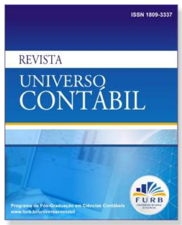
Morozini, João Francisco; Cardoso, Carlos Eduardo; Giffoni Ferreira, Endrei
ESTUDO SOBRE A DINÂMICA DO CONSUMPITION CAPITAL ASSET PRINCING MODEL (C-CAPM): UM ESTUDO TEÓRICO
Revista Universo Contábil, vol. 5, núm. 2, abril-junio, 2009, pp. 6-23
Universidade Regional de Blumenau
Blumenau, Brasil




Revista Universo Contábil, ISSN 1809-3337
FURB, v. 5, n. 2, p. 06-23, abr./jun., 2009

doi:10.4270/ruc.2009210
Disponível em www.furb.br/universocontabil

# ESTUDO SOBRE A DINÂMICA DO *CONSUMPITION CAPITAL ASSET PRINCING MODEL* (C-CAPM): UM ESTUDO TEÓRICO[*]

# *STUDY ABOUT THE DYNAMICS OF CONSUMPTION CAPITAL ASSET PRICING MODEL (C-CAPM): A THEORETICAL STUDY*

**João Francisco Morozini**
Doutorando em Administração de Empresas na Mackenzie/SP
Professor da Universidade Estadual do Centro Oeste
Endereço: Rua Presidente Zacarias, 870
CEP: 85100-970 – Guarapuava/PR – Brasil
E-mail: jmorozini@unicentro.br
Telefone: (11) 2114-8597

**Carlos Eduardo Cardoso**
Doutorando em Administração de Empresas na Mackenzie/SP
Professor da Universidade Presbiteriana Mackenzie
Endereço: Rua da Consolação, 930 - Consolação
CEP: 01302-907 – São Paulo/SP – Brasil
E-mail: cardoso.mack@mackenzie.br
Telefone: (11) 2114-8597

**Endrei Giffoni Ferreira**
Mestrando em Administração de Empresas na Mackenzie/SP
Professor da Universidade Presbiteriana Mackenzie
Endereço: Rua da Consolação, 930 - Consolação
CEP 01302-907 – São Paulo/SP – Brasil
E-mail: endregifer@yahoo.com.br
Telefone: (11) 2114-8597

## RESUMO

O surgimento do *Consumpition Capital Asset Pricin Model* (C-CAPM) se deu da proposição dos trabalhos iniciais de Merton (1973) e de Breeden (1979) que tinham como objetivo

[*] Artigo recebido em 11.09.2008. Revisado por pares em 27.11.2008. Reformulado em 08.12.2008. Recomendado em 15.12.2008 por Ilse Maria Beuren (Editora). Publicado em 30.06.2009. Organização responsável pelo periódico: FURB.

universalizar o modelo *Capital Asset Pricin Model* (CAPM) desenvolvido por Sharpe (1964) e Lintner (1965) na contextualização intertemporal. O objetivo deste artigo foi fornecer um embasamento teórico para estudar a precificação dos ativos por meio do C-CAPM. Para o desenvolvimento da teoria, em vez de considerarmos um modelo de generalidade completa é necessário inicialmente estabelecer alguma limitação. Para o desenvolvimento do modelo considera-se que todos os consumidores são idênticos em comportamento e têm vida infinita. Este consumidor será definido como o agente representativo que definirá como os ativos serão precificados. A metodologia adotada foi um estudo teórico sobre a dinâmica do modelo, buscando como resultado aproximar a teoria da realidade, tratando-se de um modelo dinâmico de precificação de ativos. Concluiu-se que utilizando o estabelecimento de um agente representativo, o C-CAPM não consegue explicar empiricamente os dados históricos de retorno de ativos de risco, de ativos livres de risco e por fim do prêmio de risco.

**Palavras-chave**: CAPM. C-CAPM. Precificação de ativos. Finanças.

***Abstract***

*The appearance of Consumption Capital Asset Pricing Model (C-CAPM) happened from the proposition of initial researches of Merton (1973) and Breeden (1979) who aimed to universalize the model Capital Asset Pricing Model (CAPM) developed by Sharpe (1964) and Lintner (1965) in an intertemporal context. The goal of this article was to provide a theoretical base to study the pricing of assets through the C-CAPM. In order to develop the theory, instead of considering a complete generality model, it is necessary at first to establish some limits. For the development of the model it is considered that all the consumers are alike in behavior and have endless life. This consumer will be defined as the representative agent who will determine how the assets will be priced. The methodology applied was a theoretical study about the model dynamics, searching as a result to approach the theory to reality, as being a dynamic model of assets pricing. It was concluded that by using the institution of a representative agent, the C-CAPM is not able to explain empirically the historic data about the return of risk assets, of free assets and, last but not least, of risk award.*

***Keywords**: CAPM. C-CAPM. Asset pricing. Finances*

## 1 INTRODUÇÃO

O *Consumption-based Capital Asset Pricing Model* introduzido por Lucas (1978) determina o risco de um ativo em função da covariância do retorno do ativo com a utilidade marginal de consumo. O modelo *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), ao contrário baseia-se no binômio média-variância de retornos. O C-CAPM é um modelo mais geral do que o CAPM e pode-se considerar que o modelo CAPM é uma particularização do C-CAPM.

Assim, o objetivo desse artigo é fornecer embasamento teórico para estudar a precificação dos ativos por meio do C-CAPM, onde Os investidores não baseiam suas decisões na média e variância de retornos de um período como no CAPM, mas adotam uma visão intertemporal de maximizar a utilidade esperada dos consumos presente e futuro conforme sugerido por Lucas (1978). Considerando que o CAPM é um instrumento amplamente utilizado em pesquisas empíricas, não temos a pretensão de afirmar que pesquisadores estariam utilizando incorretamente o CAPM, mas temos a intenção de evidenciar que o modelo CAPM é uma particularização do C-CAPM, ou seja, o C-CAPM é um modelo mais abrangente, carente de mais testes empíricos.

Ativos financeiros permitem ao consumidor distribuir o consumo ao longo do tempo, vendendo ativos para financiar o consumo em épocas ruins e acumulando poupança em épocas favoráveis. Ativos cujos retornos tenham covariância alta e negativa com a utilidade do consumo serão preferencialmente mantidos mesmo que seus retornos esperados sejam baixos. O motivo disto é que estes ativos podem ser convertidos em moeda na época em que sejam mais necessários: quando o consumo é baixo, a utilidade marginal do consumo é mais alta. O modelo C-CAPM associa o risco sistemático de um ativo com o estado de consumo da economia. É um modelo de fator de desconto estocástico genérico onde retornos e os preços de um ativo podem ser expressos respectivamente, conforme Danthine e Donaldson (2005) por:

$$E_t\{R_{i,t+1}M_{t+1}\} = 1 \quad \text{e} \quad P_{it} = E_t\{M_{t+1}X_{i,t+1}\} \qquad \text{Equação 1}$$

Onde *Mt+1* é o fator de desconto estocástico e *Xt+1* é o retorno proporcionado pelo ativo no período seguinte ao da posse do ativo.

No modelo CAPM a função objetivo do consumidor é assumida como sendo determinada pelo desvio padrão e retorno esperado da carteira. Todos os investidores escolhem ativos de risco que maximizem o índice de Sharpe. Em equilíbrio os retornos são uma conseqüência do fato de que todos os agentes têm as mesmas expectativas.

No modelo Arrow-Debreu, são considerados diferentes estados da natureza, mas o horizonte é como no CAPM de um período e todas as decisões de investimentos devem ser tomadas pelo investidor no início do período.

O modelo C-CAPM oferece uma visão alternativa sobre a determinação dos retornos em equilíbrio. Neste modelo, sugerido por Lucas (1978), os investidores maximizam a utilidade esperada do consumo presente e do consumo de períodos futuros. Os ativos financeiros permitem a equalização do consumo no tempo, pois podem ser mantidos em carteira, proporcionando retornos, e convertidos em consumo em épocas de baixo consumo onde a utilidade marginal do consumo é maior. Se a acumulação não fosse considerada o consumo dependeria apenas da renda do agente no período corrente. Do ponto de vista do agente, um ativo é desejável quando seu retorno esperado é alto na época em que o consumo for baixo. O risco sistemático associado ao ativo é determinado pela covariância ente o retorno do ativo e o consumo em vez da covariância entre o retorno do ativo e o retorno da carteira de mercado como no CAPM.

Cuthbertson e Nitzche (2004) apresentam um argumento intuitivo para derivar a condição de primeira ordem (FOC) de um investidor que pretende maximizar a utilidade perpétua do consumo. A condição de primeira ordem para maximizar a utilidade esperada do consumo é fazer o agente igualar a perda de utilidade proveniente de uma redução no consumo atual com o ganho incremental esperado, descontado a valor presente, do consumo do período futuro. Uma redução no consumo do período atual para adquirir um ativo que proporciona um retorno em um período futuro permitirá, no período futuro, um consumo superior ao atual. Ou seja, uma redução de uma unidade monetária no consumo de hoje reduz a utilidade em *U1(Ct)*, mas resulta em um ganho de *EtRt+1* no período seguinte.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Evolução do modelo C-CAPM

O surgimento do *Consumpition Capital Asset Pricin Model* (C-CAPM) se deu da proposição dos trabalhos iniciais de Merton (1973) e de Breeden (1979) que tinham como objetivo universalizar o modelo *Capital Asset Pricin Model* (CAPM) desenvolvido por Sharpe (1964) e Lintner (1965) na contextualização intertemporal.

Originalmente o modelo CAPM tem como proposição que a riqueza é consumida pelos investidores depois de um determinado período, onde a riqueza e o consumo terminavam se misturando.

Na nova concepção as deliberações de consumo e alocação são separadas, apesar de ser modeladas ao mesmo tempo, podendo o indivíduo negociar seus ativos livremente com objetivo de maximizar sua função utilidade intertemporal. Pelo fato de o fator de desconto entre dois períodos depender do nível de consumo, o modelo CAPM intertemporal é denominado de *Consumption* CAPM, ou *Consumpition Capital Asset Pricin Model* C-CAPM.

Na concepção de Campbel, Lo e MacKinlay (1997) o modelo CAPM é estático, assim como a *Arbitrage Pricing Theory* (APT) e por essa razão ignoram decisões de consumo do indivíduo, pois tratam a precificação dos ativos correlacionada com o portfólio dos investidores.

Conforme Campbell e Cochrane (1995), o valor de um ativo é função dos planos de consumo dos indivíduos e não somente das decisões de alocação de portfólio de acordo com o modelo CAPM, ou seja, o risco do investimento, termo fundamental na prescrição do preço de um ativo, é fixado pela sua covariância com o nível de consumo e não com o retorno do mercado.

Mehra e Prescott (1985) foram os pioneiros a testar o modelo no período 1890/1979. Partiram do modelo desenvolvido por Lucas (1978), onde uma função utilidade adicional e separável no tempo, modelando o fluxo de renda como um processo, eles chegaram à conclusão que, para validar o modelo, seria necessário que os indivíduos tivessem um coeficiente relativo de aversão ao risco de 25, entretanto esse valor é considerado muito alto. A derivação dessa grande diferença (em torno de 6%) entre o retorno do ativo sem risco e o retorno da carteira de ações, foi chamada d *Equity Premium Puzzle* (EPP).

Weil (1989) da mesma forma partiu da universalização da função utilidade que separava esses dois parâmetros, mas não conseguiu chegar a resultados melhores. Em compensação, alertou para o que foi denominado na literatura *Risk Free Puzzle* (RTF).

Segundo Varian (1992) a preferência sobre o consumo intertemporal pode ser representada por uma função utilidade, que satisfaça condições de maximização da função, tais como: completa, reflexiva, transitiva e contínua.

Epstein e Zin (1989) investigaram e testaram a restrição do modo da serie temporal da *Consumption* e da implicação do retorno do ativo na representatividade do modelo com preferência intertemporal.

Muitos outros autores continuaram realizando pesquisas na linha inicialmente desenvolvida por Mehra e Prescott, variando hipóteses do modelo inicial de forma a chegar a resultados mais apurados. A caracterização da função utilidade recebeu maior atenção. Alguns autores também buscaram formas alternativas para o processo de dotação que, por significar risco numa economia de trocas, tem papel importante no cálculo de seu preço.

Quanto à aplicação desse modelo para o Brasil, pode ser considerado pouco em grande parte pela dificuldade de se conseguir dado. Como não existe uma série de consumo agregado, é necessário criar *proxies*, o que acaba comprometendo a comparação de resultados. Em sua pesquisa Sampaio (1999) aplica o modelo original de Mehra e Prescott (1985) utilizando uma série de consumo e não encontra para o Brasil nenhum dos dois *puzzles* que apareceram nos dados das pesquisas americanas.

## 2.2 Construção do modelo com agente representativo e a noção de equilíbrio e agente representativo com vida infinita

Para o desenvolvimento da teoria, em vez de considerarmos um modelo de generalidade completa é necessário inicialmente estabelecer alguma limitação. Para o desenvolvimento do modelo considera-se que todos os consumidores são idênticos em comportamento e têm vida infinita. Este consumidor será definido como o *agente representativo* que definirá como os ativos serão precificados.

Assume-se que o agente representativo age sempre no sentido de maximizar o valor presente esperado da utilidade de consumo descontada durante a vida infinita. A consideração de agente representativo com vida infinita é pertinente uma vez que:

a) se a vida fosse finita o agente deveria ao final de sua vida parar de poupar, liquidar sua carteira e consumir todo o seu valor. Este não é o comportamento do consumidor;
b) embora a vida de um agente em particular seja finita, seus bens passam a seus descendentes conforme Barro (1974);
c) em equilíbrio competitivo, com um mercado completo, o agente representativo é aquele cuja função de utilidade é a média ponderada das utilidades dos vários agentes da economia.

Para construirmos um agente representativo pode-se partir de uma economia Arrow-Debreu considerando dois períodos. Nessa economia, no primeiro período o agente consome *c0* unidades de consumo e no segundo período a cada estado $\theta$ existe uma probabilidade $\pi\theta$ da ocorrência de um consumo $c\theta$ de forma que a utilidade de consumo do agente no segundo período é a soma ponderada das utilidades de consumo, para Danthine e Donaldson (2005) cada agente *ki* busca:

$$\max U^k(c_0^k) + \delta^k \sum_{\theta=1}^{N} \pi_\theta U^k(c_\theta^k)$$

Equação 2

Maximizar a utilidade de consumo total, isto é a utilidade do consumo do período zero somada ao valor presente da utilidade de consumo ponderada pelas probabilidades de ocorrência dos possíveis estados $\theta$ da natureza no período 1 trazida ao período zero por um fator de desconto δ. Danthine e Donaldson (2005) expõem que a condição de limitação da solução de maximização é de que:

$$\text{s.t. } c_0^k + \sum_{\theta=1}^{N} q_\theta c_\theta^k \leq e_0^k + \sum_{\theta=1}^{N} q_\theta e_\theta^k$$

Equação 3

O consumo nos períodos 0 e 1 seja inferior à dotação inicial mais a dotação inicial mais a dotação no período 1 se ocorrer o estado $\theta$. Na inequação acima o preço no período 0 é 1 e no período 1 é $q\theta$.

Em equilíbrio competitivo a alocação de recursos na economia é Pareto ótima e, portanto existe um conjunto de pesos de forma que seja obtida uma alocação em equilíbrio para o problema, assim expresso por Danthine e Donaldson (2005):

$$\max \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \left\{ U^k(c_0^k) + \delta^k \sum_{\theta=1}^{N} \pi_\theta U^k(c_\theta^k) \right\},$$ **Maximizar as utilidades de cada agente**

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{K} c_0^k = \sum_{k=1}^{K} e_0^k,$$ **Consumo inicial igual à dotação inicial**

$$\sum_{k=1}^{K} c_\theta^k = \sum_{k=1}^{K} e_\theta^k, \ \forall \theta$$ **Consumos iguais às dotações para todos os agentes em todos os estados**

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1; \lambda_k > 0, \ \forall k.$$ **Participações individuais > 0 e soma das participações = 1**

Equação 4

Pensando-se em termos de consumo agregado, a utilidade de consumo do agente agregado pode ser representada do período 0 para o período 1 com a ocorrência do estado $\theta$ expresso por Danthine e Donaldson (2005) como sendo:

$$U^A\left(c_0^A, c_\theta^A\right) = U_0^A\left(c_0^A\right) + \sum_{\theta=1}^{N} \pi_\theta U^A\left(c_\theta^A\right)$$

Equação 5

Onde: $U^A\left(c_0^A, c_\theta^A\right)$ é a utilidade entre os períodos 0 e 1 para o agente representativo do agregado da economia,

$$U_0^A\left(c_0^A\right) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k U_0^k\left(c_0^k\right)$$

Equação 6

É a utilidade do agente agregado no período 0. Esta utilidade é a utilidade ponderada pela participação $\lambda$ do consumo dos agentes $k$ da economia.

$$U^A\left(c_\theta^A\right) = \sum_{k=1}^{K} \delta^k \lambda_k U^k\left(c_\theta^k\right)$$

Equação 7

É a utilidade do agente agregado no período 1 correspondente à soma ponderada pela participação $\lambda$ do consumo dos agentes $k$ da economia caso ocorra o estado $\theta$ trazida a valor presente do período 1 para o período 0 pelo fator de desconto $\delta$.

Os agentes com maior dotação inicial terão maior participação no mercado.A função utilidade será independente da dotação inicial de forem satisfeitas duas condições:

a) a taxa de desconto for idêntica para todos os agentes; e
b) a função utilidade for do tipo *Constant Absolute Risk Aversion* (CARA) ou *Constant Relative Risk Aversion* (CRRA).

Nestas condições existe uma economia de agente representativo para a qual os preços de equilíbrio Arrow-Debreu são os mesmos que par a economia de agentes $K$e para a qual:

$$U^A(c) = g(c)H(\lambda_1, \ldots, \lambda_K)$$

Equação 8

A utilidade de consumo para o agente A representando o agregado da economia é igual às utilidades dos agentes individuas ponderada pela participação de cada agente, com as condições de *g1(c)* > 0 e *g2 (c)* < 0.

## 2.3 O conceito de equilíbrio “No trade”

Em uma economia de agente representativo, se existe oferta de um ativo, o *preço de equilíbrio* é preço no qual o agente representativo quer manter para si a oferta total do ativo.

O ativo não é negociado no mercado e está em oferta zero:

a) em uma economia de um só agente, a oferta total de um ativo é zero;
b) se o agente quer vender o ativo a oferta excede a demanda;
c) se o agente quer comprar o ativo mas ninguém quer vender a demanda excede a oferta.

Um mercado está em equilíbrio quando e somente quando a oferta iguala a demanda e as duas são simultaneamente zero. Nestas condições de não negociação o preço de equilíbrio é o preço no qual o agente representativo *deve* manter exatamente a quantidade que ele *quer* manter. Neste preço não há aumento de utilidade para o agente representativo.

Modelos de agente representativo não são adequados à análise de assuntos relacionados ao volume de transações uma vez que no modelo de agente representativo o volume negociado é zero por hipótese.

## 2.4 O modelo economia de trocas

Em uma economia de trocas sob a ótica do C-CAPM, é uma economia onde as transações ocorrem durante sucessivos períodos e as decisões são tomadas ao longo do tempo à medida que novas informações são trazidas aos agentes e não no instante 0 como na economia Arrow-Debreu.

Existe uma ação divisível que pode ser assumida como representando a carteira de mercado do modelo CAPM. A propriedade desta ação dá ao detentor o direito a receber toda a saída da economia que é vista como exógena e estocasticamente variável no tempo. Este comportamento pode ser interpretado como resultante de um número grande de estados, sendo a saída definida em função de uma matriz de transição **T** de estados de entrada-saída cuja forma para exemplificar 3 estados é demonstrado por Danthine e Donaldson (2005):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Y^1 & Y^2 & Y^3 \end{array} \\ \begin{array}{c} Y^1 \\ Y^2 \\ Y^3 \end{array} & \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{bmatrix} = \mathbb{T} \end{array}$$

Equação 9

Onde *Лij* é a probabilidade de transição do estado *Yi* para o estado *Yj*.

Se adotarmos uma perspectiva de estado contínuo em vez de estados discretos o processo de saída será associado a uma função de probabilidade de transição da forma:

$$G(Y_{t+1} \mid Y_t) = \text{Prob}\left(Y_{t+1} \leq Y^j, |Y_t = Y^i\right).$$

Equação 10

Onde a variação da saída da economia *Yt* para o estado *Yt+1* é função da probabilidade de *Yt+1* ≤ *Yj* dado que no instante t *Yt* = *Yi*. Pode-se entender a ação como sendo uma árvore frutífera onde os frutos são os dividendos que por serem perecíveis devem ser consumidos (Lucas 1978).

Qualquer modelo que tenha saída definida em função de um processo estocástico pode ser ajustada no modelo C-CAPM. Neste modelo, assume-se que a economia é uma economia de expectativas racionais onde as expectativas dos agentes são corretas e sem tendência. Os agentes representativos conhecem a estrutura da economia e as probabilidades associadas aos níveis de saída.

Os agentes representativos transacionam ações ou partes destas e consomem os dividendos por elas proporcionados. As transações realizadas pelos agentes buscam maximizar a expectativa de utilidade do consumo do período seguinte trazida a valor presente por um fator de desconto $\delta$:

$$\max_{\{z_{t+1}\}} E\left(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t U(\tilde{c}_t)\right)$$

Equação 11

Esta maximização está sujeita à restrição de que o consumo (ou perda de riqueza) no período t acrescido do valor da ação no período t+1 seja menor ou igual aos dividendos proporcionados pela posse do capital adicionado do valor do capital no instante t.

$$c_t + p_t z_{t+1} \leq z_t Y_t + p_t z_t$$

$$z_t \leq 1, \forall t$$

Equação 12

Assumindo uma função utilidade estritamente côncava com

$$\lim_{c_t \to 0} U_1(c_t) = \infty$$

Equação 13

Nunca será ótimo para o agente ter um consumo zero. Para Danthine e Donaldson (2005) a condição necessária e suficiente para a solução deste problema é que para todos os t, a fração da ação $z_{t+1}$ resolva:

$$U_1(c_t)p_t = \delta E_t \left\{U_1(\tilde{c}_{t+1})\left(\tilde{p}_{t+1}+\tilde{Y}_{t+1}\right)\right\}$$

Equação 14

Onde: $c_t = (\,p_t z_t + z_t Y_t - p_t z_{t+1})$

O preço em equilíbrio será dado por:

$$p_t = E_t \sum_{\tau=1}^{\infty} \delta^{\tau} \left[\frac{U_1(\tilde{Y}_{t+\tau})}{U_1(Y_t)} \tilde{Y}_{t+\tau}\right],$$

Equação 15

O preço da ação que resolve o problema é o valor presente do fluxo de caixa de dividendos futuros descontado sequencialmente às taxas de substituição marginais intertemporais de consumo do agente representativo.

Se a função de consumo for neutra em risco a utilidade marginal é constante e o fluxo de dividendos é descontado à taxa livre de risco:

$$p_t = E_t \sum_{\tau=1}^{\infty} \delta^{\tau} \left[\tilde{Y}_{t+\tau}\right] = E_t \sum_{\tau=1}^{\infty} \left[\frac{\tilde{Y}_{t+\tau}}{(1+r_f)^{\tau}}\right],$$

Equação 16

Para que se possa comparar o modelo C-CAPM com outros modelos é preciso relacionar preços com taxas de retorno e entender o que determina o *spread* da taxa de retorno sobre a taxa livre de risco.

No CAPM temos:

$$\boldsymbol{Er_j - r_f = \beta_j\left(Er_m - r_f\right)}$$ Equação 17

O retorno esperado do título menos a taxa livre de risco é igual ao Beta, (coeficiente de covariância entre os retornos da ação j ) multiplicado pela diferença entre o retorno de mercado e a taxa livre de risco.

Seja $q_t^b$ o preço no período t de um título sem risco com oferta 0 que paga uma unidade de consumo em todos os estados no período seguinte, portanto,

$$q_t^b U_1(c_t) = \delta E_t \left\{U_1(\tilde{c}_{t+1})1\right\}$$

Equação 18

O preço $q_t^b$ é o preço no qual o agente deseja manter 0 unidades do título e, portanto, a oferta iguala a demanda.

Se o agente fosse comprar uma unidade de título hoje a este preço, a perda de utilidade hoje seria exatamente igual ao ganho de utilidade no futuro pela posse do título.

Como a taxa livre de risco de t para t+1 é $q_t^b(1 + r_{f,t+1}) = 1$ temos:

$$\frac{1}{1+r_{f,t+1}} = q_t^b = \delta E_t \left\{\frac{U_1(\tilde{c}_{t+1})}{U_1(c_t)}\right\},$$

Equação 19

Esta fórmula estabelece o *link* entre taxa de desconto e taxa livre de risco na hipótese de neutralidade (DANTHINE e DONALDSON 2005). Nesta equação a taxa livre de risco deve ser uma constante. Demonstra-se que a relação entre spread e taxa livre de risco é:

$$\bar{r}_{j,t+1} - r_{f,t+1} = -\delta(1 + r_{f,t+1})\, cov_t \left(\frac{U_1(\tilde{c}_{t+1})}{U_1(c_t)},\ \tilde{r}_{j,t+1}\right).$$

Equação 20

Ações que pagam retornos altos quando o agente não precisa e baixos quando ele precisa pois o consumo está baixo, não são desejáveis para reduzir o risco de consumo e portanto seus preços são baixos e os prêmios de risco altos.

O prêmio de risco é parcialmente definido em termos de utilidade de consumo que não é facilmente observável. Para eliminar este inconveniente, Danthine e Donaldson (2005) reescrevem a equação em função do consumo do período seguinte:

$$\bar{r}_{j,t+1} - r_{f,t+1} = \frac{\delta b(1 + r_{f,t+1})}{a - bc_t} cov_t(\tilde{r}_{j,t+1}, \tilde{c}_{t+1})$$

Equação 21

Observa-se que nesta fórmula o spread sobre a taxa livre de risco será proporcional à covariância entre o retorno da ação no período t+1 com o consumo em t+1 e portanto se esta covariância for alta o prêmio de risco será alto.

## 2.5 A formalização do C-CAPM

Designando a carteira mais correlacionada com o consumo pelo índice *c*, segundo Danthine e Donaldson (2005) pode-se escrever:

$$\bar{r}_{c,t+1} - r_{f,t+1} = \left[\frac{\delta b(1 + r_{f,t+1})}{a - bc_t}\right] cov_t(\tilde{r}_{c,t+1}, \tilde{c}_{t+1})$$

Equação 22

E dividindo as equações correspondentes à ação *j* e *c* obtemos a equação que correlaciona uma ação qualquer *j* com a carteira representativa do consumo, assim como no CAPM o fazia com a carteira de mercado obtendo:

$$\bar{r}_{j,t+1} - r_{f,t+1} = \frac{\beta_{j,c_t}}{\beta_{c,c_t}} [\bar{r}_{c,t+1} - r_{f,t+1}]$$

Equação 23

Equação que define o C-CAPM, onde:

$$\beta_{j,c_t} = \frac{cov_t(\tilde{r}_{j,t+1}, \tilde{c}_{t+1})}{Var(\tilde{c}_{t+1})}$$

É o $\beta$-consumo do ativo *j* e:

$$\beta_{c,ct} = \frac{\boldsymbol{Cov_t}\left(\bar{\boldsymbol{r}}_{c,t+1}, \bar{\boldsymbol{c}}_{t+1}\right)}{\boldsymbol{Var}\left(\bar{\boldsymbol{c}}_{t+1}\right)}$$ Equação 24

É o $\beta$-consumo da carteira *c*

Se for construída uma carteira com $\beta_{c,ct} = 1$ a equação fica análoga à do CAPM

$$\bar{r}_{j,t+1} - r_{f,t+1} = \beta_{j,c_t} \left( \bar{r}_{c,t+1} - r_{f,t+1} \right).$$

Equação 25

## 2.6 Precificando títulos Arrow-Debreu com o C-CAPM

É interessante verificar como se comportam os títulos e seus preços dentro de uma economia C-CAPM. Se estivermos no estado s no período t, qual o preço do ativo que paga uma unidade de consumo se e somente se ocorrer o estado *s'* no tempo t+1?

Para Danthine e Donaldson (2005) se estivermos em um número de estados finito, e sendo o preço Arrow-Debreu:

$$q(s_{t+1} = s';\ s_t = s)$$

Equação 26

Como no C-CAPM assumimos oferta zero em equilíbrio,

$$U_1(c(s))\,q(s_{t+1} = s'; s_t = s) = \delta U_1(c(s'))\,\text{prob}(s_{t+1} = s'; s_t = s)$$

Equação 27

Ou

$$q(s_{t+1} = s'; s_t = s) = \delta \frac{U_1(c(s'))}{U_1(c(s))} \text{prob}(s_{t+1} = s'; s_t = s)$$

Assumindo-se estacionariedade como hipótese (média e variância constantes ao longo do tempo e o valor da covariância entre dois períodos depende apenas da distância entre eles), podemos desprezar o fator tempo resultando:

$$q(s'; s) = \delta \frac{U_1(c(s'))}{U_1(c(s))} \text{prob}(s'; s) = \delta \frac{U_1(c(s'))}{U_1(c(s))} \pi_{ss'},$$

Equação 28

que é a equação Arrow-Debreu de equilíbrio de preços. O preço do título é o valor futuro da utilidade marginal do consumo incremental entre os períodos t e t+1.

Para uma situação de número de estados representado por uma função contínua, temos de forma análoga:

$$q(s'; s) = \delta \frac{U_1(c(s'))}{U_1(c(s))} f(s'; s)$$

Equação 29

Onde $f(s'; s)$ é a função de probabilidade condicional que define a probabilidade de ocorrência do estado *s'* em *t+1* dado *s* em *t*.

Para função utilidade neutra em risco temos:

$$q(s'; s) = \delta f(s'; s) = \delta \pi_{ss}.$$

Equação 30

Para neutralidade em risco os preços são proporcionais às probabilidades dos estados com o fator de proporcionalidade correspondendo ao coeficiente de desconto no tempo.

O tratamento para N períodos é análogo resultando em:

$$q^N(s_{t+N} = s'; s_t = s) = \delta^N \frac{U_1(c(s'))}{U_1(c(s))} \text{prob}(s_{t+N} = s'; s_t = s) .$$

Equação 31

Para um título qualquer,

$$q_t^{bN}(s) = \delta^N \sum_{s'} \frac{U_1(c(s'))}{U_1(c(s))} \text{prob}(s_{t+N} = s'; s_t = s)$$

Equação 32

Para um bônus livre de risco e

$$q_t^{bN}(s) = \delta^N \int_{s'} \frac{U_1(c(s'))}{U_1(c(s))} f_N(s'; s)\, ds' = E_s \left\{ \delta^N \frac{U_1(c_{t+N}(s'))}{U_1(c(s))} \right\},$$

Equação 33

Para uma série contínua, onde o valor esperado envolve todos os estados possíveis em *t+1* com os valores trazidos a *t* por um fator de desconto $\delta$.

O preço da ação como visto anteriormente reflete o valor presente dos dividendos futuros esperados

$$p_t = E_t \sum_{\tau=1}^{\infty} \delta^\tau \left[ \frac{U_1(\tilde{Y}_{t+\tau})}{U_1(Y_t)} \tilde{Y}_{t+\tau} \right],$$

Equação 34

E pode ser reescrita na concepção de Danthine e Donaldson (2005) como:

$$= \sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{s'} \delta^\tau \left[ \frac{U_1(c_{t+\tau}(s'))}{U_1(c_t)} Y_{t+\tau}(s') \right] \text{prob}(s_{t+\tau} = s'; s_t = s)$$
$$= \sum_{\tau} \sum_{s'} q^\tau(s', s) Y_{t+\tau}(s'),$$

Equação 35

que indica que a soma dos dividendos esperados futuros descontados é igual à série futura de dividendos precificados a Arrow-Debreu. O fato de não existirem restrições no C-CAPM de precificar títulos Arrow-Debreu é um indicativo de que a economia C-CAPM é uma economia de mercado completo

Pode-se escrever:

$$= \sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{s'} \delta^\tau \left[ \frac{U_1(c_{t+\tau}(s'))}{U_1(c_t)} Y_{t+\tau}(s') \right] \text{prob}(s_{t+\tau} = s'; s_t = s)$$
$$= \sum_{\tau} \sum_{s'} q^\tau(s', s) Y_{t+\tau}(s'),$$

Equação 36

O valor esperado considera todos os valores possíveis das variáveis de estado de saída com as probabilidades dadas na linha correspondente ao estado atual s na matriz T elevado à potência correspondente ao número de períodos.

Como $(1 + r_{f,t+\tau})^{\tau} q_t^{b\tau} = 1$ do preço de um bônus livre de risco com $\boldsymbol{\tau}$ períodos até o vencimento temos:

$$p_t = \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{\left\{ E_t[Y_{t+\tau}] \left\{ 1 + \frac{cov(U_1(\tilde{c}_{t+\tau}), \tilde{Y}_{t+\tau})}{E_t[U_1(\tilde{c}_{t+\tau})] E_t[\tilde{Y}_{t+\tau}]} \right\} \right\}}{(1 + r_{f,t+\tau})^{\tau}}$$

Equação 37

A quantidade descontada no termo de valor presente é a certeza equivalente em equilíbrio do fluxo de caixa real gerado pelo ativo. Se o fluxo de caixa for livre de risco a expressão fica:

$$p_t = \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{Y_{t+\tau}}{(1 + r_{f,t+\tau})^{\tau}}.$$

Equação 38

Se o consumo do agente representativo for correlacionado com o fluxo de caixa do ativo de forma positiva e alta, os valores da certeza equivalente dos fluxos de caixa serão menores do que os valores esperados. Estas ações terão um preço baixo e um retorno esperado alto. O preço destas ações será menor do que em uma economia de agentes neutros em risco.

## 3 METODOLOGIA

A metodologia adotada foi um estudo teórico sobre a dinâmica do modelo, buscando como resultado aproximar a teoria da realidade, tratando-se de um modelo dinâmico de precificação de ativos. Foi utilizando o estabelecimento de um agente representativo, para verificar se o C-CAPM consegue explicar empiricamente os dados históricos de retorno de ativos de risco, de ativos livres de risco e por fim do prêmio de risco.

Também foi feito um estudo bibliográfico sobre o surgimento do *Consumpition Capital Asset Pricin Model* (C-CAPM) desde a proposição dos trabalhos iniciais de Merton (1973) e de Breeden (1979) que tinham como objetivo universalizar o modelo *Capital Asset Pricin Model* (CAPM) desenvolvido por Sharpe (1964) e Lintner (1965) na contextualização intertemporal.

## 4 RESULTADOS: VALIDADE EMPÍRICA DO MODELO - O ENIGMA

Segundo Danthine e Donaldson (2005), o C-CAPM enfrenta uma série de desafios empíricos, já que a realidade sugere a existência de falhas importantes do respectivo modelo de precificação. Prevendo esta situação, os autores procuraram estudar alternativas que melhorassem seu desempenho: estipular limites como as fronteiras propostas por Hansen-Jagannathan (1991), utilizar uma função utilidade que separasse preferências de tempo e de risco (EPSTEIN; ZIN, 1989), admitir a chamada formação de hábito e distinguir, em termos de função utilidade, os acionistas da população de não-acionistas.

De forma clara, Danthine e Donaldson (2005) afirmam que, empiricamente, o C-CAPM não consegue reproduzir o alto prêmio de risco que foi observado na economia americana durante "um longo período", tomando por base o retorno do índice S&P 500 como o retorno para os ativos de risco. De acordo com Mehra e Prescott (1985 *apud*

DANTHINE; DONALDSON, 2005), o prêmio de risco ($r - r_f$) para os ativos americanos é, historicamente, igual a 6,18% ao ano, uma vez que o retorno de mercado $r$ esteve próximo de 7,00% e a taxa livre de risco $r_f$ igual a 0,80% a.a.

Além disso, para o desenvolvimento matemático é necessário conhecer uma determinada taxa média de crescimento do consumo. Os autores valeram-se dos mesmos números utilizados por Mehra e Prescott (1985): taxa média de crescimento do consumo na economia americana de 1,83% ao ano (obtida a partir do intervalo de 1889 até 1978) com desvio padrão de 0,0357.

É importante lembrar que uma conseqüência de assumir o valor de $\gamma$ entre 1 e 2 é a possibilidade de se escrever a taxa marginal intertemporal de substituição como sendo:

$$\frac{U_1(c_{t+1})}{U_1(c_t)} = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}.$$

Equação 39

A equação de precificação de ativos:

$$1 = \delta E_t \left\{ \frac{U_1(\tilde{c}_{t+1})}{U_1(c_t)} (1+\tilde{r}_{j,t+1}) \right\}$$

Equação 40

Portanto reduz-se a:

$$1 = \delta E_t \left\{ \left(\frac{\tilde{c}_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma} R_{t+1} \right\} = \delta(\bar{x})^{-\gamma}\bar{R},$$

Equação 41

Onde $x_{t+1}$ representa o crescimento do consumo per capita e $R_{t+1}$ representa a taxa bruta de retorno sobre o capital. Neste caso, $R$ tem valor de 1,04, uma vez que se entendeu como uma média simples dos retornos dos ativos de risco, aproximadamente 7% a. a., com os retornos de ativos livres de risco, aproximadamente 1% a.a.

Substituindo as incógnitas pelos valores assumidos, obtém-se $\delta \sim 0{,}97$ para $\gamma = 1$. Ainda, para $\gamma = 2$ tem-se $\delta = 0{,}99$. Este resultado mostra que assumir maiores valores de aversão a risco seria incompatível com a manutenção da hipótese de um fator de desconto menor que 1.

Para Danthine e Donaldson (2005), este primeiro problema clama por alguma explicação para a baixa taxa média livre de risco ou uma possível aceitação de uma taxa negativa de preferências no tempo. Os autores, para o desenvolvimento das discussões, limitarão apenas o valor do coeficiente de aversão a risco (CRRA) a um máximo de 2. O Enigma do prêmio de risco, então, valer-se-á das assunções acima para testar a equação de precificação de ativos do C-CAPM.

Supondo que o preço de uma ação em determinada data corresponde ao total de dividendos pagos na mesma data, sendo que $v$ é uma constante, Danthine e Donaldson (2005) afirmam que:

$$vY_t = \delta E_t \left\{ \left(v\tilde{Y}_{t+1} + \tilde{Y}_{t+1}\right) \frac{U_1(\tilde{c}_{t+1})}{U_1(c_t)} \right\}.$$

Equação 42

A equação acima mostra que o total de dividendos pagos por uma ação na data $t$ – isto é, seu preço em $t$ – é igual ao valor esperado da multiplicação do total de dividendos pagos pela ação (considerando a possibilidade de ser uma constante) por uma taxa de crescimento da utilidade do consumo descontados por um determinado fator.

Após a confirmação de que isto é constante, Danthine e Donaldson (2005) reescrevem a equação de retorno como:

$$R_{t+1} \equiv 1 + r_{t+1} = \frac{p_{t+1} + Y_{t+1}}{p_t} = \frac{v+1}{v}\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{v+1}{v}x_{t+1}.$$

Equação 43

A taxa livre de risco, que parece ser constante sob essas condições, pode ser definida como:

$$R_{f,t+1} \equiv \frac{1}{q_t^b} = \left[\delta E_t\left\{\frac{U_1(\tilde{c}_{t+1})}{U_1(c_t)}\right\}\right]^{-1} = \frac{1}{\delta}\frac{1}{E\{\tilde{x}^{-\gamma}\}},$$

Equação 44

E finalmente obtém-se a equação final que será utilizada para testar empiricamente o modelo:

$$\ln(ER) - \ln(R_f) = \gamma\sigma_x^2.$$

Equação 45

Utilizando os números reais referentes aos retornos verificados na economia americana, γ resulta em um valor igual a 50,24. Entretanto, ao assumir que γ = 2, obtém-se um prêmio de risco de 0,002.

$$\frac{\ln(ER) - \ln(E_{r_f})}{\sigma_x^2} = \frac{1.0698 - 1.008}{(0.0357)^2} = 50.24 = \gamma.$$

$$2(0.00123) = 0.002 = (\ln(ER) - \ln(ER_f) \cong ER - ER_f$$

Equação 46

Danthine e Donaldson (2005) demonstram que em ambos os casos os valores encontrados não condizem com a realidade verificada. O prêmio de risco de aproximadamente 6,2% somente pode ser explicado assumindo um absurdo CRRA de 50, enquanto que ao utilizar um coeficiente de aversão a risco de 2, o prêmio de risco passa a ser de apenas 0,2%, bem abaixo do que foi encontrado historicamente. Desta forma, os autores concluem que o C-CAPM não foi capaz de explicar empiricamente o Enigma.

## 4.1C-CAPM com utilidade Epstein-Zin

Esta alternativa verifica a aplicação prática do C-CAPM ao valer-se da separação de tempo e preferências de risco de Epstein e Zin (1989). A chamada função utilidade Epstein-Zin pode ser representada como:

$$U(c_t, CE_{t+1}) = \left[(1-\delta)c_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \delta CE_{t+1}^{\frac{1-\gamma}{\theta}}\right]^{\frac{\theta}{1-\gamma}}$$

Equação 47

Onde:

$$\left[CE(\tilde{U}_{t+1})\right]^{1-\gamma} = E_t(\tilde{U}_{t+1})^{1-\gamma},$$

$$\text{and } \theta = \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\rho}},\ 0<\delta<1,\ 1\neq\gamma>0,\ \rho>0;$$

Esta proposta não é muito inovadora, uma vez que as preferências Epstein-Zin, por meio do γ, captura a aversão a risco da mesma maneira que o C-CAPM padrão (DANTHINE; DONALDSON, 2005).

Segundo Danthine e Donaldson (2005), provavelmente a modificação de maior sucesso na configuração padrão do C-CAPM foi admitir funções utilidade que exibissem maiores níveis (na margem) de aversão a risco. Os autores afirmam que uma alternativa para resolver o Enigma é assumir algum tipo de *formação de hábito* ao invés de simplesmente elevar o valor do CRRA.

Apenas como breve ilustração, a utilidade do agente representativo admitindo-se alguma formação de hábito passa a ser a seguinte:

$$U(c_t, c_{t-1}) \equiv \frac{(c_t - \chi c_{t-1})^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

Equação 48

Onde $x \leq 1$ é o parâmetro (DANTHINE; DONALDSON, 2005).

A última abordagem proposta para solucionar o Enigmado prêmio de risco é reconhecer que somente uma parte da população detém ativos financeiros de risco tais como ações. Danthine e Donaldson (2005) afirmam que somente a variabilidade do consumo da população de acionistas deve interessar para a precificação de ativos de risco – isto em função dos padrões de consumo destes indivíduos estarem mais correlacionados com retornos de ações do que o consumo médio total.

Desta forma, o problema de alocação resume-se a:

$$\max_{c_1(\theta), c_2(\theta)} U(c_1(\tilde{\theta})) + \mu V(c_2(\tilde{\theta})),\ \text{s.t.}$$

$$c_1(\tilde{\theta}) + c_2(\tilde{\theta}) \leq Y(\tilde{\theta}),$$

Equação 49

Onde *U* e *V* são funções utilidade de dois agentes.

A condição de primeira ordem para este problema passa a ser:

$$U_1(c_1(\tilde{\theta})) = \mu V_1(c_2(\tilde{\theta})).$$

Equação 50

Significando que o *ratio* das utilidades marginais de ambos os agentes deve ser constante.

O problema de maximização pode ser interpretado como a soma das funções utilidade em relação ao consumo na data *t* do agente *V* descontados a um determinado fator subjetivo:

$$\max_{\{z_t\}} E(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t V(\tilde{c}_t))$$

Equação 51

E a equação de precificação torna-se:

$$V_1(c_t)p_t = \delta E_t \left\{ V_1(\tilde{c}_{t+1}) \left( \tilde{p}_{t+1} + \tilde{d}_{t+1} \right) \right\}.$$

Equação 52

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse artigo foi fornecer um embasamento teórico para estudar a precificação dos ativos por meio do C-CAPM, onde os investidores não baseiam suas decisões na média e variância de retornos de um período como no CAPM, mas adotam uma visão intertemporal de maximizar a utilidade esperada dos consumos presente e futuro, conforme sugerido por Lucas (1978).

Embora busque aproximar a teoria da realidade, tratando-se de um modelo dinâmico de precificação de ativos utilizando-se do estabelecimento de um agente representativo, o C-CAPM não consegue explicar empiricamente os dados históricos de retorno de ativos de risco, de ativos livres de risco e por fim do prêmio de risco. Ao utilizar dados reais, o coeficiente de aversão a risco resulta em valor grande.

Ao utilizar CRRA de 2, no entanto, o prêmio de risco encontrado é um valor muito abaixo do verificado historicamente na economia dos Estados Unidos. Portanto, apesar de valer-se de algumas inovações frente ao CAPM, o *Consumption-based Capital Asset Pricing Model* encontra nos testes empíricos seu mais relevante desafio.

Epstein e Zin (1989) investigaram e testaram a restrição do modo da serie temporal da *Consumption* e da implicação do retorno do ativo na representatividade do modelo com preferência intertemporal.

Muitos outros autores continuaram realizando pesquisas na linha inicialmente desenvolvida por Mehra e Prescott, variando hipóteses do modelo inicial de forma a chegar a resultados mais apurados. A caracterização da função utilidade recebeu maior atenção. Alguns autores também buscaram formas alternativas para o processo de dotação que, por significar risco numa economia de trocas, tem papel importante no cálculo de seu preço.

Esta pesquisa apresenta como principal limitação a falta de testes empíricos sobre o *Consumpition Capital Asset Pricin Model*, entretanto ressaltamos que o objetivo desse artigo foi fornecer um embasamento teórico para estudar a precificação dos ativos, discorrendo sobre os principais autores que tratam das teorias econômicas pertinentes aos modelos intertemporais de equilíbrio.

Pressupõe que a pesquisa contribui para aumentar a compreensão sobre o modelo C-CAPM e possa motivar outros pesquisadores a buscarem evidências empíricas em futuras pesquisas de modo a corroborar com uma maior compreensão do *Consumpition Capital Asset Pricin Model*. A aplicação desse modelo para o Brasil pode ser considerada pouca em grande parte pela dificuldade de se conseguir dados. Como não existe uma série de consumo agregado, é necessário criar *proxies*, o que acaba comprometendo a comparação de resultados.

## REFERÊNCIAS

BARRO, R.J. Are government Bonds Net Wealth? *Journal of Political Economy*, 82, 1095-1117, 1974. http://dx.doi.org/10.1086/260266

BREEDEN, D. T. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, v. 7, n. 3, p. 265-296, 1979. http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X(79)90016-3

CAMPBEL, John Y.; LO, Andrew W.; MACKINLAY, A. Craig. *The econometrics of financial markets*. New Jersey. Princiton Universit Press, 1997.

CAMPBELL, J. Y.; COCHRANE, J. H. *By force of habit*: a consumption-based explanation of aggregate stock market behavior. Jan. 1995 (NBER Working Paper, 4.995).

CUTHBERTSON, Keith; NITZCHE, Dirk. *Quantitative financial economics*. New York: John Wiley & Sons, 2004.

DANTHINE, Jean-Pierre; DONALDSON, John. *Intermediate financial theory*. New York: Academic Press, 2005

EPSTEIN, L. G.; ZIN, S. E. Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset return: a theoretical framework. *Econometrica*, v. 57, n. 4, p. 937-969, 1989. http://dx.doi.org/10.2307/1913778

HANSEN, Lars Peter; JAGANNATHAN, Ravi. Implications of security market data for models of dynamic economies. *Journal of Political Economy*, v. 99, n. 2, p.225-262, 1991. http://dx.doi.org/10.1086/261749

LINTER, John. Secutity prices, and maximal gains from diversification. *The Journal of Finance*, v. 20, n. 4, p. 587-615, Dec. 1965. http://dx.doi.org/10.2307/2977249

LUCAS R.E. Asset pricing in an exchange economy. *Econometrica*, n.46, p.1429-1445, 1978. http://dx.doi.org/10.2307/1913837

MEHRA, R.; PRESCOTT, E. C. The equity premium: a puzzle. *Journal of Monetary Economics*, v. 15, p. 145-161, Mar. 1985. http://dx.doi.org/10.1016/0304-3932(85)90061-3

MERTON, R. C. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, v. 41, n. 5, p. 867-887, 1973. http://dx.doi.org/10.2307/1913811

SAMPAIO, F. S. *Existe um equity premium puzzle no Brasil?*. Rio de Janeiro: PUC, 1999.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, v. 19, p. 425-442, 1964. http://dx.doi.org/10.2307/2977928

VARIAN, Hal R. *Microeconomic analysis*. 3. ed. New York: Norton & Company, 1992.

WEIL, P. The equity premium on the risk-free rate puzzle. *Journal of Monetary Economics*, v. 24, p. 401-421, 1989. http://dx.doi.org/10.1016/0304-3932(89)90028-7