



Revista Científica Guillermo de Ockham  
ISSN: 1794-192X  
[investigaciones@ubscali.edu.co](mailto:investigaciones@ubscali.edu.co)  
Universidad de San Buenaventura  
Colombia

Romero Acero, Álvaro; Marín Cano, Alejandro; Jiménez Builes, Jovani Alberto  
Modelado, simulación e implementación de controladores LQR y RLVE al sistema péndulo invertido  
rotacional usando la plataforma NI ELVIS II  
Revista Científica Guillermo de Ockham, vol. 11, núm. 1, enero-junio, 2013, pp. 67-78  
Universidad de San Buenaventura  
Cali, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=105327548006>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

# Modelado, simulación e implementación de controladores *LQR* y *RLVE* al sistema péndulo invertido rotacional usando la plataforma *NI ELVIS II*\*

***Modeling, simulation and implementation of LQR controllers and RLVE Rotational Inverted Pendulum System using NI ELVIS II platform***

**Álvaro Romero Acero  
Alejandro Marín Cano  
Jovani Alberto Jiménez Builes**

## Resumen

En este artículo se presenta un análisis de control en variables de estado, aplicado al sistema no lineal péndulo invertido rotacional (*ROTPEN*), implementado sobre la plataforma *NI ELVIS II*, con el objetivo de comparar los resultados de los controladores regulador cuadrático lineal (*LQR*) y realimentación lineal en variables de estado (*RLVE*) a fin de garantizar un mejor desempeño de estabilidad en el sistema. La representación ma-

temática de los modelos no lineal y linealizado de la planta *ROTPEN*, se examina mediante el diseño de algoritmos y simulaciones en *Simulink-Matlab*. De esta manera se sondea el comportamiento del sistema real y del simulado ante perturbaciones y cambios en la entrada con la prioridad de ejercer una baja acción de control como parámetro del sistema que se va a optimizar.

**Palabras clave:** linealización, estabilidad, observador de estado, controladores *RLVE*, *LQR*.

• Fecha de recepción del artículo: 30-11-2012 • Fecha de aceptación: 30-01-2013

**ALVARO ROMERO ACERO.** Candidato a Ingeniero de Control, Universidad Nacional de Colombia. Integrante del Grupo de investigación Inteligencia Artificial en Educación, Universidad Nacional de Colombia. Correo electrónico: alromero@unal.edu.co. **ALEJANDRO MARÍN CANO.** Candidato a Ingeniero de Control, Universidad Nacional de Colombia. Integrante del Grupo de investigación Inteligencia Artificial en Educación, Universidad Nacional de Colombia. Correo electrónico: amarincan@unal.edu.co. **JOVANI ALBERTO JIMÉNEZ BUILES.** Magíster en Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional de Colombia. Doctor en Ingeniería de Sistemas, Universidad Nacional de Colombia. Docente de computadores, Universidad de Medellín. Director del Grupo de investigación Inteligencia Artificial en Educación, Universidad Nacional de Colombia. Correo electrónico: jajimen1@unal.edu.co.

\* Este artículo de investigación científica y tecnológica se deriva de la investigación “Plan de acción, para el fortalecimiento de los grupos de investigación: inteligencia artificial en educación y diseño mecánico computacional”, de la Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Fecha de inicio: febrero de 2011. Fecha de culminación: agosto de 2012. (Código Hermes 14198) auspiciado por la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad Nacional de Colombia).

## Abstract

*This article presents an analysis of control state variables, applied to nonlinear system rotational inverted pendulum (ROTPEN), implemented on the NI ELVIS platform, in order to compare the results of the controllers Linear Quadratic Regulator (LQR) and linear feedback of state variables (RLVE), to ensure better performance of system stability. The mathematical representation of the nonlinear model linearized ROTPEN plant is examined by designing algorithms and Simulink-Matlab simulations. The behavior of the real and simulated system is, thus, contrasted in front of perturbations and input changes, having as a priority to exert a low control action as parameter for the system to be optimized.*

**Keywords:** linearization, stability analysis, state observer, RLVE and LQR controllers.

## Introducción

A partir de los conocimientos y la experimentación en el área de la teoría de control, nace la necesidad de enfrentar problemas reales que integren aplicaciones teórico-prácticas para el diseño de control. En nuestro caso analizaremos un sistema de control para el péndulo invertido conocido como el péndulo de Furuta –el cual fue introducido por primera vez en 1991 (Furuta, 1991)– mediante el análisis en variables de estado. Este sistema péndulo invertido es un problema de excelente referencia para los estudios de control y es uno de los más complejos (de dos grados de libertad) implementado en sistemas mecánicos (Acosta, 2010).

El problema de la estabilización del péndulo de Furuta ha merecido la atención de muchos investigadores y ha sido objeto de numerosos esquemas teóricos de control, propuestos en la literatura. Muchos sistemas de control utilizados para solucionar este problema difieren en las técnicas de control lineal y no lineal implementadas en el diseño de controladores, por lo tanto para la toma de resultados sobre el comportamiento del sistema modelado y físico se debe tener en cuenta la parte fisicométrica del péndulo invertido rotacional de dos grados de libertad. En general, el análisis del sistema linealizado se caracteriza por trabajar en una región de estabilidad conocida como la zona

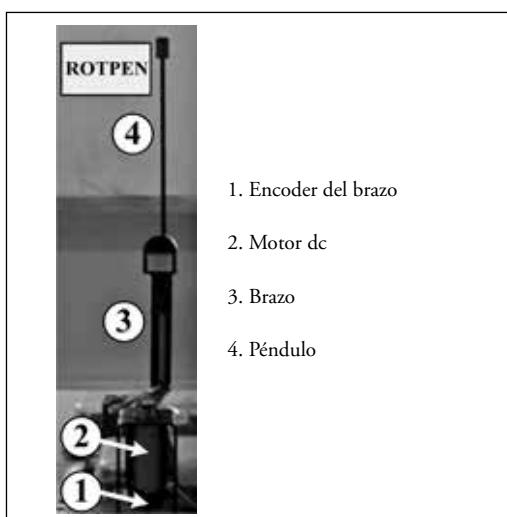
del punto de equilibrio, acotada en un pequeño intervalo. El diseño resultante de control no lineal para el péndulo de Furuta se hace más difícil en comparación con los sistemas mecánicos que lo representan (Turkan, 2012).

El artículo está distribuido de la siguiente manera. En primer lugar se obtiene el modelo matemático no lineal y linealizado de la planta. Posteriormente se calcula un controlador por el método *RLVE*, a través de un polinomio deseado y se diseña un observador de estado. En tercer lugar se calcula un controlador óptimo por *LQR* y finalmente, se analizan los resultados del sistema controlado ante perturbaciones y se extraen las conclusiones.

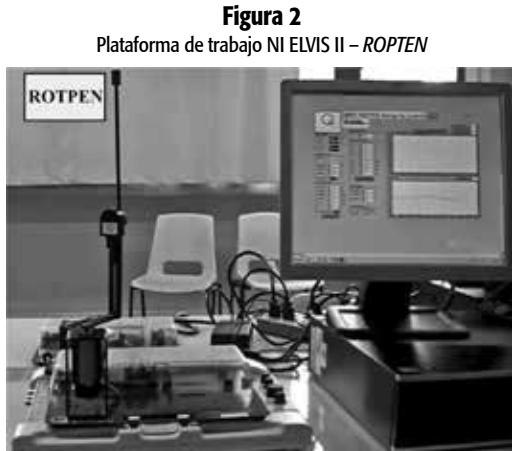
## Sistema péndulo invertido rotacional

El sistema péndulo invertido de Furuta (el cual se tratará como el péndulo invertido rotacional (*ROTPEN*), propuesto por Quanser y asociado a la National Instrument) consiste en un mecanismo físico muy simple compuesto por una barra vertical (péndulo), una barra horizontal en forma de L (brazo) y un actuador acoplado a la base de un motor dc (Quanser, 2012). La estación de trabajo (*NI ELVIS II*) incluye un sistema sensórico (encoder) y un algoritmo de control en *LabVIEW* (Lajara *et al.*, 2007), que se encarga de tomar las decisiones sobre el comportamiento de la planta (ver Figura 1) (Bitter, 2007).

**Figura 1**  
Componentes de la planta entrenadora *ROTPEN*



La plataforma de trabajo *NI ELVIS II* de la *National Instruments* permite adquirir las señales de entrada y salida de la planta por medio de un puerto USB para obtener un enlace en tiempo real en la adquisición de datos (*DAQ*). Estas entradas y salidas de la planta pueden ser observadas y manipuladas mediante la interface gráfica en el lenguaje de programación *LabVIEW* (ver Figura 2), (National Instruments, 2012).



### Descripción del modelo matemático

La representación matemática del modelo no lineal del *ROTPEN*, se obtiene a partir de las posiciones del péndulo con respecto al origen ( $x_0$ ,  $y_0$ ) (Figura 3). De esta manera se tiene la relación de geométrica en el diagrama de cuerpo libre. En la Tabla 1 se determinan los parámetros del diseño del péndulo.

A partir del modelo péndulo invertido se calcula la dinámica del sistema con respecto a las posiciones para encontrar el modelo matemático (Figura 3). Por consiguiente, se calculan las ecuaciones que relacionan la energía potencial y la energía cinética, se toma el *Lagradiano* (Renán, 2004) y se lleva a las coordenadas generalizadas de *Euler-Lagrange* (Viola *et al.*, 2006), para obtener las ecuaciones de movimiento del modelo las cuales se despejan en forma matricial; por último se resuelven por álgebra lineal con la finalidad de obtener las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema del péndulo invertido (ecuaciones 2-4).

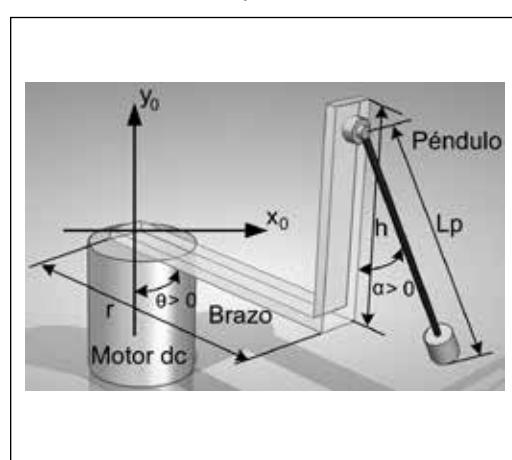
Este modelo cuenta con cuatro variables de estado que son:

- a. Posición del brazo  $(\theta)$
- b. Posición del péndulo  $(\alpha)$
- c. Velocidad del brazo  $(\dot{\theta})$
- d. Velocidad del péndulo  $(\dot{\alpha})$

**Tabla 1**  
Parámetros del péndulo invertido

Símbolo	Descripción	Valor	Unidades
$M_p$	Masa total del péndulo	0.027	Kg
$l_p$	Longitud del centro de masa del péndulo de pivote	0.153	m
$L_p$	Longitud total del péndulo	0.191	m
$r$	Longitud del brazo de pivote + longitud del péndulo de pivote	0.067	m
$J_m$	Momento de inercia en el eje del motor	3.0E-5	Kgm <sup>2</sup>
$M_{arm}$	Masa del brazo	0.028	Kg
$g$	Constante gravitacional	9.810	m/s <sup>2</sup>
$J_{eq}$	Momento de inercia equivalente entre el eje del motor y el eje de pivote	1.23E-4	Kgm <sup>2</sup>
$J_p$	Momento de inercia en torno a su eje de pivote	6.98E-4	Kgm <sup>2</sup>
$B_{eq}$	Amortiguamiento del brazo	0.0	(Nm)/(rad/s)
$B_p$	Amortiguamiento del péndulo	0.0	(Nm)/(rad/s)
$R_m$	Resistencia de la armadura del motor	3.30	$\Omega$
$K_t$	Torque del motor	0.028	(Nm)/A
$K_m$	Constante de fuerza de retorno electromotriz	0.028	V/(rad/s)

**Figura 3**  
Modelo del péndulo invertido



La representación de este modelo no lineal, específicamente las ecuaciones referentes al cambio de las posiciones de los ángulos  $\theta$  y  $\alpha$  con respecto al tiempo ( $t$ ), se simplifican tomando un común denominador (den) expresado en la ecuación 1. En la ecuación 4 se hace referencia a la relación dinámica del torque de salida en el motor dc, en la cual la variable  $V_m$  es el voltaje de alimentación del motor dc necesario para ponerse en movimiento.

$$\begin{aligned} den &= (J_p + m_p l_p^2)(J_{eq} + m_p r^2 \cos^2(\theta(t))) \\ &- M_p^2 r^2 L_p^2 \cos^2(\theta(t)) \end{aligned} \quad \text{Ec. 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) &= \frac{(J_p + M_p L_p^2) \tau_{output}}{den} \\ &- \frac{(J_p + M_p L_p^2) M_p r^2 \sin(\theta(t)) (\frac{d}{dt} \theta(t))^2}{den} \\ &- \frac{(J_p + M_p L_p^2) (M_p r^2 L_p \sin(\theta(t)) \cos(\alpha(t))) (\frac{d}{dt} \theta(t)) (\frac{d}{dt} \alpha(t))}{den} \\ &+ \frac{(J_p + M_p L_p^2) (M_p r^2 L_p^2 \cos^2(\theta(t)) \sin(\alpha(t)) \cos(\alpha(t))) (\frac{d}{dt} \theta(t)) (\frac{d}{dt} \alpha(t))}{den} \\ &+ \frac{(M_p^2 g r L_p^2 \cos(\theta(t)) \sin(\alpha(t)) \cos(\alpha(t)))}{den} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) &= -\frac{M_p r l_p \cos(\theta(t)) \cos(\alpha(t)) \tau_{output}}{den} \\ &+ \frac{M_p^2 r^2 l_p \cos(\theta(t)) \cos(\alpha(t)) \sin(\alpha(t)) (\frac{d}{dt} \theta(t))}{den} \\ &- \frac{M_p^2 r^2 l_p^2 \cos(\theta(t)) \cos^2(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) (\frac{d}{dt} \theta(t)) (\frac{d}{dt} \alpha(t))}{den} \\ &- \frac{(J_{eq} + M_p r^2 \cos(\theta(t)) M_p g L_p \sin(\alpha(t))) (\frac{d}{dt} \theta(t)) (\frac{d}{dt} \alpha(t))}{den} \\ &- \frac{(J_{eq} + M_p r^2 \cos(\theta(t)) M_p g L_p \sin(\alpha(t)))}{den} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3}$$

$$\tau_{output} = \frac{K_i (V_m - K_m (\frac{d}{dt} \theta(t)))}{R^m} \quad \text{Ec. 4}$$

## Linealización

De acuerdo con el modelo del péndulo invertido descrito por las ecuaciones 1-4, se definen las variables de estado mediante ecuación 5, linealmente independientes y se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta & \text{Ángulo horizontal (brazo)} \\ x_2 &= \alpha & \text{Ángulo vertical (péndulo)} \\ x_3 &= \dot{\theta} & \text{Velocidad angular (brazo)} \\ x_4 &= \dot{\alpha} & \text{Velocidad angular (péndulo)} \end{aligned} \quad \text{Ec. 5}$$

Para la linealización del sistema se toma el punto de operación, (ecuación 6), el cual está dado por la posición del péndulo:  $\alpha = \pi$ ; ( $180^\circ$ ) es decir, cuando la barra del péndulo se encuentre en posición vertical hacia arriba y en equilibrio (Aguilar *et al.*, 2008).

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \pi \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ V_m &= 0 \\ U(x) &= V_m \end{aligned} \quad \text{Ec. 6}$$

Por consiguiente, se obtiene la linealización alrededor de un punto de equilibrio expresado en el sistema no lineal en variables de estado (ecuación 7) y respectivamente para el ROTPEN en la ecuación 8, haciendo uso del script de Matlab. Luego se aplica la matriz jacobiana al sistema no lineal (jacobian) y se evalúa en el punto de operación cada matriz jacobiana resultante [ $A=\text{eval}(A)$ ,  $B=\text{eval}(B)$ ,  $C=\text{eval}(C)$ ,  $D=\text{eval}(D)$ ]. De esta manera con el comando [ $sistema = ss(A,B,C,D)$ ] se obtiene la representación matricial del modelo linealizado: matriz A (planta ROTPEN), matriz B (entrada al sistema), matriz C (salida del sistema) y matriz D (relaciona las entradas y salidas del sistema).

$$\begin{aligned} x &= A \Delta x + B \Delta u \\ y &= C \Delta x + D \Delta u \end{aligned} \quad \text{Ec. 7}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 59.07 & -1.16 & 0 \\ 0 & 53.18 & -0.35 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 41.31 \\ 12.35 \end{bmatrix} V_m \\ \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_m \end{aligned} \quad \text{Ec. 8}$$

Analizando el modelo linealizado del péndulo invertido se pueden apreciar los valores propios [ $\text{Valores\_propios\_A}=\text{eig}(A)$ ] por medio de la matriz (A) de la planta, los cuales nos indican la estabilidad del sistema (Figura 4). Para este caso tenemos los resultados de los valores propios del sistema en los que el primer valor igual a cero nos indica que es un sistema oscilatorio; pero al verificar el segundo valor el sistema péndulo invertido es inestable ya que tiene un valor propio positivo (Dorf *et al.*, 2005).

**Figura 4**  
Valores propios de la matriz A

Valores\_propios\_A =

0
7.1213
-7.5094
-0.7674

con cambios en las entradas (Figura 5). Se inicia con un escalón unitario (magnitud 1) en la entrada de voltaje ( $V_m$ ) para luego llevarlo a la magnitud cero después de 0.01 s con el propósito de verificar la respuesta del sistema con un estado inicial excitado. Para ello se presentan los resultados de las variables de estado de los modelos no lineal y lineal de forma separada para cada una de las variables de estado:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$  (Figura 6).

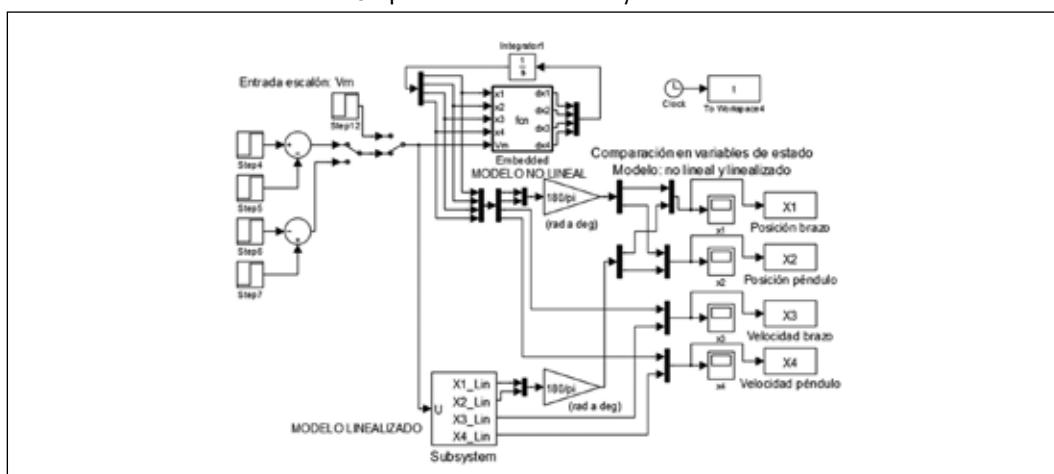
## Comparación de los modelos lineal y no lineal

Por medio de *Matlab-Simulink* se hace la comparación de los modelos no lineal y el linealizado

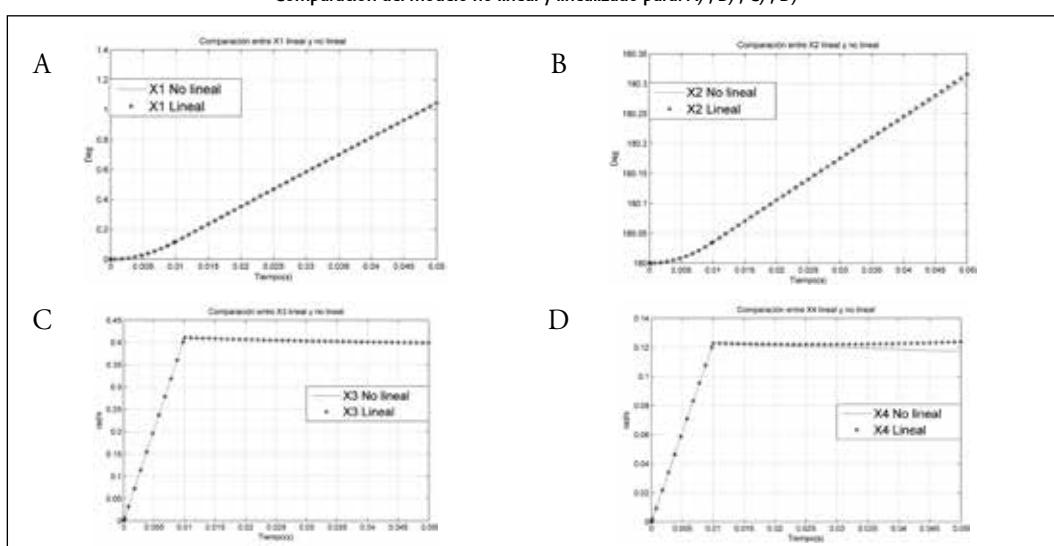
## Matriz de controlabilidad y observabilidad

Para verificar si el sistema es controlable se analiza la relación del par matricial ( $A$ ,  $B$ ). Se puede

**Figura 5**  
Comparación del modelo no lineal y linealizado



**Figura 6**  
Comparación del modelo no lineal y linealizado para: A) , B) , C) , D)



afirmar que es controlable si existe una entrada que transfiera un estado al otro en un tiempo finito. Esta verificación se puede hacer tomando la matriz de controlabilidad  $[MAB=ctrb(A,B)]$  y calculando el rango de fila completo (Figura 7). Entonces se debe cumplir que el número de variables de estado debe ser igual al rango de la matriz de controlabilidad  $[RangoMAB=rank(MAB)]$ ; así el sistema es controlable para este caso (Chen, 1999).

**Figura 7**  
Matriz de controlabilidad

=====					
=====					
MATRIZ DE CONTROLABILIDAD, MAB=[B AB A^2*B ... A^(n-1)*B]					
=====					
MAB =					
1.0e+003 *					
0 0.0413 -0.0477 0.7848					
0 0.0124 -0.0143 0.6734					
0.0413 -0.0477 0.7848 -1.7499					
0.0124 -0.0143 0.6734 -1.0302					

Para obtener la matriz de observabilidad (Figura 8) se utiliza el comando de *Matlab* [*mac=obsv(A,C)*] y se verifica si el sistema es observable, teniendo en cuenta si el rango de columna completa es igual al número de variables de estado [*rangomac=rank(mac)*]. Así, el sistema es observable para este caso.

**Figura 8**  
Matriz de observabilidad

=====					
=====					
MATRIZ DE OBSERVABILIDAD, MAC=[C CA CA^2 ... CA^(n-1)]					
=====					
mac =					
1.0000 0 0 0					
0 1.0000 0 0					
0 0 1.0000 0					
0 0 0 1.0000					
0 59.0654 -1.1554 0					
0 53.1789 -0.3455 0					
0 -68.2464 1.3350 59.0654					
0 -20.4086 0.3992 53.1789					

## Controlador RLVE

Para el diseño del controlador *RLVE* (Sanabria *et al.*, 2009), se recurre a la fórmula de *Ackerman* ecuación (9) –ya que se tiene la matriz de controlabilidad ( $M_{AB}$ )– se continúa con la búsqueda del polinomio deseado [ $Pd(A)$ ] de acuerdo con la respuesta del sistema real y se determina un comportamiento de diseño con los siguientes

parámetros: tiempo de establecimiento ( $t_s=1s$ ) y sobrenivel porcentual ( $M_p=9\%$ ). Con estos valores se encuentran cita ( $\xi=0.6083$ ) y la frecuencia natural ( $W_n=6.5753$ ) para el criterio del 2 % de error en régimen estacionario (Ogata, 2010). De esta manera se obtiene el polinomio deseado de cuarto orden (ecuación 10).

$$K=[0 \ 0 \dots \ 1] * invM_{AB} * Pd(A) \quad \text{Ec. 9}$$

$$Pd=(S^2 + 2\xi W_n S + W_n^2) (S+c)^2$$

$$Pd=S^4 + 28S^3 + 303.2S^2 + 1665S + 4323 \quad \text{Ec. 10}$$

Se verifican las raíces del polinomio deseado las cuales deben poseer parte real negativa; es decir, que los polos del polinomio se encuentren en el semiplano izquierdo (Figura 9).

**Figura 9**  
Raíces del polinomio deseado

$$\text{Polos\_deseados\_lazo\_cerrado} =$$

$$\begin{aligned} &-10.0000 \\ &-10.0000 \\ &-4.0000 + 5.2187i \\ &-4.0000 - 5.2187i \end{aligned}$$

Luego de encontrar el polinomio deseado en el dominio de *Laplace* se obtiene el polinomio deseado en forma matricial (Figura 10) reemplazando en la ecuación 10, la letra (S) por la matriz (A). Por consiguiente se obtienen las ganancias de *Ackerman* (Figura 11).

**Figura 10**  
Polinomio deseado en forma matricial

=====					
=====					
PdA =					
1.0e+005 *					
0.0432 0.1922 0.0133 0.0159					
0 0.2273 -0.0011 0.0313					
0 1.6286 0.0224 0.1922					
0 1.5998 -0.0095 0.2273					

**Figura 11**  
Ganancias de *Ackerman*

$$\text{ACKERMAN K:}$$

$$K = -2.9469 \ 38.7057 \ -1.1626 \ 6.0608$$

Para el análisis del controlador se analizan las plantas no lineal y lineal con el control *RLVE* implementado en la simulación de acuerdo con las ganancias encontradas. De esta manera se comparan los resultados según el esfuerzo del control (ver Figura 12) (Acosta, 2005).

De acuerdo con los resultados de la Figura 12, se puede apreciar la comparación de las variables de estado de las posiciones frente a los modelos no lineal y lineal, aunque son muy similares debido a que se tomó un polinomio deseado con un buen criterio ingenieril ajustado a las condiciones de operación de la planta. Analizando el esfuerzo de control se tiene que el modelo lineal realiza la acción de control más rápido, es decir, que aparece primero que en el modelo no lineal; pero la señal del esfuerzo de control se ajusta a los dos modelos con la misma respuesta dinámica hasta estabilizarse

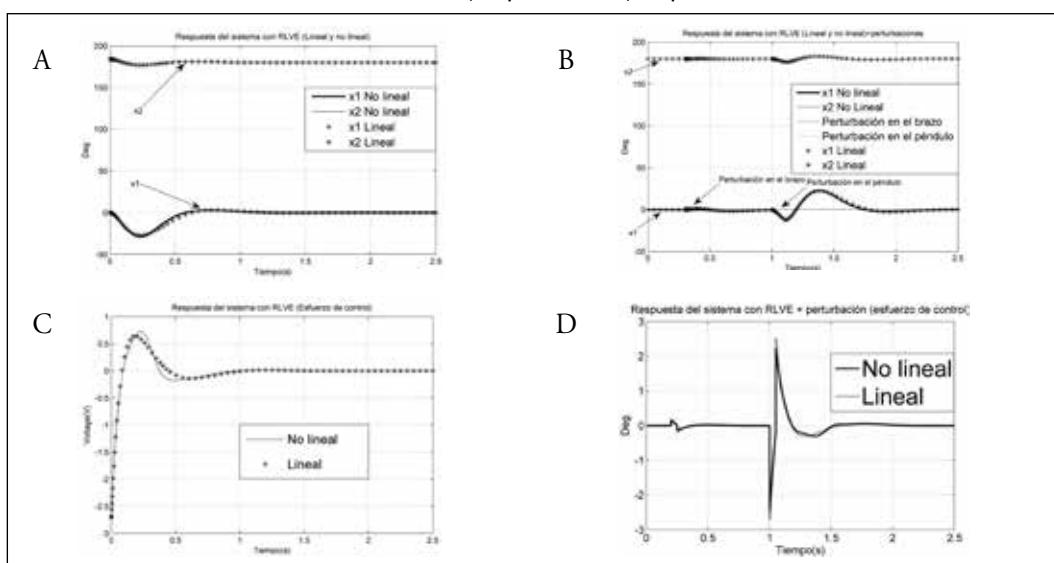
lo cual indica una validación del control *RLVE* para el modelo lineal comparado con el no lineal.

## Observador de estado

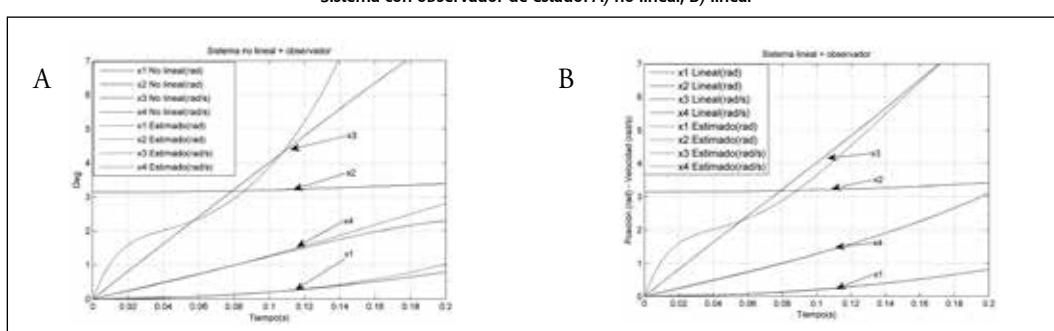
Debido a que el sistema péndulo invertido es un sistema observable (Luenberger, 1971) se procede al diseño del sistema en *Simulink* con el propósito de comparar la respuestas del sistema no lineal + observador, contra el sistema lineal + observador (Figura 13); y el sistema no lineal + observador + *RLVE*, contra el sistema lineal + observador + *RLVE* (Figura 14), (Domínguez, 2006).

Las respuestas de los modelos no lineal y lineal, con observador de estado en la Figura 13, permiten ver una leve diferencia en las variables de velocidad angular  $x_3$  y  $x_4$ , a partir de 0.12s en el modelo no

**Figura 12**  
Respuesta del sistema con *RLVE* (lineal y no lineal): A) sin perturbación, B) con perturbación.  
Esfuerzo de control: C) sin perturbación, D) con perturbación



**Figura 13**  
Sistema con observador de estado: A) no lineal, B) lineal



lineal, el cual tiende a perder el seguimiento de la dinámica más rápidamente que en el sistema lineal; sin embargo, es válido el análisis del sistema lineal con observador en un instante inferior a 0.12 s.

Las respuestas de los modelos no lineal y lineal con observador estado y con controlador *RLVE* en la Figura 14 muestran un comportamiento muy similar para el sistema lineal y no lineal con observador y control *RLVE*, de acuerdo con las respuestas del sistema  $x_1, x_2$ , con perturbaciones aplicadas en el brazo y el péndulo.

## Controlador óptimo

Para el diseño de un controlador óptimo (Moreno *et al.*, 2003), se deben tener en cuenta las restricciones de comportamiento del sistema. Por ejemplo, el ángulo del péndulo no debe ser muy grande y mantenerse en ángulos pequeños con el propósito de lograr el equilibrio deseado. A su vez, el voltaje de alimentación del motor debe tener unos valores en voltios que no superen los 10V; es decir, que el esfuerzo de control debe estar en esta región (0-10)V, para relacionar estas restricciones del comportamiento, los cuales son los indicadores que se deben tener en cuenta en el diseño de controladores y el posterior análisis de optimización para la acción de control (Tabla 2).

**Tabla 2**  
Restricciones de comportamiento del ROTPEN

Parámetro	Restricción
Brazo	$ \theta(t)  < 30^\circ$
Péndulo	$ \alpha(t)  < 2^\circ$
Voltaje del motor	$V_m < 10V$

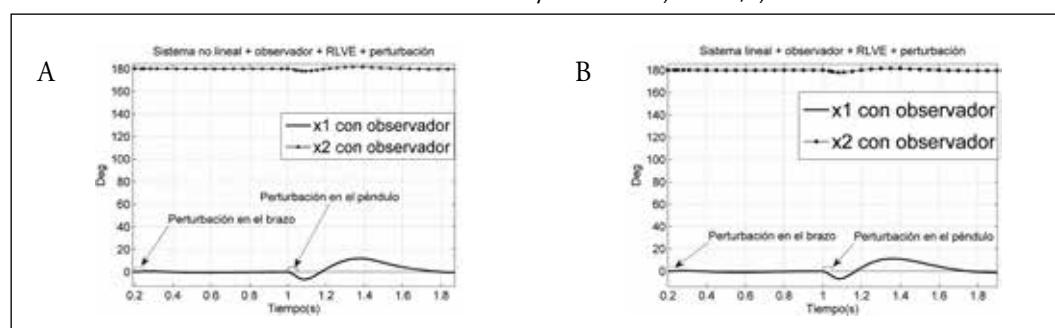
Para el diseño del controlador *LQR* se propone dar un peso inicial a la componente ( $Q_{1,1}=4.5$ ) y con ( $R=1$ ); donde la componente  $Q_{1,1}$  hace referencia al primer elemento de la matriz ( $Q$ ) y ( $R=1$ ) al valor único de la matriz ( $R$ ). Las matrices ( $A$  y  $B$ ) son tomadas del sistema matricial en variables de estado que representan al péndulo invertido, de esta forma se obtiene los resultados (Figura 15); los cálculos de las ganancias para el controlador LQR, se realizan por medio de Matlab:  $[K_{optima}, P_{raices\_optima}] = lqr(A, B, Q, R)$ . En la Figura 15 se pueden observar las raíces óptimas (parte real parte imaginaria), las cuales nos indican si el sistema es estable si y solo si la parte real es negativa, como se observa en este caso.

Con el fin de obtener nuevos controladores óptimos se varía la matriz ( $Q$ ) y el valor de ( $R$ ) obteniendo así la relación descrita en la Tabla 3 que nos permite optimizar la acción de control; es decir, efectuar la menor acción de control ante perturbaciones y ruidos introducidos al sistema, en la cual se determinan los pesos dados para la matriz ( $Q$ ), las ganancias óptimas obtenidas y el comportamiento del sistema real que presentó ante estos controladores *LQR*.

**Tabla 3**  
Análisis del control óptimo *LQR*

Pesos de la matriz ( $Q$ )	Ganancias óptimas	Comportamiento del sistema
$(Q_{11}=4.5)$ $R=1$	$[-2.12 \ 35 \ -1.07 \ 5.63]$	Tiene una respuesta aceptable frente a perturbaciones con una baja acción de control
$(Q_{11}=4.5)$ $(Q_{33}=1)$ $R=1$	$[-2.12 \ 52 \ -1.5 \ 8.6]$	Aumenta considerablemente la acción de control hasta llevarla a la saturación
$(Q_{11}=10)$ $(Q_{33}=1)$ $R=10$	$[-1.27.1 \ -0.7 \ 4.3]$	Tiene mejor respuesta frente a perturbaciones con una baja acción de control

**Figura 14**  
Sistema con observador de estado y control *RLVE*: A) no lineal, B) lineal



**Figura 15**  
Ganancias para el control óptimo *LQR*

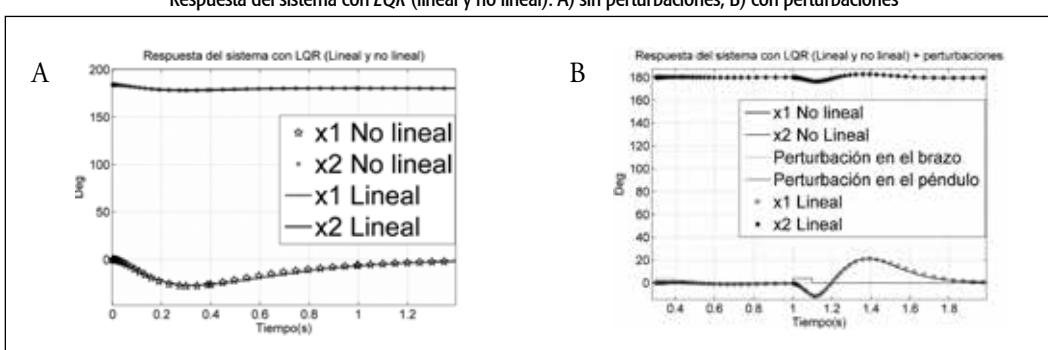
```
Koptima = -2.1213 35.0358 -1.0761 5.6339
P =
2.2234 -11.9514 0.5489 -2.0072
-11.9514 95.4479 -3.8979 15.8706
0.5489 -3.8979 0.1696 -0.6541
-2.0072 15.8706 -0.6541 2.6435
raices_optima =
-7.0104 + 5.7124i
-7.0104 - 5.7124i
-6.1396 + 0.6028i
-6.1396 - 0.6028i
```

Al comparar el análisis de resultados de las respuestas obtenidas en relación con el controlador *RLVE*, las cuales se pueden observar en la Figura 12 (respuesta del sistema con *RLVE* lineal y no lineal) con la respuesta presentada en la Figura 16 (respuesta del sistema con *LQR* lineal y no lineal), se aprecia una diferencia en el sobrenivel porcentual el cual es mayor para el sistema con *RLVE*, y a su vez presenta una respuesta más lenta (aproximadamente de 1.25 s para  $x_1$  frente a un 1.1 s en el control *LQR*). De esta manera se puede ver que el diseño del controlador está directamente relacionado con las respuestas del sistema y el *RLVE* disminuye el sobrenivel porcentual a la vez que disminuye su tiempo de respuesta. Por ello el criterio ingenieril y lo que se deseé optimizar está sujeto a los términos y parámetros de restricción de la Tabla 3 a fin de obtener mejores resultados del sistema implementado físicamente.

De forma análoga al análisis anterior, se comparan los resultados de las respuestas obtenidas en relación con el observador de estado, las cuales se muestran en la Figura 14 (respuesta del sistema no lineal con *RLVE* + observador + perturbaciones), con los mostrados en la Figura 17 (sistema no lineal + observador + control *LQR* + perturbaciones). En este caso no se aprecia una gran diferencia, lo cual se debe a que el polinomio deseado con los criterios de diseño propuesto para el control *RLVE* es muy bueno a la hora de actuar con el sistema, tanto para el modelo no lineal como para el lineal. De esta manera se obtiene una apreciación semejante ante el control *RLVE* y *LQR*, dado que también el control *LQR* se diseñó a partir de los pesos ( $Q_{11}=4.5$  y  $R=1$ ) y se tomaron estos valores como punto inicial para optimizar el ángulo del brazo. Pero como se puede apreciar en la Tabla 3, el controlador óptimo *LQR* que mostró mejor comportamiento del sistema implementado en el sistema real fue con ( $Q_{11}=10$ ,  $Q_{33}=1$  y  $R=10$ ) y a partir de este se continuará con el análisis para los resultados.

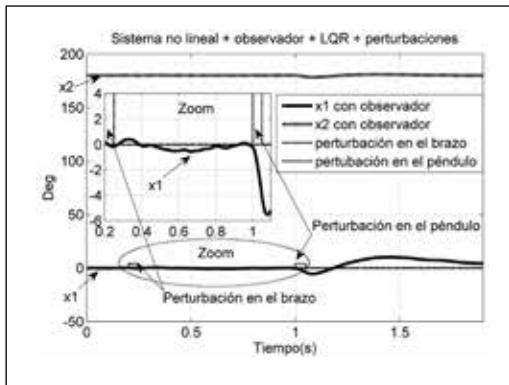
En consecuencia se realiza el análisis comparando las respuestas obtenidas en la Figura 14 B para el observador de estado (respuesta del sistema lineal con *RLVE* + observador + perturbaciones) con las respuestas de la Figura 18 (sistema lineal + observador + control *LQR* + perturbaciones), se aprecia una mejor respuesta en el control *LQR* ( $Q_{11}=4.5$  y  $R=1$ ) frente al *RLVE*, tanto en relación con el sobrenivel porcentual como con el tiempo de establecimiento para  $x_2$ . Esto pone en evidencia que la intervención del observador en el sistema no lineal muestra mejores resultados para el control *LQR* [respuesta del sistema con *RLVE* + observador (no lineal)].

**Figura 16**  
Respuesta del sistema con *LQR* (lineal y no lineal): A) sin perturbaciones, B) con perturbaciones



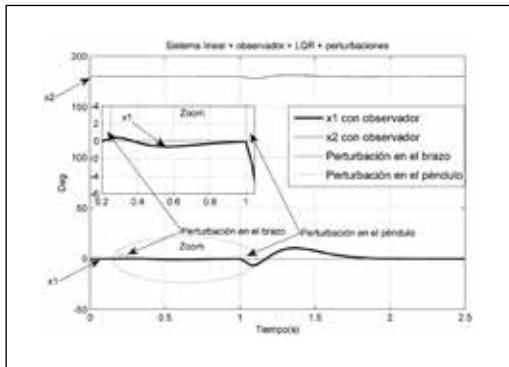
**Figura 17**

Sistema no lineal + observador + control LQR ( $Q_{11}=4.5$  y  $R=1$ ) + perturbaciones y zoom (región acotada por perturbaciones)



**Figura 18**

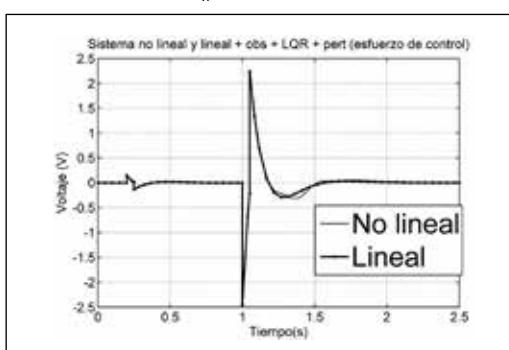
Sistema lineal + observador + control LQR+ perturbaciones y zoom (región acotada por perturbaciones)



Por consiguiente, para la Figura 19 el esfuerzo de control del sistema no lineal es más suavizado frente al lineal. Además, el sistema lineal presenta unos cambios bruscos y requiere iniciar la acción de control con antelación, pero al igual que las anteriores respuestas toma una dinámica similar entre los dos sistemas analizados.

**Figura 19**

Esfuerzo de control: sistema no lineal y lineal + observador + control LQR ( $Q_{11}=4.5$  y  $R=1$ ) + perturbaciones



## Resultados

Para el análisis de resultados se introdujo ruido (nivel = 0.001 rad) en los sensores con el propósito de acercarse aun más al comportamiento real del sistema. Para ello se comparan las respuestas de los sistemas no lineal y lineal + observador + ruido de los controladores *RLVE* y *LQR* en relación con las Figuras 20 y 21. Para determinar los parámetros del controlador *LQR* nos remitimos a la Tabla 3, en la cual el controlador *LQR* ( $Q_{11}=10$ ,  $Q_{33}=1$  y  $R=10$ ) muestra mejores resultados frente a la acción de control. Por lo tanto este será el punto de medición para el análisis de resultados.

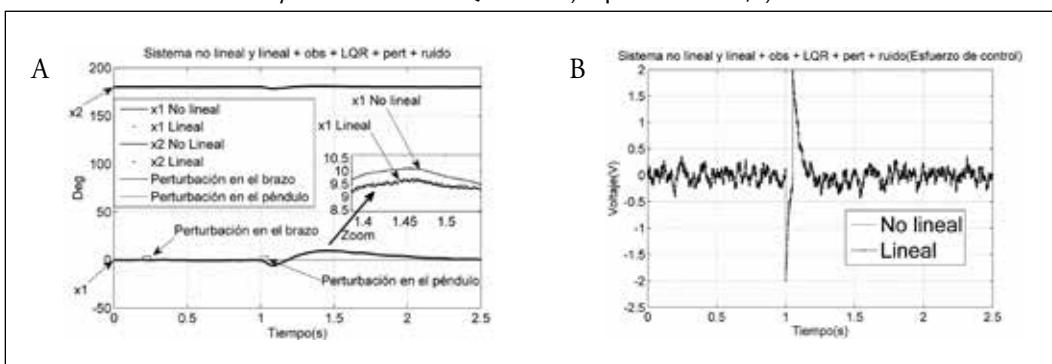
Para comparar las acciones de control ejercidas por los controladores *RLVE* y *LQR* de las Figuras 20 y 21 como resultados del comportamiento del sistema *ROTPEN*, estas se especifican en la Tabla 4, en la cual cada variable de estado se analiza independientemente de su comportamiento frente a cada control implementado (*RLVE* y *LQR*), de la siguiente manera: buena, aceptable y mala respectivamente (B, A, M respectivamente).

Los resultados expuestos en la Tabla 4, indican que se elimina el ruido en la respuesta del sistema para las variables de estado con el control *RLVE* + observador al igual que el control *LQR* + observador afecta directamente la acción de control y se ve reflejado en una porción muy pequeña para la respuesta del sistema. El controlador *LQR* logró disminuir la acción de control frente al *RLVE* en 0.5V aprox., lo cual garantiza un control “óptimo” frente al menor uso de energía requerida para ejercer control en el sistema.

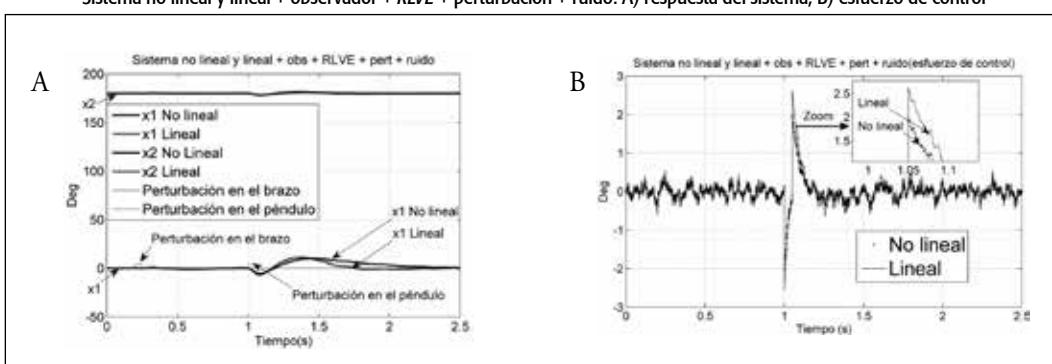
## Conclusiones

El modelo del sistema péndulo invertido aplicado en este trabajo se validó con la implementación del controlador *LQR* mediante la estación de trabajo *NI ELVIS II - ROTPEN*, el cual mostró los resultados previstos en la simulación de *Matlab-Simulink*. El comportamiento real del sistema se relacionó en la Tabla 3 para la simulación y en la Tabla 4 para el sistema real, lo cual arrojó como mejor parámetro de control *LQR* ( $Q_{11}=10$ ,  $Q_{33}=1$  y  $R=10$ ), garantizando con ello un control óptimo de acuerdo con la menor acción de control, con el propósito de diseñar controladores que sigan el

**Figura 20**  
Sistema no lineal y lineal + observador + *LQR* + ruido: A) respuesta del sistema, B) esfuerzo de control



**Figura 21**  
Sistema no lineal y lineal + observador + *RLVE* + perturbación + ruido: A) respuesta del sistema, B) esfuerzo de control



**Tabla 4**  
Análisis de resultados sistema no lineal + observador + *RLVE* con el sistema no lineal + observador + control *LQR*

Control	Comportamiento del sistema					Observaciones
	$\theta$	$\alpha$	$\dot{\theta}$	$\dot{\alpha}$		
RLVE	B	B	B	B		<ul style="list-style-type: none"> <li>*Se eliminó en gran parte el ruido en las de las variables <math>x_1</math> y <math>x_2</math>.</li> <li>*La acción de control absorbe el ruido y toma un mayor rango frente a la perturbación (un gasto mayor de energía en 2.5V aprox.).</li> <li>*Menor tiempo de establecimiento para el caso de <math>x_1</math> lineal.</li> </ul>
<i>LQR</i> $(Q_{11}=10, Q_{33}=I \text{ y } R=10)$	B	B	B	B		<ul style="list-style-type: none"> <li>*Se eliminó considerablemente el ruido en las de las variables <math>x_1</math> y <math>x_2</math>.</li> <li>*La acción de control absorbe el ruido y toma un menor rango frente a la perturbación (un gasto menor de energía en 2V aprox.).</li> <li>*Las respuestas de los sistemas no lineal y lineal son muy similares.</li> </ul>

comportamiento deseado en el sistema *ROTPEN* con el menor consumo de energía, en este caso energía eléctrica consumida por el motor dc que se traduce en una disminución en los costos de operación que redundan en un mejor funcionamiento del sistema.

A través de los controles *RLVE* y *LQR*, se logró estabilizar el sistema y mantenerlo en un punto de equilibrio incluso frente a perturbaciones y ruido en los sensores, lo cual nos indica, que los controladores diseñados cumplen con el propósito de absorber estos efectos negativos. Por tal razón,

la diferencia más significativa se encuentra en el análisis de la acción de control a partir de cuánto le cuesta al controlador para mantener las condiciones deseadas; es en ese punto que el controlador *LQR* mueve la balanza a su favor.

El sistema *ROTPEN*, representa un modelo no lineal e inestable. Aplicando la teoría de control en variables de estado se logra determinar que el sistema es controlable y observable y se toma esto como la primera etapa que debe realizarse en cualquier sistema antes de diseñar un controlador por el método de análisis en variables de estado,

lo cual genera un punto de partida para el diseño de controladores *RLVE* y *LQR*. El observador de estado demostró ser una herramienta eficaz para el sistema, cuando no se tienen todas las mediciones

de los estados del sistema; en este caso se implemento para las velocidades angulares del brazo ( $\dot{\theta}$ ) y el péndulo ( $\dot{\alpha}$ ), con un buen comportamiento ante perturbaciones y ruido en los sensores.

## Bibliografía

- ACOSTA, J. Á. (2010). "Furuta Pendulum: A Conservative Nonlinear Model for Theory and Practise". En *Mathematical Problems in Engineering*. Artículo 742894. pp. 1-29.
- ACOSTA, J. Á.; LÓPEZ, M. (2005). "Constructive feedback linearization of underactuated mechanical systems with 2-DOF". En *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. pp. 4909–4914.
- AGUILAR, C.; OCTAVIO, O.; SOSSA, H. (2008). "Controller Lagrange approach to the stabilization of the inverted pendulum system". En *Revista Mexicana de Física*, Vol.54, No.4. pp. 329-335.
- BITTER R. (2007). *Labview Advanced Programming Techniques*. Prentice Hall.
- CHEN, C. T. (1999). *Linear system theory and design 3ed*. Oxford University Press.
- DOMÍNGUEZ, S.; CAMPOY, P.; SEBASTIÁN, J.A.; JIMÉNEZ A. (2006). *Control en el espacio de estado*. España: Madrid, Pearson Education.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. (2005). *Sistema de control moderno*. Prentice Hall.
- FURUTA, K.; YAMAKITA, M.; KOBAYASHI, S. (1991). "Swing-up Control of Inverted Pendulum". En *Proceedings of the International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation (IECON'91)*. pp. 2193-2198.
- LAJARA, J.; PELEGRÍ, J. (2007). *Labview. Entorno gráfico de programación*. Alfaomega.
- LUENBERGER, D. (1971). "An introduction observers". En *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol.16, No.6. pp. 596-602.
- MORENO, L.; GARRIDO, S.; BALAGUER, C. (2003). Ingeniería de control. Modelo análisis y control de sistemas. Ariel.
- NATIONAL INSTRUMENTS. (2012). *Rotary Inverted Pendulum Trainer for NI ELVIS*. <http://www.ni.com/white-paper/10865/en>. Publicado en la red: el 30 de abril, 2012 y Consultado el: 28 de agosto, 2012.
- OGATA, K. (2010). *Ingeniería de control moderna 5ta Ed*. Prentice Hall.
- QUANSER. MAYES, J.; SHERRILL, J. (2012). *Inverted Pendulum Practitioner's Guide*. [http://www.quanser.com/english/downloads/toolbox/curricula/6QInverted\\_Pendulum-Practitioners\\_Guide.pdf](http://www.quanser.com/english/downloads/toolbox/curricula/6QInverted_Pendulum-Practitioners_Guide.pdf). Publicado en la red: abril, 1997 y Consultado el: 28 de agosto, 2012.
- RENÁN, C. (2004). "Obtención de la ecuación de Euler-Lagrange utilizando los vectores base y vectores recíprocos". *Ingeniería revista académica*. Vol.8, No.1. pp. 17-22.
- SANABRIA, C.; HERNÁNDEZ, OSCAR. (2009). "Control de un péndulo invertido simple por métodos de realimentación de estados". *Tecnura*. Vol.13, No.25. pp. 59-69.
- TURKER, T.; GORG, H.; CANSEVER, G. (2012). "Lyapunov's direct method for stabilization of the Furuta Pendulum". En *Turkish journal of electrical engineering & computer sciences. Turk J Elec Eng & Comp Sci*. Vol.120, No.1. pp. 99-110.
- VIOLA, G.; ORTEGA, R.; BANAVAR, R. N.; ACOSTA, J. Á.; ASTOLFI, A. (2006). "Total energy shaping control of mechanical systems: simplifying the matching equations via coordinate changes". En *Proceedings of the 3rd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*. Vol.3. pp. 87–92.