Papeles de Población
ISSN: 1405-7425
rpapeles@uaemex.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Mina Valdés, Alejandro
Funciones de sobrevivencia empleadas en el análisis demográfico
Papeles de Población, vol. 7, núm. 28, abril-julio, 2001
Universidad Autónoma del Estado de México
Toluca, México

Funciones de sobrevivencia empleadas en el análisis demográfico

Alejandro Mina Valdés

El Colegio de México

Resumen
El manejo de las funciones de sobrevivencia tipo Gompertz y tipo Makeham son presentadas a partir de su origen, considerando sus antecedentes, así como la determinación de los parámetros de cada una de éstas, empleando para ello el método de los grupos no superpuestos, comunmente utilizado en ciencias actuariales.
También se presenta el método iterativo que permite depurar, logrando un mejor ajuste, los resultados obtenidos, lo que permite proyectar los parámetros de las funciones de sobrevivencia, obteniendo tablas abreviadas de mortalidad por grupos quinquenales de edad tanto para los hombres como para las mujeres en México, a nivel nacional, para los años 1995, 2000, 2005 y 2010. Finalmente, se presentan las ganancias en las esperanzas por edad entre los años 1995 y 2010.

Abstract
The handling of survival functions as Gompertz and Makeham type are presented since its origin, considering its antecedents, as well as the determination of the parameters of each one of this functions, using the method of not superimposed groups, commonly employee in actuarial sciences.
The *iterativo* method is also presented that allows to purify, obtaining a better adjustment of the obtained results, what allows to project the parameters of the survival functions, obtaining abbreviated charts of mortality for five-year groups of age as much for the men as for the women in Mexico, at national level, for the years 1995, 2000, 2005 and 2010. Finally are presented the increases in prospects age life between 1995 and 2010.

Introducción

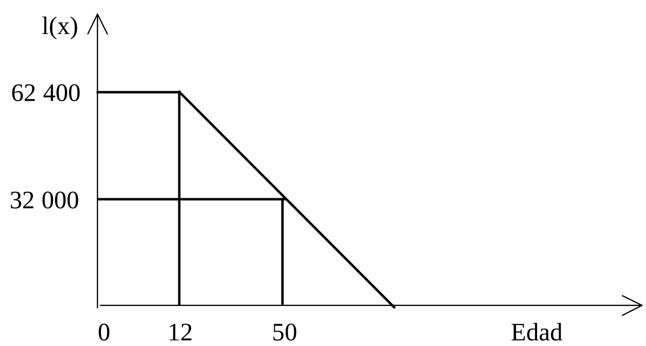
Algunas de las leyes más conocidas en el ámbito actuarial son, sin duda, las asociadas a la mortalidad y, particularmente, aquellas que describen la información resumida en una tabla de mortalidad.

En 1724 Moivre presentó su hipótesis conocida como “hipótesis de decremento uniforme”, la que se resume en la expresión: $L(x) = K(w\text{-}x)$, donde: $l(x)$ representa la serie de las personas sobrevivientes a edad z; k la pendiente o velocidad con que decrece la población resumida en la tabla de mortalidad, y w la edad límite de sobrevivencia de dicha población.

La recta de Moivre fue recomendada para un rango de edades de 12 a 86 años, en el cual se ajustaba de mejor manera.

Supóngase que k = 800 y w = 90, entonces, bajo la hipótesis de Moivre, L(x) = 800(90 - x) (gráfica 1):

GRÁFICA 1
FUNCIÓN DE MOIVRE



La hipótesis lineal de Moivre fue superada por Benjamín Gompertz en 1825, quien se apoyó en las dos causas generales de muerte: la casualidad y la creciente incapacidad del hombre para resistir la muerte.

Las causas biológicas fueron consideradas por Gompertz, dejando de considerar las causas fortuitas. Así, la hipótesis de Gompertz quedó planteada de la siguiente manera: "La resistencia que tiene el hombre para evitar la muerte disminuye a una tasa proporcional a ella misma, en el tiempo".

Denotando por Mx la tasa instantánea de mortalidad, donde:

$$\text{Mx} = \lim_{h \to \infty} \frac{l(x) - l(x+h)}{hl(x)} = -\frac{\partial}{\partial x} \ln l(x)$$

Gompertz toma su recíproco (1/Mx) como la medida que cuantifica la resistencia del hombre a la muerte. El planteamiento matemático de su hipótesis es:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1/Mx) = -h(1/Mx) \qquad (1)$$

Donde h es la tasa a la que disminuye la resistencia del hombre a la muerte. Resolviendo (1) para Mx, Gompertz obtiene:

$Mx = BC^x$ (2)
y resolviendo (2) para l(x), obtiene:
$l(x) = kg^c$ (3)
la que comúnmente es llamada ley de Gompertz.

William M. Makeham incorporó en 1860 las causas de muerte no consideradas por Gompertz, modificando (2) al incrementar su valor con la suma de la constante A, la que hipotéticamente involucra dichas causas fortuitas.

Así, para *Makeham*:
$Mx = A + BC^x$ (4)

Y resolviendo (4) (Mina, 1982: 191) para l(x), obtiene:

$l(x) = ks^x g^{c^x}$ (5)

La que comúnmente es llamada ley de Makeham.

La utilidad que tienen las leyes de Gompertz y Makeham van más alla de la descripción de la serie de los sobrevivientes de una tabla de vida l(x). En el presente trabajo se muestra alguna de las aplicaciones de trabajos hechos o dirigidos por el autor, que los actuarios y demógrafos han hecho de las leyes de Gompertz y Makeham tanto para el fenómeno demográfico mortalidad como para otros fenómenos.

Para desarrollar la ecuación (1) se considera lo siguiente:

a) Se dividen ambos miembros de la igualdad entre el recíproco de la Tasa Instantánea de Mortalidad, es decir, entre 1/Mx y se integra respecto a x para obtener el siguiente resultado:

$$\int \frac{\partial(1/Mx)}{1/Mx}\partial x = -h\int \partial x \qquad (2)$$

$$\ln(1/Mx)+\ln B = -hx \qquad (3)$$

b) Con las leyes de los logaritmos se obtiene:

$$\ln\frac{B}{Mx} = -hx \qquad (4)$$

c) Aplicando antilogaritmo en ambos lados de la igualdad:

$$\frac{B}{Mx} = e^{-hx} \qquad (5)$$

d) Se multiplica por los inversos de e-hx y 1/Mx, es decir, por ehx y Mx para obtener la siguiente expresión para Mx:
Mx = B e^{hx} (6)

e) Si denotamos a eh como C, la expresión para Mx es la siguiente:
Mx = BC^{x} (7)

Hasta aquí se ha encontrado una expresión para la Tasa Instantánea de Mortalidad a partir del supuesto de Gompertz. Si ahora se parte de la definición de Tasa Instantánea de Mortalidad, considerando el cambio que se observa en los sobrevivientes de una población (lx), se tiene el siguiente límite donde h tiende a cero:

$$Mx = \lim_{h \to 0} \frac{l(x) - l(x+h)}{hl(x)} \qquad (8)$$

$$Mx = \frac{-1}{l(x)} \lim_{h \to 0} \frac{l(x+h) - l(x)}{h} \qquad (9)$$

Por la definición de derivada se tiene:

$$Mx = \frac{-1}{l(x)} \frac{\partial}{\partial x} l(x) \qquad (10)$$

$$Mx = -\frac{\partial}{\partial x} \ln(x) \qquad (11)$$

Se ha logrado expresar la Tasa Instantánea de Mortalidad (Mx) como la derivada respecto a x del logaritmo de la función l(x); ahora se buscará encontrar una expresión para l(x). Si se integra y evalúa la expresión (11) respecto a y en el intervalo (0, x) se obtiene:

$$\int_0^x My \partial y = -\int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \ln l(y) \partial y \qquad (12)$$

$$= -\ln l(y) \Big|_0^x \qquad (13)$$

$$= -[\ln l(x) - \ln l(0)] \qquad (14)$$

Por las leyes de los logaritmos tenemos que:

$$\int_0^x My\partial y = \ln \frac{B}{Mx} \qquad (15)$$

Multiplicando por -1 la expresión (15):

$$\ln \frac{l(x)}{l(0)} = -\int_0^x My\partial y \qquad (16)$$

Para eliminar el logaritmo del primer miembro de nuestra igualdad se aplica el antilogaritmo:

$$\frac{l(x)}{l(0)} = e^{-\int_0^x My\partial y} \qquad (17)$$

Finalmente, se despeja l(x) obteniendo el siguiente resultado:

$$l(x) = l(0)e^{-\int_0^x My\partial y} \qquad (18)$$

Hasta este momento se conoce la expresión que define la Ley de Gompertz; sin embargo, es necesario considerar los supuestos que Makeham estableció en su ley.

Makeham propone integrar, en el modelo que define la ley de Gompertz, la primera de las dos causas de muerte supuestas por Gompertz, la cual no fue considerada en el modelo. Es decir, propone considerar dentro de un modelo matemático, tanto las causas independientes de la edad como las independientes.

Makeham establece la siguiente ley:

$$Mx = A + BC^x \qquad (19)$$

Donde:

Mx = Tasa Instantánea de Mortalidad bajo los supuestos de Makeham.

A = Parámetro asociado al efecto de las causas de muerte independientes de la edad, las cuales no fueron consideradas en la determinación de la ley de Gompertz.

BC^x = Expresión que define la ley de Gompertz.

Desarrollando la expresión (19), se integran ambos miembros de la igualdad en el intervalo (0, x), es decir:

$$\int My\partial y = \int_0^x \left(A + BC^y\right)\partial y \qquad (20)$$

Se resuelven las integrales y se evalúan:

$$\int_0^x My\partial y = \int_0^x A\partial y + \int_0^x BC^y \partial y \qquad (21)$$

$$\int_0^x My\partial y = Ay\Big|_0^x + (BC^y / \ln C\Big|_0^x \qquad (22)$$

$$\int_0^x My\partial y = Ax + BC^y / \ln C - B / \ln C \qquad (23)$$

Simplificando la expresión (23) y multiplicándola por -1 se obtiene:

$$-\int_0^x My\partial y = -Ax - B / \ln C(C^x - 1) \qquad (24)$$

Se renombran los siguientes términos para expresar la igualdad (24) en términos de logaritmos; para ello, realizamos lo siguiente: -A denotará como ln S y -B/ln C como ln g, por lo que la expresión (24) queda:

$$-\int_0^x My\partial y = x \ln S + (C^x - 1)\ln g \qquad (25)$$

La cual se puede simplificar utilizando las leyes de los logaritmos para obtener:

$$-\int_0^x My\partial y = \ln S^x + \ln g^{(c^x - 1)} \qquad (26)$$

$$-\int_0^x My\partial y = \ln S^x \ln g^{(c^x - 1)} \qquad (27)$$

Este resultado permite encontrar una nueva definición para la expresión (18):

$$l(x) = l(0)e^{-\int_0^x My\,\partial y} \qquad (18)$$

Así, sustituyendo la expresión (27) en la expresión (18) tenemos:

$$l(x) = l(0)e^{\ln S^x g^{(c^x-1)}} \qquad (28)$$

$$l(x) = l(0)(S^x g^{(c^x-1)}) \qquad (29)$$

$$l(x) = l(0)(S^x g^{c^x} g^{-1}) \qquad (30)$$

$$l(x) = \frac{l(0)}{g} S^x g^{c^x} \qquad (31)$$

Si denotamos l(0)/g como K, tenemos la siguiente expresión:

$$l(x) = KS^x g^{c^x} \qquad (32)$$

Esta expresión (32) es la Ley de Makeham, siendo entonces la función de Makeham la siguiente:

$$Y(x) = Ka^x g^{c^x} \qquad (33)$$

La ley de Makeham fue utilizada en un principio para describir el cambio relativo de la línea (lx) de supervivientes de una tabla de mortalidad, la cual supone que podría ser descrita por una función de la forma $Mx = A + BC^x$.

Presentación de la metodología

Combinación de los parámetros k, a, b y d de la función Makeham

Para determinar los parámetros k, a, b y d de la función Makeham, se utilizará el método de los grupos no superpuestos, para el cual es necesario determinar las siguientes condiciones:

a) Los datos se dividirán en cuatro grupos de observaciones sucesivas (yx).

b) Cada grupo deberá contar con el mismo número de valores observados (m). Por lo que, para aplicar este método, se necesita conformar los siguientes grupos:

Primer grupo:

X :	0	1	2	3...	(m-1)	(34)
y_x:	y_0	y_1	y_2	y_3...	y_{m-1}	

Segundo grupo:

X :	m	(m+1)	(m+2)	(m+3)...	(2m-1)	(35)
y_x:	y_m	y_{m+1}	y_{m+2}	$y_{m+3...}$	y_{2m-1}	

Tercer grupo:

X :	2m	(2m+1)	(2m+2)	(2m+3)...	(3m-1)	(36)
y_x:	y_{2m}	y_{2m+1}	y_{2m+2}	$y_{2m+3...}$	y_{3m-1}	

Cuarto grupo:

X :	3m	(3m+1)	(3m+2)	(3m+3)...	(4m-1)	(37)
y_x:	y_{3m}	y_{3m+1}	y_{3m+2}	$y_{3m+3...}$	y_{4m-1}	

c) Para linealizar la expresión (33) del apartado anterior, se calculan los logaritmos decimales de las y_x en cada uno de los grupos definidos en el inciso anterior, es decir:

$$\log y_i = \log K a_i \, b^{d_i} \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \ldots (4m-1) \qquad (38)$$

$$\log y_i = \log K + i \log a + d^i \log b; \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots (4m-1) \qquad (39)$$

d) A continuación se calculan las sumas de los logaritmos de cada uno de estos grupos y se denotan sumas como S_0, S_1, S_2 y S_3, respectivamente.

e) Para el primer grupo, tenemos:

Si se desarrolla cada término del miembro derecho:

$$S_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \log y_i = \sum_{i=0}^{m-1} \log k + \sum_{i=0}^{m-1} i \log a + \sum_{i=0}^{m-1} d^i \log b \qquad (40)$$

1. $$\sum_{i=0}^{m-1} \log k = m \log k$$

2. $\sum_{i=0}^{m-1} i \log a$; para toda i, donde $\sum_{i=0}^{m-1}$ es una progresión aritmética con el primer término de la sucesión igual a cero, la diferencia común es 1 y el número de observaciones es m. La suma de esta sucesión es m(m-1)/2; por tanto:

$$\sum_{i=0}^{m-1} i \log a = m(m-1)/2 \log a$$

3. $\sum_{i=0}^{m-1} d^i \log b,$ donde $\sum_{i=0}^{m-1} d^i$ es una progresión geométrica con el primer término de la sucesión igual a d^0, la razón común es d y el número de observaciones es m. La suma de esta sucesión es $d^0(d^m-1)/(d-1)$ y, por tanto:

$$\sum_{i=0}^{m-1} d^i \log b = d^0 (d^m - 1)/(d-1) \log a$$

Así, la suma para el primer grupo de observaciones es:

$$S_0 = m \log k + \frac{m(m-1)}{2} \log a + \frac{d^m - 1}{d-1} \log b$$

Siguiendo el procedimiento anterior, se obtienen las sumas para el resto de los grupos:

$$S_1 = m \log k + [m^2 + \frac{m(m-1)}{2}] \log a + d^m \frac{d^m - 1}{d^m 1} \log b \qquad (42)$$

$$S_2 = m \log k + [2m^2 + \frac{m(m-1)}{2}] \log a + d^{2m} \frac{d^m - 1}{d-1} \log b \qquad (43)$$

$$S_3 = m \log k + [3m^2 + \frac{m(m-1)}{2}] \log a + d^{3m} \frac{d^m - 1}{d^m - 1} \log b \qquad (44)$$

4. Ahora se calculan las primeras diferencias de la suma S_0, S_1, S_2 y S_3 y denotándose estas diferencias con ΔS_0, ΔS_1 y ΔS_2:

$$\Delta S_0 = S_1 - S_0 \tag{45}$$

$$\Delta S_0 = m\log k + [m^2 + \frac{m(m-1)}{2}]\log a + d^m \frac{d^m-1}{d-1}\log b - m\log k +$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}\log a + \frac{d^m-1}{d-1}\log b \tag{46}$$

La expresión anterior se puede reducir para obtener:

$$\Delta S_0 = m^2\log a + \frac{d^m-1}{d-1}(d^m-1)\log b \tag{47}$$

$$\Delta S_0 = m^2\log a + \frac{(d^m-1)^2}{d-1}\log b \tag{48}$$

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1 \tag{49}$$

$$\Delta S_1 = m\log k + [2m^2 + \frac{m(m-1)}{2}]\log a + d^{2m}\frac{d^m-1}{d-1}\log b - m\log k +$$

$$+[m^2 + \frac{m(m-1)}{2}]\log a + d^m\frac{d^m-1}{d-1}\log b \tag{50}$$

$$\Delta S_1 = m^2\log a + \frac{d^m-1}{d-1}(d^{2m}-d^m)\log b \tag{51}$$

$$\Delta S_1 = m^2\log a + \frac{d^m-1}{d-1}(d^{2m}-1)d^m\log b \tag{52}$$

$$\Delta S_1 = m^2\log a + d^m\frac{(d^m-1)^2}{d-1}\log b \tag{53}$$

$$\Delta S_2 = S_3 - S_2 \tag{54}$$

$$\Delta S_2 = m\log k + [3m^2 + \frac{m(m-1)}{2}]\log a + d^{3m}\frac{d^m-1}{d-1}\log b - m\log k +$$

$$+[2m^2 \frac{m(m-1)}{2}\log a + d^{2m}\frac{d^m-1}{d-1}\log b \tag{55}$$

$$\Delta S_2 = m^2 \log a + \frac{d^m-1}{d-1}(d^{3m}-d^{2m})\log b \tag{56}$$

$$\Delta S_2 = m^2 \log a + \frac{d^m-1}{d-1}(d^{3m}-1)d^{2m}\log b \tag{57}$$

$$\Delta S_2 = m^2 \log a + d^{2m}\frac{(d^m-1)^2}{d-1}\log b \tag{58}$$

5. Se continúa el proceso calculando las segundas diferencias, las cuales se denotarán como $\Delta^2 S_0$ y $\Delta^2 S_1$

$$\Delta^2 S_0 = \Delta S_1 - \Delta^2 S_0 \tag{59}$$

$$\Delta^2 S_0 = m^2 \log a + d^m \frac{(d^m-1)^2}{d-1}\log b - m^2 \log a + \frac{(d^m-1)^2}{d-1}\log b \tag{60}$$

$$\Delta^2 S_0 = \frac{\left(d^m-1\right)^2}{d-1}(d^m-1)\log b \tag{61}$$

$$\Delta^2 S_0 = \frac{\left(d^m-1\right)^3}{d-1}\log b \tag{62}$$

$$\Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta^2 S_1 \tag{63}$$

$$\Delta^2 S_1 = m^2 \log a + d^{2m}\frac{(d^m-1)^2}{d-1}\log b - m^2 \log a + d^m \frac{(d^m-1)^2}{d-1}\log b \tag{64}$$

$$\Delta^2 S_1 = \frac{(d^m-1)^2}{d-1}(d^{2m}-d^m)\log b \tag{65}$$

$$\Delta^2 S_1 = d^m \frac{(d^m-1)^3}{d-1}\log b \tag{66}$$

6. Con los resultados anteriores se encontrarán las expresiones para los parámetros a, b y d. Para encontrar el parámetro d se utiliza la expresión (66) y el resultado encontrado en (62), de la siguiente manera:

$$\Delta^2 S_1 = d^m \frac{(d^m - 1)^3}{d-1} \log b = d^m \tag{67}$$

Despejando d^m y calculando la raíz m-ésima, se tiene que d puede expresarse como:

$$d^m = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \tag{68}$$

$$d = \left(\frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \right)^{\frac{1}{m}} \tag{69}$$

Para encontrar el parámetro b se retoma el resultado obtenido en (62). Primero se despeja el logaritmo de b y después se aplica el antilogaritmo y se obtiene b:

$$\Delta^2 S_0 = \frac{\left(d^m - 1\right)^3}{d-1} \log b$$

$$\Delta^2 S_0 \frac{\left(d^m - 1\right)^3}{d-1} = \log b \tag{70}$$

Antilog (log b) = Antilog $[\Delta^2 S_0 \frac{d-1}{(d^m - 1)^3}]$ (71)

b = Antilog $[\Delta^2 S_0 \frac{d-1}{(d^m - 1)^3}]$ (72)

El parámetro a se calculará a partir de las expresiones (48) y (62):

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \log b$$

log b puede expresarse a partir de (62), es decir:

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \frac{\left(d^m - 1\right)^2}{d-1} \frac{d-1}{(d^m - 1)^3} \Delta^2 S_0 \tag{73}$$

Se despeja el log a y se aplica antilogaritmo:

$$\log a = \frac{1}{m^2}(\Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1}) \qquad (74)$$

Antilog (log a) = Antilog $[\frac{1}{m^2}(\Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1})]$ (75)

$$a = \text{Antilog } [\frac{1}{m^2}(\Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1})] \qquad (76)$$

Por último, el parámetro k se obtendrá a partir de la condición de mínimos cuadrados, es decir:

$Y_x = Ka^x b^{d^x}$ para x = 0, 1, 2, ..., 4m-1

$$\sum_{x=0}^{4m-1}\left(y_x - ka^x b^{d^x}\right)^2 = 0 \qquad (77)$$

Para simplificar la expresión, se denota como Vx a $a^x b^{d^x}$, por tanto, (77) se expresa como:

$$\sum_{x=0}^{4m-1}\left(y_x - kVx\right)^2 = 0 \qquad (78)$$

Desarrollando $(y_x - kVx)^2$ se obtiene:

$$(y_x - kVx)^2 = (y_x^2 - 2ky_x Vx + k^2Vx^2) \qquad (79)$$

$$= (y_x^2 - 2y_x^2 + k^2Vx^2) \qquad (80)$$

$$= (k^2Vx^2 - y_x^2) \qquad (81)$$

Este resultado permite expresar (78) como:

$$\sum_{x=0}^{4m-1}\left(k^2Vx^2 - y_x^2\right) = 0 \qquad (82)$$

$$\sum_{x=0}^{4m-1}\left(k^2Vx^2\right)=\sum_{x=0}^{4m-1}(y_x{}^2) \qquad (83)$$

Se despeja k^2 de (83):

$$k^2=\frac{\sum_0^{4m-1} y_x{}^2}{\sum_0^{4m-1} V_x{}^2} \qquad (84)$$

Para eliminar el cuadrado de k, se sabe que $y_x = kVx$ según la expresión (78), por lo tanto, es posible expresar (84) como:

$$k^2=\frac{\sum_0^{4m-1} y_x{}^2}{\sum_0^{4m-1} V_x{}^2} \qquad (85)$$

Dada la expresión (85) es posible estimar K de la siguiente manera:

$$K=\frac{\sum_0^{4m-1} y_x{}^2}{\sum_0^{4m-1} V_x{}^2} \qquad (86)$$

Método de corrección de los valores estimados para los parámetros k, a, b y d

Una vez obtenidos los valores de los parámetros k, a, b y d de la función Makeham, es posible realizar variaciones en ellos con el objetivo de calcular una mejor aproximación de los valores observados.

La función Makeham presentará, con estas variaciones, cambios significativos que se denotarán con dy. Dichos cambios se podrán obtener a través del proceso que a continuación se describe:

Sea $y_x = ka^x b^{d^x}$ para toda x = 0, 1, 2, ..., 4m-1 (1)

Se obtiene el logaritmo natural de la función (1):

$$Lny_x = Ln(ka^x b^{d^x})$$

$$= Lnk + Lna^x + Lnb^{d^x}$$

= Ln k + xLn a + d^x Ln b (2)

Hay que calcular la derivada de la expresión (2):

$$\frac{\partial}{\partial y_x} Lny_x = \frac{\partial}{\partial u}(Lnk + xLna + d^x Lnb) \quad (3)$$

Al calcular la derivada se puede considerar que:

$$\frac{\partial}{\partial y_x} Lny_x = \frac{1}{y_x} dy_x \quad (4)$$

Mientras que la derivada del miembro derecho se puede expresar como:

$$\frac{\partial}{\partial y_x} Lny_x = \frac{\partial}{\partial k} Lnk + \frac{\partial}{\partial a} xLna + \frac{\partial}{\partial b} d^x Lnb + \frac{\partial}{\partial d} d^x Lnb$$

$$= \frac{1}{k} dk + \frac{x}{a} da + \frac{d^x}{b} db + Lnb \frac{\partial}{\partial} d^x \quad (5)$$

El último término de la expresión (5) se puede presentar según el siguiente razonamiento: de acuerdo con las propiedades de los logaritmos se expresa:

Ln d^x = Ln xLnd

Al obtener la derivada de la expresión anterior se observa que:

$$\frac{\partial}{\partial d} Lnd^x = \frac{\partial}{\partial d} xLnd$$

$$\frac{1}{d^x} dd^x = \frac{x}{d} dd$$

Por lo tanto, la derivada de dx con respecto a d es:

$$d(d^x) = xd^x \frac{\partial d}{\partial} \tag{6}$$

Dado lo anterior, la expresión (5) se puede escribir como:

$$\frac{1}{y_x} dy_x = \frac{1}{k} dk + \frac{x}{a} da + \frac{d^x}{b} db + xd^x Lnb \frac{\partial d}{\partial} \tag{7}$$

En consecuencia, la derivada de dy_x es:

$$dy_x = \frac{y_x}{k} dk + \frac{xy_x}{a} da + \frac{d^x y_x}{b} db + xd^x y_x Lnb \frac{\partial d}{\partial} \tag{8}$$

Para calcular los valores de los parámetros a partir de la expresión (8), se procede a linealizar dicha expresión; para ello se denota como:

$x_1 = d\ y_x$ $\quad x_2 = y_x$ $\quad x_3 = x\ (x_2)$ $\quad x_4 = x_2\ d^x$ $\quad x_5 = x_3\ d^x$

$$c_2 = \frac{\partial k}{k} \qquad c_3 = \frac{\partial a}{a} \qquad c_4 = \frac{\partial b}{b} \qquad c_5 = Lnb \frac{\partial d}{d}$$

Una vez hecho lo anterior, se sustituye en (8) estas variables, por lo que puede expresarse en forma de regresión múltiple lineal, como se presenta a continuación:

$$x_1 = c_2\ x_2 + c_3\ x_3 + c_4\ x_4 + c_5\ x_5$$

Se denotan las diferencias entre los valores observados y los valores teóricos como dyx, de tal forma que sea posible calcular los coeficientes de la regresión, c_2 , c_3 , c_4 y c_5 , a través de las siguientes ecuaciones normales:

$$\sum x_1x_2 = c_2 \sum x_2x_2 + c_3 \sum x_2x_3 + c_4 \sum x_2x_4 + c_5 \sum x_2x_5$$

$$\sum x_1x_3 = c_2 \sum x_2x_2 + c_3 \sum x_3x_3 + c_4 \sum x_3x_4 + c_5 \sum x_3x_5$$

$$\sum x_1x_4 = c_2 \sum x_2x_4 + c_3 \sum x_3x_4 + c_4 \sum x_4x_4 + c_5 \sum x_4x_5$$

$$\sum x_1x_5 = c_2 \sum x_2x_5 + c_3 \sum x_3x_5 + c_4 \sum x_4x_5 + c_5 \sum x_5x_5$$

Para resolver este sistema de ecuaciones lineales simultáneas de cuatro incógnitas puede emplearse el método de matrices, donde para encontrar la solución al sistema es necesario conocer la matriz integrada por los coeficientes de la regresión.

Las ecuaciones normales antes presentadas pueden expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$A = \begin{vmatrix} \sum x_2x_2 \sum x_2x_3 \sum x_2x_4 \sum x_2x_5 \\ \sum x_2x_3 \sum x_3x_3 \sum x_3x_4 \sum x_3x_5 \\ \sum x_2x_4 \sum x_3x_4 \sum x_4x_4 \sum x_4x_5 \\ \sum x_2x_5 \sum x_3x_5 \sum x_4x_5 \sum x_5x_5 \end{vmatrix} \qquad V = \begin{vmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{vmatrix} \qquad G = \begin{vmatrix} \sum x_1x_2 \\ \sum x_1x_3 \\ \sum x_1x_4 \\ \sum x_1x_5 \end{vmatrix}$$

Para encontrar los coeficientes de la matriz V, se realiza la siguiente operación:

$$V = A^{-1} G$$

De esta manera se calculan los valores de las c_j y, por consiguiente, las primeras correcciones a los parámetros k, a, b y d de la función Makeham. Estas correcciones permiten obtener nuevas aproximaciones para los parámetros. Por tanto, los nuevos valores para éstos son:

$$k_1 = k(1+c_1) \qquad a_1 = a(1+c_3) \qquad b_1 = b(1+c_4) \qquad d_1 = d(1+c_5 / Lnb)$$

A partir de estos valores se obtienen nuevos valores teóricos y, por lo tanto, nuevas diferencias dyx. Lo anterior implica el empleo de un proceso iterativo que permitirá ir obteniendo aproximaciones cada vez más satisfactorias. Es decir, el proceso deberá repetirse hasta que la magnitud de las correcciones alcancen un valor reducido tal que no logren cambiar sensiblemente los valores teóricos obtenidos usando los valores de los parámetros hasta esa iteración.

En general, se observa que si ki, ai, bi y di son valores de la iteración (i), los valores de esos parámetros a la iteración (i+1) serán:

$$k_{i+1} = k_i(1+c_{2i+1}) \quad a_{i+1} = a_i(1+c_{3i+1}) \quad b_{i+1} = b_i(1+c_{4i+1}) \quad d_{i+1} = d_i(1+c_{5i+1} / Lnb)$$

La aplicación que aquí se presenta de la función de Gompertz-Makeham es sobre la tendencia histórica de la esperanza de vida al nacimiento para hombres y mujeres México de 1995 al año 2010. Con dichas esperanzas se obtuvieron las tablas abreviadas de mortalidad por sexo para cada uno de los años de referencia.

Los valores de los parámetros de las funciones de ajuste Gompertz-Makeham obtenidas son los siguientes:

Hombres			
K	a	b	d
70.92158	1.004147	0.999296	1.201199
70.80120	1.004335	0.999127	1.176614
70.81004	1.004349	0.998998	1.168366
70.81079	1.004351	0.998987	1.168156
70.81079	1.004351	0.998987	1.168155
Mujeres			
K	a	b	d
74.88246	1.003936	0.999323	1.201199
74.74836	1.004102	0.999210	1.176614
74.75655	1.004115	0.999096	1.168366
74.75758	1.004116	0.999082	1.168156
74.75758	1.004116	0.999082	1.168155

Con las funciones Gompertz-Makeham se obtuvieron los márgenes de la esperanza de vida para los hombres y para las mujeres, los que sirvieron para obtener las tablas abreviadas de mortalidad que se presentan en el anexo.

Anexo

MÉXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD. HOMBRES, 1995

Edad	q(x)	d(x)	m(x)	l(x)	L(x)	S(x)	T(x)	e(x)
0	0,04622	4622	0,04791	100000	96476	0,95184	7103010	71,03
1	0,00814	776	0,00205	95378	379443	0,99298	7006534	73,46
5	0,0018	171	0,00036	94601	472580	0,99822	6627091	70,05
10	0,00176	166	0,00035	94431	471738	0,99787	6154511	65,17
15	0,0025	236	0,0005	94265	470733	0,99706	5682773	60,29
20	0,00339	318	0,00068	94029	469348	0,9964	5212040	55,43
25	0,00382	358	0,00076	93710	467658	0,99543	4742692	50,61
30	0,00532	497	0,00107	93353	465522	0,99403	4275034	45,79
35	0,00662	615	0,00133	92856	462742	0,99152	3809513	41,03
40	0,01035	954	0,00208	92241	458819	0,98659	3346770	36,28
45	0,01651	1508	0,00333	91287	452665	0,97789	2887951	31,64
50	0,02781	2497	0,00564	89779	442654	0,96416	2435286	27,13
55	0,0441	3849	0,00902	87283	426789	0,94423	1992632	22,83
60	0,06798	5672	0,01407	83433	402987	0,91329	1565843	18,77
65	0,10681	8305	0,02257	77762	368044	0,85769	1162856	14,95
70	0,18205	12645	0,04006	69456	315669	0,75828	794812	11,44
75	0,31467	17877	0,07468	56812	239366	0,50043	479143	8,43
80	1	38935	0,16238	38935	239777	0	239777	6,16

MÉXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD. MUJERES, 1995

Edad	q(x)	d(x)	m(x)	l(x)	L(x)	S(x)	T(x)	e(x)
0	0,04104	4104	0,04237	100000	96871	0,95692	7498002	74,98
1	0,00781	749	0,00196	95896	381588	0,99366	7401131	77,18
5	0,0013	123	0,00026	95147	475424	0,99884	7019543	73,78
10	0,00103	98	0,00021	95023	474872	0,99873	6544118	68,87
15	0,00151	143	0,0003	94925	474270	0,99813	6069247	63,94
20	0,00223	212	0,00045	94782	473383	0,99751	5594977	59,03
25	0,00276	261	0,00055	94571	472202	0,9969	5121594	54,16
30	0,00344	325	0,00069	94310	470740	0,9961	4649392	49,3
35	0,00437	410	0,00088	93986	468902	0,99452	4178652	44,46
40	0,00661	618	0,00133	93575	466331	0,99188	3709750	39,64
45	0,00964	896	0,00194	92957	462545	0,98745	3243419	34,89
50	0,01549	1426	0,00312	92061	456739	0,98084	2780874	30,21
55	0,02289	2075	0,00463	90635	447987	0,9695	2324135	25,64
60	0,0383	3391	0,00781	88560	434322	0,94681	1876148	21,19
65	0,06868	5849	0,01422	85169	411220	0,90044	1441826	16,93
70	0,13272	10527	0,02843	79320	370280	0,81323	1030606	12,99
75	0,24909	17135	0,0569	68792	301124	0,54398	660326	9,6
80	1	51657	0,14381	51657	359202	0	359202	6,95

MÉXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD. HOMBRES, 2000

Edad	q(x)	d(x)	m(x)	l(x)	L(x)	S(x)	T(x)	e(x)
0	0,04062	4062	0,04192	100000	96903	0,95816	7249002	72,49
1	0,00616	591	0,00155	95938	382176	0,99442	7152100	74,55
5	0,00137	130	0,00027	95347	476407	0,99861	6769924	71
10	0,00142	135	0,00028	95216	475744	0,99829	6293517	66,1
15	0,002	190	0,0004	95081	474932	0,99766	5817773	61,19
20	0,00267	254	0,00054	94891	473823	0,99714	5342841	56,3
25	0,00305	289	0,00061	94638	472466	0,99629	4869018	51,45
30	0,00437	412	0,00088	94349	470713	0,99507	4396552	46,6
35	0,0055	517	0,0011	93936	468391	0,99286	3925839	41,79
40	0,0088	822	0,00177	93420	465045	0,9884	3457448	37,01
45	0,01443	1336	0,00291	92598	459650	0,98037	2992404	32,32
50	0,0249	2273	0,00504	91262	450628	0,96759	2532754	27,75
55	0,04011	3569	0,00819	88989	436024	0,94909	2082127	23,4
60	0,06217	5310	0,01283	85420	413826	0,92024	1646103	19,27
65	0,09852	7893	0,02073	80110	380819	0,86749	1232277	15,38
70	0,17021	12292	0,03721	72217	330356	0,77106	851458	11,79
75	0,29972	17961	0,07051	59925	254723	0,51118	521102	8,7
80	1	41964	0,15754	41964	266379	0	266379	6,35

MÉXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD. MUJERES, 2000

Edad	q(x)	d(x)	m(x)	l(x)	L(x)	S(x)	T(x)	e(x)
0	0,03596	3596	0,03697	100000	97258	0,96273	7642993	76,43
1	0,00588	567	0,00148	96404	384107	0,995	7545735	78,27
5	0,00095	91	0,00019	95837	478960	0,99914	7161628	74,73
10	0,00077	74	0,00015	95747	478549	0,99905	6682668	69,8
15	0,00114	109	0,00023	95673	478092	0,99858	6204120	64,85
20	0,00171	164	0,00034	95564	477412	0,99808	5726028	59,92
25	0,00214	204	0,00043	95401	476493	0,99757	5248616	55,02
30	0,00272	259	0,00054	95197	475337	0,99689	4772123	50,13
35	0,0035	333	0,0007	94938	473859	0,99551	4296785	45,26
40	0,00548	519	0,0011	94606	471731	0,99315	3822926	40,41
45	0,00822	773	0,00165	94087	468500	0,98917	3351195	35,62
50	0,01347	1257	0,00271	93313	463424	0,98327	2882695	30,89
55	0,02003	1844	0,00405	92056	455672	0,97321	2419270	26,28
60	0,03368	3039	0,00685	90212	443464	0,95272	1963599	21,77
65	0,06135	5348	0,01266	87173	422496	0,90971	1520135	17,44
70	0,12112	9911	0,02579	81825	384348	0,82654	1097639	13,41
75	0,233	16756	0,05275	71914	317680	0,55463	713291	9,92
80	1	55158	0,13942	55158	395611	0	395611	7,17

MÉXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD. HOMBRES, 2005

Edad	q(x)	d(x)	m(x)	l(x)	L(x)	S(x)	T(x)	e(x)
0	0,03548	3548	0,03647	100000	97295	0,96384	7386991	73,87
1	0,0046	444	0,00115	96452	384626	0,99559	7289696	75,58
5	0,00102	98	0,0002	96008	479796	0,99892	6905070	71,92
10	0,00113	108	0,00023	95910	479280	0,99865	6425275	66,99
15	0,00158	151	0,00032	95802	478631	0,99817	5945995	62,07
20	0,00209	200	0,00042	95650	477753	0,99775	5467365	57,16
25	0,00242	231	0,00048	95451	476678	0,99702	4989612	52,27
30	0,00355	338	0,00071	95220	475255	0,99596	4512934	47,39
35	0,00452	429	0,00091	94882	473336	0,99403	4037679	42,55
40	0,00742	701	0,00149	94452	470509	0,99003	3564343	37,74
45	0,01252	1174	0,00252	93751	465821	0,98268	3093834	33
50	0,02218	2054	0,00449	92577	457751	0,97084	2628013	28,39
55	0,0363	3286	0,00739	90523	444402	0,95373	2170262	23,97
60	0,0566	4938	0,01165	87237	423841	0,92693	1725860	19,78
65	0,09053	7451	0,01896	82299	392869	0,87704	1302020	15,82
70	0,15863	11873	0,03446	74849	344561	0,78371	909150	12,15
75	0,28482	17937	0,06642	62976	270037	0,52171	564590	8,97
80	1	45039	0,15291	45039	294553	0	294553	6,54

MÉXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD. MUJERES, 2005

Edad	q(x)	d(x)	m(x)	l(x)	L(x)	S(x)	T(x)	e(x)
0	0,03138	3138	0,03215	100000	97608	0,96785	7776001	77,76
1	0,00438	424	0,0011	96862	386318	0,99607	7678394	79,27
5	0,00068	66	0,00014	96438	482024	0,99937	7292076	75,61
10	0,00058	56	0,00012	96372	481721	0,99929	6810052	70,66
15	0,00085	82	0,00017	96316	481378	0,99893	6328331	65,7
20	0,0013	125	0,00026	96235	480861	0,99853	5846953	60,76
25	0,00164	158	0,00033	96110	480153	0,99811	5366092	55,83
30	0,00213	204	0,00043	95952	479248	0,99754	4885938	50,92
35	0,00279	267	0,00056	95747	478069	0,99634	4406690	46,02
40	0,00453	432	0,00091	95480	476321	0,99425	3928621	41,15
45	0,00698	663	0,0014	95048	473583	0,99069	3452300	36,32
50	0,01166	1100	0,00235	94385	469174	0,98546	2978717	31,56
55	0,01746	1629	0,00352	93285	462351	0,97657	2509543	26,9
60	0,02951	2705	0,00599	91656	451517	0,95812	2047192	22,34
65	0,05462	4858	0,01123	88951	432609	0,91836	1595676	17,94
70	0,11023	9269	0,02333	84093	397291	0,83926	1163066	13,83
75	0,21751	16275	0,04881	74824	333431	0,56458	765775	10,23
80	1	58549	0,13542	58549	432344	0	432344	7,38

MÉXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD. HOMBRES, 2010

Edad	q(x)	d(x)	m(x)	l(x)	L(x)	S(x)	T(x)	e(x)
0	0,03136	3136	0,03213	100000	97609	0,96831	7500999	75,01
1	0,00352	341	0,00088	96864	386545	0,99642	7403391	76,43
5	0,00079	76	0,00016	96522	482422	0,99915	7016845	72,7
10	0,00092	88	0,00018	96446	482011	0,9989	6534423	67,75
15	0,00128	123	0,00026	96358	481483	0,99853	6052412	62,81
20	0,00166	160	0,00033	96235	480775	0,99819	5570929	57,89
25	0,00195	188	0,00039	96075	479906	0,99755	5090154	52,98
30	0,00294	282	0,00059	95887	478731	0,99663	4610249	48,08
35	0,00379	362	0,00076	95605	477120	0,99493	4131518	43,21
40	0,00636	606	0,00128	95243	474700	0,99132	3654398	38,37
45	0,01101	1042	0,00221	94637	470581	0,98454	3179698	33,6
50	0,01996	1868	0,00403	93595	463305	0,97351	2709118	28,95
55	0,03315	3041	0,00674	91727	451032	0,9576	2245812	24,48
60	0,05197	4609	0,01067	88686	431907	0,93253	1794780	20,24
65	0,08381	7047	0,0175	84077	402767	0,88514	1362874	16,21
70	0,14875	11459	0,03214	77030	356504	0,79463	960107	12,46
75	0,27188	17828	0,06293	65572	283289	0,53067	603602	9,21
80	1	47744	0,14905	47744	320314	0	320314	6,71

MÉXICO: TABLA ABREVIADA DE MORTALIDAD. MUJERES, 2010

Edad	q(x)	d(x)	m(x)	l(x)	L(x)	S(x)	T(x)	e(x)
0	0,02766	2766	0,02826	100000	97891	0,97192	7885999	78,86
1	0,00334	325	0,00084	97234	388071	0,99684	7788108	80,1
5	0,0005	49	0,0001	96909	484424	0,99953	7400038	76,36
10	0,00044	43	0,00009	96860	484195	0,99946	6915614	71,4
15	0,00065	63	0,00013	96818	483932	0,99917	6431419	66,43
20	0,00101	98	0,0002	96755	483531	0,99885	5947487	61,47
25	0,00129	125	0,00026	96657	482976	0,99851	5463956	56,53
30	0,0017	164	0,00034	96533	482255	0,99802	4980980	51,6
35	0,00226	218	0,00045	96369	481300	0,99698	4498725	46,68
40	0,00379	364	0,00076	96151	479844	0,99511	4017425	41,78
45	0,00599	574	0,0012	95787	477498	0,99191	3537581	36,93
50	0,0102	971	0,00205	95213	473635	0,98722	3060082	32,14
55	0,01538	1449	0,0031	94241	467584	0,9793	2586448	27,44
60	0,02611	2423	0,00529	92792	457904	0,96257	2118864	22,83
65	0,04904	4432	0,01006	90369	440766	0,92562	1660961	18,38
70	0,10102	8681	0,02128	85937	407982	0,85019	1220194	14,2
75	0,20409	15767	0,04546	77256	346861	0,57294	812212	10,51
80	1	61489	0,13213	61489	465351	0	465351	7,57

GANANCIAS TOTALES EN ESPERANZA DE VIDA 1995-2010

Edad	*Hombres*	*Mujeres*
0	3.98	3.88
1	2.97	2.92
5	2.65	2.58
10	2.58	2.53
15	2.52	2.49
20	2.46	2.44
25	2.37	2.37
30	2.29	2.3
35	2.18	2.22
40	2.09	2.14
45	1.96	2.04
50	1.82	1.93
55	1.65	1.8
60	1.47	1.64
65	1.26	1.45
70	1.02	1.21
75	0.78	0.91
80	0.55	0.62

PARÁMETROS Y CORRELACIÓN DE LAS FUNCIONES
GOMPERTZ-MAKEHAM OBTENIDAS

Hombres				
k	a	b	d	Correlación
70.92158	1.004147	0.999296	1.198661	0.922830
71.80120	1.004335	0.999127	1.172928	0.991133
70.81004	1.004349	0.998998	1.166137	0.995417
70.81079	1.004351	0.998987	1.166158	0.996399
70.81079	1.004351	0.998987	1.166158	0.996399
Mujeres				
k	a	b	d	Correlación
74.88246	1.003936	0.99323	1.201199	0.912301
74.74836	1.004102	0.99921	1.176614	0.995701
74.75655	1.004115	0.999096	1.168366	0.995363
74.75758	1.004116	0.999082	1.168156	0.996399
74.75758	1.004116	0.999082	1.168155	0.996399

Bibliografía

APOSTOL, Tom, 1987, *Calculus, Cálculo en varias variables con aplicaciones a las probabilidades y al análisis vectorial*, vol. 2, Reverté, México.

CORONA, V. Rodolfo, y Alberto Minunjin Z., 1982, *Técnicas de evaluación y ajuste de información estadística*, FCE, México.

INSTITUTO NACIONAL de ESTADÍSTICA, GEOGRAFÍA e INFORMÁTICA, 1992, *XI Censo Nacional de Población y Vivienda*, México.

INSTITUTO NACIONAL de ESTADÍSTICA, GEOGRAFÍA e INFORMÁTICA, 1996, *Conteo 95, Resultados*, México.

CURTIS, F. Gerard, 1997, *Análisis numérico*, Alfa Omega, México.

MINA Valdés, Alejandro, 1982, *Uso y abuso de los modelos de ajuste en la demografía*, El Colegio de México, México.

MINA Valdés, Alejandro, 1982, "Consideraciones sobre modelos de ajuste empleados en la demografía matemática", en *Demografía y Economía*, El Colegio de México, vol. XVI, núm. 2(50).

MINA Valdés, Alejandro, 1990, "Las funciones de Gompertz y Makeham en el análisis actuarial y demográfico en México", en *La Actuaría en México. Antología de algunos trabajos relevantes*, Colegio Nacional de Actuarios, México.

MINA Valdés, Alejandro, 1996, *Dinámica de la población mexicana del 12 de marzo de 1990 al 5 de noviembre de 1995*, El Colegio de México, Centro de Estudios Demográficos y de Desarrollo Urbano.

MINA Valdés, Alejandro, s/f, "Simulación de los cambios demográficos de una población entre dos fechas", en *Estudios Demográficos y Urbanos*, núm. 42, El Colegio de México, México.