



Revista Facultad de Ingeniería  
ISSN: 0717-1072  
facing@uta.cl  
Universidad de Tarapacá  
Chile

Salgado, Mario; Musalem, Rodrigo; Silva, Eduardo  
Parametrización alternativa de Youla  
Revista Facultad de Ingeniería, vol. 13, núm. 2, 2005, pp. 71-83  
Universidad de Tarapacá  
Arica, Chile

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=11413208>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en [redalyc.org](http://redalyc.org)

## PARAMETRIZACIÓN ALTERNATIVA DE YOULA

Mario Salgado<sup>1</sup> Rodrigo Musalem<sup>1</sup> Eduardo Silva<sup>1</sup>

Recibido el 31 de agosto de 2004, aceptado el 10 de marzo de 2005

### RESUMEN

En este artículo se propone una versión especial de la parametrización de Youla para plantas inestables. El tema es articulado en la parametrización de todas las sensibilidades de todos aquellos lazos de control internamente estables para una planta dada. La propuesta incluye el caso de plantas de tiempo discreto estables e inestable, escalares (SISO) y multivariadas (MIMO).

Palabras clave: Parametrización de Youla, escalares (SISO), multivariadas (MIMO).

### ABSTRACT

*This article proposes a special formulation of the Youla parameterization for general plants. The subject is presented as the parameterization of all sensitivities of all internally stable loops, for a given process model. Our work covers the stable and unstable discrete time case, scalar (SISO) and multivariate (MIMO) plants.*

Keywords: Youla parameterization, scalar (SISO), multivariate (MIMO).

### INTRODUCCIÓN

La parametrización de Youla [1-5] generó un punto de quiebre en la solución del problema de síntesis de controladores en el caso de modelos lineales. El aporte esencial de ese enfoque es poder parametrizar todos los controladores estabilizantes para una planta dada; esto lleva a sensibilidades que se expresan como funciones lineales o afines de un parámetro racional, propio y estable (escalar o multivariado). Estas expresiones permiten, entre otras cosas, plantear problemas de síntesis cuadrática óptima de forma tal que se puede obtener una solución analítica.

Otro elemento crucial en la parametrización de Youla es que revela en forma directa el rol de la **inversión**, como paradigma central del diseño de sistemas de control, así como los compromisos de diseño [3].

La parametrización de Youla requiere, como requisito ineludible, conocer al menos un controlador que estabilice la planta dada. A partir de ese conocimiento, el enfoque clásico caracteriza todos los controladores estabilizantes para esa planta.

En ese trabajo se desarrolla una reformulación de la parametrización de Youla estándar. Esta nueva caracterización lleva a parametrizar directamente la sensibilidad del lazo de control y no el controlador. Esto redonda en una notable simplificación del problema de síntesis de controladores para una planta dada. El tratamiento del tema se hace en el dominio de tiempo discreto, aunque muchos de los resultados obtenidos son aplicables directamente a los sistemas de tiempo continuo.

El artículo está organizado como sigue: primero se presentan definiciones preliminares y se fija el marco de trabajo de las secciones posteriores. La siguiente sección presenta la parametrización de Youla estándar en el caso SISO y MIMO y a continuación se presenta la parametrización propuesta. Luego se ilustra la aplicación de la parametrización propuesta a la resolución de un problema de optimización cuadrático. La última sección presenta comentarios finales a modo de conclusión.

<sup>1</sup> Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, Av. España 1680, Valparaíso, Chile, e-mail: mario.salgado@elo.utfsm.cl, musa@elo.utfsm.cl, eduardo.silva@elo.utfsm.cl

## DEFINICIONES PRELIMINARES

Esta sección resume aspectos que serán de utilidad en el desarrollo de este artículo.

Dado un número complejo  $z$ ,  $\bar{z}$  representa a su conjugado y, dada una matriz<sup>2</sup>  $\mathbf{M} \in C^{mn}$ ,  $\mathbf{M}^H$  denota a su matriz hermitiana (conjugada transpuesta).

Se define al espacio  $\mathcal{L}_2$  como el espacio vectorial de todas las funciones matriciales  $\mathbf{M}[z]$  definidas y medibles sobre el círculo unitario, o sea para  $|z| = 1$ , dotado del producto interno

$$\langle \mathbf{M}, \mathbf{G} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{traza} \{ \mathbf{M}^H[e^{j\omega}], \mathbf{G}[e^{j\omega}] \} d\omega \quad (1)$$

donde  $\mathbf{M}[z], \mathbf{G}[z] \in \mathcal{L}_2$ . Puede probarse que este espacio es de Hilbert [6].

La norma inducida por (1) se conoce como norma 2 y será denotada por  $\|\cdot\|_2$ .

Se define el subespacio  $\mathcal{H}_2^\perp \subset \mathcal{L}_2$  como el espacio cerrado de todas las funciones en  $\mathcal{L}_2$  que tienen continuación analítica dentro del círculo unitario<sup>3</sup>, lo que en el contexto de matrices de transferencia implica que todas aquellas matrices de transferencia constantes y aquellas que tienen todos sus polos estrictamente fuera del círculo unitario (posiblemente en  $z \rightarrow \infty$ , es decir, funciones de transferencia impropias) pertenecen a  $\mathcal{H}_2^\perp$ . El complemento ortogonal de  $\mathcal{H}_2^\perp$  se denota por  $\mathcal{H}_2$  y todas las matrices de transferencia estrictamente propias y con sólo polos estrictamente dentro del círculo unitario pertenecen a él.

$\mathcal{H}_2^\perp$  y  $\mathcal{H}_2$  forman un par ortogonal [8] en  $\mathcal{L}_2$ . Lo anterior implica que cualquier función  $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{L}_2$  admite la separación.

$$\mathbf{G}[z] = \left[ \mathbf{G}[z] \right]_{\mathcal{H}_2^\perp} + \left[ \mathbf{G}[z] \right]_{\mathcal{H}_2} \quad (2)$$

donde  $\left[ \mathbf{G}[z] \right]_{\mathcal{H}_2^\perp}$  denota a la porción de  $\mathbf{G}[z]$  que está en  $\mathcal{H}_2^\perp$  y  $\left[ \mathbf{G}[z] \right]_{\mathcal{H}_2}$  a aquella que está en  $\mathcal{H}_2$ . La separación anterior puede lograrse, en el caso de

<sup>2</sup> Se usará negrita para cantidades matriciales y letra normal para escalares.

<sup>3</sup> Note que esta definición no es la usual en matemática [6, 7].

funciones de transferencia racionales, considerando una expansión en fracciones parciales de  $\mathbf{G}[z]$ .

Se define el espacio  $\mathcal{H}_2^* \subset L_2$  como el conjunto de todas las matrices de transferencia estables y propias. Nótese que si  $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{H}_2^*$ ,  $\left[ \mathbf{G}[z] \right]_{\mathcal{H}_2^\perp}$  es una matriz constante no singular si  $\mathbf{G}[z]$  es bipropia y singular si  $\mathbf{G}[z]$  es propia, pero no bipropia (de hecho es nula si la matriz es estrictamente propia).

Se define el espacio  $\mathcal{L}_\infty$  como el espacio de todas las funciones matriciales de la variable compleja  $z$  que están acotadas en  $z = e^{j\omega}$  con  $\omega \in \mathbb{R}$  y para  $|z| \rightarrow \infty$ . Denotaremos por  $\mathcal{H}_\infty$  al subespacio (cerrado) de  $\mathcal{L}_\infty$  formado por las funciones con continuación analítica para  $|z| > 1$ .

Para restringir cualquiera de los espacios anteriores al caso real racional, se agregará el prefijo  $\mathcal{R}$ . Así, todas las funciones matriciales reales racionales, estrictamente propias y estables pertenecen a  $\mathcal{RH}_2$  y a  $\mathcal{RH}_\infty$ , pero las bipropias estables no pertenecen a  $\mathcal{RH}_2$ , pero sí a  $\mathcal{RH}_\infty$  y a  $\mathcal{RH}_2^*$ .

Una función de transferencia  $\mathbf{G}_o[z]$  (escalar o matricial) siempre puede factorizarse en la forma

$$\mathbf{G}_o[z] = \mathbf{D}_l^{-1}[z] \mathbf{N}_l[z] = \mathbf{N}_D[z] \mathbf{D}_D^{-1}[z] \quad (3)$$

donde  $\mathbf{D}_l[z], \mathbf{N}_l[z], \mathbf{D}_D[z], \mathbf{N}_D[z] \in \mathcal{RH}_\infty$ ,  $\mathbf{D}_l[z]$  y  $\mathbf{D}_D[z]$  son bipropias y  $\{\mathbf{D}_l[z], \mathbf{N}_l[z]\}$  son coprimas, así como también lo son  $\{\mathbf{D}_D[z], \mathbf{N}_D[z]\}$ . Expresiones explícitas para estas matrices pueden encontrarse en [3] ó [4] y en ellas es clave notar que siempre es posible ubicar los polos de  $\mathbf{D}_l[z]$ ,  $\mathbf{N}_l[z]$ ,  $\mathbf{D}_D[z]$ ,  $\mathbf{N}_D[z]$  en posiciones arbitrarias. En el caso escalar se tiene que

$$\mathbf{D}_l[z] = \mathbf{D}_D[z] = \frac{\text{den}\{\mathbf{G}_o[z]\}}{p_e[z]} \quad (4)$$

$$\mathbf{N}_l[z] = \mathbf{N}_D[z] = \frac{\text{num}\{\mathbf{G}_o[z]\}}{p_e[z]}$$

donde  $\text{num}\{\cdot\}$  y  $\text{den}\{\cdot\}$  denotan numerador y denominador, respectivamente, y  $p_e[z]$  corresponde a un polinomio de raíces de magnitud menor a uno y de grado igual al grado del denominador de  $\mathbf{G}_o[z]$ .

Diremos que  $\mathbf{G}_o[z]$  posee un cero en  $z = c$  si y sólo si  $\mathbf{G}_o(c)$  tiene rango menor al rango normal de  $\mathbf{G}_o[z]$ . En el caso escalar esto se reduce a que el numerador de  $\mathbf{G}_o[z]$  se anule en  $z = c$ .

Nótese que si los polos de  $\mathbf{N}_D[z]$  y  $\mathbf{D}_D[z]$  (ó  $\mathbf{N}_I[z]$  y  $\mathbf{D}_I[z]$ ) se eligen de modo que no coincidan con ningún polo o cero de  $\mathbf{G}_o[z]$ , entonces los ceros de  $\mathbf{G}_o[z]$  son ceros de  $\mathbf{N}_D[z]$  (ó  $\mathbf{N}_I[z]$ ) y los polos de  $\mathbf{G}_o[z]$ , los ceros de  $\mathbf{D}_D[z]$  (ó  $\mathbf{D}_I[z]$ ). Sin embargo, no es posible que un polo (cero) inestable de  $\mathbf{G}_o[z]$  no sea cero de  $\mathbf{D}_I[z]$  ó  $\mathbf{D}_D[z]$  (cero de  $\mathbf{N}_I[z]$  ó  $\mathbf{N}_D[z]$ ), ya que esto implicaría que las matrices  $\mathbf{D}_I[z]$  y  $\mathbf{N}_I[z]$  ( $\mathbf{D}_D[z]$  y  $\mathbf{N}_D[z]$ ) son inestables.

### Definición 1 (Cero de fase no mínima (FNM))

*Diremos que  $z = c$  es un cero de fase no mínima (FNM) de la matriz de transferencia  $\mathbf{G}_o[z]$  si y sólo si  $z = c$  es cero de  $\mathbf{G}_o[z]$  y  $|c| > 1$ .*

Note que la definición anterior implica que los ceros de fase no mínima pueden no ser finitos. Los ceros en infinito dan cuenta del grado relativo o estructura de retardos del proceso que los posee [9], [10]. Puede probarse que una matriz de transferencia  $\mathbf{G}_o[z]$  estrictamente propia siempre posee ceros en infinito y el número de éstos es igual al grado relativo de  $\mathbf{G}_o[z]$ . Por otro lado, si  $\mathbf{G}_o[z]$  es bipropia no posee ceros en infinito [10].

### Definición 2 (Interactor izquierdo de ceros)

*Considérese una matriz de transferencia  $\mathbf{G}_o[z]$  propia, sin ceros sobre el círculo unitario, de rango completo para algún  $z$  y con  $n_c$  ceros de fase no mínima (contabilizados individualmente) denotados por  $\{c_i\}_{i=1,\dots,n_c}$ ,  $|c_i| > 1$ . En las condiciones anteriores, cualquier matriz de fase mínima y bipropia,  $\xi[z]$ , que satisface.*

$$\lim_{z \rightarrow c_i} \xi[z] \mathbf{N}_D[z] = \mathbf{K}_i \quad \forall i = 1, \dots, n_c \quad (5)$$

con  $\mathbf{K}_i$  matriz real no singular y con sólo entradas finitas, será denominada interactor izquierdo de ceros para  $\mathbf{G}_o[z]$ .

La definición anterior equivale a decir que una matriz es interactor de otra si el producto de ambas no tiene los ceros de fase no mínima de esta última. Nótese además que la definición puede extenderse al caso de ceros estables, pero, como se verá en secciones posteriores, sólo el interactor asociado al conjunto de ceros de fase no mínima es útil a nuestros propósitos.

Es importante recalcar que de acuerdo a la definición anterior, la matriz

$$\tilde{\mathbf{G}}_o[z] = \xi[z] \mathbf{G}_o[z] \quad (6)$$

es bipropia y de fase mínima, pero no necesariamente estable.

Interactores derechos de ceros pueden definirse en forma análoga a los izquierdos, razón por la que omitiremos dicha definición (ver por ej. [3]). Evidentemente la distinción entre interactores derechos e izquierdos no tiene sentido en el caso escalar.

En el caso escalar, una clase posible de interactores toma la forma

$$\xi[z] = z^{grel\{\mathbf{G}_o[z]\}} \cdot \prod_{i=1}^{n_f} \frac{(1 - \bar{c}_i z)}{(z - c_i)} \cdot \frac{(1 - c_i)}{(1 - \bar{c}_i)} \quad (7)$$

donde  $grel\{\mathbf{G}_o[z]\}$  denota al grado relativo de  $\mathbf{G}_o[z]$  y  $\{c_i\}_{i=1,\dots,n_f}$  denota al conjunto de ceros de fase no mínima finitos de  $\mathbf{G}_o[z]$ . Nótese que en este caso  $\mathbf{G}_o[z]$  será estable.

La construcción de interactores en el caso MIMO es más complicada. En [3], [9], [11] y [12] se presentan algoritmos para construir diversas clases de interactores. Sin embargo, en el contexto de control óptimo con funcionales cuadráticos, resulta de capital importancia considerar interactores unitarios, es decir aquellos que satisfacen.

$$\xi^H [e^{j\omega}] \xi [e^{j\omega}] = I \quad (8)$$

Nótese que el interactor definido en (7) es unitario.

En lo que sigue se considerarán, para el caso MIMO, los interactores propuestos en [9] y en [10]. Éstos son unitarios, de ganancia a continua identidad y tales que  $\tilde{\mathbf{G}}_o[z]$  es estable.

Finalizamos esta sección con una definición que permitirá abreviar desarrollos posteriores.

### Definición 3 (Sensibilidad admisible)

*Dada una matriz de transferencia propia  $\mathbf{G}_o[z]$ , diremos que cierta función de transferencia  $\mathbf{S}_o[z]$  corresponde a una función de sensibilidad admisible para  $\mathbf{G}_o[z]$  si y solo si  $\mathbf{S}_o[z]$  es la función de sensibilidad de un lazo internamente estable y con controlador propio construido en torno a  $\mathbf{G}_o[z]$ .*

## PARAMETRIZACIÓN DE YOULA: FORMULACIÓN CLÁSICA

En esta sección se resumen y analizan los resultados de la parametrización clásica de Youla. Consideraremos por separado el caso escalar (SISO) y el caso multivariado (MIMO).

### Parametrización clásica de Youla en el caso escalar

Considérese una planta escalar de tiempo discreto con modelo

$$G_O[z] = \frac{B[z]}{A[z]} \quad (9)$$

donde  $B[z]$  y  $A[z]$  son polinomios coprimos de raíces arbitrarias (es decir,  $G_O[z]$  puede tener polos inestables y ceros de FNM) y tales que<sup>4</sup>  $\text{gr}\{A(z)\} \geq \text{gr}\{B(z)\}$ . Esos rasgos son capturados en la factorización de  $A[z]$  y de  $B[z]$ .

#### Lema 1 (Youla clásico SISO)

Considere el control realimentado de la planta (9). El lazo de control resultante es internamente estable y con controlador propio si y sólo si el controlador  $C[z]$  puede ser parametrizado como

$$C[z] = \frac{\frac{P[z]}{F[z]} + X_O[z] \frac{A_O[z]}{E[z]}}{\frac{L[z]}{F[z]} - X_O[z] \frac{B_O[z]}{E[z]}} \quad (10)$$

donde  $X_O[z]$  es una función de transferencia propia y estable,  $P[z]$  y  $L[z]$  son polinomios que satisfacen la ecuación Diofantina

$$A_O[z]L[z] + B_O[z]P[z] = E[z]F[z] \quad (11)$$

y  $E[z]$  y  $F[z]$  son polinomios mónicos tales que  $\text{gr}\{E[z]\} = \text{gr}\{A[z]\}$  y  $\text{gr}\{F[z]\} = \text{gr}\{L[z]\}$ , cuyas raíces están al interior de la zona de estabilidad.

*Demostración:* Ver [3], [5].

Lo que establece el lema 1 es que si conocemos algún controlador propio y estabilizante  $C_{oo}[z] = \frac{P[z]}{L[z]}$ , entonces podemos caracterizar todos los controladores estabilizantes y propios para cierta planta. Para ganar perspectiva adicional, consideremos las funciones de

<sup>4</sup>  $\text{gr}\{E[z]\}$  denota el grado del polinomio  $E[z]$ .

sensibilidad que resultan de aplicar el controlador (10) a la planta (9):

$$S_O[z] = \frac{A[z]L[z]}{E[z]F[z]} - X_O[z] \frac{B[z]A[z]}{E^2[z]} \quad (12)$$

$$T_O[z] = \frac{B[z]P[z]}{E[z]F[z]} + X_O[z] \frac{B[z]A[z]}{E^2[z]} \quad (13)$$

$$S_{io}[z] = \frac{B[z]L[z]}{E[z]F[z]} - X_O[z] \frac{B^2[z]}{E^2[z]} \quad (14)$$

$$S_{uo}[z] = \frac{A[z]P[z]}{E[z]F[z]} + X_O[z] \frac{A^2[z]}{E^2[z]} \quad (15)$$

Un resultado fundamental concerniente a la estabilidad de un sistema de control escalar construido en torno a una planta arbitraria, se refiere a la invarianza de ciertos ceros de  $T_O[z]$  y  $S_O[z]$ . Dicho resultado establece que en un lazo internamente estable todos los polos no cancelados de la planta son ceros de la sensibilidad (con igual multiplicidad) y todos los ceros no cancelados de la planta son ceros de la sensibilidad complementaria (también respetando la multiplicidad). En esencia, la estructura de  $S_O[z]$  y de  $T_O[z]$  en (12) y (13) asegura que esas restricciones se cumplen, ya que el numerador de  $S_O[z]$  tiene a  $A_O[z]$  como factor; similarmente, el numerador de  $T_O[z]$  tiene a  $B_O[z]$  como factor. Note que sólo las raíces estables de estos polinomios pueden ser canceladas por los denominadores  $E^2[z]$  y  $E[z]F[z]$ , ya que ambos polinomios son estables.

### Parametrización clásica de Youla en el caso multivariante

#### Lema 2 (Youla clásico MIMO)

Considérese una matriz de transferencia  $G_O[z]$  propia con factorizaciones coprimas dadas por (3). El conjunto de todos los controladores estabilizantes y propios queda parametrizado por

$$\begin{aligned} C[z] &= (\mathbf{C}_N[z] + \mathbf{D}_D[z]\Omega[z])(\mathbf{C}_D[z] - \mathbf{N}_D[z]\Omega[z])^{-1} \\ &= (\hat{\mathbf{C}}_D[z] - \Omega[z]\mathbf{N}_I[z])^{-1}(\hat{\mathbf{C}}_N[z] + \Omega[z]\mathbf{D}_I[z]) \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $\Omega[z]$  es una matriz de transferencia estable y propia y  $\mathbf{C}_N[z]$ ,  $\mathbf{C}_D[z]$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_D[z]$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_N[z] \in \mathcal{RH}_\infty$  y son tales que:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_D[z] & \hat{\mathbf{C}}_N[z] \\ -N_I[z] & \mathbf{D}_I[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_D[z] & -\mathbf{C}_N[z] \\ N_D[z] & \mathbf{D}_D[z] \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (17)$$

*Demostración:* Ver [3, 4].

Es importante notar que, según se prueba en [3], las matrices  $\mathbf{C}_N[z]$ ,  $\mathbf{C}_D[z]$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_D[z]$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_N[z]$  forman factorizaciones coprimas derechas e izquierdas de un controlador estabilizante y propio para  $\mathbf{G}_o[z]$ . Es decir, si se denota por  $\mathbf{C}_{oo}[z]$  a dicho controlador, se tiene que

$$\mathbf{C}_{oo}[z] = \hat{\mathbf{C}}_D^{-1}[z] \hat{\mathbf{C}}_N[z] = \mathbf{C}_N[z] \mathbf{C}_D^{-1}[z] \quad (18)$$

### PARAMETRIZACIÓN DE YOULA: FORMULACIÓN ALTERNATIVA

Está sección presenta una reformulación significativa de la parametrización de Youla estándar presentada en la sección anterior.

#### Parametrización alternativa de Youla en el caso escalar

De acuerdo a la sección 3, la parametrización de todos los controladores que estabilizan una planta arbitraria requiere el conocimiento de algún controlador estabilizante  $\mathbf{C}_{oo}[z]$  [1, 3, 5]. Con este mismo punto de partida, se propone la siguiente formulación alternativa a la tradicional.

#### Lema 3 (Youla alternativo SISO)

Considérese un sistema  $\mathbf{G}_o[z] \in \mathcal{RL}_\infty$ , sin ceros sobre el círculo unitario que tiene  $n_c$  ceros de FNM y  $n_p$  polos fuera del disco unitario, ubicados en  $c_1, c_2, \dots, c_{nc}$  y en  $p_1, p_2, \dots, p_{np}$ , respectivamente. Supóngase que  $S_{oo}[z]$  corresponde a una función de sensibilidad admisible para  $\mathbf{G}_o[z]$ . Entonces:

1. La función de transferencia  $S_o[z]$  es admisible si y sólo si existe  $X[z]$  estable y propia tal que

$$S_o[z] = S_{oo}[z] - W[z]X[z] \quad (19)$$

donde  $W[z]$  es una función propia, unitaria y estable dada por

$$W[z] = \frac{1}{\xi_c[z]\xi_p[z]} \quad (20)$$

y  $\xi_c[z]$  corresponde al interactor de ceros de  $\mathbf{G}_o[z]$  y

$$\xi_p[z] = \prod_{k=1}^{n_p} \frac{(1-z\bar{p}_k)}{(z-p_k)} \cdot \frac{(1-p_k)}{(1-\bar{p}_k)} \quad (21)$$

2. Todos los controladores propios se estabilizan a  $\mathbf{G}_o[z]$  en lazo cerrado pueden ser parametrizados según

$$C[z] = \frac{1 - S_{oo}[z] + W[z]X[z]}{S_{oo}[z] - W[z]X[z]} G_o^{-1}[z] \quad (22)$$

con  $W[z]$  y  $X[z]$  definidos en el punto 1.

3. El lazo resultante de considerar la función de sensibilidad (19) presenta cero error de seguimiento para referencias constantes si y sólo si

$$X[1] = S_{oo}[1] \quad (23)$$

En estas condiciones  $X[z]$  puede expresarse como

$$X[z] = (1 - z^{-1}) \tilde{X}[z] + S_{oo}[1] \quad (24)$$

con  $\tilde{X}[z]$  estable y propio.

*Demostración:* Definase  $T_{oo}(s) = 1 - S_{oo}[z]$  como la función de sensibilidad complementaria del lazo cuya sensibilidad (admisible) es  $S_{oo}[z]$ .

1.  $\blacksquare$   $\square$  Para probar que (19) define una sensibilidad admisible, basta probar que las funciones de sensibilidad  $S_o[z]$ ,  $T_o[z]$ ,  $S_{io}[z]$  y  $S_{uo}[z]$  del lazo resultante son estables y propias [3], [4].

- $S_o[z]$ : como  $S_{oo}[z]$ ,  $\xi_c^{-1}$ ,  $X[z]$ ,  $\xi_p^{-1}$  son estables y propias, se tiene que  $S_o[z]$  es estable y propia.
- $T_o[z]$ : dada la relación  $1 = T_o[z] + S_o[z]$ , es claro que  $S_o[z]$  estable y propia implica  $T_o[z]$  estable y propia.
- $S_{uo}[z]$ : de acuerdo a la definición de  $S_{uo}[z]$  se tiene

$$\begin{aligned} S_{uo}[z] &= \frac{T_o[z]}{G_o[z]} \\ &= \frac{T_{oo}[z]}{G_o[z]} + \frac{X[z]}{\xi_c[z]\xi_p[z]G_o[z]} \end{aligned} \quad (25)$$

Como  $S_{oo}[z]$  es una función de sensibilidad admisible,  $G_o^{-1}[z]T_{oo}[z]$  es estable y propia.

Además, de acuerdo a la definición de interactores,  $\xi_c[z]G_o[z]$  es bipropio y de fase mínima.

Lo anterior, junto a que  $X[z]$  y  $\xi_p^{-1}[z]$  son estables y propias, implica que  $S_{uo}[z]$  es estable y propia.

- $S_{io}[z]$  : considerando la definición de  $S_{io}[z]$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} S_{io}[z] &= S_o[z]G_o[z] \\ &= S_{oo}[z]G_o[z] - \frac{X[z]G_o[z]}{\xi_c[z]\xi_p[z]} \end{aligned} \quad (26)$$

Como  $S_{oo}[z]$  es una función de sensibilidad admisible,  $S_{oo}[z]G_o[z]$  es estable y propia. Por otro lado, la definición de  $\xi_p^{-1}[z]$  implica que  $\xi_p^{-1}[z]G_o[z]$  es estable y propia, lo que junto a que  $\xi_c[z]$  es estable, implica que  $S_{io}[z]$  es estable y propia.

- $(\Rightarrow)$  Si  $S_o[z] = S_{oo}[z]$  el resultado se obtiene inmediatamente eligiendo  $X[z] = 0 \in \mathcal{RH}_\infty$ . Sea  $S_o[z] \neq S_{oo}[z]$  una función de sensibilidad admisible para  $G_o[z]$ . De (19) se tiene (27).

$$\begin{aligned} X[z] &= \xi_c[z](S_o[z] - S_{oo}[z])\xi_p[z] \\ &= \xi_c[z](T_{oo}[z] - T_o[z])\xi_p[z] \end{aligned} \quad (27)$$

Como  $S_{oo}[z]$  y  $S_o[z]$  son funciones de sensibilidad admisibles,  $S_{io}[z] = S_o[z]G_o[z]$  y  $S_{uo}[z] = S_{oo}[z]G_o[z]$  son estables y propias, lo que implica que  $S_{oi}[z]\xi_p[z]$  y  $S_{oo}[z]\xi_p[z]$  son estables y propias. Análogamente se tiene que  $S_{uo}[z] = G_o^{-1}[z]T_o[z]$  y  $S_{uo}[z] = G_o^{-1}[z]T_{oo}[z]$  son estables y propias, lo que implica que  $\xi_c[z]T_o[z]$  y  $\xi_c[z]T_{oo}[z]$  son estables y propias. En consecuencia,  $X[z]$  es estable y propia.

2. La función de sensibilidad  $S_o[z]$  está dada por

$$S_o[z] = \frac{1}{1 + G_o[z]C[z]} = S_{oo}[z] - W[z]X[z] \quad (28)$$

de donde se desprende que

$T_o[z] = 1 - S_{oo}[z] + W[z]X[z]$ , lo cual lleva a que el controlador resulta ser (29).

$$C[z] = \frac{1 - S_{oo}[z] + W[z]X[z]}{S_{oo}[z] - W[z]X[z]} G_o^{-1}[z] \quad (29)$$

Además, dado que todas las funciones de sensibilidad son propias, entonces el controlador  $C[z]$  también lo es.

3. Si  $X[1] = S_{oo}[1]$ , entonces  $S_o[1] = X[1](1 - W[1])$ . Por lo tanto,  $S_o[1] = 0$  dado que  $W[1] = 1$ , es decir,

$$X[1] = S_{oo}[1] \Rightarrow S_o[1] = 0 \Leftrightarrow \text{seguimiento perfecto de referencias constantes} \quad (30)$$

Por otra parte, en caso que el lazo presente cero error de seguimiento para una referencia constante, se cumple que  $S_o[1] = 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} S_o[1] = 0 &= S_{oo}[1] - W[1]X[1], \\ \Rightarrow X[1] &= W^{-1}[1]S_{oo}[1], \\ \Rightarrow X[1] &= S_{oo}[1]. \end{aligned} \quad (31)$$

La deducción de (24) es inmediata.

### Observación 1

*El resultado del lema 3 es completamente extensible al caso en que el sistema tenga polos o ceros sobre el círculo unitario. Sin embargo, en dicho caso  $W[z]$  ya no corresponderá a un factor unitario, lo que imposibilitaría la resolución analítica de determinados problemas, tal como se ilustra en la sección siguiente. Nótese que esta es una limitación no sólo de la formulación alternativa, sino también de la original.*

### Ejemplo 1 (Caso SISO)

*Considere el sistema de inestable y de fase no mínima dado por*

$$G_o[z] = \frac{z + 1,2}{z(z - 1,2)} \quad (32)$$

*Un controlador estabilizante inicial es  $C_{oo}[z] = 0,2$ . En el esquema clásico de la parametrización de Youla, de acuerdo a lo señalado en el lema 1, todos los controladores que estabilizan  $G_o[z]$  están dados por*

$$C[z] = \frac{0,2(z - 0,6)(z - 0,4) + X_o[z]z(z - 1,2)}{(z - 0,6)(z - 0,4) - X_o[z](z + 1,2)} \quad (33)$$

*mientras que todas las funciones de sensibilidad pueden expresarse según (34).*

$$S_O[z] = \frac{z(z-1,2)}{(z-0,6)(z-0,4)} - \frac{z(z-1,2)(z+1,2)}{(z-0,6)^2(z-0,4)^2} X_O[z] \quad (34)$$

Por su parte, de acuerdo a la parametrización de Youla modificada, dada por el lema 3, la función de sensibilidad  $S_{oo}[z]$  resulta ser

$$S_{OO}[z] = \frac{z(z-1,2)}{(z-0,6)(z-0,4)} \quad (35)$$

A partir de (20), se obtiene (36).

$$W[z] = \frac{(z-1,2)(z+1,2)}{z(1-1,2z)(1+1,2z)} \quad (36)$$

mientras que, de acuerdo a (19), todas las funciones de sensibilidad pueden parametrizarse de acuerdo a (37).

$$S_O[z] = \frac{z(z-1,2)}{(z-0,6)(z-0,4)} - \frac{(z-1,2)(z+1,2)}{z(1-1,2z)(1+1,2z)} X[z] \quad (37)$$

Finalmente, todos los controladores propios que estabilizan el lazo pueden ser parametrizados según (38).

Simplificando la expresión anterior se puede llegar a (39), donde  $X[z]$  debe ser una función de transferencia estable y propia.

$$C[z] = \frac{\frac{0,2(z+1,2)}{(z-0,6)(z-0,4)} + \frac{(z-1,2)(z+1,2)}{z(1-1,2z)(1+1,2z)} X[z]}{\frac{z(z-1,2)}{(z-0,6)(z-0,4)} - \frac{(z-1,2)(z+1,2)}{z(1-1,2z)(1+1,2z)} X[z]} \cdot \frac{z(z-1,2)}{z+1,2} \quad (38)$$

$$C[z] = \frac{0,2(1-1,2z)(1+1,2z)z + (z-1,2)(z-0,6)(z-0,4)X[z]}{z^2(1-1,2z)(1+1,2z) - (z+1,2)(z-0,6)(z-0,4)X[z]} \cdot z \quad (39)$$

### Parametrización alternativa de Youla en el caso multivariable

#### Lema 4 (Youla alternativo MIMO)

Considérese una matriz de transferencia  $\mathbf{G}_o[z] \in \mathcal{RL}_\infty$ , sin ceros sobre el círculo unitario, que admite factorizaciones coprimas derechas e izquierdas dadas por (3). Supóngase, además, que  $\mathbf{S}_{oo}[z]$  corresponde a alguna función de sensibilidad admisible para  $\mathbf{G}_o[z]$ . Entonces:

1. La matriz de transferencia  $\mathbf{S}_o[z]$  corresponderá a una función de sensibilidad admisible si y sólo si

$$\mathbf{S}_o[z] = \mathbf{S}_{oo}[z] - \boldsymbol{\xi}_c^{-1}[z] \mathbf{X}[z] \boldsymbol{\xi}_p^{-1}[z] \quad (40)$$

donde  $\mathbf{X}[z] \in \mathcal{RH}_\infty$ ,  $\boldsymbol{\xi}_p^{-1}[z]$  es igual al interacto derecho de ceros, unitario y de ganancia a continua identidad, de  $\mathbf{D}_l[z]$  y  $\boldsymbol{\xi}_c^{-1}[z]$  es igual al interacto izquierdo de ceros, unitario y con ganancia a continua identidad, de  $\mathbf{N}_D[z]$ .

2. Todos los controladores propios que estabilizan  $\mathbf{G}_o[z]$  en lazo cerrado pueden ser parametrizados según

$$\mathbf{C}[z] = \mathbf{G}_o^{-1}[z] \left[ (\mathbf{S}_{oo}[z] - \boldsymbol{\xi}_c^{-1}[z] \mathbf{X}[z] \boldsymbol{\xi}_p^{-1}[z])^{-1} - \mathbf{I} \right] \quad (41)$$

donde se ha considerado la misma notación del punto anterior.

3. El lazo resultante de considerar la función de sensibilidad (40) presenta cero error de seguimiento para referencias constantes si y sólo si

$$\mathbf{X}[1] = \mathbf{S}_{oo}[1] \quad (42)$$

En estas condiciones  $\mathbf{X}[z]$  puede expresarse como

$$\mathbf{X}[z] = (1-z^{-1}) \tilde{\mathbf{X}}[z] + \mathbf{S}_{oo}[1] \quad (43)$$

con  $\tilde{\mathbf{X}}[z]$  estable y propio.

*Demostración:* Definase  $\mathbf{T}_{oo} = \mathbf{I} - \mathbf{S}_{oo}[z]$  como la función de sensibilidad complementaria del lazo cuya sensibilidad (admisible) es  $\mathbf{S}_{oo}[z]$ .

1. • ( $\Leftrightarrow$ ) Para probar que (40) define una sensibilidad admisible, basta probar que las funciones de sensibilidad  $\mathbf{S}_o[z]$ ,  $\mathbf{T}_o[z]$ ,  $\mathbf{S}_{io}[z]$ ,  $\mathbf{S}_{uo}[z]$  y  $\mathbf{S}_{uo}[z]\mathbf{G}_o[z]$  del lazo resultante son estables y propias [3], [4].
  - $\mathbf{S}_o[z]$ : como  $\mathbf{S}_{oo}[z]$ ,  $\xi_c^{-1}[z]$ ,  $\mathbf{X}[z]$  y  $\xi_p^{-1}[z]$  son estables y propias, se tiene que  $\mathbf{S}_o[z]$  es estable y propia.
  - $\mathbf{T}_o[z]$ : dada la relación  $\mathbf{I} = \mathbf{T}_o[z] + \mathbf{S}_o[z]$ , es claro que  $\mathbf{S}_o[z]$  estable y propia implica  $\mathbf{T}_o[z]$  estable y propia.
  - $\mathbf{S}_{uo}[z]$  de acuerdo a la definición de  $\mathbf{S}_{uo}[z]$  se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{uo}[z] &= \mathbf{G}_o^{-1}[z]\mathbf{T}_o[z] \\ &= \mathbf{G}_o^{-1}[z](\mathbf{T}_{oo}[z] + \xi_c^{-1}[z]\mathbf{X}[z]\xi_p^{-1}) \\ &= \mathbf{G}_o^{-1}[z]\mathbf{T}_{oo}[z] + (\xi_c^{-1}[z]\mathbf{G}_o[z])^{-1}\mathbf{X}[z]\xi_p^{-1}\end{aligned}\quad (44)$$

Como  $\mathbf{S}_{oo}[z]$  es una función de sensibilidad admisible,  $\mathbf{G}_o^{-1}[z]\mathbf{T}_{oo}[z]$  es estable y propia. Además, de acuerdo a la definición de interactores,  $\xi_c^{-1}[z]\mathbf{G}_o[z]$  es bipropia y de fase mínima. Lo anterior, junto a que  $\mathbf{X}[z]$  y  $\xi_p^{-1}[z]$  son estables y propias<sup>5</sup>, implica que  $\mathbf{S}_{uo}[z]$  es estable y propia.

- $\mathbf{S}_{io}[z]$ : considerando la definición de  $\mathbf{S}_{io}[z]$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{io} &= \mathbf{S}_o[z]\mathbf{G}_o[z] \\ &= \mathbf{S}_{oo}[z]\mathbf{G}_o[z] + \\ &\quad - \xi_c^{-1}[z]\mathbf{X}[z](\mathbf{D}_i[z]\xi_p[z])^{-1}\mathbf{N}_i[z]\end{aligned}\quad (45)$$

Como  $\mathbf{S}_{oo}[z]$  es una función de sensibilidad admisible,  $\mathbf{S}_{oo}[z]\mathbf{G}_o[z]$  es estable y propia. Por otro lado, la definición de  $\xi_p[z]$  implica que  $(\mathbf{D}_i[z]\xi_p[z])^{-1}$  es estable y bipropio, lo que junto a que  $\mathbf{N}_i[z] \in \mathcal{RH}_\infty$  implica que  $\mathbf{S}_{io}[z]$  es estable y propia.

- $\mathbf{S}_{uo}[z]\mathbf{G}_o[z]$ : de (44) y (45) se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{uo}[z]\mathbf{G}_o[z] &= \mathbf{G}_o^{-1}[z]\mathbf{T}_{oo}[z]\mathbf{G}_o[z] + \\ &\quad + (\xi_c^{-1}[z]\mathbf{G}_o[z])^{-1}\mathbf{X}[z](\mathbf{D}_i[z]\xi_p[z])^{-1}\mathbf{N}_i[z]\end{aligned}\quad (46)$$

lo que implica, usando un razonamiento análogo al de los dos casos anteriores, que  $\mathbf{S}_{io}[z]\mathbf{G}_o[z]$  es estable y propio.

- ( $\Rightarrow$ ) Si  $\mathbf{S}_o[z] = \mathbf{S}_{oo}[z]$  el resultado se sigue inmediatamente eligiendo  $\mathbf{X}[z] = 0 \in \mathcal{RH}_\infty$ . Sea  $\mathbf{S}_o[z] \neq \mathbf{S}_{oo}[z]$  una función de sensibilidad admisible para  $\mathbf{G}_o[z]$ . De (40) se tiene que

$$\mathbf{X}[z] = \xi_c[z](\mathbf{S}_o[z] - \mathbf{S}_{oo}[z])\xi_p[z] = \xi_c[z](\mathbf{T}_{oo}[z] - \mathbf{T}_o[z])\xi_p[z] \quad (47)$$

Como  $\mathbf{S}_{oo}[z]$  y  $\mathbf{S}_o[z]$  son funciones de sensibilidad admisibles,  $\mathbf{S}_{io}[z] = \mathbf{S}_o[z]\mathbf{G}_o[z]$  y  $\mathbf{S}_{uo}[z] = \mathbf{S}_{oo}[z]\mathbf{G}_o[z]$  son estables y propias, lo que implica que  $\mathbf{S}_o[z]\xi_p[z]$  y  $\mathbf{S}_{oo}[z]\xi_p[z]$  son estables y propias. Análogamente se tiene que  $\mathbf{S}_{uo}[z] = \mathbf{G}_o^{-1}[z]\mathbf{T}_o[z]$  y  $\mathbf{S}_{uo}[z] = \mathbf{G}_o^{-1}[z]\mathbf{T}_{oo}[z]$  son estables y propias, lo que implica que  $\xi_c[z]\mathbf{T}_o[z]$  y  $\xi_c[z]\mathbf{T}_{oo}[z]$  son estables y propias. En consecuencia,  $\mathbf{X}[z]$  es estable y propia.

2. Directa de la definición de función de sensibilidad y (40).
3. Ver demostración del caso escalar; se extiende naturalmente a este caso.

## Observación 2

Nótese que el caso MIMO también se aplica a la observación 1.

### Ejemplo 2 (Caso MIMO simple)

Considérese la función de transferencia estrictamente propia, inestable y de fase no mínima.

$$\mathbf{G}_o[z] = \begin{bmatrix} \frac{z-2}{z^2} & \frac{z-2}{z^2} \\ 0 & \frac{1}{z-3} \end{bmatrix}$$

Puede probarse que  $\mathbf{G}_o[z]$  posee un cero de fase no mínima en  $z = 2$  y un polo inestable en  $z = 3$ . Siguiendo el procedimiento descrito en [9] es posible determinar las matrices  $\xi_p[z]$  y  $\xi_c[z]$  del lema 4:

$$\xi_c[z] = \begin{bmatrix} -2z(z-0,5) & 0 \\ (z-2) & z \end{bmatrix},$$

$$\xi_p[z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3z-1}{z-3} \end{bmatrix}$$

<sup>5</sup> Nótese que como  $\mathbf{D}_i(z)$  es bipropio,  $\xi_p(z)$  también lo es.

Un controlador estabilizante inicial está dado por

$$\mathbf{C}_o[z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

lo que implica que

$$\mathbf{S}_{oo}[z] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \frac{(z-2)(z-3)}{z^3} \\ 0 & \frac{z-3}{z} \end{bmatrix}.$$

A continuación verificaremos el lema 4.

- En primera instancia se debe verificar que, dado  $\mathbf{X}[z] \in \mathcal{RH}_\infty$  arbitrario, (40) define a una función de sensibilidad admisible. Considerando  $\mathbf{X}[z] = \mathbf{I}$ , se obtiene la función de sensibilidad

$$\mathbf{S}_o[z] = \begin{bmatrix} 2 \frac{(z-1)(z+1)}{(2z-1)z} & -3 \frac{(z-2)(z-3)}{z^3} \\ 0 & 3 \frac{z-3}{3z-1} \end{bmatrix}.$$

Un cálculo directo, en base a  $\mathbf{S}_o[z]$  y  $\mathbf{G}_o[z]$ , permite establecer que todas las funciones de sensibilidad del lazo son estables y propias, lo que prueba la admisibilidad de  $\mathbf{S}_o[z]$ . Concretamente, se tiene que las magnitudes de todos los polos del lazo están contenidas en el conjunto  $\{0.5, 0.3333, 0\}$ .

- Consideraremos ahora una función de sensibilidad admisible y determinaremos, en base a (40), el parámetro  $\mathbf{X}[z]$ . Éste debe ser estable y propio.

Considérese la función de sensibilidad admisible  $\mathbf{S}_{o2}[z]$ .

$$\mathbf{S}_{o2}[z] = \begin{bmatrix} \frac{(z-1)(z+1)(2z^2-z+2)}{(2z-1)z^3} & -\frac{(z-2)(z-3)(38z^3-54z^2+21z-3)}{z^3(2z-1)^2(3z-1)} \\ -15 \frac{1}{z(5z-1)} & \frac{(z-3)(3z^4-z^3+1)}{z^4(3z-1)} \end{bmatrix}$$

En base a (40)  $\mathbf{X}[z]$  puede expresarse como

$$\mathbf{X}[z] = \xi_c[z](\mathbf{S}_{o2}[z] - \mathbf{S}_{oo}[z])\xi_p[z]$$

y, en este caso particular, se tiene

$$\mathbf{X}[z] = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2} & \frac{z-3}{z-1/2} \\ 3 \frac{1}{z-1/5} & \frac{1}{z^3} \end{bmatrix}.$$

Claramente  $\mathbf{X}[z]$  es propio y estable.

En términos intuitivos el problema de calce de modelos en  $\mathcal{H}_2$  se reduce a hallar, dada una matriz de transferencia  $\mathbf{G}_o[z]$ , un controlador tal que minimice la diferencia, medida en norma 2, entre la función de sensibilidad complementaria del lazo resultante  $\mathbf{T}_o[z]$  y cierta función  $\mathbf{T}_{od}[z]$  que refleja el deseo de lograr determinado desempeño en el lazo de control. De acuerdo al lema 4, lo anterior se reduce a hallar el parámetro  $\mathbf{X}[z]$  que define al controlador buscado. En términos precisos el problema de calce de modelos puede formularse como sigue:

### Problema 1 (Calce de modelos)

Dada una matriz de transferencia racional y propia  $\mathbf{G}_o[z]$ , interesa hallar  $\mathbf{X}_{opt}[z] \in \mathcal{H}_2^*$  que satisface

$$\mathbf{X}_{opt}[z] = \arg \min_{X[z] \in \mathcal{H}_2} \|(\mathbf{T}_{od}[z] - \mathbf{T}_o[z])\Lambda[z]\|_2^2 \quad (48)$$

donde  $\mathbf{T}_{od}[z] \in \mathcal{RH}_2^*$  es una matriz de transferencia dada,  $\mathbf{T}_o[z] \in \mathcal{RH}_2^*$  se halla definida implícitamente en (40) y  $\Lambda[z]$  es una función de peso tal que  $(\mathbf{T}_{od}[z] - \mathbf{T}_o[z])\Lambda[z] \in \mathcal{L}_2$ .

## APLICACIONES DE LA PARAMETRIZACIÓN ALTERNATIVA A CONTROL ÓPTIMO

En esta sección se utiliza la nueva formulación de la parametrización de Youla para resolver un problema de calce de modelos en  $\mathcal{H}_2$  [3], [5], [7], [9]. La solución propuesta es más simple, en su deducción y aplicación, que los resultados clásicos [3], [5], [7].

El desarrollo se restringe al caso MIMO, ya que éste engloba al caso escalar.

Nótese que en términos estrictos no es necesario que  $\mathbf{T}_{od}[z] \in \mathcal{RH}_2^*$ , pues para que el funcional que debe minimizarse en (48) tenga sentido, lo relevante es que  $(\mathbf{T}_{od}[z] - \mathbf{T}_o[z])\Lambda[z] \in \mathcal{L}_2$ . Sin embargo, de acuerdo a los comentarios hechos en el párrafo anterior a la definición del problema,  $\mathbf{T}_{od}[z]$  puede interpretarse como la sensibilidad que desea alcanzarse en el lazo, y en consecuencia, lo natural es que sea estable y racional.

La matriz  $\Lambda[z]$  permite privilegiar el ajuste entre  $\mathbf{T}_o[z]$  y  $\mathbf{T}_{od}[z]$  en determinado rango de frecuencias. A modo de ilustración supóngase que se desea lograr un lazo con integración, es decir tal que  $\mathbf{T}_o[1] = \mathbf{I}$ . En este caso basta con considerar una función  $\mathbf{T}_{od}[z]$  tal que  $\mathbf{T}_{od}[1] = \mathbf{I}$  y

$$\Lambda[z] = \frac{1}{z-1} \quad (49)$$

para que  $\mathbf{T}_o[1] = \mathbf{I}$  (nótese que  $\mathbf{T}_{od}[1] = \mathbf{I}$  evita que el funcional sea infinito).

A continuación se presenta un resultado que permite resolver el problema de calce de modelos en caso de desear un controlador con integración.

### Lema 5 (Solución problema de calce de modelos en $\mathcal{H}_2$ )

Considérese una planta  $\mathbf{G}_o[z] \in \mathcal{RL}_\infty$ , sin ceros sobre el círculo unitario y el problema 1 considerando  $\Lambda[z]$  como en (49) y  $\mathbf{T}_{od}[1] = \mathbf{I}$ . En estas condiciones,

$$\begin{aligned} J &= \left\| \frac{\mathbf{T}_{od}[z] - (\mathbf{T}_{oo}[z] + \xi_c^{-1}[z]\mathbf{X}[z]\xi_p^{-1}[z])}{z-1} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \underbrace{\frac{\xi_c[z](\mathbf{T}_{od}[z] - \mathbf{T}_{oo}[z])\xi_p[z]}{z-1}}_{M[z]} + \underbrace{\frac{(\mathbf{I} - \mathbf{T}_{oo}[1]) - \mathbf{X}[z]}{z-1}}_{N[z]} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (51)$$

$$J = \left\| \left[ \mathbf{M}[z] \right]_{\mathcal{H}_2^\perp} \right\|_2^2 + \left\| \left[ \mathbf{M}[z] \right]_{\mathcal{H}_2} + N[z] \right\|_2^2 \quad (52)$$

$$\mathbf{X}_{opt}[z] = \mathbf{I} - \mathbf{T}_{oo}[1] - (z-1) \left[ \frac{\xi_c[z](\mathbf{T}_{od}[z] - \mathbf{T}_{oo}[z])\xi_p[z] - \mathbf{I} + \mathbf{T}_{oo}[1]}{z-1} \right]_{\mathcal{H}_2} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{opt}[z] &= \mathbf{I} - \mathbf{T}_{oo}[1] + \\ &- (z-1) \left[ \frac{\xi_c[z](\mathbf{T}_{od}[z] - \mathbf{T}_{oo}[z])\xi_p[z] - \mathbf{I} + \mathbf{T}_{oo}[1]}{z-1} \right]_{\mathcal{H}_2} \end{aligned} \quad (50)$$

*Demostración:* De acuerdo a (40) y a las condiciones del problema, el funcional a minimizar en (48) puede escribirse (51), donde se ha usado el hecho que las matrices  $\xi_c[z]$  y  $\xi_p[z]$  son unitarias. Para que el funcional sea finito es imprescindible que  $\mathbf{X}[1] = \mathbf{I} - \mathbf{T}_{oo}[1] = \mathbf{S}_{oo}[1]$ , de modo que supondremos que esto se cumple (más adelante se verificará esta suposición). Lo anterior implica, junto al hecho que  $\mathbf{X}[z]$  es estable y propia, que  $\mathbf{N}[z]$  es estable y estrictamente propio, es decir,  $\mathbf{N}[z] \in \mathcal{H}_2$ . Nótese, además, que  $\mathbf{M}[1]$  está bien definido pues el numerador de  $\mathbf{M}[z]$  se anula para  $z = 1$ ; por lo tanto  $\mathbf{M}[z] \in \mathcal{L}_2$ . En consecuencia, se puede usar el teorema de Pitágoras generalizado [3], [10], [8] para escribir (52), lo que implica que la función  $\mathbf{X}_{opt}[z]$  está dada por (53).

Nótese que de acuerdo a la ecuación anterior  $\mathbf{X}_{opt}[1] = \mathbf{I} - \mathbf{T}_{oo}[1] = \mathbf{S}_{oo}[1]$  y se valida la suposición hecha anteriormente. Por otra parte, dada la definición de  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathbf{X}_{opt}[z]$  es propio y estable.

### Observación 3

Nótese que si los factores  $\xi_c[z]$  ó  $\xi_p[z]$  no fuesen unitarios, el resultado anterior no podría derivarse (ver observaciones 1 y 2).

### Ejemplo 3 (Síntesis óptima MIMO)

Considérese un proceso inestable, estrictamente propio y de fase no mínima modelado por la función de transferencia.

$$\mathbf{G}_o[z] = \begin{bmatrix} \frac{z-2}{z^2} & \frac{z-2}{z^2} \\ 0 & \frac{1}{z-3} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Supóngase que se desea hallar un controlador estabilizante con integración de modo que la función de sensibilidad complementaria del lazo sea lo más cercana posible, en el sentido del problema 1, a la función  $\mathbf{T}_{od}[z]$ .

$$\mathbf{T}_{od}[z] = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$$

Nótese que esta función no es una sensibilidad complementaria admisible, pues no satisface las condiciones de interpolación que los ceros y polos inestables de  $\mathbf{G}_o[z]$  imponen [3].

Las funciones  $\xi_c[z]$  y  $\xi_p[z]$  están dadas en el ejemplo 2. Usando el ejercicio 25.1 de [3], es posible determinar una función  $\mathbf{S}_{oo}[z]$  tal que  $\mathbf{T}_{oo}[z] = \mathbf{I} - \mathbf{S}_{oo}[z]$  está dada por  $\mathbf{T}_{oo}[z]$ .

La figura 1 muestra la respuesta  $y[k]$  y la actuación  $u[k]$  del lazo resultante, considerando una referencia  $r[k] = [1 \ -1]^T \mu[k]$  y una perturbación de entrada  $d_i[k] = [-1 \ 1]^T \mu[k-30]$ .

El desempeño que se obtiene es aceptable, sobre todo si se toma en cuenta que la ubicación del cero de FNM y del polo inestable son muy poco favorables: para evitar la respuesta inversa excesiva, originada por el cero de FNM de la planta, deberían elegirse polos dominantes del lazo más lento que  $z=0,5$ . Por otro lado, el efecto del polo inestable (sobrepasamiento) sería minimizado con un lazo con polos dominantes más rápidos que  $z=0,3333$ . Evidentemente ambas restricciones son incompatibles y, en consecuencia, la respuesta del lazo presenta una dinámica poco suave. Una discusión más acabada de este fenómeno y la justificación de los criterios anteriores, puede hallarse en los capítulos 8 y 9 de [3].

$$\mathbf{T}_{oo}[z] = \begin{bmatrix} \frac{0,0091564z(z-3)(z-2)}{z(z-0,3206)^2(z-0,418)^2} & \frac{1,5795(z-2)(z-3)(z-0,44)}{z(z-0,3206)^2(z-0,418)^2} \\ \frac{0,041413z^2(z-0,3829)}{z(z-0,3206)^2(z-0,418)^2} & \frac{7,144z(z-0,3829)(z-0,44)}{z(z-0,3206)^2(z-0,418)^2} \end{bmatrix}$$

Usando (50) es posible establecer que

$$\mathbf{X}_{opt}[z] = \begin{bmatrix} \frac{0,76574(z-0,4941)(z-0,1259)(z^2-0,8811z+0,2888)}{(z-0,3206)^2(z-0,418)^2} & \frac{-22,6285(z-0,438)(z-0,3335)(z^2-1,125z+0,3332)}{(z-0,3206)^2(z-0,418)^2} \\ \frac{-0,32688(z-0,3832)(z-0,8018)(z^2-0,4189z+0,05845)}{(z-0,3206)^2(z-0,418)^2} & \frac{-18,5761(z-0,3597)(z-0,3372)(z^2-0,9185z+0,2118)}{(z-0,3206)^2(z-0,418)^2} \end{bmatrix}$$

lo que implica que el controlador buscado está dado por (ver (41))

$$\mathbf{C}_{opt}[z] = \begin{bmatrix} \frac{-0,055989z(z-0,1716)(z+0,006401)(z-39,16)(z^2-1,26z+0,4061)}{(z-2,975)(z-1)(z+1,362)(z-0,1724)(z^2-1,335z+0,4545)} & \frac{-9,9634(z+1,224)(z-0,1725)(z^2-1,267z+0,4097)(z^2-1,761z+1,105)}{(z-2,975)(z-1)(z+1,362)(z-0,1724)(z^2-1,335z+0,4545)} \\ \frac{-0,32688z(z-0,3333)(z-0,3831)(z-0,5)(z^2-0,3475z+0,04688)}{(z-2,975)(z-1)(z+1,362)(z-0,1724)(z^2-1,335z+0,4545)} & \frac{6,192(z+1,403)(z-0,1724)(z^2-1,303z+0,4337)(z^2-2,308z+1,467)}{(z-2,975)(z-1)(z+1,362)(z-0,1724)(z^2-1,335z+0,4545)} \end{bmatrix}$$

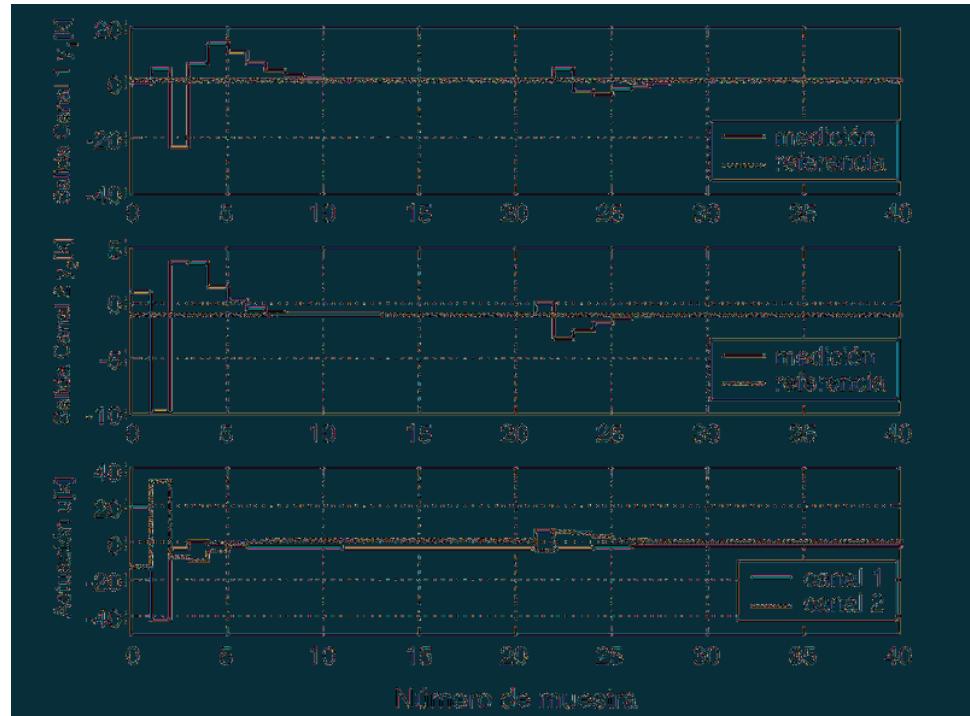


Fig. 1 Salida y actuación del lazo óptimo del ejemplo 3. Se considera una referencia  $r[k] = [1 \ -1]^T \mu[k]$  y una perturbación de entrada  $d_i[k] = [-1 \ 1]^T \mu[k-30]$ .

#### Observación 4

Si se compara el controlador inicial del ejemplo 2 con el ejemplo 3, se evidenciará que en este último caso el diseño inicial es innecesariamente complejo. Evidentemente esto no altera el controlador óptimo obtenido en el ejemplo 3, pues éste minimiza el funcional considerado y, en consecuencia, no es dependiente del diseño inicial.

#### Observación 5

Independientemente de la metodología que se utilice para determinar la matriz  $X[z]$ , es usual que ésta sea de gran complejidad. Sin embargo, como basta que  $X[z]$  sea estable y propio, se puede recurrir a algún método de reducción de modelos que garantice la estabilidad del modelo reducido, para obtener parámetros  $X[z]$  de una complejidad más razonable que la inicialmente arrojada por (50) (ver por ejemplo capítulo 11 de [13]).

## CONCLUSIONES

En este artículo se ha desarrollado una parametrización modificada de Youla para una planta dada. La

característica esencial de esta propuesta es que se parametrizan las sensibilidades de todos los lazos de control internamente estables. Se demuestra que esta parametrización revela las limitaciones fundamentales en la obtención de un buen inverso de la planta, al extraer polos y ceros inestables. Adicionalmente, se muestra que no es necesario calcular un controlador estabilizante  $C_{\infty}[z]$  como prerequisito; basta disponer directamente de una sensibilidad admisible  $S_{\infty}[z]$ . La formulación alternativa desarrollada simplifica los procedimientos de diseño, tal como se ilustra con aplicaciones a la optimización cuadrática.

## REFERENCIAS

- [1] D. Youla, H. Jabr, and J. Bongiorno. "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part I", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 21, no. 2: 3-13, 1976.
- [2] D. Youla, H. Jabr, and J. Bongiorno. "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II: The multivariable case", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 21, no. 3: 319-338, 1976.

- 
- [3] G.C. Goodwin, S. Graebe, and M.E. Salgado. "Control System Design". New Jersey: Prentice Hall, 2001.
- [4] K. Zhou and J. Doyle. "Essentials of Robust Control". Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall 1998.
- [5] J. Doyle, B. Francis, and A. Tannembaum, "Feedback control Theory". New York: Macmillan Publishing Company, 1992.
- [6] W. Rudin. "Real and Complex Analysis", 3rd ed. New York: McGraw Hill Book Company, 1987.
- [7] M. Morari and Zafiriou. "Robust process control". Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall Inc., 1989.
- [8] E. Kreyszig. "Introductory Functional Analysis with Applications". John Wiley and Sons, Inc., 1998.
- [9] E.I. Silva and M.E. Salgado. "Performance bounds for feedback control of non-minimum phase MIMO systems with arbitrary delay structure", IEE Proceedings-Control Theory and Applications, vol. 152, no. 2: 211-219. 2005
- [10] E. Silva. "Cotas de desempeño para lazos multivariados con controladores de estructura restringida". Tesis de Master, Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, 2004.
- [11] W. Wolovich and P. Falb. "Invariants and canonical forms under dynamic compensation", SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 14, no. 6: 996-1008, November 1976.
- [12] S. Weller and G. Goodwin. "Controller design for partially decoupling for linear multivariable systems", International Journal of Control, vol. 63, no. 3, 1996.
- [13] S. Skogestad and I. Postlethwaite. "Multivariable Feedback Control: Analysis and Design". New York: Wiley, 1996.