia, la mimetización humana de los patrones algorítmicos provoca un fuerte impacto ético, que corrompe el denominado "sentido común", del que las máquinas aún carecen por ser necesario para ello un tipo de pensamiento de características cualitativas, metafóricas, simbólicas, emocionales y corporales. Toda la realidad no es computable.

La tesis que afirma que todos los aspectos de la realidad no son tratables por medio de cálculos computacionales posee sólidas bases en la propia teoría de computadores, como sostiene Sánchez Ron, haciendo referencia a lo defendido al respecto por Mosterín, a pesar de su impactante e influyente progreso, el desarrollo de la computación ha puesto en evidencia los límites a los que ésta ha de enfrentarse. El propio Turing reflexionó sobre los límites que pesan sobre el funcionamiento de la máquina que lleva su nombre. De este modo, la misma computabilidad de la máquina de Turing acaba poniendo de manifiesto la existencia de objetivos definidos por su intrínseca incomputabilidad (Sánchez Ron, 2003, p. 83).

La "incomputabilidad por principio", por tanto, existe indudablemente y podría implicar que siempre existirá una distancia insalvable, por muy pequeña que sea, entre la mente y el computador, entre los humanos y las máquinas. La consecuencia clara que se desprende de estas nociones científicas es la afirmación de las diferencias entre la mente y el computador. Cuando Von Neumann esbozó los principios básicos de la máquina universal de computación, no estaba realmente replicando la mente humana, sino aplicando ideas, en parte extraídas de sus propias hipótesis acerca de cómo debía de funcionar el cerebro, que intentaban aprovechar operaciones simples de almacenamiento y transmisión de información en un artilugio para maximizar la capacidad de cálculo. Por ello, a pesar de que, sin duda, la aptitud de los computadores para el cálculo es superior a la de la mente en muchos órdenes de magnitud, ello no significa que la mente haya sido superada, o que sea peor o más débil que el computador. Sencillamente, su estructura y funcionalidad es por completo diferente a la de los ordenadores. Esta idea se puede extender a la propia matemática computacional siguiendo el planteamiento de Sánchez Ron:

> "Decía que si fuese correcto el punto de vista de Penrose (y en última instancia, como acabamos de ver del propio Turing, aunque éste no llegase a formularlo así), según el cual 'la verdad matemática va más allá de las simples construcciones humanas', entonces difícilmente podríamos evitar concluir que el reduccionismo matemático no permitirá acoger bajo su protector y acogedor manto a aquellas disciplinas que se ocupan de la mente humana" (Sánchez Ron, 2003, p. 83).

En efecto, si la matemática computacional no fuera aplicable al pensamiento humano como modelo replicable, entonces habría que concluir que intentar captar la forma de ser de las personas, sus preferencias, deseos y pensamientos por medio de algoritmos, puede ser un grave error, distorsionador de la sociedad y de la subjetividad humana. Quizás habría que empezar a plantear un horizonte en el que el pensamiento no algorítmico, no recursivo, deba empezar a ser considerado como prioritario cuando tratemos cuestiones humanas. En ese sentido, hemos de considerar que, para elaborar una explicación adecuada del funcionamiento de la mente humana, empezando por la misma actividad consciente, deberíamos tener como presupuesto básico formulaciones no algorítmicas. Los planteamientos de Penrose y Gödel son fundamentales para lograr ese objetivo, pues vienen a subrayar que incluso en la elaboración de juicios matemáticos los componentes no algorítmicos tienen una crucial importancia (Sánchez Ron, 2003, p. 84).

Sin duda, la convivencia entre humanos y computadoras irá acrecentándose con el tiempo, y no solo eso, el propio espacio de lo humano irá aproximándose al espacio de lo computacional hasta que ambas realidades se fundan y sean indistinguibles. Precisamente por eso es de suma importancia reconocer la diversidad de ambos seres, admitir que los fines humanos no son los fines de los computadores y que su inclusión en la realidad tiene por fin humanizarla, en lugar de robotizar al ser humano.

El trabajo matemático

A propósito del teorema de incompletud de Gödel, habría que decir, siguiendo a Javier de Lorenzo, que hay que concederle el rango de teorema de crucial importancia, pero más por el proceso demostrativo que Gödel puso en pie para alcanzar el resultado de la incompletud de todo sistema formal que pretenda contener la aritmética. Esos mecanismos de “gödelización” y representación, y con ellos la noción básica de “función primitivo-recursiva”, suponen una aportación esencial, ya que “lo que con esta demostración se abre al Hacer matemático es, junto a la aritmetización matemática, nada menos que todo el campo de la recursividad, de la computabilidad” (De Lorenzo, 2007, p. 11).

Es fácil incurrir en una valoración errónea del hacer matemático que nos lleve a percibir el saber matemático como una abstracción pura, lo que constituiría la máxima expresión del formalismo argumentativo y probatorio. La aplicabilidad de esta forma de saber quedaría permanentemente comprometida por ese repliegue de la matemática en el interior de un formalismo protector. Pese a los efectos de tan frecuentes interpretaciones, la matemática conecta con el núcleo de lo real a través de las formalizaciones más abstractas. De Lorenzo habla de una matemática situada “en el núcleo de lo más real, de lo más transformador de las condiciones sociales de la especie humana que se haya creado en el siglo XX. En el núcleo originario de la computabilidad, de lo que terminará siendo el ordenador con las consecuencias que ha tenido y tiene” (De Lorenzo, 2007, p. 13).

Para exponer lo que él considera el “núcleo de la computabilidad”, De Lorenzo se refiere al “Programa Lions”, en base al cual se intenta buscar la conexión íntima entre el desarrollo del conocimiento matemático y "los problemas de la *physis*, pero ahora a través de lo tecnológico". Recurriendo para lograrlo a la intensificación del cálculo diferencial y al desarrollo de algoritmos con capacidad de emulación de los fenómenos del mundo físico. Se busca así la puesta en pie de "modelos analógicos que, establecidos, posibiliten que, dados unos parámetros, se obtenga el comportamiento —crecimiento o desarrollo, transformación...— del fenómeno de la *physis* considerado" (De Lorenzo, 2007, p. 13). Para él las aludidas transformaciones no solo tienen un gran impacto sobre el enfoque y realización de las tareas de indagación científica, sino que están alterando por completo nuestra vida cotidiana. Otra elocuente ilustración de todo ello la encontramos en la historia de los números reales.

> "Como nueva construcción, este concepto de número real rompe, en el fondo, con una idea muy intuitiva: la que se tiene en el dato del continuo lineal, de un continuo representado por una línea geométrica como la recta. Y ahora lo que se capta no es esa recta como imagen de una magnitud continua, sino como conjunto distributivo discreto de números separados, pero sin huecos entre sí. Lo cual es, imaginativamente, una aberración" (De Lorenzo, 2007, p. 15).

A pesar de todo ello, el trabajo matemático se sigue entendiendo como una labor que busca, ante todo, lograr demostraciones consistentes desde el punto de vista formal, en lugar de poner de relieve las aplicaciones de este saber, que tanta relevancia práctica tienen en el mundo actual. De Lorenzo piensa que:

> "… si se tuviera en cuenta este último hecho cabría considerar que en muchos casos los postulados no son enunciados veritativos, sino legislativos o, en otros términos, normativos. Y de las normas no se puede realizar atribución alguna de verdad o falsedad porque no son juicios veritativos sino constitutivos de un campo de juego determinado. Las leyes se aceptan o rechazan, y si se aceptan pueden manejarse bien o mal, puede hacerse una construcción hermosa o un adefesio, un teorema excepcional o una nimiedad. Eso dependerá de quien sea el jugador que juegue y que, para ello, y en cualquier caso, tiene que dominar las normas, las reglas de juego, es decir, las hipótesis o postulados pero como normas caracterizadoras tanto de su terreno de juego como de cómo jugar en el mismo" (De Lorenzo, 2007, p. 20).

Que los modelos computacionales funcionan con presupuestos epistemológicos radicalmente distintos a la matemática demostrativa es un hecho que se ha venido observando desde hace algún tiempo. Su renuncia, en aras de la efectividad, a proceder mediante postulados veritativos es una de sus principales características. Otras de no menor importancia serían: la opacidad epistémica que se produce entre sus presupuestos de partida y los resultados finales del cálculo; la estratificación semántica de sus enunciados, que le permite alcanzar soluciones por aproximación —o aproximadamente verdaderas—, eligiendo el número de capas que añadir a las funciones descriptivas del modelo; y la innovación epistémica de sus soluciones, caracterizada por una gran prolificidad en sus métodos y concepciones de las soluciones numéricas.

Sin entrar en pormenores, en el contexto de la simulación computacional podemos entender la opacidad epistémica bien como una incapacidad para conocer todos los pasos epistémicamente relevantes que se producen durante la ejecución de un algoritmo (Humphreys, 2004, p. 618), bien como una falta de algoritmo explícito que vincule los datos de entrada con los de salida de un proceso —esta modalidad es conocida como irreductibilidad computacional (Barberousse *et al*., 2014, p. 148)—, bien como una pérdida de interpretabilidad entre un enunciado matemático y la caracterización original del problema del cual el enunciado forma parte. Esto también puede ser considerado como una falta de interpretabilidad de la información que se halla en algunos pasos de una computación, en términos que tengan sentido en nuestra representación del sistema objetivo. A esta última modalidad la denominamos opacidad interpretacional y, en el caso de que el sistema objetivo u original sea un fenómeno físico, recibiría el apelativo de opacidad representacional.

El fenómeno general de la opacidad no solo debe ser considerado como una característica negativa de la matemática computacional, como un precio que se debe pagar por la gran fertilidad y aplicabilidad de los métodos numéricos, sino que es una consecuencia directa de su naturaleza normativa y del poder de mutación de sus procedimientos. En efecto, el enfoque no veritativo de su arquitectura interna hace que no sea ni tan siquiera posible el seguimiento de sus desarrollos en forma de cadenas derivativas; bien por la incapacidad de la mente para igualar la velocidad de cálculo de los computadores, bien por la multiplicidad de cálculos intermedios ocultos, implícitos, o también por la construcción finalista, no axiomática, de sus enunciados, que, por tanto, no siguen un patrón predecible a partir del punto de partida o de sus antecedentes, y cuyos procesos mutan constantemente con el fin de lograr resultados más exactos con el menor coste computacional posible.

Por otra parte, cuando hablamos de estratificación semántica, nos referimos a un proceso distintivo de los métodos de aproximación computacional donde están presentes la incertidumbre, la gestión del error y la aproximación de soluciones. En él, la información que se transmite durante el desarrollo del método numérico se encuentra repartida en distintas capas, como por ejemplo en los diferentes términos de una serie numérica. La proporción de contenido informativo no estaría repartido de manera equivalente entre todas las capas, sino que la primera capa, que supondría la aproximación más grosera a la solución, poseería la mayoría de la información del sistema. La cantidad de información iría disminuyendo paulatinamente con las restantes capas. De esta manera, existirían múltiples formas de aproximar la solución de un modelo numérico, en función del número y del tipo de capas semánticas que se elijan (Fillion, 2021, p. 11).

La innovación o mutabilidad epistémica es una cualidad que incide en la naturaleza cambiante de la solución matemática. En efecto, la introducción del ordenador ha propiciado una innegable proliferación de esquemas numéricos y de metodologías para resolver modelos matemáticos que emplean ecuaciones que no poseen solución analíticamente exacta. Esto ha supuesto en la práctica una ampliación sin precedentes de las situaciones en las que es posible encontrar soluciones a las ecuaciones. Ahora bien, lo cierto es que no solamente se ha ampliado el rango de soluciones posibles, sino que se ha modificado el mismo concepto de solución matemática.

En la matemática computacional, el concepto de solución numérica es un término general que reagrupa numerosos métodos de resolución. Teniendo en cuenta que, a diferencia de la matemática tradicional, en donde la solución procedía simplemente de la sustitución de los valores adecuados en los términos de la ecuación, las soluciones numéricas dependen de una negociación equilibrada entre diferentes criterios que se encuentran en conflicto, como la tratabilidad, la velocidad, la exactitud, o la estabilidad. Esto significará que cada fórmula elegida para hallar un compromiso entre los mencionados criterios supondrá un tipo diferente de solución. Además, como la solución numérica es el único requisito que se necesita para la correcta comprensión de los modelos computacionales, puesto que su valor de verdad ya no depende de ninguna justificación acerca de la correcta deducción de sus postulados, sino únicamente de la eficacia de sus resultados, las distintas direcciones en las que se desarrollen los modelos requerirán clases distintas de soluciones, más o menos exactas, precisas, probabilísticas, etc.

Otra cuestión relevante sería la de las condiciones validativas que deben reunir los enunciados normativos de los métodos computacionales. Efectivamente, si desechamos, a causa de sus facultades epistémicas, la posibilidad de juicios veritativos en los métodos computacionales, debemos buscar otras estrategias de otorgamiento de valores de verdad a los resultados de las simulaciones computacionales. Dos son las vías que han permitido apuntalar la certidumbre de las soluciones numéricas: el análisis del error y la estrategia de verificación y validación. La primera supone un análisis interno de los valores de la solución, mientras que la segunda se basa en el contraste con el modelo de partida y con mediciones externas, respectivamente.

El análisis del error es una disciplina de gran importancia para el análisis numérico, puesto que el mayor problema de la aproximación a la solución de un modelo emana del desconocimiento real que tenemos de la distancia que hay entre la solución verdadera y la solución aproximada. Por ello, se debe asumir que el modelo numérico de un fenómeno físico, que contiene incertidumbre y errores de redondeo, discretización y truncamiento, no es solamente una réplica imperfecta del modelo analítico, cuyo valor solución no es calculable, sino que es una forma menos idealizada de reflejar la realidad del fenómeno. En efecto, pretender que la resolución analítica de ecuaciones mediante herramientas que conducen a soluciones exactas, como el cálculo infinitesimal, diferencial e integral, sea un reflejo fidedigno de los fenómenos reales sin contemplar en ellos ninguna clase de incertidumbre, perturbación, aproximación o error, es sin duda una ingenuidad. No podemos escapar a la inclusión de las dimensiones de complejidad e incertidumbre en los modelos, si queremos aproximarnos lo máximo posible a la realidad. En consecuencia, tener formas de acotar el error en el que incurre un modelo por múltiples causas, sin poder acceder a los valores exactos de la solución, es algo sumamente importante. Ello se consigue, por ejemplo, con el *backward error analysis*, donde se cuantifica la cantidad de error acumulado como consecuencia de la perturbación de los valores de entrada del modelo (Fillion *et al.*, 2014).

Por último, otra vía complementaria vendría dada por las metodologías de verificación y de validación de los modelos. La verificación de un modelo computacional consiste en una comparación entre el modelo matemático-conceptual de un fenómeno y su representación numérica. Sirve para interrogar acerca de la correcta representación de los parámetros y de la estructura lógica del modelo. Es decir, su finalidad no es averiguar si el modelo numérico es un fiel reflejo de la realidad física, sino que es asegurar que nuestra concepción de la realidad, sea cual sea, está correctamente implementada en el modelo numérico.

La validación, sin embargo, sí se ocupa de evaluar la representación numérica de una realidad física. Normalmente se realiza mediante comparaciones entre valores numéricos del modelo con sus homólogos del mundo real. Por ejemplo, se pueden medir determinadas características de un fenómeno físico y realizar después una calibración del modelo comparando dichas medidas con los valores correspondientes de la representación numérica.

La verificación y la validación constituyen una forma de asegurar el vínculo de la normatividad con la veritatividad. Podemos, en efecto, construir un modelo conforme a unas reglas que nos hemos dado, internamente, a causa de su eficacia en lograr una finalidad matemática en forma de resolución de ecuaciones, y de su eficiencia en el aprovechamiento de los recursos de memoria y velocidad de cálculo del ordenador. Pero, además, debemos asegurarnos de que dichas reglas coinciden en sus resultados con las leyes naturales, lógicas y experimentales. Einstein comentaba a propósito del desarrollo de Occidente, que han sido dos los grandes logros de la ciencia occidental: la invención de la lógica formal por los filósofos griegos y el descubrimiento, durante el Renacimiento, de la posibilidad de encontrar relaciones causales mediante experimentos sistemáticos. Ambos aspectos deben estar correctamente garantizados en la estructura de los modelos numéricos si queremos que formen parte del patrimonio científico y no sean considerados como elucubraciones pragmatistas.

Metafísica y ciencia

Como se ha señalado reiteradamente, desde el momento mismo en que surge la ciencia moderna se replantea con inusitada radicalidad la correlación entre conocimiento y realidad. En ese sentido, Claudine Tiercelin recuerda que ciertas cautelas llevaron a los científicos de la época renacentista a escudarse en una interpretación de las teorías como instrumentos de representación de los fenómenos empíricos, pero manteniendo siempre la idea de la existencia de una insalvable distancia entre teoría y realidad (Tiercelin, 2014, p. 4).

Desde tal perspectiva, se considera que hay un “solo y único conjunto de fenómenos (puesto que la base observacional es la misma)”, lo que llevará a plantear la posibilidad de unificar el lenguaje científico que intenta explicar de forma adecuada dicho conjunto de fenómenos. Por ello se considerará que la “heterogeneidad de los fenómenos y de las ciencias no es, por tanto, sino aparente o en el mejor caso, pragmática: es por eso dejada en suspenso (más bien que negada) la cuestión (metafísica) de saber si sí o no, la realidad comporta grados o niveles jerárquicos de complejidad perfectamente reductibles. En cuanto a los sistemas metafísicos, son ‘un sustituto de la teología al nivel del pensamiento conceptual y sistemático’, ‘poemas conceptuales’ que ‘contribuyen a enriquecer la vida, pero no el conocimiento’, dirá Carnap” (Tiercelin, 2014, pp. 5-6).

El concepto de ciencia ha experimentado, a lo largo del pasado siglo, una profunda trasformación (Tiercelin, 2014, p. 9). En base a ella, el concepto imperial de ciencia ha quedado de facto desplazado, aunque todavía haya científicos y filósofos de la ciencia que parecen no haberlo advertido. Lo que en la actualidad define a la ciencia es “ser, más que un cuerpo de conocimiento o una doctrina, una actividad de descubrimiento, una persecución del saber, más que un saber, en una palabra, una indagación (*inquiry*) que, al prolongarse, exige del investigador cierto número de virtudes particulares. También hemos de evocar las relaciones entre ciencia, conocimiento y ética” (Tiercelin, 2014, p. 10).

En ese sentido hemos de considerar, tal como hace Tiercelin, que rechazar el uso de conceptos metafísicos clave, como aquellos que definen estructuras categoriales o elementos conceptuales que permiten delimitar la singularidad de elementos o procesos, “es privarse de los mismos materiales conceptuales por los que el mismo cambio puede ser descrito de forma coherente. La metafísica tiene, en este sentido, un papel decisivo para apoyar la posibilidad misma del conocimiento empírico” (Tiercelin, 2014, p. 17). De igual manera podríamos hacer referencia a los elementos teóricos que hacen posible la toma en consideración de la posibilidad, con independencia de si con ellos pretendemos analizar lo sucedido o aquello que se considera susceptible de acaecer (Tiercelin, 2014, pp. 21-22). De forma análoga, hemos de replantearnos el desarrollo del pensamiento metafísico tratando de iluminarlo a la luz del avance científico, también hemos de tomar en consideración la influencia positiva que la metafísica puede tener en diversos campos científicos. Por ello, Tiercelin plantea que la metafísica es “también, a su manera, una guía para la ciencia: en un caso como en el otro, aquello que hay que tener presente, sobre todo, en efecto, es que no son guías infalibles” (Tiercelin, 2014, p. 32).

Por lo tanto, la metafísica constituye un soporte conceptual para la ciencia y, por ende, para cualquier clase de conocimiento que pretenda realizar una indagación de la realidad sobre estructuras de carácter universalizante y objetivo. Ciertamente, las ciencias empíricas no podrían sino quedar atrapadas en concepciones instrumentalistas o pragmáticas de su contenido —meros conjuntos de datos sin capacidad de trascendencia, ni siquiera a través de una idealización teórica que, sin la categorización metafísica, colapsaría en simple fantasía—, sin el concurso de una metafísica realista que aporte coherencia, interpretabilidad y unidad absoluta del conocimiento.

Ahora bien, siendo evidente que una perspectiva realista de la metafísica puede ser alcanzada sin mayores inconvenientes en las ciencias empíricas, en las que el concurso de lo real físico facilita un material idóneo para ser ordenado epistemológicamente por medio del soporte de los conceptos metafísicos, ¿podríamos decir lo mismo en el caso de la matemática, especialmente de la matemática pura? ¿Es posible aquí la mezcla de ambas tipologías epistémicas sin que sea puesto en entredicho el suelo firme de la positividad matemática? Sería normal opinar que en el fenómeno matemático solo caben los dictados de la normatividad lógico-formalista, para lograr el fin de garantizar el orden de sus estructuras. Empero, dicho enfoque no bastaría para dar cuenta de numerosas manifestaciones de un orden que se impone muchas veces entre el caos, y que viene continuamente a enriquecer el acervo matemático. A dichas manifestaciones nos hemos referido con bastante detalle en los primeros apartados del presente trabajo. Como nos sugiere Simone Weil, "la invención matemática es trascendente. Procede de analogías absolutamente irrepresentables, y sólo es posible comprobar sus consecuencias. Gracias a que las matemáticas son en grado singular y por excelencia claras, cogemos el misterio en la red" (Weil, 2001).

En matemática, es el sustrato metafísico de sus enunciados lo que otorga el claro enlazamiento entre las estructuras más abstractas y el orden interno del conocimiento. Si las matemáticas no son vistas como un encadenamiento de conceptos formales y normas independientes de cualquier contenido real, como un mero juego de símbolos vuelto sobre sí mismo, si, por el contrario, son consideradas como una estructura que atraviesa el pensamiento e incluso la realidad en su totalidad; es justamente porque se apoyan y desenvuelven en un orden conformado por elementos que están más allá de su practicidad operativa, ya sea calculística o deductiva. No sería posible la creatividad, y la especulación matemática sin la intervención de herramientas que permitan al pensamiento situarse por encima y por fuera de sí mismo. Únicamente la analogía y la metáfora en un contexto metafísico apropiado al discurso matemático son capaces de proyectar los valores esenciales de la *mathesis*. Por ello, conceptos como los de muro, laberinto, punto de bloqueo, belleza o cristalización son esenciales para construir un discurso que dote de sentido interpretativo a la dinámica de la génesis y de los problemas de la matemática, y ello desde un punto de vista humanístico, esto es: más allá del tecnicismo ciego, con un sentido global y abierto. Acerca de esto, André Weil refiere en uno de sus escritos que:

> "Los matemáticos del siglo XVIII solían hablar de la metafísica del cálculo infinitesimal, de la metafísica de la teoría de las ecuaciones. Con esto se referían a un conjunto de analogías vagas, difíciles de comprender, que sin embargo les parecían jugar un papel importante en un momento dado de la investigación y el descubrimiento matemático" (Weil, 1960, p. 1).

Lo cual significa que ya era habitual, desde los orígenes modernos de la matemática, la práctica de emplear metáforas y analogías como medio de investigación y especulación sobre nuevos conceptos matemáticos. No podría haberse seguido con éxito esta traducción lingüística de la intuición matemática, sin la protección que proporcionaba asumir la existencia de una rejilla metafísica de concepciones sobre las que apoyar el incipiente descubrimiento matemático.

Además, en la oscuridad y la indefinición premeditada de estas analogías a las que se refiere Weil se produce la fermentación de las nuevas teorías. No es posible que exista, a su juicio, terreno más fértil que el de las disputas y las reflexiones inquietantes entre teorías que se acarician de manera furtiva. Es como una ilusión que se va gestando y engordando a medida que nuevos elementos se van añadiendo al caldo del pensamiento. Pero llega un día en el que la fantasmagoría se desvanece, los presentimientos largamente mascullados se materializan, y salen a la luz diáfana del día las relaciones entre teorías, las fuentes comunes y las estructuras que enganchan en sus nodos nuevos conceptos, como peces atrapados en una red: la metafísica se ha vuelto matemática y su fría belleza, reflejada en áridos tratados, ya no puede conmovernos (Weil, 1960, p. 1).

El proceso que siguió Lagrange para lograr la génesis de la noción de grupo es un ejemplo muy esclarecedor de la importancia del soporte metafísico, y también del lugar que le corresponde a dicho soporte como precursor de toda estructura matemática.

> “Donde Lagrange vio analogías, vemos teoremas. Pero éstos sólo pueden anunciarse mediante nociones y estructuras que para Lagrange no eran objetos matemáticos: grupos, cuerpos, isomorfismos, todo esto necesitaba ser concebido y definido. Mientras Lagrange sólo perciba estas nociones, mientras se esfuerce en vano por alcanzar su unidad sustancial a través de la multiplicidad de sus encarnaciones cambiantes, permanecerá atrapado en la metafísica. Al menos encuentra ahí el hilo conductor que le permite pasar de un problema a otro, poner los materiales en funcionamiento, poner todo en orden para la futura teoría general” (Weil, 1960, p. 1).

En efecto, entre la noción de estructura y la intuición inicial existe una vinculación que solamente puede ser sacada a la luz tirando del hilo conductor de las concepciones metafísicas. La analogía que se realiza entre la multiplicidad de encarnaciones cambiantes de los objetos matemáticos va poco a poco convergiendo en una única imagen de la intuición matemática inicial. El proceso de formación de las estructuras por medio de analogías puede ser denominado “cristalización”. Tal suceso puede ocurrir únicamente en un entorno con la libertad conceptual que solo asegura la presencia de un marco metafísico adecuado.

Racionalidad

La racionalidad tiende a la unificación, a la agrupación de lo diverso según los indicios que en ello aparecen de perdida homogeneidad, a la integración por la vertiente de las formas y también por la de los contenidos. Pero, tanto en una como en otra, esa unidad es problemática y por ello es natural que sea permanentemente contestada por quienes ven en ella una toma de posición conformista o a favor de lo ya conocido.

Por añadidura, ningún individuo o grupo pueden erigirse en paladines exclusivos del proyecto de racionalidad o racionalización. Son múltiples los proyectos que pueden extender la racionalidad en la sociedad y en la historia, porque las formas de la racionalidad y las situaciones históricas múltiples lo son también. Y si alguien apela a principios inamovibles o referentes inmortales, habrá que recordarle esta crasa verdad: los principios son invenciones.

Claro está que quienes inventan principios están interesados en lograr su aceptación por parte del mayor número posible de entre los miembros de la sociedad. Y en esa hipotética aceptación no se barajan factores de una determinada índole. La cara de quien los defiende, su trayectoria vital, su presencia e imagen, la coyuntura sociohistórica que se esté atravesando, la simplicidad y racionalidad de la propuesta, diversos factores emotivos, es decir: un sinfín de elementos influyen en la aceptación o no de la propuesta axiológica.

Aceptado este supuesto, más que en la exclusiva naturaleza racional de los principios que consideramos aceptables, habría que insistir en las posibilidades de conciliarlos con otros principios, propuestas o planteamientos de carácter racional. Porque, en efecto, hay principios compatibles con la racionalidad y otros que no lo son. Por ejemplo, si aceptamos la legitimidad del asesinato estamos poniendo en práctica un modo de expresión que excluye el diálogo y nos lleva al suicidio moral. El diálogo es un valor fundamental y una base necesaria para una convivencia plenamente democrática, pero nadie puede dialogar con quienes, de forma implícita o explícita, estén diciendo: tenemos derecho a matarte si no conseguimos convencerte.

Hay una ética que insiste sobre el carácter primordial de los principios y otra que concede más importancia a las consecuencias de las acciones. Pero la ética de los principios es la ética por excelencia.

No se puede justificar la conducta de nadie que cause sufrimiento a personas inocentes. En último término tampoco puede hallar justificación alguna el asesinato. La iniquidad de los medios hace también deleznables los fines. Por ejemplo, el problema ético fundamental en Sartre es el del mantenimiento de la subjetividad. No es otra cosa que el intento de impedir el suicidio del sujeto moral, aun reduciendo a su mínima expresión la ética de los principios. La subjetividad implica libertad, y la libertad responsabilidad. En el extremo, el único principio es el de la subjetividad libre, creadora desde el punto de vista moral. Lo otro es ir por la vía de la ética de las consecuencias. Sartre está, pues, a medio camino entre ambas tendencias éticas.

Alexandre Grothendieck: la matemática y la esencia de lo real

Lo que hemos pretendido demostrar a través de lo que nos atreveríamos a denominar “teoría de muros” es la dificultad que acompaña a todo intento de salir del espacio amurallado del conocimiento, sea pensable como un recinto cerrado o como un camino protegido por dos murallas. Incluso en este último caso, hasta asomarse por encima de los muros y tratar de ver lo que hay fuera del camino predeterminado, entraña una gran dificultad.

Un planteamiento derivado del teorema de Gödel resulta ser reductor y aperturista al mismo tiempo, ya que cierra unos espacios de creación y reflexión, al tiempo que abre otros. Sin embargo, el valor de la potencia de apertura que nos hace advertir ha de considerarse muy superior al de las limitaciones que introduce.

Que no exista un algoritmo universal de resolución, en un ámbito tan emblemático como el de la aritmética, abre posibilidades al pensamiento matemático. Grothendieck siempre concibió la investigación matemática como un trabajo de demolición de muros y de apertura de nuevos caminos. Un determinado desarrollo teórico puede contribuir a la conversión de lo que era un muro en la acotación de un camino. Sin embargo, lo previsible es que, al recorrer una y otra vez ese camino, los límites que lo encuadran se hagan cada vez más altos y el propio camino llegue a ser frontera amurallada.

Financiamiento

La investigación conducente a los resultados que se dan a conocer a través de este artículo se enmarca en el proyecto de investigación: "Praxeologia de la cultura científica". Referencia: FFI2017-82217-C2-1-P. Convocatoria 2015 - Proyectos I+D+I - Programa Estatal de Investigación, Desarrollo e Innovación Orientada a los Retos de la Sociedad.

Bibliografía

Anderson, A. R. (1970). Mentes y máquinas, México: UNAM.

Barberousse, A. y Vorms, M. (2014). About the warrants of computer-based empirical knowledge. Synthese, 191(15), 3595–3620.

Boden, M. (1984). Inteligencia artificial y hombre actual. Madrid: Tecnos.

Brenner, A. (2011). Sur Émile Meyerson et son oeuvre. Revue critique, Revue d'histoire des sciences, 2010/1(63), 299-302.

Colli, G. (1996). Filosofía de la expresión. Madrid: Siruela.

De Lorenzo, J. (2007). Imágenes del Hacer matemático. Estudios filosóficos, 56(162), 229-248.

Eco, U. (1985). Apostillas al nombre de la rosa. Barcelona: Ed. Lumen.

Fillion, N. y Corless, R. M. (2014). On the epistemological analysis of modeling and computational error in the mathematical sciences. Synthese,191,1451-1467.

Fillion, N. (2021). Semantic layering and the succes of mathematical sciences [Manuscrito enviado para su publicación]. Universidad Simon Fraser.

Foucault, M. (2014). El pensamiento del afuera. Valencia: Pre-textos.

Grothendieck, A. (2012). Récoltes et semailles. Montpellier: Université des Sciences et Techniques du Langedoc et Centre National de la Recherche Scientifique.

Hofstadter, D. R. (1987). Gödel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle. Barcelona: Tusquets.

Humphreys, P. (2004). Extending ourselves: Computational science, empiricism, and scientific method. Oxford: Oxford University Press.

Kant, I. (2002). Crítica de la razón pura. Madrid: Tecnos.

Penrose, R. (1996). La mente nueva del emperador. México: FCE.

Poincaré, H. (1963). Sobre la naturaleza del razonamiento matemático. La ciencia y la hipótesis. Madrid: Espasa-Calpe.

Sánchez Ron, J. M. (2003). El sueño de Von Neumann y la realidad de Freud. Revista de la Asociación Española de Neuropsiquiatría, 85, 77-87.

Tiercelin, C. (2014). La métaphysique et les sciences. Les nouveaux enjeux. París: Collège de France.

Turing, A. (1974). ¿Puede pensar una máquina? Valencia: Cuadernos Teorema.

VV.AA. (1986). Los filósofos presocráticos. Madrid: Gredos.

Wang, H. (1991). Reflexiones sobre Kurt Gödel. Madrid: Alianza.

Weil, A. (1960). De la métaphysique aux mathématiques, OC, vol II. París: Hermann.

Weil, S. (2001). Cuadernos. Madrid: Trotta.

Cómo citar este artículo

Fernández Agis, D. y Ramírez Naranjo, J. A. (2021). Muros: Orden matemático y ontología del desorden. Reflexiones sobre el legado de Alexandre Grothendieck. Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad —CTS, 16(48), 249-272.