Artículos

Teorema del Valor Medio

Mean Value Theorem

Jesús Espino Márquez [a]
Tecnológico Nacional de México, México
jesus.em@aguascalientes.tecnm.mx

Moisés Israel Márquez González
Tecnológico Nacional de México, México
moises_israel.mg@aguascalientes.tecnm.mx

Resumen:

La experiencia adquirida a lo largo de la labor docente ha mostrado las dificultados que implica la enseñanza – aprendizaje de la matemática, en este trabajo se ha seleccionado el tema del Teorema del Valor Medio para derivadas porque se considera que es un buen ejemplo el cual permite comprender lo que es un modelo matemático, así como algunas de sus múltiples aplicaciones. Como se establece en los objetivos de este trabajo el cual pretende ser una muestra de los que puede realizarse para apoyar la labor docente del profesor de matemáticas. Es de suma importancia las aplicaciones de la matemática ya que además de que permite encontrar la solución a diversos problemas que se encuentran en la vida cotidiana, se muestra con objetividad su utilidad en todos los campos de la ciencia. Los requisitos que se deben cubrir para la comprensión de este tema es el conocimiento de:

- Concepto de función.
- Concepto de continuidad de una función.
- Concepto de límite de una función.
- Derivada de una función, así como interpretaciones geometría y física.
- Teorema de Rolle.

Antes de entrar en el tema central de este trabajo es importante que se considere lo siguiente: La finalidad de gran parte de la matemática es la descripción sencilla y en la medida de lo posible, precisa del mundo al rededor. El ideal que se tiene en la ciencia de la naturaleza consiste en construir un modelo partiendo de ideas que se llevan dentro. Para definir matemáticamente cualquier cosa del mundo real, es necesario diseñar un modelo apropiado que relacione las variables que intervienen. El propósito de este modelo podría ser, por ejemplo, determinar la distancia entre la tierra y el sol expresada en función del tiempo, o relacionar el punto de ebullición del agua con la presión externa, o la manera de mezclar la materia prima de una refinería para obtener combustibles para motores. Un modelo consta de una o más ecuaciones o desigualdades; estas pueden tener solamente variables o variables y sus derivadas (ecuaciones diferenciales) o variables relacionadas de otra forma (por ejemplo, ecuaciones integro – diferenciales). No es necesariamente cierto que las variables se puedan determinar exactamente por el modelo; puede haber variables aleatorias y en este caso lo único que se puede hallar es la probabilidad de distribución. Ningún modelo es una imagen exacta del mundo real; las aproximaciones son siempre necesarias. En algunos casos es posible diseñar modelos con tanta precisión, que permiten encontrar correctamente diez o más cifras decimales como son los modelos lineales, en otras ocasiones los modelos pueden diferir en más del 100% de los resultados por las medidas físicas reales (modelos no lineales). En realidad, a veces se espera que un modelo sirva únicamente para predecir en forma cualitativa el comportamiento de las variables. La precisión requerida de un modelo depende del fin para el cual ha sido diseñado.

Abstract:

The experience acquired throughout the teaching work has shown the difficulties involved in the teaching-learning of mathematics. In this work, the topic of the Mean Value Theorem for derivatives has been selected because it is a good example which allows understand what a mathematical model is, as well as some of its multiple applications. As established in the objectives of this work, which aims to be a sample of what can be done to support the teaching work of the mathematics teacher. The applications of mathematics are of utmost importance since, in addition to allowing us to find the solution to various problems found in everyday life, its usefulness is objectively shown in all fields of science. The requirements that must be met to understand this topic is knowledge of:

- Function concept.
- Concept of continuity of a function.

Notas de autor

[a] Autor de Correspondencia. Correos de contacto: jesus.em@aguascalientes.tecnm.mx

- Concept of limit of a function.
- Derivative of a function, as well as geometry and physics interpretations.
- Rolle's theorem.

Before entering the central topic of this work, it is important to consider the following: The purpose of much of mathematics is the simple and as far as possible, accurate description of the world that surrounds. The ideal in natural science is to build a model based on ideas that are carried within. To mathematically define anything in the real world, it is necessary to design an appropriate model that relates the variables involved. The purpose of this model could be, for example, to determine the distance between the earth and the sun expressed as a function of time, or to relate the boiling point of water to external pressure, or the way to mix raw materials in a refinery. to obtain motor fuels. A model consists of one or more equations or inequalities; these may have only variables or variables and their derivatives (differential equations) or variables related in another way (for example, integral differential equations). It is not necessarily true that the variables can be determined exactly by the model; There may be random variables and, in this case, the only thing that can be found is the probability of distribution. No model is an exact image of the real world; approximations are always necessary. In some cases, it is possible to design models with such precision that they allow ten or more decimal figures to be correctly found, such as linear models. In other cases, models can differ by more than 100% from the results due to real physical measurements (non-linear models). A model is sometimes expected to serve only to qualitatively predict the behavior of variables. The required precision of a model depends on the purpose for which it has been designed.

Introducción

El Teorema del Valor Medio (TVM) es uno de los pilares fundamentales en el cálculo diferencial y tiene aplicaciones significativas en diversas disciplinas científicas y tecnológicas. La enseñanza de este teorema, sin embargo, presenta varios desafíos debido a la necesidad de un sólido entendimiento previo de conceptos matemáticos como funciones, continuidad, límites y derivadas. Según Zill (2011), el TVM no solo es crucial para la comprensión teórica, sino también para la modelización matemática, la cual permite describir de manera precisa y simple el mundo que nos rodea. La base teórica del TVM se encuentra en el Teorema de Rolle, el cual establece que si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) , y si además $f(a)= f(b)$, entonces existe al menos un punto c en (a,b) tal que $f'(c)=0$. El TVM generaliza esta idea, afirmando que para una función continua en $[a,b]$ y derivable en $[a,b]$, existe un punto c en (a, b) donde la derivada de la función es igual a la pendiente de la secante que une $f(a)$ y $f(b)$ y (Swokowski, 1988). Las aplicaciones del TVM son vastas y diversas. En la física, por ejemplo, el TVM es utilizado para demostrar la existencia de velocidades instantáneas en movimientos rectilíneos. En economía, ayuda a modelar tasas de cambio y optimizar funciones de costos y beneficios. En el ámbito de la ingeniería, es fundamental para el análisis de esfuerzos y deformaciones en materiales (Zill, 1988). En términos de precisión y modelado, es importante destacar que ningún modelo matemático es una representación exacta de la realidad. Las aproximaciones y simplificaciones son necesarias para hacer el análisis manejable y útil. Modelos lineales pueden proporcionar predicciones extremadamente precisas, mientras que modelos no lineales pueden diferir significativamente de las mediciones físicas reales. Esta variabilidad subraya la necesidad de seleccionar el modelo adecuado dependiendo del propósito específico del análisis (Zill, 1988).

Desarrollo

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) , entonces existe al menos un valor de $(x=x_0)$ comprendido en (a,b) tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$

Para que la demostración sea más objetiva, considere la interpretación geometría de este teorema, como la función *f(x)* es continua en [*a,b*], entonces su gráfica es una curva simple (trazo continuo) como se muestra en la figura 1. Sean *A* y *B* dos puntos de la curva cuyas coordenadas son *(a, f(a) y (b, f(b))* respectivamente. El teorema establece que existe una recta tangente (por lo menos una) a la curva en el punto que es paralela a la recta que pasa por *A* y *B*. Ahora, la ecuación de la recta que pasa por *A* y *B* es de la forma:

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - f(a))$$

Sea *F(x)* la distancia vertical que existe entre el punto *Q* de la curva y la recta que pasa por *A* y *B*, como se observa en la Figura 1, entonces:

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

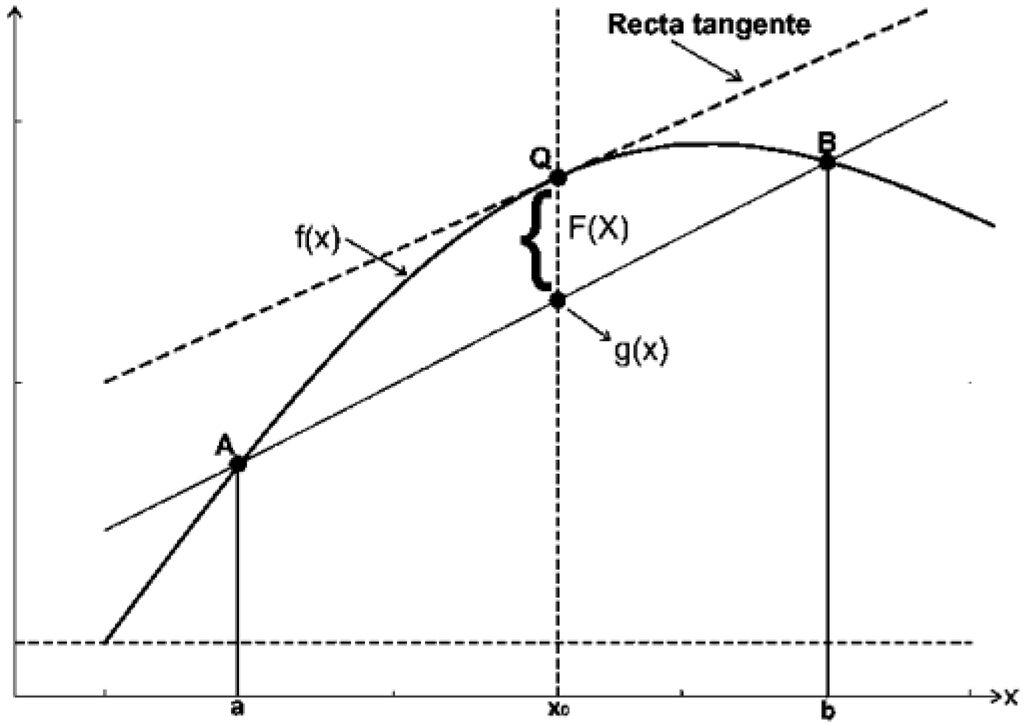

FIGURA 1.
Elaboración propia.

Donde *f(x)* es la función que define a la curva y *g(x)* es la ordenada de la recta que pasa por *A* y *B* (función que define a la recta) como *f(x)* y *g(x)* son funciones continuas, entonces también lo es *F(x)* , por otro lado, *(a) = F(b) =0*, además como *f(x)* y *g(x)* son derivables, entonces también lo es *F(x)* , por tal motivo, *F (x)* cumple con las condiciones del teorema de Rolle, entonces se tendrá:

$$F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$

La interpretación física del teorema de valor medio establece que existe un momento en el que la variación de una cantidad definida por *f(x)* es igual a la razón de cambio de dicha cantidad entre los extremos del intervalo. Este teorema tiene varias formas de expresarse, las cuales son de gran utilidad, como se muestran en la Tabla 1:

TABLA 1
Formas de expresar el Teorema del Valor Medio.

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$
$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$
$f(b)=f'(x_0)(b-a)+f(a)$
Si $b=x,\ f(x)=f'(x_0)(x-a)+f(a)$
Si $x_0=a+\theta\cdot(b-a);\quad 0<\theta<1$ $f(b)=f(a)+(b-a)\cdot f'(a+\theta(b-a))$
Si $b-a=h$ $f(a+h)=f(a)+h\cdot f'(a+\theta h)$
Si $a=x$ y $h=\Delta x$ $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta x\cdot f'(x)+\theta\Delta x$

Con base a lo anterior, se presenta a continuación algunos ejemplos de aplicación del teorema del valor medio.

1) Sea $f(x)=3x^2+4x+3$ una función definida en [1,3], entonces $f'(x)=6x+4$ como $a=1$ y $b=3$ obtenga por medio del teorema del valor medio el valor de la coordenada en x.

$$f'(x)=6x+4\Rightarrow\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$

$$f'(x)=\frac{[3(3)^2+4(3)+3]-[3(1)^2+4(1)+3]}{2}$$

$$f'(x) = 6x + 4 = \frac{32}{2} = 16$$

$$\therefore \quad x = 2$$

Geométricamente: La curva definida por *f(x)* tiene una recta tangente paralela a la recta que pasa por los puntos en $x = 2$ (única).

Físicamente: La variación de *f(x)* en $x = 2$ es igual a la razón que existe entre los valores de [1,3].

$$f(3) = 42, f(1) = 10$$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{42 - 10}{2} = 16$$

Ahora: $f'(2) = 6(2) + 4 = 16$

Como se podrá observar:

$$f'(2) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$$f'(2) = \frac{[3(3)^2 + 4(3) + 3] - [3(1)^2 + 4(1) + 3]}{2}$$

$$f'(2) = \frac{27 + 12 + 3 - (3 + 4 + 3)}{2} =$$

$$f'(2) = \frac{42 - 10}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

2) Un automovilista entra a una autopista y recibe un talón marcado a las 1:15 pm, 60 millas más adelante, cuando el automovilista paga el peaje a las 2:15 pm, recibe una boleta de infracción. Explique esto por medio del Teorema del Valor Medio, supóngase que el límite de velocidad es de 55 millas por hora, la Figura 2 muestra la trayectoria recorrida.

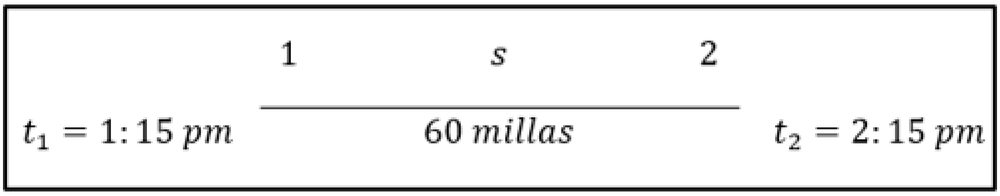

FIGURA 2.
Recorrido del automovilista.

La función que define el desplazamiento es $s(t) = vt$ donde v es la velocidad y t es el tiempo. La función es continua en todo el trayecto (intervalo) que en este caso es la distancia entre las dos casetas, la caseta con los extremos del intervalo, por lo tanto, la función cumple con las condiciones para aplicar el Teorema del Valor Medio.

$$s(t_1) = S(1.15) = 0 \quad (\textit{en la caseta } 1)$$

$$s(t_2) = S(2.15) = 60$$

Como:

$$s = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Entonces:

$$v = \frac{s(2.15) - s(1.15)}{2.15 - 1.15}$$

$$v = \frac{60 - 0}{1} = 60\ millas/h$$

Por otro lado:

$$s(t) = v \rightarrow s'(t) = v$$

Y de acuerdo con el Teorema del Valor Medio, se tiene:

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = S'(t)$$

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = v$$

Entonces por las ecuaciones (8) y (10) se obtiene que, *v=60 millas/h*. Lo anterior quiere decir que por lo menos existe un momento durante el trayecto en donde la velocidad fue de 60 millas/h, por lo tanto, el automovilista se hace acreedor a la infracción.

3) Los sistemas con fuentes de calor (ó sumideros) se aplican en diferentes ramas de la ingeniería, como, por ejemplo, en la Figura 3 en la conducción de calor en estado estable en una placa plana, con generación interna homogénea de calor. Considere una placa plana en la cual el calor se genera uniformemente. Esta placa podría ser un elemento de calentamiento tal como una barra plana de un cuadro de distribución, en el cual se genera el calor al pasar una corriente eléctrica a través de ella. Si se supone que es un estado estable, el material homogéneo y que la placa es suficientemente larga para poder pasar por alto los efectos en los extremos.

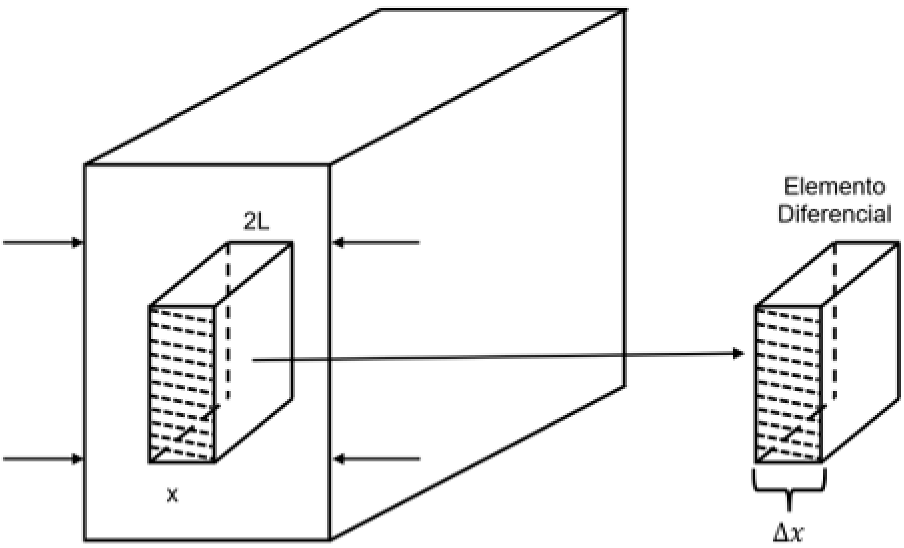

FIGURA 3.
Placa plana.

La ecuación de energía para un elemento diferencial se expresa de la siguiente manera, observe la Figura 5:

Calor conducido a través de la cara izquierda durante un tiempo Δt	+	Calor generado por las fuentes en el elemento diferencial en un tiempo Δt	=	Calor conducido a través de la cara derecha durante un tiempo Δt

FIGURA 5.
Figura 5. Expresión de elemento diferencial

Matemáticamente se expresa por:

$$-kA\left.\frac{dt}{dx}\right]_{en\,x}\Delta t + q(A\Delta x)\Delta t = kA\left.\frac{dt}{dx}\right]_{en\,x+\Delta x}\Delta t$$

Donde:
q es la intensidad de la fuente de calor por unidad de volumen y unidad de tiempo.
k es la constante de conductividad.
De acuerdo con el Teorema del Valor Medio para una función continua y derivable, se tiene:

$$f(x+\Delta_x) = f(x) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right]_{en\,M}\Delta_x$$

Donde *M* es cualquier valor comprendido en *(x, x +Δ x)* en lo particular si:

$$f(x) = \frac{dT(x)}{dx}$$

Los gradientes de temperatura en *x* y *y+Δx* están relacionados por el Teorema del Valor Medio.

$$\left.\frac{dT}{dx}\right]_{x+\Delta x} = \left.\frac{dT}{dx}\right]_{x} + \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)\right]_{en\,M}\Delta x$$

Donde M se ubica en (*x, x +Δx*) como se muestra en la Figura 4

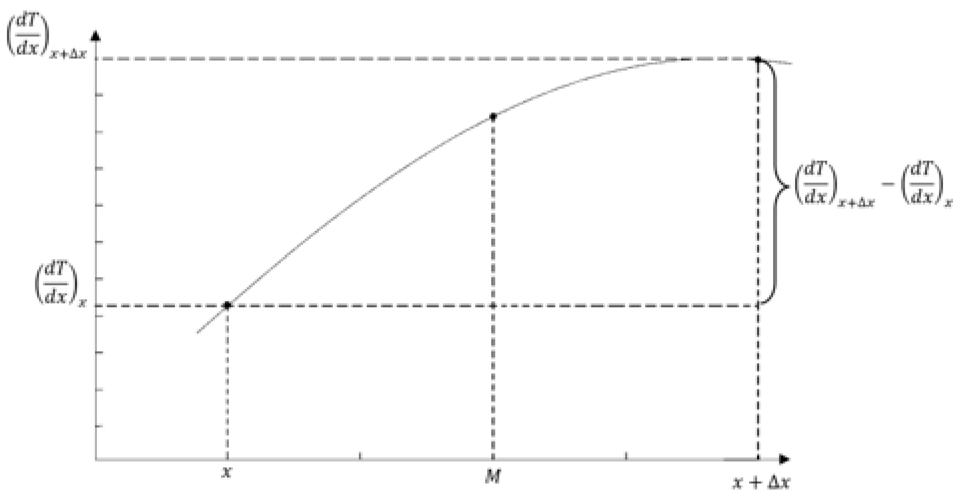

FIGURA 4.
Figura 4. Temperatura de la placa.

$$-kA\frac{dt}{dx}\bigg]_{en\ x}\Delta t + q(A\Delta x)\Delta t = kA\frac{dt}{dx}\bigg]_{en\ x+\Delta x}\Delta t$$

$$qA\Delta x = -kA\frac{d^2T}{dx}\bigg]_{M}\Delta x$$

$$-k\frac{d^2T}{dx^2} = q$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{1}{k}q$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q}{k}x + c_1$$

Resolviendo la ecuación diferencial se tiene:

$$T = -\frac{q}{2k}x^2 + c_1x + c_2$$

Ahora si se aplican las condiciones de frontera:

$$\begin{matrix} x = 0 & T = T_0 \\ x = 2L & T = T_0 \end{matrix}$$

Resolviendo:

$$T = -\frac{q}{2k}x^2 + c_1x + c_2$$

$$T_0 = \frac{-q}{2k}(2L)^2 + c_1(2L) + c_2$$

$$T_0 = \frac{-q}{2k}(4L^2) + 2c_1L + c_2$$

$$T_0 = \frac{-2qL^2}{k} + 2c_1L + c_2$$

Considerando que:

$$c_2 = T_0$$

Se obtiene:

$$T_0 = \frac{-2qL^2}{k} + 2c_1L + T_0$$

$$2c_1L = \frac{2qL^2}{k}$$

$$c_1 = \frac{qL}{k}$$

Por lo tanto:

$$T = -\frac{q}{2k}x^2 + \frac{qL}{k}x + T_0$$

Temperatura en cualquier punto de la placa.

4) Se mecaniza un taladro circular de 4 cm de diámetro y 12 cm de longitud en un bloque metálico, de tal manera que se aumenta su diámetro hasta 4.12 cm. Hallar el volumen del metal que se elimina. En este caso

el volumen está dado por la función $v(x) = 2\pi x^2$ donde es el radio del taladro, esta función es continua en el intervalo [2,2.06] entonces la cantidad de material eliminado es:

$$v_f - v_i = 2\pi(2.06)^2 - 2\pi(2)^2$$

Donde v_f es el volumen final y v_i es el volumen inicial del bloque de metal. Ahora, como la función mencionada cumple con las condiciones para aplicar el Teorema del Valor Medio, se tiene:

$$v(2.06) - v(2) = 0.06v'(x)$$

$$v(2.06) - v(2) = 0.06(24x\pi)$$

Ahora como $2 < x < 2.06$ entonces x = 2, se tiene $v(2.06) - v(2) =$ **2.88**$\pi\, cm^3$ Que es la cantidad aproximada de volumen de metal eliminado.

Conclusiones

El Teorema del Valor Medio es un componente esencial del cálculo diferencial que tiene aplicaciones prácticas en diversos campos científicos y tecnológicos. Su enseñanza efectiva requiere un entendimiento sólido de varios conceptos matemáticos previos. A través de ejemplos prácticos, como el problema del automovilista, se puede apreciar cómo el TVM se aplica en situaciones reales, demostrando su relevancia y utilidad práctica. La precisión y utilidad de los modelos matemáticos basados en el TVM dependen en gran medida del contexto y propósito específico del análisis, destacando la importancia de una enseñanza robusta y contextualizada de este teorema en la educación superior.

Referencias

Swokowski, E. (1988). Cálculo con Geometría Analítca. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zill, D. (1988). Cálculo con Geometría Analítica. España: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zill, D. (2011). Matemáticas I: Cálculo Diferencial. México: McGrawHill.

Jesús Espino Márquez, Moisés Israel Márquez González
Teorema del Valor Medio
Mean Value Theorem

Conciencia Tecnológica
núm. 67-B, p. 80 - 88, 2024
Instituto Tecnológico de Aguascalientes,
ISSN: 1405-5597