Revista EIA, ISSN 1794-1237 / Año XIV / Volumen 14 / Edición N.27 / Enero-Junio 2017 / pp. 73-83
Publicación semestral de carácter técnico-científico / Universidad EIA, Envigado (Colombia)

# COMPARATIVO DE LOS ALGORITMOS DE DIMENSIÓN FRACTAL HIGUCHI, KATZ Y MULTIRESOLUCIÓN DE CONTEO DE CAJAS EN SEÑALES EEG BASADAS EN POTENCIALES RELACIONADOS POR EVENTOS

Santiago Fernández Fraga[1]
Jaime Rangel Mondragón[2]

## RESUMEN

La obtención de información por medio de la medición de señales registradas durante diferentes procesos o condiciones fisiológicas del cerebro es importante para poder desarrollar interfaces computacionales que traduzcan las señales eléctricas cerebrales a comandos computacionales de control. Un electroencefalograma (EEG) registra la actividad eléctrica del cerebro en respuesta al recibir diferentes estímulos externos (potenciales por eventos). El análisis de estas señales permite identificar y distinguir estados específicos de la función fisiológica del cerebro. La Dimensión Fractal se ha utilizado como una herramienta para el análisis de formas de ondas biomédicas, en particular se ha utilizado para determinar la medida de la complejidad en series de tiempo generadas por EEG. El presente documento pretende analizar series de tiempo biomédicas obtenidas por EEG a las cuales se obtendrán la FD por medio de los métodos Higuchi, Katz y Multi-resolución de Conteo de Cajas, que muestre la relación entre el método para la obtención de la Dimensión Fractal y la condición fisiológica de la señal basada en Potenciales Cerebrales Relacionados por Eventos.

**PALABRAS CLAVE:** Dimensión Fractal; Higuchi; Katz; Multiresolución de Conteo de Cajas; señales EEG.

# COMPARISON OF HIGUCHI, KATZ AND MULTIRESOLUTION BOX-COUNTING FRACTAL DIMENSION ALGORITHMS ON EEG WAVEFORMS SIGNALS BASED ON RELATED EVOKED POTENTIALS

## ABSTRACT

Obtaining information through the measurement recorded during different processes or physiological conditions of the brain signals is important for developing computer interfaces that translate electrical brain signals to control

Artículo en prensa / Article in press

1 Estudiante Doctorado en Ciencias de la Computación. Instituto Tecnológico de Querétaro. Querétaro, México.

2 Doctorado en Matemáticas Aplicadas. Universidad Autonoma de Querétaro. Querétaro, México.

*Autor de correspondencia: Fernández Fraga, S. (Santiago):*
Av. Tecnológico s/n esquina Mariano Escobedo. Colonia Centro. C.P. 76000. Querétaro, México / Tel.: +52 (442) 2274424.
Correo electrónico: sfernandez@mail.itq.edu.mx

*Historia del artículo:*
Artículo recibido: 08-VII-2016/ Aprobado: 15-V-2017
Disponible online: 30 de agosto de 2017
Discusión abierta hasta octubre de 2018

DOI: https://doi.org/10.24050/reia.v14i27.864

computer commands. An electroencephalogram records (EEG) the electrical activity of the brain in response to receiving different external stimuli (potential events). The analysis of these signals allows identifying and distinguishing specific states of physiological brain function. The Fractal Dimension has been used as a tool for biomedical analysis waveforms in particular to determine the measure of the complexity in time series generated by EEG. This paper aims to analyze a data base (*HeadIT*) of biomedical time series obtained by EEG and Fractal Dimension computed by Higuchi, Katz and Multi-resolution methods Count Boxes, showing the relationship between the method for obtaining the Fractal Dimension and the physiological condition of the Brain Related Evoked Potentials.

**KEYWORDS:** Fractal dimension; Higuchi; Katz; Multiresolution Box-counting; EEG waveforms.

# COMPARAÇÃO DE HIGUCHI, KATZ E MULTIRESOLUTION BOX-COUNTING FRACTAL DIMENSION ALGORITHMS EM SINAIS DE ONDAS DE EEG SINAIS BASEADOS EM POTENCIAIS EVOCADOS RELACIONADOS

## RESUMO

A obtenção de informações através da medição registrada durante diferentes processos ou condições fisiológicas dos sinais cerebrais é importante para o desenvolvimento de interfaces de computador que traduzem sinais elétricos do cérebro para controlar os comandos do computador. Um registro de eletroencefalograma (EEG) a atividade elétrica do cérebro em resposta ao recebimento de diferentes estímulos externos (eventos potenciais). A análise desses sinais permite identificar e distinguir estados específicos da função fisiológica do cérebro. A Dimensão Fractal tem sido usada como uma ferramenta para formas de onda de análise biomédica em particular para determinar a medida da complexidade em séries temporais geradas pelo EEG. Este trabalho pretende analisar uma base de dados (HeadIT) de séries temporais biomédicas obtidas por EEG e Dimensão Fractal calculadas por Higuchi, Katz e Métodos de Multi-resolução Count Boxes, mostrando a relação entre o método de obtenção da Dimensão Fractal e a condição fisiológica de Potenciais evocados relacionados ao cérebro.

**PALAVRAS-CHAVE:** dimensão fractal; Higuchi; Katz; Contagem de caixa multi-resolução; Formas de onda EEG.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las interfaz cerebro computadora (Brain Computer Interface, BCI) monitorean la actividad cerebral del usuario y traducen sus “intenciones” en órdenes sin activar ningún músculo o nervio periférico (Millán et al, 2014). Para el desarrollo de los sistemas BCI es necesario encontrar herramientas que permiten homogenizar la condición fisiológica de los usuarios para poder llevar dichos sistemas a un control basado en la “intención” del usuario. Las señales eléctricas obtenidas por medio de electroencefalograma (EEG) se utilizan para evaluar clínicamente la actividad cerebral. Los sistemas BCI interpretan el comportamiento fisiológico del cerebro (intensión) a través de potenciales eléctricos relacionados con eventos (*Related Evoked Potentials*, ERP), para crear comandos computacionales que permitan el desarrollo de aplicaciones de control de dispositivos electrónicos. En el presente documento se analizaran señales de EEG biomédicas obtenidas en respuesta a estímulos externos visuales (*Visual Evoked Potencial*, VEP), las cuales son representadas como secuencias temporales (series temporales) de potenciales eléctricos que se obtienen por medio de electrodos colocados en el cuero cabelludo.

Unas de las herramientas utilizadas para el análisis de las señales EEG es la *Dimensión Fractal* (*Fractal Dimention*, FD). Término propuesto por Mandelbrot (1983) el cual se aplica a objetos en el espacio o a fluctuaciones en el tiempo que poseen una forma de auto-similitud y no pueden ser descritas en una sola escala de medida absoluta. La FD se refiere a un número no entero o dimensión fraccional de cualquier objeto.

Definimos a $(X, d)$ como un espacio métrico donde el espacio $X$ es un conjunto de objetos llamados puntos y $d$ una métrica como una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, la cual mide la distancia entre un par de puntos $(x, y)$ en el espacio $X$. Consideremos el número $N(r)$ como la cantidad de círculos de radio fijo máximo $r$ necesarios para cubrir completamente a $X$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$. $N(r)$ es inversamente proporcional a $r$. Podemos decir que

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^{FD} \tag{1}$$

cuando el valor de $r \rightarrow 0$ podemos encontrar el número más pequeño de áreas cerradas de radio $r$ necesarias para cubrir al espacio $X$, entonces la FD está definida por

$$FD = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log(1/r)} \tag{2}$$

Análisis FD se utiliza con frecuencia en el procesamiento de señales biomédicas, incluyendo el análisis de EEG, lo cual ha permitido estudiar la dinámica caótica del cerebro (Lutzenberger et al, 1995) e identificar y distinguir estados específicos de sus funciones fisiológicas (D. Easwaramoorthy y R. Uthayakumar, 2010), en particular se ha utilizado para determinar la medida de la complejidad en las señales de EEG (B. S. Raghavendra y D. N. Dutt, 2009).

El análisis de FD se utilizado con frecuencia en el procesamiento de señales biomédicas, incluyendo el análisis de EEG (Bachmann et al, 2013), (Baljekar y Patil, 2012), (Bojié et al, 2010), (Jevtić, y Paskaš, 2011), (Esteller et al, 2001), (Georgiev et al, 2009), (Harne, 2014), (Katz, 1988), (Khoa y Toi, 2012), (Loo et al, 2011), (Paramanathan y Uthayakumar, 2008), (Polychronaki et al, 2010), (Raghavendra y Dutt, 2009) y (Spasićmet al, 2011) así como en una variedad de sistemas de ingeniería (Cervantes-De la Torre et al, 2013), (Gálvez et al, 2013), (Martins et al, 2012), (Millán et al, 2014), (Perlingeiro et al, 2005). El presente documento se centra en señales experimentales derivados de EEG y los algoritmos propuestos son los algoritmos de Higuchi, Katz, y el método de Multi-resolución de Conteo de Cajas (MRCC); sus resultados son ampliamente aplicables a cualquier tipo de señal.

La implementación de los algoritmos de dimensión FD se han implementado en diferentes estudios con señales de EEG; Polychronaki et al (2010) para la detección del inicio de crisis epilépticas; Easwaramoorthy and Uthayakumar (2010) utilizó señales EEG para analizar la actividad cerebral durante procesos cognitivos (lectura, atención, memoria, etc.); Loo et al (2011) utilizó señales EEG basadas en imágenes motoras para sistemas BCI; Bashashati et al (2003) se basó en métodos de FD para identificar los componentes de control de las señales de EEG en sistemas BCI; Esteller et al (2001) y Raghavendra y Dutt (2010, 2009) utilizaron señales sintéticas como series de datos para el cálculo de FD basándose en el comportamiento fractal similar al de las señales de EEG.

La relación de la condición fisiológica de la señales biomédicas de EEG, basadas en ERPs, y el método para medir la complejidad de la señal, permitirá mostrar en forma general como los métodos de FD para el análisis de señales pueden ser implementados en los sistemas BCI, donde parte de los retos es que la condición generalizada de los usuarios sea interpretada de forma específica por algún dispositivo de control. En el presente documento se analizará la complejidad de señales biomédicas de EEG en periodos cortos de tiempo (fractogramas) por medio del cálculo de la FD utilizando los algoritmos de Higuchi, Katz y Multi-resolución de Conteo de Cajas (MRCC).

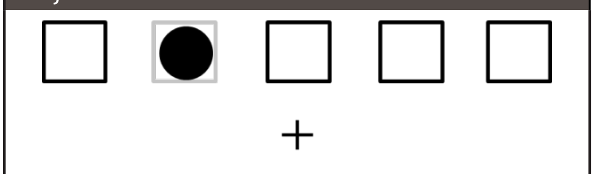
## 2. METODOLOGÍA

### *2.1. Experimentación*

Las señales analizadas en éste trabajo se registraron durante la prueba denominada *prueba de las 5 cajas,* donde las señales obtenidas se basaron en VEP descritos por S. Makeig (1999). El estudio se realizó con 15 personas voluntarias diestras, 12 hombres y 3 mujeres entre 19 y 53 años con una media de 30 años; 12 con visión normal y 3 con visión corregida.

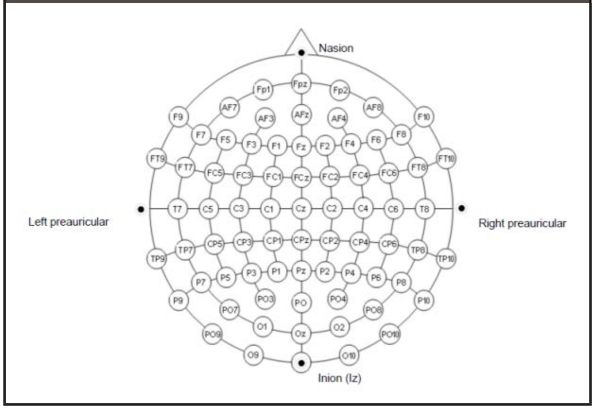
En la *prueba de las cinco cajas*, los usuarios fijaban su vista en una cruz, por encima de la cual se exhibieron constantemente cinco cajas (cuadros) Fig. 1. En cada bloque de prueba de 76 s, una de las cajas (caja gris) fue de diferente color. La ubicación de éste cuadro fue de manera aleatoria durante los periodos de pruebas. Una serie de círculos se presentaron brevemente en cualquiera de las cinco cajas en un orden aleatorio. Se le pidió al usuario responder presionando un botón lo más rápidamente posible cada vez que un disco apareciera en uno de los cuadros.

**Figura 1.** Patrón de estímulo visual para la prueba de las 5 cajas.



Los datos de EEG se obtuvieron de 29 electrodos en el cuero cabelludo montados en una maya de electrodos estándar (ElectroCap, Inc.) con base al sistema Internacional 10-20 modificado como se muestra en la Fig. 2, y de dos electrodos peri-oculares colocados debajo del ojo derecho y en el canto externo izquierdo. Los datos fueron muestreados a 256Hz con un filtro pasa banda analógico de 0.01-50 Hz. Posteriormente, las respuestas fueron digitalmente filtradas con un filtro paso bajo por debajo de los 40 Hz antes del análisis (S. Makeig et al, 2004).

**Figura 2.** Sistema Internacional de Electrodos 10-20 Modificado




### *2.2. Selección de datos*

Los datos (obtenidos de *The Human Electrophysiology, Anatomic Data, and Integrated Tools*, HeadIT; perteneciente al *Swartz Center for Computational Neuroscience*, SCCN de la Universidad de California en San Diego, Estados Unidos de América; desarrollado y fundado por U.S. National Institutes of Health grants R01-MH084819, Makeig Grethe PIs y R01-NS047293, Makeig PI) están organizados en sesiones, cada sesión representa la implementación de *la prueba de las cinco cajas* con un número aleatorio de eventos, cada sujeto de estudio realizó una o varias sesiones. La información obtenida durante el experimento genera un EEG de 32 canales los cuales fueron obtenidos por medio del software EEGLABv7.1.3.13b, software de libre distribución bajo la licencia de software libre GNU GPL, desarrollado por Delorme y Makeig (2004).

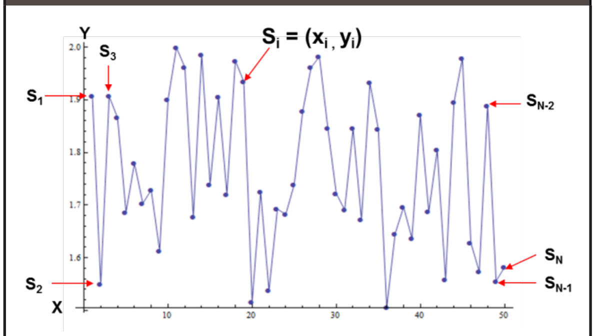
#### *1. Señales de onda y series de tiempo*

Las señales EEG obtenidas de un conjunto de electrodos fijos en la corteza cerebral son series de tiempo irregulares representadas en forma de onda. Consideremos a la forma de onda como una serie de tiempo discreta de la forma

$$S = \{s_1, s_2, \dots s_N \tag{3}$$

donde representa el total de puntos de la serie y los valores sucesivos del EEG. La gráfica de la serie es representada como , donde son los valores de las abscisas y los valores de las ordenadas, Fig. 3. En las formas de onda de las series de tiempo , aumentan monotónicamente en el instante de tiempo en la que se muestrea la onda (Dubravka et al, 2011).

**Figura 3.** Representación de la forma de onda como serie de tiempo donde el eje de las representa los puntos de la serie y el eje representa la amplitud de la señal.




Los algoritmos de FD permiten interpretar el comportamiento caótico en las series de tiempo irregulares representadas en forma de señales de onda y discriminar los patrones en función de la similitud (P. Paramanathan y R. Uthayakumar, 2007).

### *2. Algoritmo de Katz*

El cálculo de la FD propuesto por Katz (1988) se describe como la proporción de la longitud de la curva *L*, calculado como la suma de las distancias Euclidena entre dos puntos sucesivos, dividida por la distancia máxima *d* de cualquier punto en la trama en cuestión desde el primer punto (M. Katz, 1988). Podemos interpretarlo como la relación de la longitud total de la curva en comparación con la línea recta correspondiente a la distancia Euclidiana máxima desde el primer punto. El Algoritmo define a la FD como

$$FD = \frac{\log_{10}(L)}{\log_{10}(d)} \tag{4}$$

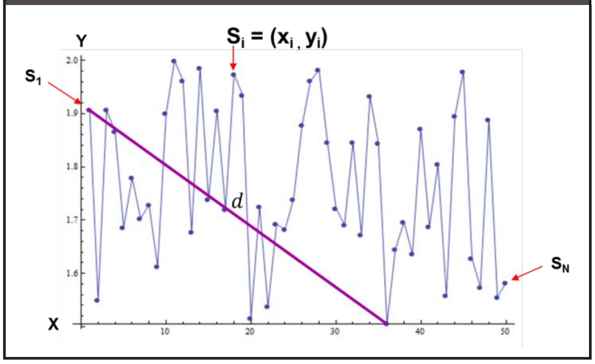
donde *L* es la longitud total de la curva o la suma de las distancias euclidianas entre puntos sucesivos

$$L = \sum_{i=1}^{N} dist\,(s_i, s_{i+1}),\ i = 1, \ldots N-1 \tag{5}$$

y *d* es el diámetro (o extensión planar) de la curva, es decir, la distancia entre el primer punto de la secuencia y el punto más lejano de la secuencia (Fig. 4), *d* puede ser expresada como

$$d = max\,\{dist\,(s_1, s_i),\ i = 1, \ldots N\} \tag{6}$$

**Figura 4.** Representa la extensión planear de la serie de tiempo




Katz propuso normalizar *d* y *L* por la *longitud de la etapa media* o la distancia promedio entre puntos sucesivos, $a = \frac{L}{N}$, donde *N* es el número de pasos en la curva. De esta manera (4) se convierte en

$$FD = \frac{\log_{10}\left(\frac{L}{a}\right)}{\log_{10}\left(\frac{d}{a}\right)} = \frac{\log_{10}(N)}{\log_{10}\left(\frac{d}{L}\right) + \log_{10}(N)} \tag{7}$$

### *3. Algoritmo de Higuchi*

Para el algoritmo de Higuchi se considera a *S* como la serie de tiempo a analizar. El algoritmo consiste en formar nuevas formas de onda, subsecuencias de *S*, por muestras de la selección iterativa que difieren en su punto de origen *m* y su factor de retardo o intervalo de tiempo discreto entre puntos *k* (delay). Primero seleccionamos el factor de retardo máximo, $k_{max}$ así, por cada factor de retardo *k*, donde *k* varía de 1 a $k_{max}$. Formamos *k*'s series de tiempo nuevas, $S_k^m$ definidas como

$$S_k^m = \left\{ s_m, s_{(m+k)}, S_{(m+2k)}, \ldots, s_{(m+\lfloor a \rfloor k)} \right\} \tag{8}$$

donde $a = \frac{N-m}{k}$, $m = 1,2,..., k$; $k = 1,..., k_{max}$, $m$ y $k$ son enteros positivos.

Por ejemplo, si $k = 3$ y $N = 100$, las series de tiempo construidas están definidas como

$S_3^1 = s_1,\ s_4,\ s_7,\ s_{10}, s_{97},\ \ s_{100}$

$S_3^2 = s_2,\ s_5,\ s_8,\ s_{11}, s_{98},$

$S_3^3 = s_3,\ s_6,\ s_9,\ s_{12}, s_{99},$

para cada serie de tiempo $S_k^m$ construida, su longitud promedio $L_k^m$ está definida por N

$$L_k^m = \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor a \rfloor} \left| s_{(m+ik)} - s_{(m+(i-1)k)} \right| (N-1)}{\lfloor a \rfloor k} \tag{9}$$

donde $N$ es la longitud total de la secuencia de datos $S$ y $(N-1)/(\lfloor a \rfloor k)$ es el *factor de normalización* para la longitud de la subsecuencia.

Posteriormente calculamos la longitud media de la curva para cada $k$, $\langle L_k \rangle$ como el valor medio de las $L_k^m$ de las $k$ subsecuencias y está definido por

$$\langle L_k \rangle = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} L_k^m \tag{10}$$

La longitud media $\langle L_k \rangle$ de las serie $S$ se obtiene por el promedio de todas las longitudes $L_k^m$ de las $k$ subsecuencias. Éste procedimiento se repite para cada rango de $k$ desde 1 hasta $k_{max}$ (G. E. Polychronaki et al, 2010).

Si $\langle L_k \rangle \propto k^{-FD}$, entonces la curva es un fractal con dimensión FD, en ese caso la gráfica $log_{10}$ $(\langle L_k \rangle)$ *vs* $log_{10}(k)$ debe aproximarse a una recta con pendiente igual a –FD, por lo que la FD se puede calcular por una aproximación lineal de mínimos cuadrados (G. E. Polychronaki et al, 2010).

### *4. Algoritmo de Multi-Resolución de Conteo de Cajas*

El Algoritmo de Multi-Resolución de Conteo de Cajas (MRCC) está basado en las propiedades de llenado del espacio de una curva. La curva se cubre con un conjunto de objetos de la misma área o cajas (en éste caso cajas cuadradas), se determina un tamaño para el área del objeto y se cuenta el número de cajas mínimo necesarias para cubrir a la curva completamente. A medida que el tamaño de las cajas se aproxima a cero, el área total cubierta por las cajas convergerá a la medida deseada de la curva.

El algoritmo de MRCC propone obtener la FD para varios tamaños de cajas y hacer un ajuste lineal a una gráfica $log_{10}(N(r))$ sobre $log_{10}(r)$. La pendiente de la recta de mínimos cuadrados se toma como una estimación de la FD de la curva (B. S. Raghavendra, y D. N. Dutt, 2010).

Consideremos a $S$, con una frecuencia $f_s$. Cada punto $s_i$ en la secuencia está representado como $(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots N$. Así mismo la señal está representada por un periodo (resolución) $r = \frac{1}{f_s}$.

Para iniciar el MRCC se toman dos puntos en la curva que representa la señal $s_i$, $s_{(i+1)}$. El intervalo de tiempo entre los puntos está dado por

$$dt = x_{(i+1)} - x_i = \frac{1}{f_s} \tag{11}$$

la altura entre los puntos es

$$h = y_{(i+1)} - y_i \tag{12}$$

(Fig. 5) el tamaño de la caja considerada para cubrir los dos puntos es $dt$ y el número de cajas requeridas para cubrir los puntos es

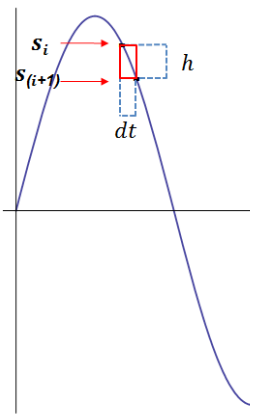
$$b_i = \left\lceil \frac{|h|}{dt} \right\rceil \tag{13}$$

el total de cajas de resolución $r$ requeridas para cubrir la curva se calcula por

$$B_r = \sum_{i=0}^{N-1} b_i,\ i = 1, \dots N-1 \tag{14}$$

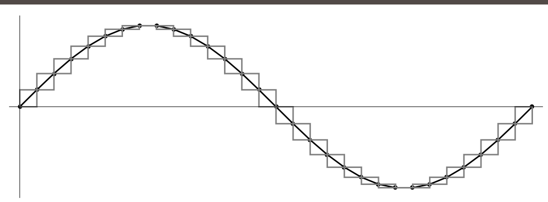
el procedimiento se repite para todos los puntos en la curva.

Figura 5. Identificación de los elementos $s_i$, $s_{(i+1)}$, $h$, $dt$

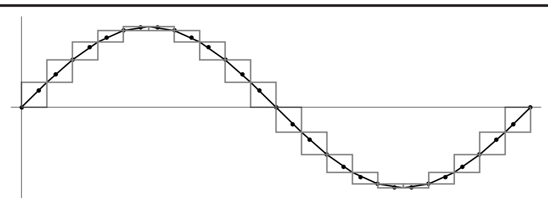



Como siguiente paso del MRCC, se considera la repetición del procedimiento anterior para múltiples resoluciones $r = \frac{1}{f_s}, \frac{2}{f_s}, \ldots \frac{R}{f_s}$, donde $\frac{R}{f_s}$ es la resolución máxima que se pueda observar en la curva, Fig. 6 (B. S. Raghavendra, y D. N. Dutt, 2010).

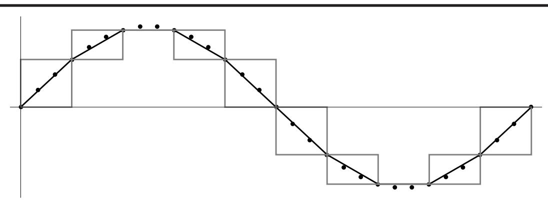
**Figura 6.** Aproximación MRCC para una señal senoidal. a) $r = \frac{1}{f_s}$ b) $r = \frac{2}{f_s}$ c) $r = \frac{3}{f_s}$



(a)



(b)



(c)

## 3. RESULTADOS

Para el presente trabajo se tomó una muestra de 10 sesiones del trabajo de Makeig; las cuales fueron seleccionadas de manera aleatoria. Las señales fueron convertidas a formato de texto y se generaron fractogramas de 10 seg. en el rango 500-510 seg. para su análisis (Fig. 8).

La implementación de los algoritmos se realizó en lenguaje Mathematica V9.0.1.0. Se consideró  como el número total de puntos de la serie para todos los algoritmos implementados. Para el algoritmo de Higuchi se consideraron , y para el método MRCC se consideró a . La TABLA I muestra los resultados obtenidos de la FD, la TABLA II muestra las variaciones estadísticas obtenidas en cada algoritmo.

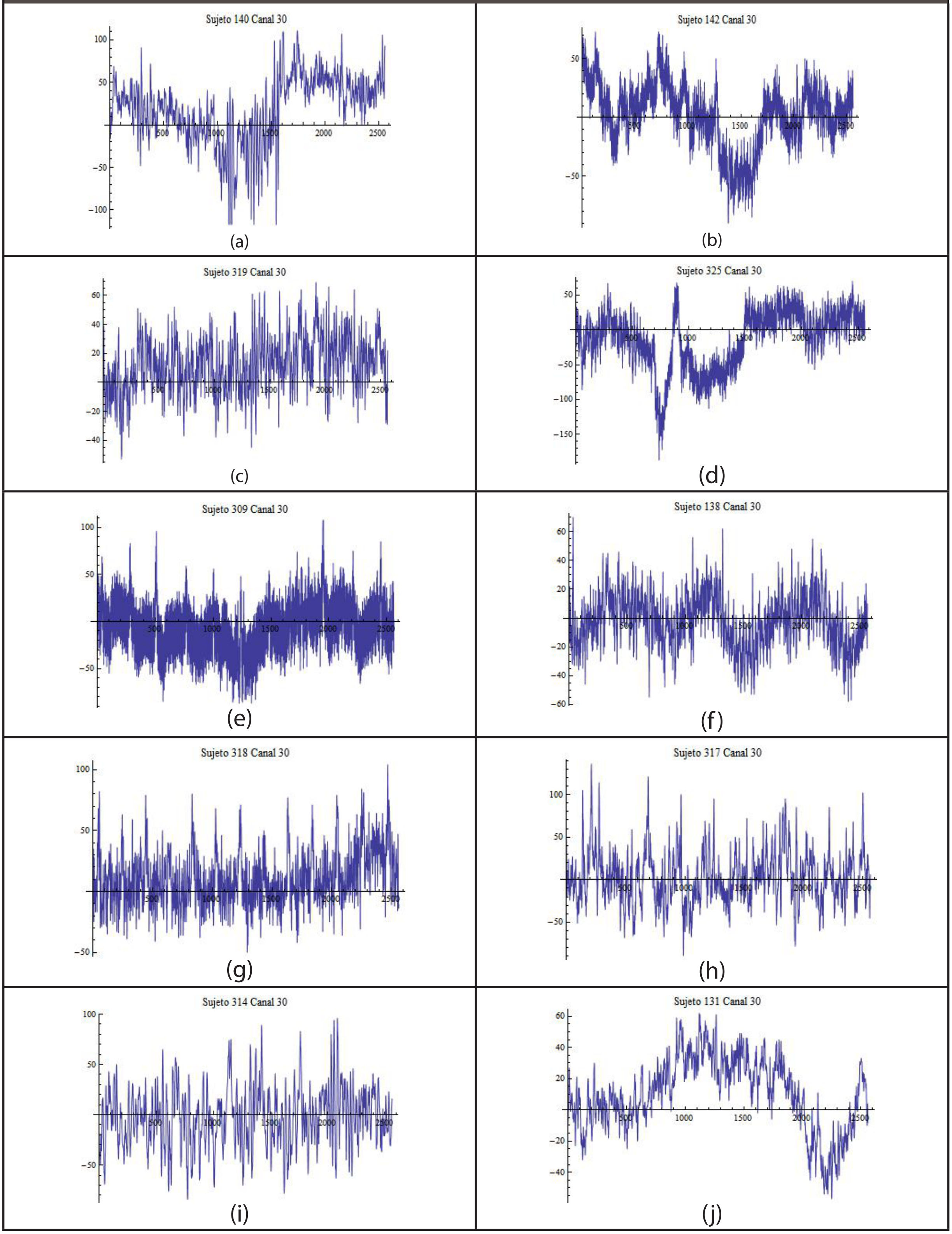
**TABLA I.** COMPARATIVO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL CON BASE A LOS SUJETOS DE ESTUDIO

| Sujeto de estudio | Higuchi | Katz | MRCC |
|---|---|---|---|
| 140 | 1.00216 | 1.29736 | 1.01828 |
| 142 | 1.00222 | 1.46924 | 1.01964 |
| 319 | 1.00222 | 1.30689 | 1.01837 |
| 325 | 1.00228 | 1.53963 | 1.02011 |
| 309 | 1.00241 | 1.73597 | 1.02121 |
| 138 | 1.00222 | 1.34862 | 1.01873 |
| 318 | 1.00227 | 1.39007 | 1.01906 |
| 317 | 1.00229 | 1.36287 | 1.01884 |
| 314 | 1.00226 | 1.27650 | 1.01809 |
| 131 | 1.00197 | 1.16174 | 1.01685 |

TABLA II. COMPARATIVO DE LA VARIACIONES DE LA FD

| Método | Varianza | Desviación estándar |
|---|---|---|
| Higuchi | $1.26444 \times 10^{-8}$ | 0.000112448 |
| Katz | 0.0447103 | 0.160303 |
| MRCC | $1.43628 \times 10^{-6}$ | 0.00119845 |

**Figura 7.** Señales correspondientes al canal 30 (O1) durante el rango 500-510s



## 4. CONCLUSIONES

El cálculo de la FD nos permitió determinar la complejidad de las señales de EEG obtenidas, en los resultados obtenidos en la TABLA II podemos observar que la FD en el algoritmo de Higuchi se mantuvo en el rango de 1.000 < *FD* < 1.0003 en el algoritmo de Katz se mantuvo en 1.0 < *FD* < 2.0 y en el MRCC 1.00 < *FD* < 1.03. La variación de la FD en el algoritmo de Higuchi y MRCC es lo suficientemente pequeña para poder considerar que la FD como una sola; el algoritmo de Higuchi, principalmente es una buena opción para su implementación en sistemas BCI.

## 5. DISCUSIÓN

En el experimento utilizado en el presente documento, los ERP fueron aleatorios para cada usuario, para poder tener una mejor visión del comportamiento de los algoritmos de FD en señales de EEG se debe disminuir la aleatoriedad de los eventos, así como el tamaño de los fractogramas, a más pequeños, ya que los eventos tienen una duración menor a 1s. Existen otros algoritmos para el cálculo de la FD: Bouligand-Minkowski, Grassberger-Proccacia, el exponente de Hurst, entre otros; los cuales es necesario implementar y comparar para una visión más completa. Los trabajos siguientes se centrarán en la implementación de los algoritmos presentados en éste documento bajo condiciones experimentales más controladas con referente a los VEP y a fractogramas en el rango de 1s. Así mismo se implementarán los algoritmos de Bouligand-Minkowski, Grassberger-Proccacia, el exponente de Hurst para su comparación.

## REFERENCIAS

M. Bachmann, J. Lass, A. Suhhova and H. Hinrikus, (2013). *Spectral asymmetry and Higuchi´s Fractal Dimension Measures of Depression Electrencephalogram*, Computational and Mathematical Methods in Medicine, Hindawi Publishing Corporation, vol. 2013, 8 pages.

P. N. Baljekar and H. A. Patil, (2012). *A comparison of waveform fractal dimension techniques for voice pathology classification*, IEEE ICASPP ISSN 978-1-4673-0046-9, pp. 4461-4464

T. Bojić, A. Vuckovic, A. Kalauzi, (2010). *Modeling EEG fractal dimension changes in wake and drowsy states in humans—a preliminary study*, Journal of Theoretical Biology, 262, pp. 214-222.

A. Bashashati, R.K. Ward, G.E. Birch, M.R. Hashemi, MA. Khalilzadeh, (2003). *Fractal Dimension-Based EEG Biofeedback System*, Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE EMBS, pp. 2220-2223, 2003.

F. Cervantes-De la Torre, J.I. González-Trejo, C.A. Real-Ramirez and L.F. Hoyos-Reyes,(2013). *Fractal dimension algorithms and their application to time series associated with natural phenomena*, 4th National Meeting in Chaos, Comlex Sustem and Time Series, Journal o Physics: Conference Series, 475, 10 pages.

A. Delorme and S. Makeig, (2004). *EEGLAB: an open source toolbox for analysis of single-trial EEG dynamics*. Journal of Neuroscience Methods, 134:9-21.

Dubravka R. Jevtić, and Milorad P. Paskaš, (2011). *Application of Katz Algorithm for Fractal Dimension in Analysis of Room Impulse Response*, 19th Telecommunications forum TELFOR 2011, pp. 1063-1066.

D. Easwaramoorthy and R. Uthayakumar, (2010). *Analysis of EEG Signals using Advanced Generalized Fractal Dimensions*, Second International conference on Computing, Communication and Networking Technologies, 978-1-4244-6589-7, 6 pages.

R. Esteller, G. Vachtsevanos, J. Echauz, and B. Litt, (2001). *A Comparison of Waveform Fractal Dimension Algorithms*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: fundamental theory and applications, vol. 48, no. 2, pp. 177-183, 2001.

G. Gálvez Coyt, A. Muñoz Diosdado, J. A. Balderas López, J. L. del Rio Correa, and F. Angulo Brown, (2013). *Higuchi's Method applied to the detection of periodic components in time series and its application to seismograms*, COMPLEX SYSTEMS Revista Méxicana de Física, S 59 (1), pp. 1-6.

S. Georgiev, Z. Minchev, C. Christova, D. Philipova, (2009). *EEG Fractal Dimension Measurement before and af-*

*ter Human Auditory Stimulation*, Bioautomaton, pp. 70-81.

B. P. Harne, (2014). *Higuchi Fractal Dimension Analysis of EEG Signal before and after OM Chanting to Observe Overall Effect on Brain*, International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE), vol. 4 pp. 585-592.

HeadIT, Swartz Center for Computational Neuroscience (SCCN) of the University of California, San Diego. Its development has been funded by U.S. National Institutes of Health grants R01-MH084819 (Makeig, Grethe PIs) and R01-NS047293 (Makeig PI).

M. Katz, (1988). *Fractals and the analysis of waveforms*, Computers in Biology and Medicine, vol. 18, pp. 145-156.

T. Q. D. Khoa, V. Q. Ha and V. V. Toi, (2012). *Higuchi Fractal Properties of Onset Epilepsy Electroencephalogram*, Computational and Mathematical Methods in Medicine, Hindawi Publishing Corporation, vol. 2012, 6 pages.

C. K. Loo, A. Samraj and G. C. Lee, (2011). *Evaluation of Methods for Estimating Fractal Dimension in Motor Imagery-Based Brain Computer Interface*, Hindawi Publishing Corporation, Discrete Dynamics in Nature and Society Vol. 2011, Article ID 724697, 8 pages.

W. Lutzenberger, H. Preissl, F. Pulvermüller, (1995). *Fractal dimension of electroencephalographic time series and underlying brain processes*, Biological Cybernetics Springer-Verlag, vol. 73, pp. 477-482.

S. Makeig, A. Delorme, M. Westerfield, T-P. Jung, J. Townsend, E. Courchesne and T. J. Sejnowski, (2004). *Electroencephalographic brain dynamics following visual targets requiring manual responses*, Public Library of Science Biology, 29 pages.

S. Makeig, M. Westerfield, T-P Jung, J. Covington, J. Townsend,T. J. Sejnowski, and E. Courchesne, (1999). *Functionally Independent Components of the Late Positive Event-Related Potential during Visual Spatial Attention*, The Journal of Neuroscience, 19 (7), pp. 2665-2680.

A. S. Martins, L. A. Neves, M. Z. Nascimento, M. F. Godoy, E. L. Flores and G. A. Carrijo, (2012). *Multiscale Fractal Descriptors and Polynomial Classifier for Partial Pixels Identification in Regions of Interest of Mammographic Images*, IEEE Latin America Transactions, Vol. 10, No. 4, pp. 1999-2005.

G. Millán, E. S. Juan and M. Jamett, (2014). *Simple Estimator of the Hurst Exponent for Self-Similar Traffic Flows*, IEEE Latin America Transactions, Vol. 12, No. 8, pp. 1341-1346.

Müller K.R., and Mattia D. (2010). *Combining Brain-Computer Interfaces and Assistive Technologies: State-of-the-Art and Challenges*. Frontiers in Neuroscience, Vol 4, pp.161.

H. H. Mueller, (2010) "QEEG Brain Mapping, Evaluating the rhythms of the Brain", Edmonton Neurotherapy, 2010, On line

http://www.edmontonneurotherapy.com/Edmonton_Neurotherapy_QEEG_brain_mapping.html.

P. Paramanathan, R. Uthayakumar, (2008), *Application of fractal theory in analysis of human electroencephalographic signals*, Computers in Biology and Medicine, no. 38, pp. 372-378

P. Paramanathan and R. Uthayakumar, (2007). *Detecting Patterns in Irregular Time Series with Fractal Dimension*, International Conference on Computational Intelligence and Multimedia Applications, pp. 323-327.

F. R. Perlingeiro, L. L. Ling, (2005). *Uma Nova Abordagem para Estimação da*

*Banda Efetiva em Processos Fractais*. IEEE Latin America Transactions, Vol. 3, No. 5, pp. 436-446.

G. E. Polychronaki, P. Y. Ktonas, S. Gatzonis, A Siatouni, P. A. Asvestas, H. Tsekou, D. Sakas and K. S. Nikita, (2010). *Comparison of fractal dimension estimation algorithms for epileptic seizure onset detection*, Journal of Neural Engineering, 046007, 18 pages.

B. S. Raghavendra, and D. N. Dutt, (2010). *Computing Fractal Dimension of Signals using Multiresolution Box-counting Method*, International Journal of Information and Mathematical Sciences, 6:1, pp. 50-65.

B. S. Raghavendra and D. N. Dutt, (2009). *A note on fractal dimensions of biomedical waveforms*, Computers in Biology and Medicine, 39, pp. 1006-1012.

S. Spasić, Lj. Nikolić, D. Mutavdžić, J. Šaponjić, (2011). *Independent complexity patterns in single neuron activity induced by static magnetic field*, Computer Methods and Programs in Biomedicine, vol. 104, pp. 212-218.

Sabogal S., Arenas G. (2011). *Una Introducción a la geometría Fractal*, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Cap I, pp. 2-15.

**PARA CITAR ESTE ARTÍCULO /**
**TO REFERENCE THIS ARTICLE /**
**PARA CITAR ESTE ARTIGO /**

Fernández Fraga, S.; Rangel Mondragón, J. (2017). Comparativo de los Algoritmos de Dimensión Fractal Higuchi, Katz y Multiresolución de Conteo de Cajas en Señales EEG Basadas en Potenciales Relacionados por Eventos. *Revista EIA*, 14(27), enero-junio, pp. 73-83. [Online]. Disponible en: https://doi.org/10.24050/reia.v14i27.864