Revista EIA
ISSN: 1794-1237
revista@eia.edu.co
Escuela de Ingeniería de Antioquia
Colombia

Poveda Ramos, Gabriel
UNA FÓRMULA DE CUBICACIÓN SOBRE EL PLANO
Revista EIA, vol. 13, núm. 25, enero-junio, 2016, pp. 45-51
Escuela de Ingeniería de Antioquia
Envigado, Colombia

Revista EIA, ISSN 1794-1237 / Año XIII / Volumen 13 / Edición N.25 / Enero-Junio 2016 / pp. 45-51
Publicación semestral de carácter técnico-científico / Universidad EIA, Envigado (Colombia)

UNA FÓRMULA DE CUBICACIÓN SOBRE EL PLANO

GABRIEL POVEDA RAMOS

1. Quienes estudian Cálculo integral o alguna de sus numerosas aplicaciones, conocen la fórmula de integración definida que se llama Fórmula de Simpson y que se usa para computar aproximadamente una integral definida en el caso de una función que está descrita por sus valores en puntos equidistantes. Como se recuerda la fórmula es

$$\int_{xo}^{xn} f(x)\cdot dx = (y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots 4y_{n-1} + y_n) \times (x_n - x_o)/3n$$

en donde los símbolos tienen el significado que se aprecia en el dibujo N° 1, anexo. No sobra recordar dos rasgos característicos de esta fórmula:

1. El número de valores equidistantes que utiliza es: o 3, o 5, o 7,..., o, en general, un número impar de la forma $n + 1$

2. La suma de los coeficientes de dichas términos es $3n$

3. El número de intervalos entre dos ordenadas consecutivas (y_i, y_{i+1}) es n y espar

4. La suma de dichos intervalos es $x_n - x_o$

2. Es sorprendente que en la literatura didáctica matemática casi no se menciona el hecho evidente de que así como se deduce la fórmula de cuadratura de Simpson, así mismo puede deducirse una fórmula de cubicación para calcular (siquiera aproximadamente) el valor de integrales dobles definidas sobre una región R del plano, en dos variables, es decir, integrales de la forma

$$\iint_R f(x, y)\, dx \cdot dy \tag{2.1}$$

Una integral de esta forma expresa el volumen contenido entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano determinado por los ejes cartesianos OX, OY, que son perpendiculares entre si y perpendiculares a OZ, Por esta razón, una fórmula tal puede tener numerosas aplicaciones. Ejemplos de tales aplicaciones serían:

a. Calcular el volumen estancado en un embalse conociendo una cuadrícula de profundidades suficientemente fina.

b. Calcular el contenido de mineral de una colina, conociendo una cuadrícula horizontal de la misma, y los tenores de mineral de cada sondaje, hasta determinada profundidad.

Cabe anotar que los textos de Matemáticas que son usuales en nuestras escuelas, en general, casi nada se ocupan del tema de las fórmulas aproximadas de cubicación (o de cubatura), ni aún en buenos textos de Análisis Numérico. El propósito de esta nota

[1] Ingeniero Químico, Ingeniero Electricista, Matemático. Doctor en Ingeniería

Autor de correspondencia: Poveda Ramos, G. (Gabriel). Correo electrónico: gapora@une.net.co.

Historia del artículo:
Artículo recibido: 01-IV-2015 / Aprobado:
Disponible online: 30 de octubre de 2016
Discusión abierta hasta octubre de 2017

DOI: http:/dx.doi.org/10.14508/reia.2016.13.25.45-51

es deducir una fórmula de cubicación “a la manera de la de Simpson” y mostrar cómo podría emplearse.

3. En primer lugar: considérese el problema de calcular el volumen comprendido entre una superficie cuádrica en dos variables y el plano de los dos ejes OX y OY

Sea la superficie cuádrica

$$z(x, y) = a + b_1x + b_2x^2 + c_1y + c_2y^2 + dxy \qquad (3.1)$$

en donde a, b_1, b_2, c_1, c_2, d son constantes reales tales que los coeficientes de los términos de segundo grado no son todos nulos, es decir, tales que

$$b_2^2 + c_2^2 + d^2 > 0 \qquad (3.2)$$

Considérese, por otra parte, la región del plano OXY constituida por el cuadro R que se muestra en la **Figura 2**, y cuyos vértices son los cuatro puntos (1,0), (0,1), (-1,0) y (0,-1). Su superficie mide, como es evidente, 2 unidades de área. Calculando la función $z(x, y)$ en el centro del cuadrado y en sus cuatro esquinas, se obtiene

$$z(0,0) = z_0 = a$$
$$z(1,0) = z_1 = a + b_1 + b_2$$
$$z(0,1) = z_2 = a + c_1 + c_2$$
$$z(-1,0) = z_3 = a - b_1 + b_2$$
$$z(0,-1) = z_4 = a - c_1 + c_2$$

Invirtiendo este sistema se obtienen los coeficientes a, b_1, b_2, c_1, c_2, en términos de las cotas z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 de la superficie $z(x, y)$ sobre el plano OXY:

$$a = z_0$$
$$b_1 = (1/2)(z_1 - z_3)$$
$$b_2 = (1/2)(z_1 + z_3) - z_0$$
$$c_1 = (1/2)(z_2 - z_4)$$
$$c_2 = (1/2)(z_2 + z_4) - z_0$$

Así, los cinco coeficientes quedan determinados por los valores de $z(x, y)$ en los cinco puntos indicados del cuadrado R, y la ecuación de la superficie cuádrica puede escribirse en forma de determinante como

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & y & y^2 & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & z_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & z_2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & z_3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

Figura 1.

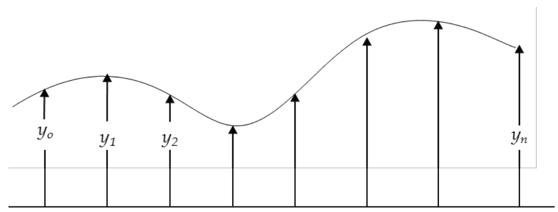


Figura 2.

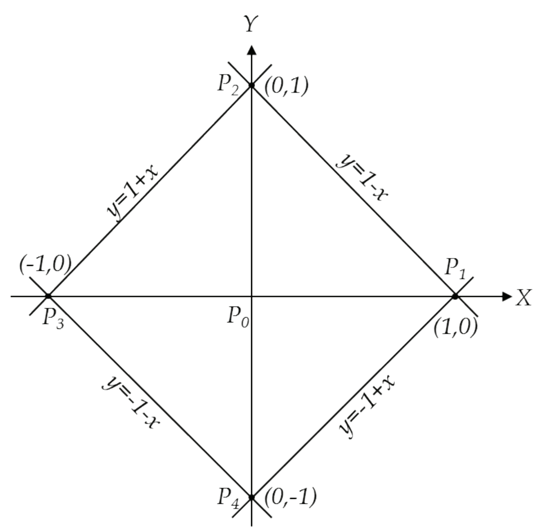
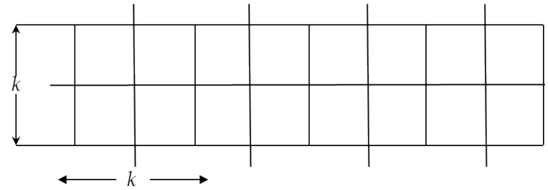


Figura 3.



4. El volumen que cubre $z(x, y)$ sobre la región R (cuya área mide 2 unidades) es el integral

$$V = \iint_R z(u, v)\, du \cdot dv =$$

$$= \iint_R (a+b_1 u+ b_2 u^2 +c_1 v +c_2 v^2) du \cdot dv \qquad (4.1)$$

El valor de estas integrales se puede calcular término a término:

$$\iint_R du \cdot dv = 2$$

$$\iint_R u{\cdot}du{\cdot}dv = \int_{-1}^{0} \int_{v=-(1+u)}^{v=1+u} u{\cdot}du{\cdot}dv + \int_{0}^{1} \int_{v=-(1-u)}^{v=1-u} u{\cdot}du{\cdot}dv$$

$$\iint_R u^2 \cdot du \cdot dv = 1/3$$

$$\iint_R v \cdot du \cdot dv = 0$$

$$\iint_R v^2 \cdot du \cdot dv = 1/3$$

$$\iint_R u \cdot v \cdot du \cdot dv = 0$$

En consecuencia se obtiene

$$V = 2a + b_2/3 + c_2/3 \qquad (4.2)$$

Y sustituyendo los valores de los coeficientes, se tiene:

$$V = [(4/3)]\, z_0 + (1/6)\, (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \qquad (4.3)$$

A modo de comprobación de esta fórmula puede observarse que si la superficie que cubre a R es el plano $z(x, y) = 1$, el volumen de que se trata es un paralelepípedo de base R con área igual a 2 y altura igual a 1, cuyo volumen es 2 unidades cúbicas, y esto es precisamente lo que anuncia la fórmula encontrada:

$$V = [(4/3) \times 1 + (1/6)\, (1 + 1 + 1 + 1)] =$$
$$12/6 = 2 \text{ (unidades cúbicas)}$$

Figura 4.

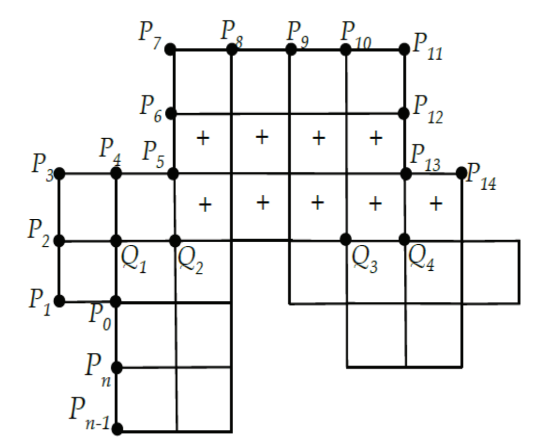
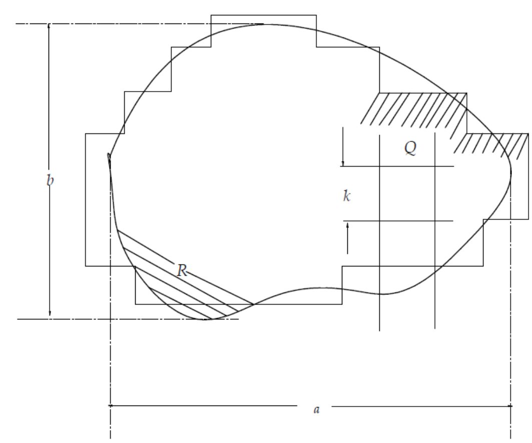


Figura 5.



Esta fórmula (4.3) expresa el volumen buscado como una combinación lineal de las cinco cotas z_o, z_1, z_2, z_3 y z_4, en la cual cabe notar que la suma de sus cinco coeficientes es igual a 2, como se vió arriba.

5. Considerando que se tiene un rectángulo formado por dos cuadrados de lado k unidos por uno de sus lados, como en la **Figura 3**, en el plano OXY; y que sobre éste, en el espacio está la superficie cuádrica

$$z(x, y) = a + b, x + b_2 x^2 + c_1 y + c_2 y^2 + dxy$$

acompañada de la condición (3.2), se aprecia que el volumen de la cuádrica por encima del rectángulo se obtiene aplicando la fórmula (4.3) a los dos cuadrados y sumando. Así se obtiene

$$V = [(4/3)\ (z_{11} + z_{31} + (1/6)\ (z_{00} + z_{02} + z_{40} + z_{42}) + (1/3)(z_{20} + z_{22})]\ k^2/2 \qquad (5.1)$$

en donde $z_{hk} = z(x_h, y_k)$es la cota de la cuadrícula en el punto de coordenadas x_h, y_k

6. Yuxtaponiendo un cuadrado a otro, unidos por uno de sus lados cada par de ellos, puede formarse una figura como la esquematizada en la **Figura 4**. El perímetro de esa figura es una poligonal $P_0P_1P_2 \cdots P_{n-1}P_n$ cuyos puntos sucesivos son equidistantes. Hay algunos de esos puntos donde los dos segmentos adyacentes al punto son colineales. Tal es el caso de P_2, P_4, P_6, P_8, P_9, etc. A estos puntos los llamaremos nodos llanos.

En algunos otros puntos de la poligonal los dos segmentos adyacentes forman un ángulo de 90° respecto al interior del polígono, como ocurre en P_1, P_3, P_7, P_{11}, P_{14}, etc. A estos puntos los llamaremos nodos convexos. Y a puntos como P_0, P_5, P_{13}, $\cdots$, donde se forma un ángulo de 270° respecto al interior de la poligonal, los llamaremos nodos cóncavos. Si p es el número de nodos cóncavos, se demuestra fácilmente que el número de nodos convexos es $p + 4$. Cada punto llano pertenece a dos cuadrados; cada esquina convexa pertenece a un cuadrado, y cada esquina cóncava pertenece a tres cuadrados. A puntos como Q_1, Q_2, etc. que pertenecen a cuatro cuadrados se les llamará nodos interiores. Y los centros de los cuadrados se llamarán C_1, C_2, $\cdots$, etc.

7. El volumen que una superficie cuádrica

$$z(x, y) = a_0 + b_1x + b_2x^2 + c_1y + c_2y^2$$

cubre encima del área poligonal sombreada de la **Figura 5**, puede calcularse aplicando la fórmula (4.3) a cada uno de los cuadrados que forman el área poligonal y sumando sobre todos ellos.

El resultado es casi evidente y puede escribirse

$$V = [(4/3)S_0 + (1/6)\ S_1 + (1/3)\ S_2 + (1/2)\ S_3 + (2/3)\ S_4]k\ \ 2/2 \qquad (5.1)$$

en donde:

S_0: Suma de las cotas $z(x, y)$ en los centros de los cuadrados

S_1: Suma de las cotas $z(x, y)$ en los nodos convexos

S_2: Suma de las cotas $z(x, y)$ en los nodos llanos

S_3: Suma de las cotas $z(x, y)$ en los nodos cóncavos

S_4: Suma de las cotas $z(x, y)$ en los nodos interiores

Es interesante hacer notar algunas relaciones numéricas que deben cumplir los números de sumandos de estas sumas. Para expresarlas llámese

N_0: Número de cuadrados (o bien, de centros de cuadrados).

N_1: Número de nodos convexos

N_2: Número de nodos llanos

N_3: Número de nodos cóncavos

N_4: Número de nodos interiores

Los N_0 cuadrados, considerados uno por uno, tienen $4 \cdot N_0$ vértices (o nodos). De manera que contando cada nodo convexo una vez, cada nodo llano dos veces, cada nodo cóncavo tres veces y cada nodo interior 4 veces, se debe tener:

$$4\ N_0 = N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 \qquad (8.1)$$

Y puesto que ya se hizo notar que

$$N_1 = N_3 + 4 \qquad (8.2)$$

se deduce que

$$2(N_0 - N_4 - N_3 - 1) = N_2$$

lo cual indica que el número de nodos llanos debe ser par, y que

$$N_0 = N_4 + N_3 + N_2/2 + 1 \qquad (8.3)$$

Por otra parte, ya se vió que al sumar los coeficientes de las cotas de cada cuadrado (fórmula 4.3) se obtiene el número 2, de modo que al sumar los N_0 cuadrados debe obtenerse $2 \cdot N_0$, y la suma de coeficientes en la fórmula 7.1 será

$$(4/3)N_0 + (1/6)N_1 + (1/3)N_2 + (2/3)N_4 = 2N_0$$

de donde

$$(2/3)N_0 + (1/6)(N_3 + 4) + (1/3)N_2 + (1/3)N_3 + (2/3)N_4$$

Dividiendo esta ecuación por 2 resulta nuevamente la **Ecuación 8.3**.

Con estos antecedentes es posible ya escribir una fórmula para calcular con aproximación ajustable un integral de la forma

$$\iint_R f(x, y)\, dx \cdot dy$$

siendo R una región simplemente conectada del plano OXY y siendo $f(x, y)$ una función acotada, continua y sumable en R.

El procedimiento para valorar este integral es el siguiente:

a. Admitir que $f(x, y)$ es aproximable por una superficie cuádrica $z(x, y)$ como (3.1), en toda la región R, en el sentido de que para cada punto (x, y) de R se tiene que

$$|f(x, y) - z(x, y)| < \varepsilon$$

siendo ε un número positivo prescrito de antemano y tan vecino al cero (0) como se necesite para afinar los resultados y de acuerdo con el calibre de la cuadrícula que se anuncia enseguida.

b. Dibujar una cuadrícula de calibre k, que cubra toda R, y tal que la variación de $f(x, y)$ dentro de ningún cuadro exceda a ε.

c. Escoger en la cuadricula una poligonal cerrada que no se aparte a distancia mayor que k del contorno de R, el cual es una curva simple, rectificable y cerrada de Jordan, de longitud L. esta poligonal se denomina poligonal aproximante, y la región que encierra se indica con Q. Es sencillo demostrar que si se hace tender k a cero, el área de Q tiende, como límite, al área de R, y el perímetro de Q tiende al perímetro de R.

d. Señalar los centros y las esquinas de todos los cuadrados que queden abrazados por la poligonal mencionada. Dichas esquinas son los nodos de la red poligonal.

e. Clasificar el conjunto M de nodos de la red poligonal en los cuatro subconjuntos disyuntos:

M_1: sub-conjunto de nodos convexos

M_2: sub-conjunto de nodos planos

M_3: sub-conjunto de nodos cóncavos

M_4: sub-conjunto de nodos interiores

Se tiene así la partición

$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$, con $M_i \cap M_j = \emptyset$ para $i \neq j$

f. Calcular $f(x, y)$ en cada uno de los nodos del conjunto M, cuyo número es $N_1 + N_2 + N_3 + N_4$.

Alternativamente, $f(x, y)$ puede estar dada en una tabla numérica o dibujada como familia de curvas de nivel en el plano OXY.

g. Calcular numérica o algebraicamente (o leer, u observar gráficamente, o medir físicamente en un modelo a escala) el valor de $f(x, y)$ en cada uno de los centros de los N_0 cuadrados que están encerrados por la poligonal aproximante. Estos centros forman el conjunto M_0.

h. Formar cada una de las cinco sumaciones

$$S_n = \sum_{P_i \in M_n} f(P_i) \quad \text{para } n = 0,1,2,3,4$$

y calcularlas numéricamente.

i. Calcular la expresión(7.1)

$$V = [4 \cdot S_0/3 + S_1/6 + S_2/3 + S_3/2 + 2 \cdot S_4/3]\, k^2/2$$

la cual daría el volumen cubierto por una superficie continua que en cada cuadrado de la cuadrícula coincide con una cuádrica, por encima del área abrazada por la poligonal. En primera aproximación es posible tomar este valor como estimativo del integral (2.1) propuesto, pero teniendo en cuenta que estamos admitiendo errores de aproximación por dos conceptos:

i. Por aproximar la región R con la poligonal Q, y

ii. Por aproximar la función $f(P)$ por los "parches" de cuádricas $z(P)$ que coincidan con $f(P)$ en los nodos de la cuadrícula, pero no necesariamente en los demás puntos de la región R.

10. Para apreciar la magnitud del error de aproximación, obsérvese primero que la región R es la unión de Q con $R \cap \bar{Q}$ excluyendo de este último conjunto los puntos de Q que no están R, o sea:

$$R = Q \cup (R \cap \bar{Q} / (Q \cap \bar{Q})$$

en donde la barra diagonal (/) es el signo de diferencia entre conjuntos, y la barra superior encima de un conjunto indica su complemento. Entonces

$$\begin{aligned}\iint_R f(P)dP = \iint_Q f(P)\cdot dP + \\ \iint_{R/Q} f(P)dP - \iint_{Q/R} f(P)dP\end{aligned} \tag{10.1}$$

El primer integral de lado derecho de esta ecuación es

$$\begin{aligned}\iint_Q f(P)\cdot dP + \iint_Q z(P)\cdot dP + \\ \iint_Q [f(P) - z(P)]dP = V + \iint (f-z)\cdot dP\end{aligned} \tag{10.2}$$

El tercer término del lado derecho de la **Ecuación 10.1**, que es

$$\iint_{Q/R} f(P)\cdot dP$$

puede no estar definido por el problema que se trata de resolver, o puede ser nulo, puesto que el dominio donde se busca el volumen V, es R. Y por una consideración anterior, resulta que

$$\lim_{k\to 0} \iint_R dx\cdot dy = \iint_Q dx\cdot dy \Rightarrow \lim \iint_{Q/R} f(P)\cdot dP = 0$$

Sustituyendo la (10.2) en la (10.1) se tiene entonces

$$\iint_R f\cdot dP - V = \iint_{Q\cap R} (f-z)\cdot dP + \iint_{R/Q} f(P)\cdot dP$$

De aquí se obtiene el error del cálculo del volumen

$$\varepsilon = \left|\iint f(P)\cdot dP - V\right| \le \left|\iint_{Q\cap R} (f-z)\, dP + \iint_{R/Q} f\cdot dP\right|$$

$$\le \iint_{Q\cap R} |f-z|\, dP + \iint_{R/Q} |f|\, dP$$

$$\le \max_{Q\cap R} |f-z| \cdot \text{área } (Q\cap R) + \max_{\frac{R}{\bar{Q}}} |f| \cdot \text{área de } (R/Q)$$

Pero:

$$\text{área de } Q \cap R \le \text{área de } R = S$$

$$\text{área de } R/Q \le \text{perímetro de la frontera de } R \times k = L\cdot k$$

y llamando

$$m = \max_{Q\cap R} |f-z| \le \max_R |f-z| = m^*$$

$$M = \max_{R/Q} |f| \le \max_R |f| = M^*$$

se deduce una acotación para el error ε

$$\varepsilon = m\cdot S + MLk \le m^*\cdot S + M^*\cdot L\cdot k \tag{10.3}$$

Esta acotación permite estimar numéricamente un límite máximo del módulo del error de la aproximación. En efecto: S y L son datos conocidos de la región R; k se ha escogido a voluntad; m y M se obtienen por inspección o por algún método conocido de extremalizar funciones.

11. Sería deseable ahora poder demostrar que el error es infinitesimal con k. En las desigualdades (10.3) los factores M, L, k y M^* son evidentemente infinitesimales con k. Por esta consideración, sería necesario y suficiente demostrar que m (o bien m^*) tiende a cero si $k \to 0$. Pero este tema del error en el ajuste polinómico de funciones tabuladas será tratado en otro documento.

12. En resumen, podemos enunciar la siguiente fórmula de integración numérica aproximada, en dos variables, y refiriéndose a la **Figura 5**:

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dx\cdot dy = \Big[\frac{4}{3}S_0 + \frac{1}{6}S_1 + \\ \frac{1}{3}S_2 + \frac{1}{2}S_3 + \frac{2}{2}S_4\Big] k^2/2 + \varepsilon\end{aligned} \tag{12.1}$$

En donde S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 tienen el significado explicado en el numeral 7 (fórmula 7.1), y

$$|\varepsilon| \leq m\,S + M \cdot L \cdot k$$

cuyos símbolos ya fueron definidos en el numeral anterior.

La fórmula (12.1) bien podría llamarse "fórmula de Simpson en el plano".

13. Entre las numerosas aplicaciones que se pueden dar a esta fórmula cabe mencionar las siguientes:

- La medición del volumen de un embalse o de un lago, por medio de sondajes hechos en puntos de la superficie que formen una cuadricula bien orientada, bien calibrada y bien abscisada.
- La volumetría de un manto de carbón mediante taladros desde la superficie y según la técnica cuadricular ya descrita.
- La medida de los volúmenes de una colina de grava, por encima de distintas cotas de referencia.

REFERENCIAS

Mineur, H. (1952). Techniuqes de Calcul Numériques.

**PARA CITAR ESTE ARTÍCULO /
TO REFERENCE THIS ARTICLE /
PARA CITAR ESTE ARTIGO /**

Poveda Ramos, G. (2016). Una fórmula de cubicación sobre el plano. *Revista EIA*, 13(25), enero-junio, pp. 45-51. [Online]. Disponible en: DOI: http:/dx.doi.org/10.14508/reia.2016.13.25.45-51