Civilizar. Ciencias Sociales y Humanas
ISSN: 1657-8953
yadira.caballero@usa.edu.co
Universidad Sergio Arboleda
Colombia

Hernando Pérez, Jesús
Joachim Lambek y la Filosofía de la Matemática
Civilizar. Ciencias Sociales y Humanas, núm. 8, junio, 2005, pp. 1-14
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá, Colombia

CIVILIZAR
Revista electrónica de difusión científica – Universidad Sergio Arboleda Bogotá – Colombia
http://www.usergioarboleda.edu.co/civilizar

Joachim Lambek y la Filosofía de la Matemática

Por
Jesús Hernando Pérez

El continuo verdadero es simplemente una entidad conexa en si misma y no puede escindirse en piezas separadas, esto sería contrario a su naturaleza. (Hermann Weyl, 1921,[5]).

Resumen:
Se presenta un ejemplo para explicar la propuesta de Joachim Lambek según la cual la teoría de categorías permite conciliar las cuatro grandes filosofías de las matemáticas: Platonismo, Logicismo, Formalismo e Intuicionismo.

Abstract:
In this article is showed an example for explain the proposal of Joachim Lambek in which the Category Theory is used for the conciliation of the four greats philosophies of the mathematics: Platonism, Logicism, Formalism and Intuitionism.

Palabras Claves:

Categorías, Toposes, Análisis y Síntesis.

Key Words:
Categories, Toposes, Analysis, synthesis.

Algunos datos sobre el personaje

Según los editores del volumen especial de la revista virtual TAC (Theory and Applications of Categories) dedicado a Lambek , M. Barr, P.J. Scott y R.A.G. Seely, “Jim Lambek ha sido una de las figuras centrales en teoría categórica de la demostración, desde el inicio de este campo de investigación” [2].

Esta afirmación es una de las que califican la obra de nuestro personaje. En el mismo volumen de TAC, Michel Barr, en su apreciación sobre Lambek, señala lo siguiente:

"Además de algunos pocos artículos sobre lógica categórica, una tercera parte de su trabajo reciente tiene que ver con lingüística, retornando a las gramáticas de los grupos sintácticos".

Y un poco más adelante en el mismo texto Barr dice:

"En relación con los otros dos tercios de sus artículos, se incluyen en ellos contribuciones a la teoría de las categorías, la lógica, la filosofía y la física".

En la misma apreciación, de M. Barr sobre Lambek, se menciona que hasta mayo de 1997, existían 107 artículos publicados con la sola firma de Joachim Lambek.

Otros de los temas de interés de Lambek han sido la teoría de números, la teoría de anillos y módulos, y el álgebra universal. En la lista de A.D. Bell, por ejemplo, "Ring Theorist by Location", Lambek figura como el ùnico especialista de la McGill University en anillos no conmutativos (hasta el cuatro de septiembre de 2 004).

Lambek nació en Leipzig en el año 1922 y , según cuenta M. Barr, llegó al Canadá después de soportar dos años de prisión en un campo de concentración curiosamente no de los nazis sino de los ingleses, se estableció en Montreal, ingresó a la Universidad McGill donde se graduó como matemático, con honores, en 1945, como M.Sc. en 1946 y como doctor en 1950. Su trabajo doctoral fue orientado por Hans Zassenhaus y le sirvió de soporte para su vinculación a la universidad como profesor. Desde esa época, hasta su retiro por jubilación, permaneció vinculado a dicha universidad.

En Mc Gill forma parte de varios grupos de investigación entre los cuales sobresalen el de teoría de categorías de las tres grandes universidades de Montreal y el de filosofía de las matemáticas. Varios de sus estudiantes y colaboradores son investigadores muy activos en categorías, en lingüística, en álgebra y en filosofía de las matemáticas.

Según la información que aparece en la página CATEGORY THEORY AT MCGILL, los expertos más importantes de esta universidad en este tema son Jim Lambek, Marta Bunge, Michael Barr, Michael Makkai, Robert Seely y Thomas Fox.

De acuerdo a las menciones de William Anglin y del propio Lambek, los miembros más activos del grupo de filosofía de la matemática de Montreal son, el mismo Lambek, Anglin, Dina y Grace Zhang y Jocelyne Couture [3].

Aunque Lambek ya se jubiló, permanece muy activo, continua publicando y ofreciendo conferencias en diferentes universidades del mundo entero.

Algunos intereses no matemáticos de Lambek

Lambek no se reconoce él mismo como filosofo pero, sus intereses filosóficos son muy antiguos y muy fundamentales. En el artículo " The mathematics of sentence structure" de 1958, muestra ya su gran preocupación por el papel de la matemática en disciplinas tan diferentes como la lingüística, y expresa, sustentándolo con ejemplos, su absoluta convicción en la interacción exitosa entre teorías matemáticas y teorías lingüísticas. Este ha sido uno de los motivos filosóficos de J. Lambek: el uso de las matemáticas en otros ámbitos.

Su punto de vista "eléctico" se presenta muy bien en el resumen (abstract) de su artículo conjunto con J. Couture de 1991 [4]:

"Este artículo fue escrito conjuntamente por un filosofo y un matemático. Tiene dos propósitos: ambientar a los matemáticos en algunas de las preguntas filosóficas sobre los fundamentos de su disciplina y familiarizar a los filósofos con algunas de las respuestas a estos interrogantes obtenidos recientemente por los matemáticos. En particular argumentaremos que, si estos descubrimientos recientes se tienen en cuenta, cuatro posiciones filosóficas básicas, logicismo, formalismo, platonismo e intuicionismo, si se formulan con alguna moderación, son de hecho reconciliables, aunque con alguna reserva en relación con el logicismo, siempre y cuando se adopte una interpretación no nominalista de los objetos ideales de Platón".

Los descubrimientos matemáticos recientes, a los cuales se refieren Lambek y Couture, tienen que ver con los grandes desarrollos de la teoría de categorías y todas aquellas teorías originadas en la interacción entre distintas ramas de la matemática y las categorías.

Una de las grandes preocupaciones de Lambek se relaciona con ese desconocimiento tan generalizado entre los filósofos acerca de los grandes desarrollos recientes de la matemática y al mismo tiempo, con la incomprensible indiferencia de muchos matemáticos con respecto al impacto tan grande en los cimientos del edificio matemático originados en tales desarrollos.

¿Cuántos filósofos conocen la obra revolucionaria de William Lawvere?, ¿Cuántos matemáticos han reflexionado en relación con propuestas como la siguiente: "En el desarrollo matemático de las últimas décadas se ve claramente surgir la convicción de que las propiedades relevantes de los objetos matemáticos son aquellas que pueden ser enunciadas en términos de su estructura abstracta más que en términos de los elementos de los que se piense que tales objetos están construidos". [5].

Naturalmente, no se trata de explicitar una queja sino, más bien, de llamar la atención sobre un hecho fundamental: la teoría de categorías, que en sus años iniciales fue conocida con el grafito despectivo "La abstracción del sin sentido", hoy en día es algo totalmente diferente, es una teoría con multitud de aplicaciones, una de las cuales, hecho que se sabe ya con mucha claridad, la de servir como teoría "fundacional". Lambek va un poco más lejos y propone una idea fascinante: la teoría de categorías permite fusionar las filosofías matemáticas básicas. Aún suponiendo que esto último no sea posible, de todos modos ha ocurrido algo fundamental: la teoría de categorías permite organizar las distintas filosofías como diferentes programas de investigación en matemáticas, programas que en lugar de ser antagónicos son, más bien, complementarios.

Ejemplos paradigmáticos.

Un buen ejemplo, no mencionado explicitamente por Lambek, pero si por Lawvere, es el siguiente, la teoría de categorías ofrece una nueva interpretación para la dualidad metodológica Análisis vs. Síntesis. Esta nueva versión asocia el método analítico con la lógica clásica de dos valores (o más generalmente, con las lógicas booleanas) y el método sintético con la lógica intuicionista. Esta correspondencia se formularía en la siguiente forma:

La lógica interna de un topos (4) es booleana si la estructura interna del clasificador de subobjetos es la de un álgebra de Boole; estos topos son, entonces, los de la matemática analítica. Por el contrario, si la lógica de un topos no es booleana, su lógica será intuicionista y estos serían los topos de la matemática sintética. La tesis central de Lambek se muestra muy bien en este ejemplo pues la dualidad Análisis vs. Síntesis aparece como las dos caras de una misma teoría: la teoría de Toposes. En este nuevo sentido ya no estaríamos frente a un dilema metafísico sino, mas bien, frente a un dilema programático: hay dos grandes programas de investigación el analítico y el sintético.

El uso de la palabra "síntesis", en la comunidad matemática, es muy restringido. Algunos matemáticos, con intereses epistemológicos, la utilizan sistemáticamente; otros utilizan expresiones diferentes, como "formal", para referirse a esta manera de ver la matemática .

La gran mayoría de los investigadores prefieren, aunque son cultivadores del "estilo sintético", no tomar partido epistemológicamente; esto a pesar de los planteamientos iniciales de William Lawvere, quien fue el primero en darse cuenta del fundamento sintético del programa de investigación iniciado en la década del 40. (1)

Uno de los fundadores de la teoría matemática mencionada, el profesor Saunders Maclane , ha propuesto nombrar a esta concepción "funcionalismo formal", entre otras razones porque se trata de proponer el concepto de "función" cómo noción "fundacional", en lugar de la noción de "pertenencia"; esta sugerencia no ha sido aceptada, la mayoría de los investigadores en el área prefieren hacer referencia, más bien, a la teoría matemática directamente: método categórico o mejor teoría de categorías.

La palabra "categoría", ampliamente difundida, trastoca el sentido aristotélico y muy seguramente confunde mucho a los amantes de la filosofía, sin embargo, para los filósofos, deberá resultar, entonces, muy útil familiarizarse con esta moderna teoría.

Con la palabra "análisis" ocurre un fenómeno muy parecido, su uso más popular aparece en la expresión "Análisis Matemático", no como un método sino como un área del conocimiento matemático – aquella en la cual se estudian la derivación y la integración. Así, por ejemplo, cuando algunos expertos en teoría de números hablan de "métodos analíticos", se refieren al uso de las teorías, teoremas y técnicas del análisis matemático en el campo específico de la teoría de los números.

A pesar de esta indiferencia, generalizada en el mundo de los matemáticos mas no en el de las matemáticas, y del uso informal de las palabras "análisis" y "síntesis", es posible afirmar que las teorías matemáticas pueden tratarse de dos maneras diferentes: empleando la relación de "pertenencia" como noción fundamental – ligada a la noción de "conjunto" – o por el contrario, utilizando la noción de "función"- ligada a la noción de estructura como concepto fundante.

Como en matemáticas no existe "consistencia absoluta" sino "consistencia relativa", estas dos formas de fundamentar son mutuamente consistentes pero no absolutamente consistentes; es decir, para desarrollar uno cualquiera de los dos esquemas de fundamentación hay que asumir el otro, o simplemente aceptar el que se quiere desarrollar, de manera informal, y construirlo formalmente poco a poco.

Recordemos algunos de los conceptos.

Una "categoría" es una estructura matemática constituida de dos "tipos" de entidades: "objetos" (o nodos) y "flechas" (o funciones o lados). Estos dos tipos de entidades satisfacen las siguientes condiciones:

1. Cada flecha determina, unívocamente, dos nodos: su "fuente" y su "meta".
2. Si α es una flecha de meta A y β es una flecha de fuente A entonces existe, una única flecha denotada por β o α y que recibe el nombre de "la compuesta de β con α". La fuente de β o α es la fuente de α, mientras que su meta es la de β.
3. Cada nodo A determina una única flecha, denotada 1_A y denominada "la identidad de A" , de tal manera que, si ε es una flecha con fuente A entonces ε o $1_A = \varepsilon$, y si δ es una flecha con meta A entonces 1_A o $\delta = \delta$.
   (1_A tiene como fuente y meta al nodo A).
4. La composición de flechas es asociativa:

$$\gamma \text{ o } (\beta \text{ o } \alpha) = (\gamma \text{ o } \beta) \text{ o } \alpha$$

(siempre y cuando los compuestos que allí figuran existan).
Ejemplo 1._Los conjuntos forman una categoría. Aquí, los nodos son los conjuntos y los lados son las funciones. Las flechas identidades son las funciones identidades y la composición de flechas es, sencillamente, la composición usual de funciones.

Ejemplo 2._ La categoría denotada **1** tiene un único objeto y una única flecha.

Ejemplo 3._

1_A α 1_B

CIVILIZAR
Revista electrónica de difusión científica – Universidad Sergio Arboleda Bogotá – Colombia
http://www.usergioarboleda.edu.co/civilizar

$$\underset{A}{o} \longrightarrow \underset{B}{o}$$

Ejemplo 4._Conjuntos variables en dos tiempos (p. e. “hoy” , “mañana”).

a) Nodos: Triplas (A,f,B) donde A, B son conjuntos y $A \xrightarrow{f} B$ una función.
b) Flechas: Parejas $\alpha = (k , i)$ de funciones como se muestra en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & Be \arrow[d, "k"] \\ A' \arrow[r, "g"] & B' \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Informalmente , lo que se tiene es lo siguiente:

Un conjunto variable en dos tiempos es un conjunto hoy (A) y uno mañana (B) junto con una función (f) que establece un puente entre el presente y el futuro. Una flecha entre dos conjuntos variables en dos tiempos ((A,f,B) y (A’,g, B’)) es una función hoy (i) y una función mañana (k) en forma tal que el diagrama (*) es conmutativo, es decir, $k \circ f = g \circ i$. (El símbolo $\cong$ significa “conmutatividad”).

Las flechas, en esta categoría, se componen componiendo las flechas hoy y mañana .

Ejemplo 5._ El ejemplo anterior puede ser generalizado imaginando una estructura temporal más compleja.

Para continuar el desarrollo de esta teoría, se aplica el análisis pitagórico - platónico a la categoría de los conjuntos, describiendo los conceptos básicos que han sido formulados en términos de la “pertenencia”, para formularlos “funcionalmente”.

1) Funcionalmente, el conjunto vacío Φ es el único conjunto con la siguiente propiedad universal: dado un conjunto cualquiera X, existe una única función de dominio Φ y codominio X. Esta caracterización funcional del vacío permite formularla sintéticamente. Un vacío Φ en una categoría C es un objeto Φ de

C tal que para todo objeto X de C existe una única flecha de dominio Φ (fuente Φ) y codominio (o meta) X.

El vacío en la categoría $\overrightarrow{\text{Conj}}$ de los conjuntos variables en dos tiempos se describe así : vacío hoy y vacío mañana, con la única flecha entre Φ y Φ.

2) Funcionalmente, los conjuntos unitarios **1** se caracterizan así : dado un conjunto X, existe una única flecha de dominio X y codominio **1** llamada $\mathbf{1}_{X}$.
Esta caracterización permite definir los puntos en forma general: un punto en una categoría C, es un objeto **1** de tal manera que, dado cualquier otro objeto X, existe una única flecha de dominio X y codominio **1**.

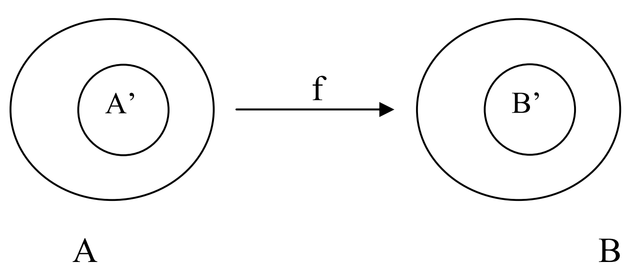
En la categoría $\overrightarrow{\text{Conj}}$ un punto es un objeto de la forma un conjunto unitario hoy, y un conjunto unitario mañana, con la única función posible de hoy hacia mañana.

3) Un objeto A en una categoría C es un sub-objeto del objeto B de C si existe una flecha $A \xrightarrow{\alpha} B$ con la siguiente propiedad:

Para todo objeto D y todo par de flechas β , γ, si

$$\left.\begin{array}{l} D \xrightarrow{\beta} A \\ D \xrightarrow{\gamma} A \\ \alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \end{array}\right\} \text{ entonces } \beta = \gamma$$

En la categoría $\overrightarrow{\text{Conj}}$, el dibujo siguiente representa esta situación:



$A' \subseteq A, B \subseteq B'$ y $f(A') \subseteq B'$.

4) Un aporte fundamental del profesor William Lawvere ha sido el siguiente:

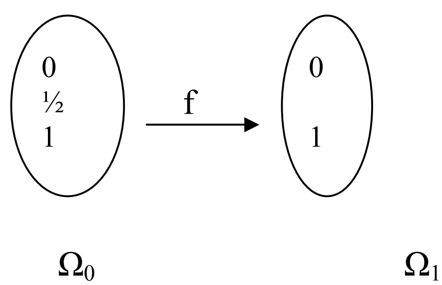
Revista electrónica de difusión científica – Universidad Sergio Arboleda Bogotá – Colombia
http://www.usergioarboleda.edu.co/civilizar Reservados todos los derechos de autor Junio 2005

¿Cómo caracterizar, funcionalmente, en la categoría Conj, el conjunto $\{0,1\}$?
Comprender la importancia de esta pregunta significa iniciar el camino de la comprensión del mundo de la síntesis. El ingenuo conjunto $\{0,1\}$ es el que determina la lógica de la categoría de los conjuntos, es decir, la lógica de dos valores excluyentes: blanco o negro, verdadero o falso, ser o no ser, estar dentro o fuera de, etc.

En la categoría Conjuntos = Conj, existe el objeto $\Omega = \{0,1\}$ y la flecha $v: \{*\} \longrightarrow \Omega$ $(v(*) = 1)$ que satisfacen la siguiente propiedad:

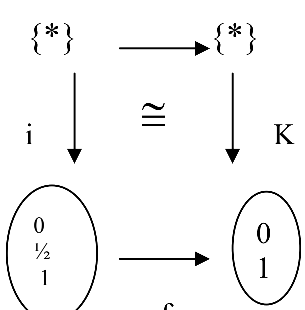
Dado un objeto cualquiera X y un sub-objeto $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$, existe una única flecha X_α (llamada la característica de α) tal que, si X' es otro objeto cualquiera y $\rho: X' \longrightarrow X$ es una flecha tal que $X_\alpha \circ \beta = v \circ \mathbf{1}_{X'}$, entonces existe una única flecha $\varepsilon: X' \longrightarrow A$ de tal manera que $\alpha \circ \varepsilon = \beta$.

En la categoría $\overrightarrow{\text{Conj}}$ de los conjuntos variables en dos tiempos el objeto Ω es:



$f(0) = 0$, $f(1/2) = 1$, $f(1) = 1$

La flecha v es



; $i(*) = k(*) = 1$

Hoy Mañana

5) Un punto de un objeto A en una categoría C, es una flecha $\mathbf{1} \xrightarrow{p} A$. Hay que suponer que la categoría tiene un objeto final o unitario. En la categoría de los conjuntos variables en dos tiempos, el objeto Ω tiene tres puntos:

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \longrightarrow & \{*\} \\ i\downarrow & \cong & \downarrow k \\ \{0,1/2,1\} & \xrightarrow{f} & \{0,1\} \end{array}$$

v: i (*) = 1
k(*) = 1

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \longrightarrow & \{*\} \\ i'\downarrow & \cong & \downarrow k' \\ \{0,1/2,1\} & \xrightarrow{f} & \{0,1\} \end{array}$$

fal: i'(*) = 0
k'(*) = 0

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \longrightarrow & \{*\} \\ i''\downarrow & \cong & \downarrow k'' \\ \{0,1/2,1\} & \xrightarrow{f} & \{0,1\} \end{array}$$

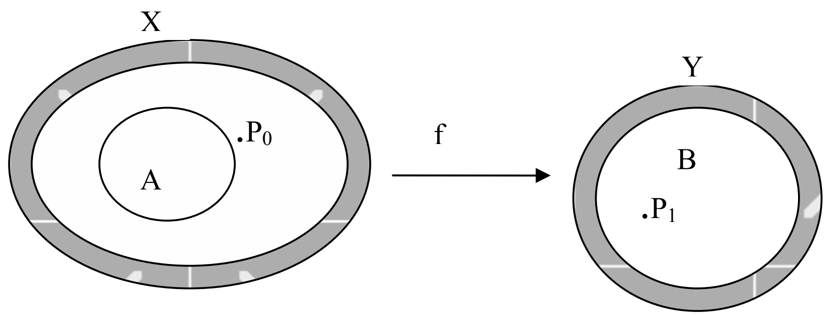
?: ii''(*) = 1/2
k''(*) = 1

Dados U = (X, h , Y) un objeto en $\overrightarrow{Conj}$ y un sub-objeto V = (A, $h|_A$, B),
para un punto p de *A* con respecto al sub-objeto A, hay tres situaciones posibles:

a) $p_0 \notin A$ y $p_1 \notin B$ ($p \in V$ es falso).
b) $p_0 \notin A$ y $p_1 \in B$ ($p \in V$ es ?).
c) $p_0 \in A$ y $p_1 \in B$ ($p \in V$ es v).

CIVILIZAR
Revista electrónica de difusión científica – Universidad Sergio Arboleda Bogotá – Colombia

6) En el siguiente dibujo se representa el complemento de un sub-objeto en la categoría $\overrightarrow{\mathrm{Conj}}$.



(**)

El "rayado" representa el complemento de $(A, f\,|_A, B)$ en (X, f, Y). Como se puede ver, en esta categoría no vale el "tercio excluido", un punto p de (A, f, B) puede quedar en el limbo: $P_0 \notin A$ pero $P_1 \in B$ es decir, p no pertenece hoy al sub- objeto pero pertenece mañana.

Con lo dicho hasta el momento resulta sencillo definir la filosofía sintética: síntesis es la representación de conceptos, teorías, estructuras, etc. a partir de la noción básica de función. Esta representación implica un cambio en la lógica, esta última debe ser debilitada, pues existen categorías en las cuales el principio del tercero excluido no es aplicable. Volviendo al dibujo (**), puede comprobarse que el complemento del complemento de un sub-objeto es, en general, mayor que el sub-objeto dado, es decir, tampoco vale la ley aristotélica de la doble negación:

$$\neg\neg A \neq A$$
$$A \leq \neg\neg A\,.$$

El antiguo programa de las cantidades infinitamente pequeñas, tal y como lo formuló Leonard Euler, ha sido resuelto gracias a esta nueva metodología. La solución de Abraham Robinson , construida a partir del concepto de pertenencia, implica que los infinitesimales no nulos son cantidades inversibles. En 1965 el matemático Steve Schamuel demostró que el concepto de infinitesimal idempotente, como los utilizados por los físicos de todas las épocas, es incompatible con el principio del "tercio excluido" (3)

Otro ejemplo interesante es el siguiente:

CIVILIZAR
Revista electrónica de difusión científica – Universidad Sergio Arboleda Bogotá – Colombia
http://www.usergioarboleda.edu.co/civilizar Reservados todos los derechos de autor Junio 2005

¿Existe EL ANILLO CONMUTATIVO?

Esta platónica pregunta admite una respuesta afirmativa. En efecto, en el topos de Zariski (poco importa, en este escrito, definir esta particular estructura) existe un anillo A (llamado, entonces, el anillo genérico) de tal manera que si E es otro topos (por ejemplo $\overrightarrow{\text{Conj}}$) y B es un anillo en E, entonces, existe un morfismo φ (geométrico) del topos de Zariski Z hacia el topos E, de tal manera que $\varphi(A) = B$.

Conclusión

Si Hermann Wyel viviera encontraría, en la nueva teoría de Categorías, una mejor explicación a su idea básica del "continuo". Hay dos posibles definiciones del continuo: la analítica y la sintética. La primera, formulada en forma muy imprecisa, estipula que el continuo es un cardinal pero, esta versión no corresponde a los señalado por Weyl, por su parte, la versión sintética ofrece una opción cualitativamente muy distinta y muy variada: un continuo sería un cierto tipo en cierto tipo de topos.

Sin embargo, si entendemos bien a Lambek, no estaríamos discutiendo que una versión sea mejor que la otra, simplemente, nos encontraríamos frente a dos propuestas que señalan aspectos diferentes del "continuo". De hecho, lo fundamental, aquí no es la palabra o el concepto aislado sino el mismo concepto en el interior de una teoría y según la correspondiente teoría se maneja de una cierta manera un determinado concepto o palabra.

Notas

(1) William Lawvere, siendo estudiante de posgrado en la Universidad de Columbia, propuso la idea de desarrollar una teoría de conjuntos tomando como idea fundamental la de "función" en lugar de la idea de "pertenencia". Esta propuesta desconcerto a los dos fundadores de la teoría de Categorías, Samuel Eilenberg y Saunders Maclane.
(2) Para formalizar la teoría de categorías, y desarrollarla independientemente de la teoría de conjuntos, se utiliza un lenguaje "tipeado" y el método axiomatico deductivo, es decir, el análisis-síntesis en el sentido de Pitágoras- Platón.
(3) Este prueba aparece en el libro del profesor Anders Kock sobre Geometría Diferencial Sintética.[7]
(4) Un topos es una categoría C que satisface las siguientes propiedades:

(i) En C existen todos los límites finitos.
(ii) Existe en C un clasificador de sub-objetos.
(iii) Para todo objeto A de C el funtor $C \xrightarrow[A\times(\,)]{} C$ admite un adjunto a derecha.

Bibliografía

[1] Bell John. A Primer of infinitesimal Análisis, Cambridge University Press, 1998.
[2] Barr M.y otros. Introducción. Theory and Applications of Categories, vol 6, A special volume dedicated to Joachim Lambek on the ocasión of his 75' th birthday.
[3] Anglin W. The philosophy of mathematics. The Invisible Art. The Edwin Mellen Press, Lewiston, Queenston, Lampeter, 1997.
[4] Couture J. and Lambek J. philosophical reflections on the foundations of mathematics, Erkenntnis, 34,187-209,1991.
[5] Lawvere W. The category of categories as a foundation for mathematics. Proc. Conf. on Categorical Algebra, 1-20,1968.
[6] Reyes Gonzalo. Logic and category theory. Modern Logic- A survey, 235-252. E. Agazzi (ed.)
[7] Kock Anders. Synthetic Differential Geometry. London Mathematical society Lecture Notes Series, 51, Cambridge University Press, 1981, preface and pages 1 to 8.