



RAE - Revista de Administração de
Empresas

ISSN: 0034-7590

rae@fgv.br

Fundação Getulio Vargas
Brasil

DA SILVA, ANEIRSON FRANCISCO; DE CARVALHO MIRANDA, RAFAEL; SILVA
MARINS, FERNANDO AUGUSTO

UM MODELO FUZZY-DEA-GAME PARA ESTRATÉGIAS DE PRODUÇÃO SOB
INCERTEZA

RAE - Revista de Administração de Empresas, vol. 55, núm. 1, enero-febrero, 2015, pp.
78-94

Fundação Getulio Vargas
São Paulo, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=155133820007>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal

Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

ARTIGOS

Submetido em 19.08.2013. Aprovado em 31.03.2014

Avaliado pelo sistema *double blind review*. Editor Científico: Henrique Luiz Corrêa

DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/S0034-759020150108>

UM MODELO FUZZY-DEA-GAME PARA ESTRATÉGIAS DE PRODUÇÃO SOB INCERTEZA

A Fuzzy-DEA-Game model for production strategies in uncertainty

Un modelo Fuzzy-DEA-Game para estrategias de producción bajo incertidumbre

RESUMO

Este trabalho desenvolve um novo modelo *Fuzzy-DEA-Game* (FDG) para apoiar o estabelecimento de estratégias de produção. Esse modelo combina a Análise Envolvória de Dados (DEA) com conceitos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy e do Jogo da Barganha de Nash. O modelo permite uma avaliação da eficiência produtiva e econômica dos produtos, o que pode resultar num portfólio de produtos mais rentáveis e de interesse do mercado consumidor. O modelo foi aplicado em uma empresa do segmento de energia. Os resultados obtidos com a aplicação do modelo FDG mostraram-se aderentes à realidade da empresa estudada e forneceram metas para a redução dos níveis de recursos (entradas) necessários para a fabricação dos produtos e para aumento dos níveis de resultados (saídas) oriundos da comercialização desses produtos. Como resultado adicional importante, o modelo FDG permitiu a identificação dos produtos do portfólio que são mais sensíveis à ocorrência de incerteza.

PALAVRAS-CHAVE | Estratégias de produção, incerteza, Análise por Envolvória de Dados, Jogos da Barganha, Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

ABSTRACT

This study develops a new Fuzzy-DEA-Game (FDG) model to support the establishment of production strategies. This model combines Data Envelopment Analysis (DEA) with concepts of Fuzzy Set Theory and Nash Bargaining Game. The model permits an evaluation of the productive and economic efficiency of products, which may result in a portfolio of more profitable products with greater consumer market interest. The model was applied at an energy company. The results obtained applying the FDG model adhered to the reality of the studied company and provided goals for reducing resource levels (inputs) needed for manufacturing products and for increasing result levels (output) stemming from their commercialization. As an important additional outcome, the FDG model permitted the identification of portfolio products that are more sensitive to the occurrence of uncertainty.

KEYWORDS | Production strategies, uncertainty, Data Envelopment Analysis, Bargaining Games, Fuzzy Set Theory.

RESUMEN

Este trabajo desarrolla un nuevo modelo Fuzzy-DEA-Game (FDG) para apoyar el establecimiento de estrategias de producción. Este modelo combina el Análisis Envolvente de Datos (DEA) con conceptos de la Teoría de los Conjuntos Fuzzy y del Juego de la Negociación de Nash. El modelo permite una evaluación de la eficiencia productiva y económica de los productos, lo que puede resultar en un portafolio de productos más rentables y de interés del mercado consumidor. El modelo fue aplicado en una empresa del segmento de energía. Los resultados obtenidos con la aplicación del modelo FDG se mostraron adherentes a la realidad de la empresa estudiada y aportaron metas para la reducción de los niveles de recursos (entradas) necesarios para la fabricación de productos y para el aumento de los niveles de resultados (salidas) oriundos de la comercialización de esos productos. Como resultado adicional importante, el modelo FDG permitió la identificación de los productos del portafolio que son más sensibles a los hechos de incertidumbre.

PALABRAS CLAVE | Estrategias de producción, incertidumbre, Análisis Envolvente de Datos, Juegos de la Negociación, Teoría de los Conjuntos Fuzzy.

ANEIRSON FRANCISCO DA SILVA

aneirson@gmail.com

Professor da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – Guaratinguetá – SP, Brasil

RAFAEL DE CARVALHO MIRANDA

mirandaprod@yahoo.com.br

Doutorando em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Itajubá, Programa de Pós-Graduação – Itajubá – MG, Brasil

FERNANDO AUGUSTO SILVA MARINS

fmarins@feg.unesp.br

Professor da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – Guaratinguetá – SP, Brasil

INTRODUÇÃO

A área de energia no País vem crescendo em importância, incentivando as empresas prestadoras de serviços e fabricantes de produtos a investir na melhoria de seu portfólio de produtos (Oliveira, Paiva, Lima, Balestrassi, & Mendes, 2011).

Para Cook e Seiford (2009) e Ferreira e Gomes (2009), a medida de eficiência é um assunto de interesse para as organizações produtivas, que vêm buscando padrões mais elevados de produtividade e qualidade dos seus produtos e serviços.

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) desenvolveram um método conhecido como Análise por Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA), que permite, entre outras funcionalidades, comparar entidades similares, denominadas Unidades Tomadoras de Decisão (*Decision Making Units* – DMU), que utilizam os mesmos recursos (*inputs* ou entradas) e oferecem resultados (*outputs* ou saídas) comparáveis.

Desse modo, a DEA tem por finalidade avaliar a eficiência das DMUs. Essa avaliação se torna possível por meio da identificação de uma fronteira de eficiência com as melhores relações *output/input* (Cooper, Seiford, & Tone, 2007), onde se localizam as DMUs consideradas eficientes (com taxa de *output/input* igual a 1 ou 100%).

Para Kao e Lin (2012), avaliar a eficiência é algo importante para as organizações, visando, assim, identificar as operações que são ineficientes, auxiliando na tomada de decisão vinculada à redução das entradas e aumentos das saídas.

Santos, Marins e Salomon (2011) propuseram um modelo da DEA que utiliza os conceitos do Jogo da Barganha de Nash (Nash, 1950) para desenvolver um processo de negociação entre as DMUs, visando atingir melhores níveis na relação (negociação). Esses autores realizaram um estudo na área de saúde, com foco na projeção de *inputs* e *outputs* na fronteira de eficiência, buscando identificar oportunidades de melhoria, por meio do estabelecimento de medidas-alvo para os *inputs* (redução de insumos) e *outputs* (aumento de volume de produção).

O Jogo da Barganha de Nash para dois jogadores (Nash, 1953) considera um vetor de *payoffs* que representam os pagamentos ou as recompensas para cada jogador advindos da escolha de estratégias de ação por ambos os participantes do jogo.

Nesse contexto, há um conjunto finito de estratégias cooperativas para ambos os jogadores, e um ponto *d* chamado de Ponto de Desacordo (*Breakdown Point* ou *Disagreement Point*), que é um limitante inferior para o conjunto de estratégias cooperativas interessantes para cada jogador (Santos et al., 2011). Segundo Du, Liang, Chen, Cook e Zhu (2011), no Jogo da Barganha o propósito é que cada jogador, supostamente sem nenhum tipo de empatia entre si (ou de justiça ou de equidade),

mas com alto grau de racionalidade, partindo de uma recompensa já garantida (valor associado ao ponto de desacordo), tentaria negociar ou barganhar estratégias cooperativas de modo a encontrar uma situação melhor do que aquela antes de chegar ao acordo.

Wen, Qin e Kang (2011) comentam que, nos modelos clássicos da DEA, assume-se que os valores das entradas e saídas são estimados de maneira exata, ou seja, não há incertezas sobre esses valores de entrada e saída. Contudo, em situações reais, a ocorrência da incerteza é bastante comum, devido principalmente a fatores econômicos, como nível de renda, taxa de juros, taxa de desemprego, entre outros.

Lin e Okudan (2009) aplicaram um modelo DEA-CCR combinado com a Teoria da Utilidade, visando determinar a eficiência de um *mix* de produção. Contudo, esses autores não avaliaram a incerteza. Nesse sentido, deve-se destacar que várias pesquisas disponíveis na literatura científica têm proposto a combinação da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* com os modelos da DEA, visando, assim, tornar os cálculos das eficiências relativas das DMUs mais confiáveis e aderentes à realidade do mundo dos negócios (Cooper, Park, & Yu, 1999; Cooper, Park, & Yu, 2001a; Cooper, Park, & Yu, 2001b; Entani, Maeda, & Tanaka, 2002; Garcia, Melo, & Schirru, 2009; Guo & Tanaka, 2001; Hatami-Marbini, Emrouznejad, & Tavana, 2011; Kao & Lin, 2012; Kao & Liu, 2000; Lertworasirikul, Fang, Joines, & Nuttle, 2003; Wen, Qin, & Kang, 2011).

Um problema importante para as empresas em geral são a definição e o acompanhamento da eficiência do seu portfólio de produtos colocados no mercado. Para apoiar os decisores nessa difícil tarefa, propõe-se uma nova abordagem para o modelo DEA-GAME de Santos et al. (2011), incorporando a incerteza por meio da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*.

Para modelar os problemas de eficiência, é preciso definir as DMUs, que, no caso deste estudo, são o portfólio de produtos. Há dois tipos de parâmetros de saída (*outputs*), Total Produzido e Faturamento ([R\$]), e três parâmetros de entrada (*inputs*), Número de Pedidos Pendentes, Frequência de Ocorrência de Atrasos na Entrega dos Pedidos ([%]) e Custos de Matéria-Prima ([R\$]).

Uma das contribuições desta pesquisa é a incorporação de conceitos da Teoria dos Jogos e da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* para identificar oportunidades de melhor alocação de *inputs* e níveis a serem praticados de *outputs* diante da ocorrência de incertezas.

Assim, neste trabalho, teve-se como objetivo geral a proposição de um novo modelo *Fuzzy-DEA-Game* (FDG) para apoiar o estabelecimento de estratégias de produção em uma empresa do segmento de energia diante da incerteza. Além disso, o trabalho teve como objetivos específicos:

- Avaliar o impacto da incerteza no modelo DEA-CCR combinado com o Jogo da Barganha de Nash sob a ótica da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, desenvolvendo uma nova estrutura algébrica para o modelo DEA-GAME criado por Santos *et al.* (2011), visto que a estrutura algébrica original do modelo proposto por esses autores não contemplava a incerteza nos parâmetros de entrada (*inputs*) e saída (*output*).
- Identificar valores-alvo para a redução de *inputs* e aumento dos *outputs* com o apoio da Teoria dos Jogos da Barganha de Nash.

Cabe destacar que, neste artigo, foi feita uma aplicação em uma empresa do setor de energia, contudo o modelo pode ser aplicado em outros problemas, por exemplo, saúde, finanças, logística, produção, entre outros.

Sobre a sua classificação, segundo Bertrand e Fransoo (2002), a presente pesquisa pode ser classificada, quanto à natureza, como aplicada, pois visa proporcionar melhorias práticas para a literatura, com objetivos empíricos normativos, uma vez que o modelo visa compreender políticas, estratégias, ações que melhorem uma situação atual. Quanto à forma de abordar o problema, a pesquisa é quantitativa, sendo o método de pesquisa adotado a modelagem.

ANÁLISE POR ENVOLTÓRIA DE DADOS, TEORIA DOS JOGOS E TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY

A principal função das empresas ou unidades produtivas é a produção de bens e serviços. A teoria da produção demonstra como as empresas podem tomar decisões relacionadas à produção baseadas na minimização dos custos e como o volume produzido afeta esses custos (Pindyck & Rubinfeld, 2002).

Vários modelos para tratar de diferentes abordagens de medida de desempenho têm sido desenvolvidos com a finalidade de potencializar as vantagens da DEA em diferentes aplicações (Cook & Seiford, 2009).

A partir do modelo proposto por Charnes *et al.* (1978), os pesos para as variáveis de entrada e saída do modelo geral da DEA podem ser obtidos com base na solução do modelo dado por (1) - (4):

$$\text{Max } w_0 = \sum_{r=1}^S u_r \cdot y_{r0} / \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} \quad (1)$$

s.a:

$$\left(\sum_{r=1}^S u_r \cdot y_{r0} / \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} \right) \leq 1, j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$u_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, S. \quad (3)$$

$$v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

com j representando o índice das DMUs envolvidas no problema, $j \in \{1, \dots, n\}$; r está associado aos índices das saídas com $r \in \{1, \dots, S\}$; i está associado aos índices das entradas, $i \in \{1, \dots, m\}$; y_{rj} é o valor da r -ésima saída para a j -ésima DMU; x_{ij} é o valor da i -ésima entrada para a j -ésima DMU; u_r é a variável de decisão associada à r -ésima saída; v_i é a variável de decisão associada à i -ésima entrada; y_{r0} e x_{i0} são, respectivamente, o valor da r -ésima saída e i -ésima entrada para a DMU₀; finalmente w_0 é o valor ótimo vinculado à eficiência da DMU que está sendo analisada (DMU₀). Observe-se que, quando o valor de $w_0 = 1$, significa que a DMU é eficiente, e qualquer valor de $w_0 < 1$ significa que a DMU analisada é ineficiente.

O modelo (1) - (4) não é linear, sendo um caso da programação fracionária, mas ele pode ser linearizado conforme proposto por Charnes *et al.* (1978) resultando no modelo conhecido por DEA-CCR ou modelo DEA com Retornos Constantes de Escala com orientação a entrada, também conhecido como modelo dos multiplicadores:

$$\text{Max } w_0 = \sum_{r=1}^S u_r \cdot y_{r0} \quad (5)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} = 1 \quad (6)$$

$$\sum_{r=1}^S u_r \cdot y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, S. \quad (8)$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

Banker, Charnes e Cooper (1984) estenderam a formulação (5) – (9) propondo um modelo conhecido como DEA-BCC ou Modelo DEA com Retornos Variáveis de Escala, que não será abordado neste trabalho.

Problema da Barganha de Nash e o modelo DEA-GAME

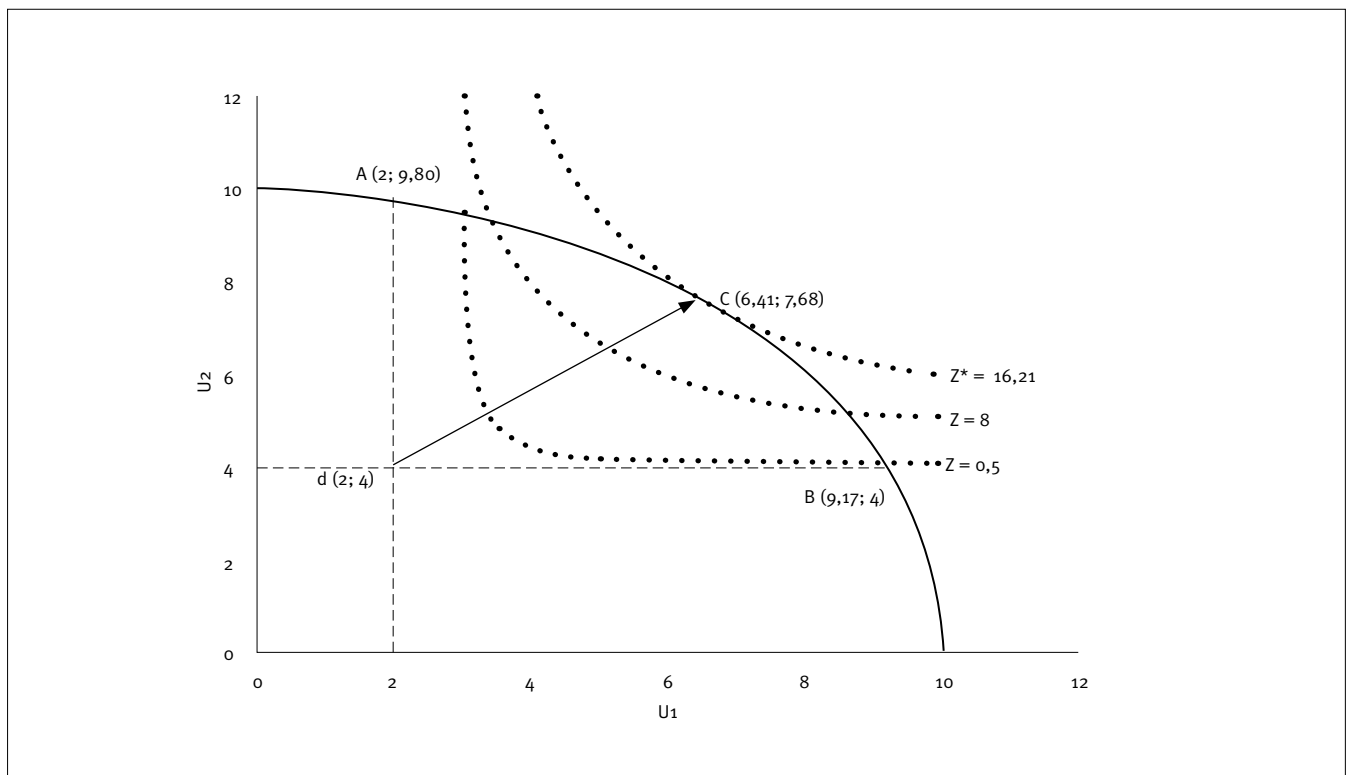
Segundo Fiani (2006), a Teoria dos Jogos é um ramo da matemática que modela fenômenos observados de interação entre dois ou mais agentes de decisão. Essa teoria encontra aplicação nas mais diversas áreas, desde ciências políticas e econômicas até ciências biológicas, nos estudos de evolução genética.

Uma área muito interessante dessa teoria é a de Jogos Cooperativos, nos quais os N jogadores envolvidos buscam formas de cooperarem para melhorar as recompensas de cada um ao final do jogo.

Uma excelente contribuição em Jogos Cooperativos foi o Modelo da Barganha de Nash (com $N =$ número de jogadores $= 2$) com um vetor de *payoffs* que representam os pagamentos (ou recompensas) de cada jogador em função das estratégias corporativas adotadas para si e pelo adversário (Nash, 1953).

Nesse Modelo da Barganha, considera-se um conjunto convexo S definido como um subconjunto factível de *payoffs*, ou seja, S é um conjunto finito formado por estratégias cooperativas dos dois jogadores (Figura 1); há um ponto d chamado de ponto de desacordo (*Breakdown Point* ou *Disagreement Point*), que é um limitante inferior para S (Nash, 1953). Esse ponto d é o valor de referência de recompensa a partir do qual cada jogador, com argumentos racionais, tenta barganhar com seu adversário a adoção de estratégias cooperativas que possam levá-los a uma situação em que ambos teriam ganhos adicionais em relação ao valor d .

Figura 1. Solução de Nash para o Jogo de Barganha Cooperativo



A função de arbitragem de Nash (Figura 1) é representada pela hipérbole $Z^* = \left(d_1 - \alpha \cdot \sum_{i=1}^m v_i x_{i0}\right) \cdot \left(\beta \cdot \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} - d_2\right)$

sendo $d_1 = \varepsilon_1 \sum_{i=1}^m v_i x_{i0}$ e $d_2 = \varepsilon_2 \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$, ε_1 e ε_2 são os parâmetros que definem a adoção do ponto de barganha vinculado a redu-

ções de *inputs* e/ou aumentos de *outputs*, Z^* o valor ótimo para a função que proporciona o melhor ponto de barganha C , β associado ao ponto de barganha vinculado ao aumento de *outputs*, α associado ao ponto de barganha vinculado à redução de *inputs*.

A solução proposta por Nash (1950, 1953) para essa negociação é resultante da otimização de uma função de arbitragem $F(N = 2, S, d)$ expressa em (10):

$$\text{Max}_{u \in S, u \geq d} \prod_{i=1}^{N=2} (u_i - d_i) \quad (10)$$

sendo u_i os *payoffs* e d_i os pontos de desacordo.

A solução ótima obtida pela função arbitragem de Nash satisfaz cinco axiomas:

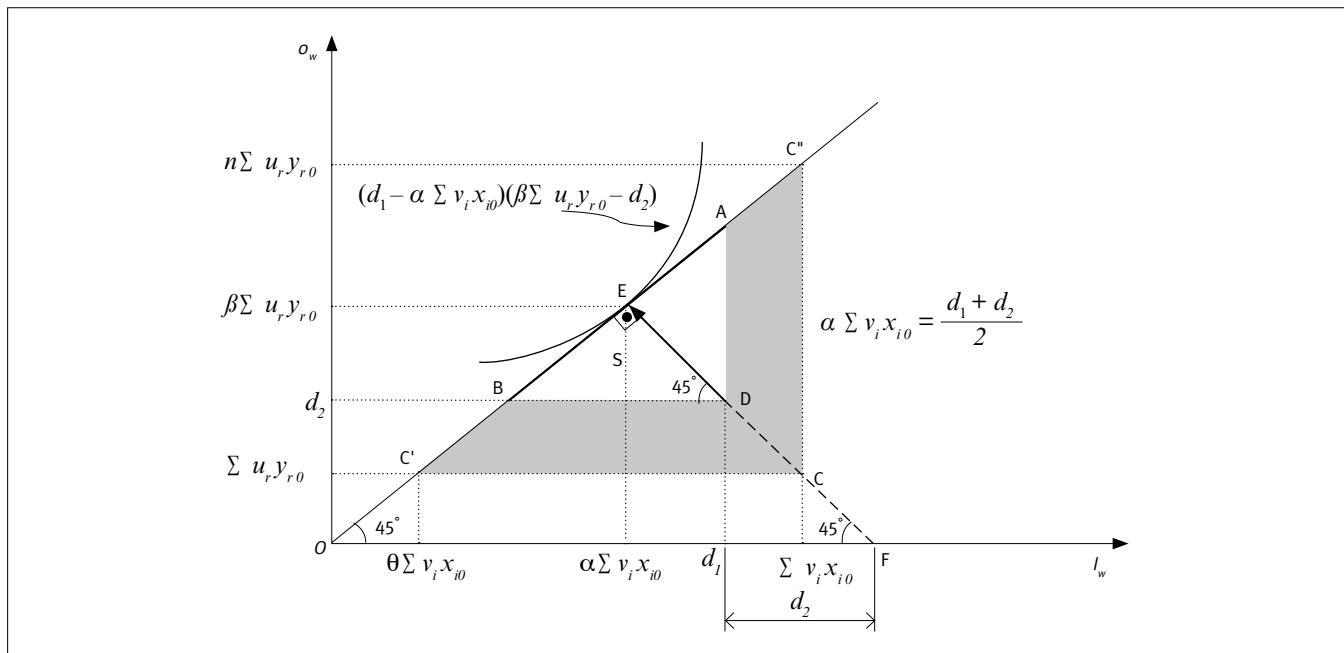
- Invariância de escala – qualquer escala de medida utilizada não interfere na solução final.
- Ser Pareto-ótimo.
- Nenhum dos jogadores pode aumentar o seu nível de *payoff* sem que seu adversário diminua.

- A solução não é influenciada pela escolha de alternativas irrelevantes.
- Simetria que garante a inclusão de todos os parâmetros relevantes para barganha.

Desde o artigo seminal de [Banker \(1980\)](#), surgiram outros trabalhos com aplicações da Teoria dos Jogos aos modelos da DEA. Nesse artigo pioneiro, [Banker \(1980\)](#) considerou cada jogador como uma DMU a ser avaliada, o outro jogador como um avaliador externo, e mostrou que usar modelos da DEA para obter a medida de eficiência dessas DMUs seria equivalente a resolver um Modelo de Soma Zero da Teoria dos Jogos com Dois Jogadores (*Two-Person Zero Sum Finite Game*).

Em geral, os artigos desenvolvidos nessa linha de Teoria dos Jogos com DEA descrevem como melhorar o poder de discriminação no processo de estimação das eficiências das DMUs analisadas. Para ilustrar o modelo DEA-GAME, que está descrito adiante, tomou-se como base a Figura 2.

Figura 2. Representação Gráfica do modelo DEA sob a orientação do modelo da Barchanha



Fonte: Adaptado de Santos *et al.* (2011).

Segundo Santos *et al.* (2011), na Figura 2, o ponto $C = \left(\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}, \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} \right)$ representa a DMU C em avaliação, o ponto D

(d_1, d_2) representa o Ponto de Desacordo para DMU C e pode representar os mínimos níveis exigidos de produção de *output* (d_2) e a mínima economia exigida para os *inputs* (d_1).

Os pontos A, B e D delimitam a Região de Estratégias Cooperativas S (conjunto compacto e convexo) e a região delimitada pelos pontos A e B constitui a Região de Barganha. O ponto E, pertencente à Região de Barganha, representa a projeção dos alvos da DMU C satisfazendo os quatro axiomas formalizados por [Nash \(1953\)](#).

Não foram identificados, segundo Santos *et al.* (2011), trabalhos em que o objetivo fosse propor um modelo adequado para estimar alvos (*targets*) empíricos, o que pode ser muito importante em determinadas situações. Para suprir essa lacuna teórica, Santos *et al.* (2011) desenvolveram o modelo DEA-GAME, representado pelas expressões (11) – (17), e observe-se que esse modelo não incorpora a incerteza inerente aos parâmetros *inputs* e *outputs*:

$\text{Max } w_0 = \beta - \theta_0$	(11)
--------------------------------------	------

s.a.

$x_{i0}\theta_0 \geq \sum_{j=1}^n x_{ij}t_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$	(12)
--	------

$y_{r0} \leq n \sum_{j=1}^n y_{rj}t_j, \quad r = 1, 2, \dots, s$	(13)
--	------

$x_{i0}\alpha \geq \sum_{j=1}^n x_{ij}\lambda_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$	(14)
--	------

$y_{r0}\beta \leq \sum_{j=1}^n y_{rj}\lambda_j, \quad r = 1, 2, \dots, s$	(15)
---	------

$2\alpha = \varepsilon_1 + \theta_0 \varepsilon_2$	(16)
--	------

$t_j \geq 0, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \alpha \leq \varepsilon_1, \beta \geq \varepsilon_2.$	(17)
--	------

sendo λ_j e t_j os coeficientes de importância relativa da DMU₀; θ_0 a medida radial de eficiência técnica da DMU₀; β está associado ao ponto de barganha vinculado ao aumento de *outputs*; α está associado ao ponto de barganha vinculado à redução de *inputs*; ε_1 e ε_2 são os parâmetros que definem a adoção do ponto de barganha vinculado a redução de *inputs* e/ou aumentos de *output*. Os demais parâmetros e variáveis são análogos ao do modelo descrito por (1) – (4). A restrição (16) contempla a condição de factibilidade do modelo.

MODELOS FUZZY DEA

Hatami-Marbini, Emrouznejad e Tavana (2011) realizaram uma vasta revisão bibliográfica sobre a Teoria dos Conjuntos Fuzzy

combinada com modelos da DEA. A motivação desses autores foi baseada no fato de que, em geral, a estimação dos valores de *inputs* e *outputs* das DMUs em problemas reais é difícil, podendo gerar valores de eficiência com baixa confiabilidade, e uma abordagem possível para tratar esses aspectos de incerteza nos dados seria a adoção dos conceitos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Observou-se que, nesse trabalho, não foi mencionada nenhuma aplicação conjunta da DEA, Teoria dos Conjuntos Fuzzy e Teoria dos Jogos, mais precisamente com o Jogo da Barganha de Nash.

Corroborando os comentários de Hatami-Marbini, Emrouznejad e Tavana (2011), para Kao e Liu (2000), medir a eficiência das DMUs é uma tarefa difícil, pois envolvem variáveis econômicas complexas, como taxas de juros, tributação, nível de emprego, demanda, entre outras. Segundo esses autores, essa tarefa ainda é mais difícil quando se analisam múltiplas entradas (*inputs*) e saídas (*outputs*).

Nesse contexto, Wen, Qin e Kang (2011) comentam que as DMUs podem ser divididas em duas classes, eficientes e ineficientes, mas a incorporação da incerteza como um erro de medição nos *inputs* e *outputs* pode tornar o cálculo da eficiência mais confiável.

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy vem sendo usada com o objetivo de modelar a incerteza nos parâmetros de entrada (*input*) e saída (*output*) dos modelos DEA (Garcia *et al.*, 2009). Os modelos Fuzzy DEA são baseados nos modelos de Programação Linear Fuzzy, podendo ser destacado, como de interesse neste trabalho, o modelo DEA-CCR com coeficientes Fuzzy (FCCR) que foi proposto por Lertworasirikul *et al.* (2003):

$\text{Max } \tilde{E}_j = \sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{r0}$	(18)
---	------

s.a

$\sum_{i=1}^m \tilde{x}_{i0} v_i = 1$	(19)
---------------------------------------	------

$\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$	(20)
--	------

$u_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s$	(21)
--	------

$v_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$	(22)
--	------

sendo \tilde{x}_{i0} os parâmetros Fuzzy da i -ésima entrada da DMU_o; \tilde{y}_{r0} os parâmetros Fuzzy da r -ésima saída da DMU_o; \tilde{x}_{ij} os parâmetros Fuzzy da i -ésima entrada da j -ésima DMU; \tilde{y}_{rj} os parâmetros Fuzzy da r -ésima saída para j -ésima DMU, as demais variáveis são análogas ao modelo (1) – (4).

Hatami-Marbini, Emrouznejad e Tavana (2011) elencaram e descreveram as principais abordagens que tratam da modelagem Fuzzy DEA:

- Abordagem baseada em nível- α (*The α -level based approach*) (Kao & Liu, 2000);
- Abordagem baseada em tolerância (*The tolerance approach*) (Kahraman & Tolga, 1998; Sengupta, 1992; Triantis & Girod, 1998);
- Abordagem pelo ranking Fuzzy (*The Fuzzy ranking approach*) (Hatami-Marbini, Saati, & Makui, 2010);
- Abordagem baseada em possibilidades (*The possibility approach*) (Lertworasirikul et al., 2003).

Neste trabalho, adotou-se a abordagem baseada no nível- α , descrita a seguir, que é mais utilizada para os modelos Fuzzy DEA, conforme Hatami-Marbini et al. (2011).

Na abordagem baseada no nível- α , a ideia é converter o modelo Fuzzy DEA em um par de problemas de programação paramétrica para encontrar os limitantes inferior e superior para as funções de pertinência dos escores de eficiência das DMUs (Lertworasirikul et al., 2003).

Neste estudo, optou-se pela utilização de funções de pertinência triangular, pois, conforme Liang e Wang (1993), elas representam bem a *expertise* humana em julgar adequadamente o comportamento de variáveis comuns em diversos tipos de situações práticas. Nessa linha, Aouni, Martel e Hassaine (2009) mostraram diversas aplicações de números triangulares Fuzzy que validam e justificam a adoção de tal método em conjunto com os modelos de *Goal Programming* (GP). Outra justificativa é decorrente do fato da função de pertinência triangular ser linear, o que facilita a sua otimização por meio de métodos tradicionais da programação linear (Hatami-Marbini et al., 2011).

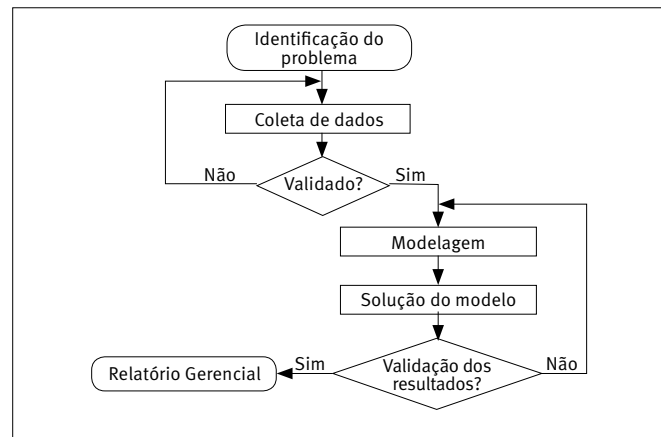
DESCRIÇÃO DO PROBLEMA, MATERIAIS E MÉTODOS

Para a aplicação e testes do Modelo FDG, foi escolhido um problema de estabelecimento de estratégias de produção em uma empresa típica do segmento de energia diante da incerteza. A empresa objeto do estudo produz dispositivos e peças usinadas, soldadas e galvanizadas para equipamentos elétricos de

baixa, média e alta tensão, e está no mercado há mais de 10 anos nesse segmento de geração, transmissão e distribuição de energia.

De acordo com Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES, 2010), a empresa estudada pode ser classificada como uma pequena empresa, pois tem uma receita operacional bruta anual entre R\$ 2,4 e R\$ 16 milhões. Por motivos de confidencialidade industrial e atendendo ao protocolo da pesquisa apresentado aos gestores da empresa estudada que o aprovaram, algumas informações e resultados obtidos com o modelo FDG podem ter seus valores omitidos ou alterados proporcionalmente, o que não prejudicará o entendimento das análises realizadas.

Figura 3. Fases da pesquisa



Fonte: Adaptado de Silva, Marins e Montevechi (2013).

A Figura 3 contempla as etapas da pesquisa na condução dessa aplicação real.

- Etapa (a) – Identificação do problema – Como estabelecer estratégias de produção para 30 produtos mais vendidos por uma empresa do segmento de energia em um ambiente com incertezas? Os produtos foram considerados como sendo as DMUs para um Modelo DEA-CCR. Segundo Cooper et al. (2007), para se aplicar os modelos tradicionais de DEA (CCR e BCC), deve-se atender a regra (conhecida como *Golden Rule*) estabelecida por Banker et al. (1989). Essa regra diz que, para aplicar esses modelos, o número de DMUs deve ser igual a três vezes a soma total do número de variáveis (*input/output*) ou igual ao produto dessas variáveis, sendo adotado o critério que gerar a maior quantidade de DMUs. Note-se que, no caso aqui analisado, têm-se 30 produtos (DMUs), 3 *inputs* e 2 *outputs*, sendo necessárias, pela regra de Banker et al. (1989), pelo menos 15 DMUs ($=3 \cdot (3+2)$).

- Etapa (b) – Coleta de dados – As informações foram adquiridas nos relatórios gerados pelo sistema de informações gerenciais da empresa estudada, incluindo relatórios das áreas de contabilidade e de qualidade no período de 1/6/2011 a 30/6/2012. Algumas dessas informações tiveram seus valores alterados proporcionalmente para atender ao protocolo de pesquisa, conforme já mencionado. A Tabela 1 mostra os dados para os *inputs* e *outputs* do Modelo FDG, sendo que:
- As DMUs estão na primeira coluna e correspondem aos 30 produtos mais vendidos no período considerado na pesquisa.
- Os dois *outputs* considerados importantes pelos gestores da empresa foram a Produção (Y_1), que foi medida pela quantidade vendida de cada um dos 30 produtos, e o Faturamento (Y_2), que foi o valor total auferido em reais ([R\$]) na venda de cada produto.
- Os três *inputs* considerados importantes pelos gestores da empresa foram o Atraso (X_1), que foi medido pelo número de peças entregues com atraso em relação à data de entrega contratual, a Frequência dos Atrasos (X_2) e o Custo Total de Matéria-Prima (X_3) associado ao valor em reais ([R\$]) do custo do pedido e da manutenção de estoques, entre outros custos.

TABELA 1. Valores de *inputs* e *outputs* para a empresa do setor de energia

DMU	Outputs		Inputs		
	Total produzido [unidades]	Faturamento [R\$]	Atraso [unidades]	Frequência de atrasos [%]	Custo total de matéria-prima [R\$]
1	3.051	41.667,18	2.068	20	25,67
2	2.525	56.419,25	2.464	41	134,00
3	2.104	36.302,28	1.998	23	17,34
4	1.614	37.080,01	1.581	38	17,34
5	1.585	36.431,00	835	11	21,50
6	1.581	43.151,61	1.160	22	58,95
7	1.516	22.783,84	1.265	14	17,34
8	1.461	15.924,90	1.318	14	17,34
9	1.030	10.956,06	554	8	17,34
10	920	10.752,00	790	16	17,34
11	751	14.269,00	750	7	17,34
12	748	16.957,16	520	18	21,50
13	736	7.391,44	510	8	17,34
14	702	11.928,75	650	8	25,67
15	600	17.020,00	400	2	17,34
16	551	14.652,23	461	19	175,70
17	541	15.066,85	445	18	17,34
18	525	36.435,00	489	17	14,00
19	512	13.144,56	156	5	2.427,95
20	500	14.900,00	500	2	34,00
21	496	5.138,36	445	12	17,34
22	475	192.647,55	123	10	610,80
23	458	34.563,92	45	4	2.160,80
24	415	316.239,00	2	1	1.960,80
25	390	21.439,98	372	28	14,00
26	357	68.352,50	61	4	1.285,80
27	329	7.113,21	276	7	75,60
28	292	24.820,00	50	2	19,14
29	285	63.933,41	93	12	498,30
30	243	169.728,89	62	8	1.210,80

- Etapa (c) – Modelagem – A modelagem do problema foi realizada utilizando conjuntamente a DEA, Teoria dos Jogos e Teoria dos Conjuntos Fuzzy, criando o Modelo FDG, cuja otimização foi feita com o *software The General Algebraic Modeling System (GAMS)* versão 23.6.5 e o *solver CPLEX* versão 12.2.1 (www.gams.com). Nessa etapa, foram fundamentais o apoio e a participação dos gestores da empresa objeto do estudo, o que resultou em:
- Estimou-se para o parâmetro de *input* Atraso uma variação de 50 unidades.
- Adotou-se uma função de pertinência triangular com um desvio de três unidades para o parâmetro de *input* Frequência de Atraso.
- Adotou-se para o parâmetro de *input* Custo total de matéria-prima, uma variação de R\$ 10,00.
- Estimou-se para a variável de *output* Produção um desvio uniforme de 50 unidades.
- Estimou-se para a variável de *output* Faturamento um desvio uniforme de R\$ 2.000,00.

Todos esses valores foram definidos com o apoio dos gestores da empresa estudada, optando por um desvio simétrico (*range* de variação) para mais e para menos em relação aos valores médios que representam os dados originais ou sem incerteza.

- Etapa (d) – Solução do modelo – Utilizou-se um computador com processador Intel (*Core i7*) 1,2 GHZ até 2,266 GHZ, com *max turbo frequency*, 4 MB de cache e 8 GB de RAM DDR3 80 MHz e sistema operacional da Microsoft plataforma 64 bits.
- Etapa (e) – Validação – Feita com o apoio dos gestores, por meio da análise dos cenários gerados com a variação do nível- α .

MODELO FDG E RESULTADOS DA APLICAÇÃO AO PROBLEMA REAL NUMA EMPRESA DO SETOR DE ENERGIA

Aqui se apresenta um novo modelo *Fuzzy-DEA-Game* (FDG) para situações em que há ocorrência de incerteza. O desenvolvimento desse modelo teve como base o trabalho de Santos *et al.* (2011), que agregaram a um modelo da DEA conceitos do Jogo da Barganha de Nash (Nash, 1950), visando melhorar a relação *output/input* nas DMUs por intermédio de um processo de negociação, e aplicaram na área de saúde.

A fim de embasar teoricamente o desenvolvimento do modelo proposto, pressupõe-se que, em um processo de barganha diante da incerteza, ambos os agentes (jogadores ou DMUs) adotariam como base um ponto de desacordo (*Breakdown Point* ou *Disagreement Point*) referente a um cenário mais pessimista.

Em outras palavras, cada jogador adotaria como valor mínimo de referência (d) de recompensa algo que esteja dentro de um cenário pessimista e, a partir disso, com argumentos racionais, tentaria barganhar com seu adversário a adoção de estratégias cooperativas que poderiam levá-los a uma situação onde ambos projetariam o máximo de ganhos adicionais em relação ao valor d , diante de um cenário mais otimista. Essa abordagem garantiria que ambos os jogadores, pelo menos, teriam a sua recompensa mínima d no final do jogo.

Para satisfazer as premissas do jogo cooperativo de barganha diante da incerteza, propõe-se aqui uma única medida de eficiência que contempla ambas as óticas: cenário pessimista (denotado com os índices α_{inf} na expressão (23)) e cenário otimista (denotado com os índices α_{sup} na expressão (23)). Nessa abordagem, define-se a eficiência relativa de uma DMU como a relação entre a produtividade que teria uma unidade no cenário pessimista com a máxima produtividade que poderia ser alcançada por essa DMU em um cenário mais otimista. Para isso, define-se a eficiência:

$$Eficiência = \frac{\text{Max}_{u_i \geq 0, v_i \geq 0} \left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{y}_{ro})_{inf}^{\alpha}}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{x}_{io})_{sup}^{\alpha}} \right)}{\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{y}_{ro} \text{ máximo})_{sup}^{\alpha}}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{x}_{io} \text{ mínimo})_{inf}^{\alpha}} \right)} \quad (23)$$

com

$$\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{y}_{ro} \text{ máximo})_{sup}^{\alpha}}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{x}_{io} \text{ mínimo})_{inf}^{\alpha}} \right) = 1 \quad (24)$$

Note-se que, na expressão (23), a DMU teria a menor produtividade no cenário pessimista se consumisse o nível de insumo

$\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{x}_{i0})_{\sup}^{\alpha}$ e produzisse o nível de produtos $\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{y}_{r0})_{\inf}^{\alpha}$; e a máxima produtividade no cenário otimista seria alcançada se a DMU *benchmark* consumisse um nível de insumo $\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{x}_{i\text{mínimo}})_{\inf}^{\alpha}$ e produzisse um nível de produtos $\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{y}_{r\text{máximo}})_{\sup}^{\alpha}$.

Assim, pode-se definir o conjunto de possibilidades de produção (denotado por P) como:

$$P = \left\{ (\tilde{x}_{i0}, \tilde{y}_{r0}) / (\tilde{y}_{r0})_{\inf}^{\alpha} \leq \tilde{y}_{r0} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j (\tilde{y}_{rj})_{\sup}^{\alpha} \forall j, \sum_{j=1}^n \lambda_j (\tilde{x}_{ij})_{\inf}^{\alpha} \forall i, \leq \tilde{x}_{i0}, \leq (\tilde{x}_{i0})_{\sup}^{\alpha}, \lambda_j \geq 0 \forall j \right\} \quad (25)$$

Observe-se que esse conjunto de possibilidades de produção P contempla todos os possíveis cenários. Combinando a definição de eficiência da expressão (24) com o que está na expressão (25), pode-se definir a nova medida de eficiência:

$$\text{Eficiência} = \left\{ \min \frac{\tau}{\beta} \text{ tal que } \frac{\tau \sum_{i=1}^m v_i (\tilde{x}_{i0})_{\sup}^{\alpha}}{\beta \sum_{r=1}^s u_r (\tilde{y}_{r0})_{\inf}^{\alpha}} \geq \frac{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{x}_{i\text{mín}})_{\inf}^{\alpha}}{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{y}_{r\text{máx}})_{\sup}^{\alpha}}, \frac{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{x}_{i\text{mín}})_{\inf}^{\alpha}}{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{y}_{r\text{máx}})_{\sup}^{\alpha}} = 1 \right. \\ \left. , \sum_{j=1}^n (\tilde{x}_{ij})_{\inf}^{\alpha} \lambda_j = (\tilde{x}_{i\text{mín}})_{\inf}^{\alpha} \forall i, \sum_{j=1}^n (\tilde{y}_{rj})_{\sup}^{\alpha} \lambda_j = (\tilde{y}_{r\text{máx}})_{\sup}^{\alpha} \forall r, \tau \leq 1, \alpha \geq 1, v_i \geq 0 \forall i, u_r \geq 0 \forall r, \lambda_j \geq 0 \forall j. \right\} \quad (26) \\ \left. v_i \geq 0 \forall i, u_r \geq 0 \forall r, \lambda_j \geq 0 \forall j. \right\}$$

No modelo FDG, utilizam-se, de maneira conjunta e complementar, a DEA, a Teoria dos Jogos e a Teoria dos Conjuntos Fuzzy para possibilitar tratar a ocorrência de incertezas nos *inputs* e *outputs*. Na sequência, estão as notações adotadas nessa nova formulação para os Índices, Conjuntos, Parâmetros, Variáveis de Auxiliares e de Decisão, considerando a DMU₀ como a que está em análise:

Índices:

j é o índice de DMU, $j \in J$, $J = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$;

r é o índice de *output*, $r \in R$, $R = \{1, 2\}$;

i é o índice de *input*, $i \in I$, $I = \{1, 2, 3\}$.

Parâmetros:

\tilde{y}_{r0} e \tilde{x}_{i0} são, respectivamente, os valores dos limitantes inferiores nos intervalos de definição da função de pertinência triangular para a r -ésima saída Fuzzy e a i -ésima entrada Fuzzy para a DMU₀, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

\tilde{y}_{r0} e \tilde{x}_{i0} são, respectivamente, os valores dos limitantes superiores nos intervalos de definição da função de pertinência triangular para a r -ésima saída Fuzzy e a i -ésima entrada Fuzzy para a DMU₀, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

\tilde{y}_{rj} é o valor do limitante inferior no intervalo de definição da função de pertinência triangular da r -ésima saída Fuzzy para a j -ésima DMU, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

\tilde{y}_{rj} é o valor do limitante superior no intervalo de definição da função de pertinência triangular da r -ésima saída Fuzzy para a j -ésima DMU, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

\tilde{x}_{ij} é o valor do limitante inferior no intervalo de definição da função de pertinência triangular da i -ésima entrada Fuzzy para a j -ésima DMU, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

\tilde{X}_{ij} é o valor do limitante superior no intervalo de definição da função de pertinência triangular da *i-ésima entrada Fuzzy* para a *j-ésima DMU*, considerando a média o valor mais provável, sem incerteza.

α é valor escolhido para a abordagem nível- α , com $\alpha \in [0, 1]$.

ψ_{io} é o coeficiente de α nas restrições vinculado à *i-ésima entrada fuzzy* da DMU_o.

ρ_{jo} é coeficiente de α nas restrições vinculado à *j-ésima saída fuzzy* da DMU_o.

ρ_{rj} é o coeficiente de α nas restrições vinculado à *r-ésima saída fuzzy* da DMU *j*.

ψ_{ij} é o coeficiente de α nas restrições vinculado à *i-ésima entrada fuzzy* da DMU *j*.

Modelo FDG

$\text{Max } \beta - \theta_o$	(27)
--------------------------------	------

s.a.

$(\tilde{X}_{io} - \psi_{io} . \alpha) \theta_o \geq \sum_{j \in J} (\tilde{x}_{ij} + \psi_{ij} . \alpha) . t_j, \quad \forall i \in I$	(28)
---	------

$\tilde{y}_{ro} + \rho_{ro} . \alpha \leq \sum_{j \in J} (\tilde{Y}_{rj} - \rho_{rj} . \alpha) . t_j, \quad \forall r \in R$	(29)
--	------

$(\tilde{X}_{io} - \psi_{io} . \alpha) \tau \geq \sum_{j \in J} (\tilde{x}_{ij} + \psi_{ij} . \alpha) . \lambda_j, \quad \forall i \in I$	(30)
---	------

$(\tilde{y}_{ro} + \rho_{ro} . \alpha) . \beta \leq \sum_{j \in J} (\tilde{Y}_{rj} - \rho_{rj} . \alpha) . \lambda_j, \quad \forall r \in R$	(31)
--	------

$2\tau = \varepsilon_1 + \theta_0 \varepsilon_2$	(32)
--	------

$t_j \geq 0 \text{ e } \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in J, \tau \leq \varepsilon_1 \beta \leq \varepsilon_2, \alpha \in [0, 1] \quad \forall j \in J$	(33)
---	------

ε_1 e ε_2 são os parâmetros que definem a adoção do ponto de barganha vinculado à redução de *inputs* e aumentos dos *outputs*, respectivamente.

Variáveis auxiliares:

β está associado ao ponto de barganha e vinculado ao alvo para aumento dos *outputs*.

τ está associado ao ponto de barganha e vinculado ao alvo para redução dos *inputs*.

Variáveis de Decisão:

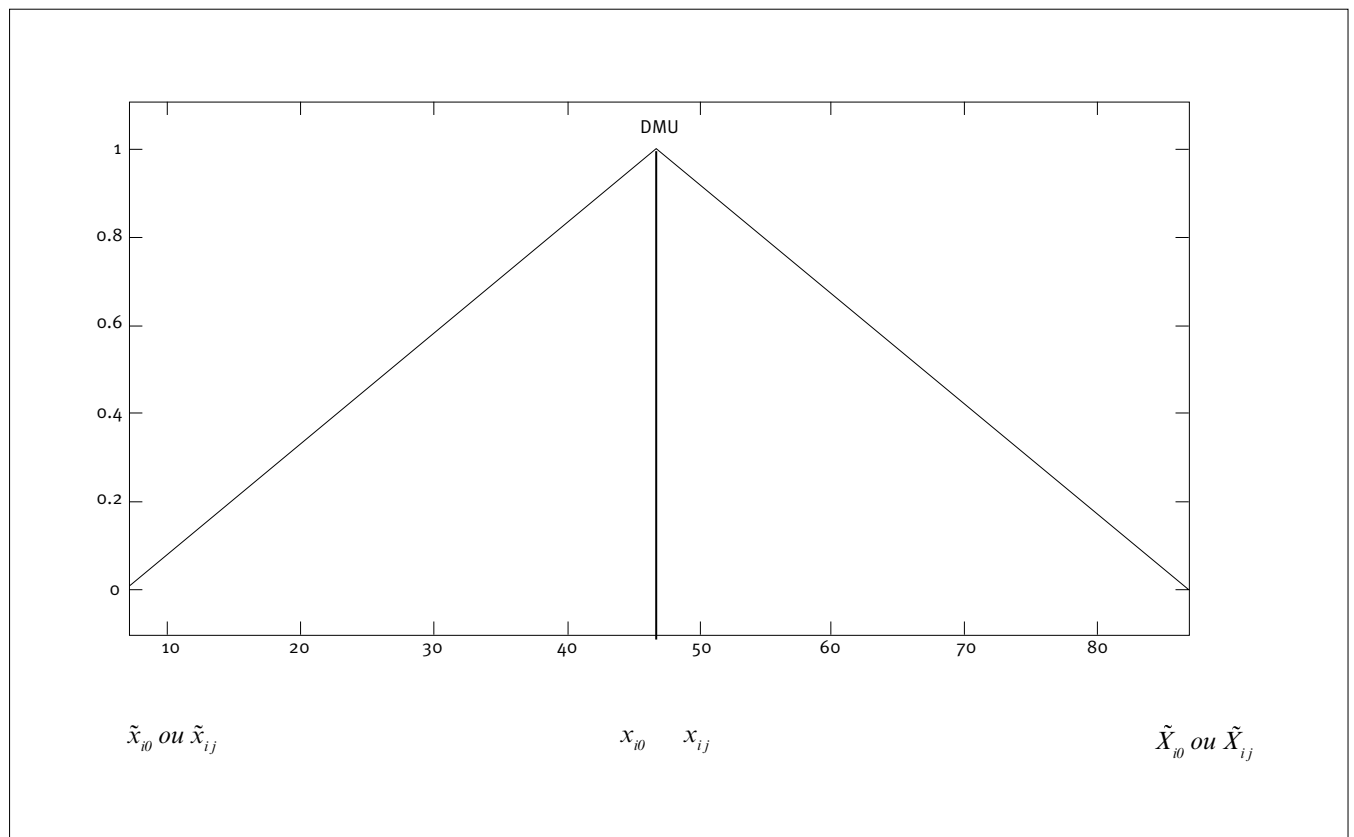
λ_j é o coeficiente de importância relativa da DMU *j*.

θ_o é a medida radial de eficiência técnica da DMU_o.

Com a variação de $\alpha \in [0, 1]$, pode-se gerar diferentes cenários ótimos, ou seja, valores de eficiência ótimos vinculadas a cada DMU analisada. Nesse sentido, o gestor poderá analisar o efeito da incerteza (variabilidade) na avaliação da eficiência, e, dessa maneira, tomar decisões mais aderentes e confiáveis. Observe-se que, quando $\alpha = 1$ em (27) – (33), obtém-se o modelo de Santos *et al.* (2011), que se aplica a uma estrutura algébrica sem incerteza (determinística). Quando $\alpha = 0$, significa que,

nesse cenário, os coeficientes do lado esquerdo das restrições (28) e (30) são os limites superiores de incerteza dos *inputs* (ver Figura 4) para a DMU₀, que está sob análise, e os coeficientes do lado direito de (28) e (30) são os limites inferiores de incerteza dos demais *inputs*. Nas restrições (29) e (31), os coeficientes do lado esquerdo são os limites inferiores de incerteza vinculadas aos *outputs* da DMU₀, e os coeficientes do lado direito são os limites superiores de incerteza dos demais *outputs*.

Figura 4. Limite de variação com a incorporação da incerteza



Observe-se que, no eixo das ordenadas da Figura 4, têm-se os níveis de pertinência, e no eixo das abscissas estão os valores vinculados ao *input* analisado. Essa Figura 4 contempla geometricamente a posição dos parâmetros dos modelos DEA modelados pela função de pertinência triangular, sendo \tilde{x}_{i0} ou \tilde{x}_{ij} e \tilde{y}_{r0} ou \tilde{y}_{rj} correspondentes ao limite inferior de variação associados aos *inputs* e *outputs* das DMUs. Já \tilde{X}_{i0} ou \tilde{X}_{ij} e \tilde{Y}_{r0} ou \tilde{Y}_{rj} correspondem ao limite superior de variação dos *inputs* e *outputs* das DMUs.

A título de ilustração, na representação gráfica dos valores da Tabela 1, conforme disposto na Figura 4, tendo como referência o *output* (total produzido) da DMU 1, têm-se: o range de variação desse *output* será simétrico no valor de 50 uni-

dades; em outras palavras, o limite inferior de incerteza seria 3.001 unidades ($= 3.051 - 50$), o valor médio, ou seja, sem incerteza, é 3.051 unidades, e o limite superior de incerteza seria 3.101 unidades ($= 3.051 + 50$).

Na sequência, são apresentados os dados de *inputs* e *outputs* (Tabela 1) para a empresa do setor de energia visando à aplicação do modelo FDG no estabelecimento de estratégias de produção sob incerteza.

Foi adotado, por conveniência, como ponto de barganha inicial $\varepsilon = (1; 1)$, variando-se o $\alpha \in \{0; 0,1; 0,2, \dots, 1\}$ e gerando-se, assim, 11 cenários. Nas Tabelas 2, 3, 4 e 5, estão os resultados da otimização do modelo FDG.

TABELA 2. Valores de Eficiências (%) resultantes do Modelo FDG aplicado à Empresa do setor de Energia – DMUs 1 a 8

α	DMU 1	DMU 2	DMU 3	DMU 4	DMU 5	DMU 6	DMU 7	DMU 8
0	73,74	28,39	63,42	55,37	69,77	37,66	55,48	52,24
0,1	67,45	28,82	54,19	46,42	64,69	37,38	50,29	47,06
0,2	84,90	34,24	74,10	66,36	80,65	44,73	65,93	62,04
0,3	89,20	37,10	80,50	73,20	84,90	47,90	70,20	65,90
0,4	100	100	100	100	88,71	100	100	100
0,5	100	100	100	100	97,50	53,60	100	100
0,6	100	100	100	100	100	63,82	100	100
0,7	100	45,29	100	100	100	58,84	100	100
0,8	100	46,99	100	100	100	61,33	100	100
0,9	100	48,60	100	100	100	63,70	100	100
1	100	50,09	100	100	100	66,01	100	100
Média	92,30	56,32	88,38	85,58	89,65	57,72	85,63	84,30
Máximo	100	100	100	100	100	100	100	100
Mínimo	67,45	28,39	54,19	46,42	64,69	37,38	50,29	47,06
Amplitude	32,55	71,61	45,81	53,58	35,31	62,62	49,71	52,94

TABELA 3. Valores de Eficiências (%) resultantes do Modelo FDG aplicado à Empresa do setor de Energia – DMUs 9 a 16

α	DMU 9	DMU 10	DMU 11	DMU 12	DMU 13	DMU 14	DMU 15	DMU 16
0	61,30	43,89	36,57	41,26	44,91	31,78	46,32	12,10
0,1	54,68	40,24	33,44	37,34	39,90	29,55	36,13	7,45
0,2	72,85	50,73	42,59	49,97	54,00	38,13	60,75	16,76
0,3	77,80	54,10	45,00	53,90	58,00	40,90	68,70	19,30
0,4	82,28	64,03	51,87	78,78	61,68	100	88,92	100
0,5	86,60	92,40	60,30	100	65,20	100	100	100
0,6	98,56	86,54	70,29	100	100	100	100	100
0,7	100	80,78	91,73	67,93	76,89	51,21	100	29,66
0,8	100	88,89	100	71,15	86,01	53,59	100	32,49
0,9	100	98,90	100	76,10	96,30	56,50	100	35,40
1	100	100	100	100	100	60,90	100	38,49
Média	84,91	72,77	66,52	70,58	71,17	60,2%	81,89	44,70
Máximo	100	100	100	100	100	100	100	100
Mínimo	54,68	40,24	33,44	37,34	39,90	29,55	36,13	7,45
Amplitude	45,32	59,76	66,56	62,66	60,10	70,45	63,87	92,55

TABELA 4. Valores de Eficiências (%) resultantes do Modelo FDG aplicado à Empresa do setor de Energia – DMUs 17 a 24

α	DMU 17	DMU 18	DMU 19	DMU 20	DMU 21	DMU 22	DMU 23	DMU 24
0	34,53	47,01	23,66	33,76	31,37	70,09	24,92	89,79
0,1	30,44	38,54	5,28	21,08	27,68	20,38	6,64	59,15
0,2	42,29	62,18	33,26	44,98	38,46	79,59	36,05	95,34
0,3	45,80	70,50	38,60	51,80	41,70	83,50	42,50	98,10
0,4	100	100	100	81,46	100	100	100	100
0,5	94,60	100	100	77,10	100	100	100	100
0,6	60,71	100	100	100	76,66	99,75	100	100
0,7	62,99	100	60,38	100	80,35	95,19	77,52	100
0,8	100	100	66,17	100	100	97,42	95,70	100
0,9	83,50	100	73,40	100	100	99,50	100	100,0
1	96,93	100	100	100	100	100	100	100
Média	68,35	83,48	63,70	73,65	72,39	85,94	71,21	94,76
Máximo	100	100	100	100	100	100	100	100
Mínimo	30,44	38,54	5,28	21,08	27,68	20,38	6,64	59,15
Amplitude	69,56	61,46	94,72	78,92	72,32	79,62	93,36	40,85

TABELA 5. Valores de Eficiências (%) resultantes do Modelo FDG aplicado à Empresa do setor de Energia – DMUs 25 a 30

A	DMU 25	DMU 26	DMU 27	DMU 28	DMU 29	DMU 30
0	33,68	23,58	14,19	39,47	22,34	48,65
0,1	27,08	9,16	8,73	29,33	8,08	23,32
0,2	44,74	32,38	20,27	56,13	26,47	54,43
0,3	51,00	37,90	23,70	66,40	29,40	57,30
0,4	93,58	100	100	89,39	32,16	60,21
0,5	82,60	94,40	100	100	34,50	63,20
0,6	100	92,14	100	100	40,27	100
0,7	100	66,94	37,42	100	45,12	69,15
0,8	100	76,48	41,16	100	59,42	72,20
0,9	100	86,70	45,00	100	63,80	75,30
1	100	100	49,06	100	68,05	78,41
Média	75,70	65,43	49,05	80,06	39,05	63,83
Máximo	100	100	100	100	68,05	100
Mínimo	27,08	9,16	8,73	29,33	8,08	23,32
Amplitude	72,92	90,84	91,27	70,67	59,97	76,68

A título de ilustração sobre o tipo de informação disponibilizada pela resolução do modelo FDG, na Tabela 6, estão os valores-alvo para os *inputs* e *outputs* no ponto de barganha ε (1; 1) e nível- $\alpha = 0,4$.

Uma primeira informação extraída da Tabela 6 é com relação ao valor de nível- α que gerou o maior número de DMUs eficientes. Pode-se verificar que, quando o nível- $\alpha = 0,6$ e nível- $\alpha = 1$, têm-se, respectivamente, 21 e 22 DMUs eficientes. Interessante observar que, para nível- $\alpha \in \{0; 0,1; 0,2; 0,3\}$, nenhuma DMU foi eficiente.

TABELA 6. Alvos para os *inputs* e *outputs* no Ponto de Barganha ε (1, 1) e nível- $\alpha = 0,4$

DMU	τ (%)	β (%)	Eficiência (%)
1	0	0	100
2	0	0	100
3	0	0	100
4	0	0	100
5	5,65	6,37	88,71
6	0	0	100
7	0	0	100
8	0	0	100
9	8,86	10,76	82,28
10	17,98	28,09	64,03
11	0	92,78	51,87
12	21,22	0	78,78
13	0	62,14	61,68
14	0	0	100
15	11,08	0	88,92
16	0	0	100
17	0	0	100
18	0	0	100
19	0	0	100
20	18,54	0	81,46
21	0	0	100
22	0	0	100
23	0	0	100
24	0	0	100
25	6,42	0	93,58
26	0	0	100
27	0	0	100
28	10,61	0	89,39
29	0	210,93	32,16
30	19,90	33,05	60,21

Outra informação importante é com relação às DMUs mais sensíveis à incerteza. Nesse sentido, a DMU 19 foi a mais sensível, apresentando a maior amplitude de variação (94,72%); já a DMU 1 foi a menos sensível (32,55%). Também é possível constatar que a DMU 24 apresentou a maior eficiência média (94,76%) e a DMU 29 apresentou a menor eficiência média (39,05%).

Para ilustrar a aplicabilidade dos resultados disponibilizados pela otimização do modelo FDG, tomando como base, por exemplo, o valor de nível- $\alpha = 0,4$ e o ponto de barganha ε (1; 1), têm-se os valores dispostos na Tabela 6 para τ – alvo associado à taxa de redução de *inputs* e β – alvo associado à taxa de aumento de *outputs*. A recomendação geral é no sentido de que as DMUs ineficientes devem adotar tais alvos para tornarem-se eficientes.

Exemplificando a interpretação dos valores alvos, conforme a Tabela 6, a DMU 5 é ineficiente (88,71%) e, para que ela se torne eficiente, é necessário reduzir seus *inputs* em 5,65% (coluna τ) e aumentar seus *outputs* em 6,37% (coluna β). Percebe-se que a DMU 29 apresentou a pior taxa de eficiência (32,16%), e, para que ela seja eficiente, é necessário aumentar em 210,93% seus *outputs* e manter os *inputs* no nível atual. Como comentário geral, percebe-se, observando-se a Tabela 6, que quanto mais alta for a taxa de ineficiência maiores serão os valores dos alvos vinculados ao aumento de *outputs* e redução dos *inputs*.

De um ponto de vista da instrumentação da gestão, tais resultados auxiliam na determinação de políticas ótimas de alocação de recursos, produção e remanejamento de recursos humanos, entre outras possibilidades, visando ao aumento da produtividade e à manutenção da eficiência vinculada às DMUs.

Na empresa que foi objeto do estudo, de posse dos resultados anteriores, os gestores puderam propor novos pontos de barganha para os produtos que foram ineficientes, para que possíveis novos cenários de investimentos e demandas fossem testados.

Exemplificando, um dos cenários de interesse da empresa consistia em atender melhor um cliente do produto associado à DMU 5, o qual gostaria de aumentar as saídas (*outputs*) em pelo menos 5%; já a empresa estaria planejando reduzir os *inputs* em pelo menos 5%. Nesse caso, o ponto de barganha seria $\varepsilon = (0,95; 1,05) = (1 - \varepsilon_1; 1 + \varepsilon_2) = (1 - 0,05; 1 + 0,05)$ e o modelo FDG ofereceu as recomendações mais convenientes. Note-se que as condições exigidas satisfazem a condição de viabilidade (factibilidade) ($\theta_5 = 8,71\% \leq 0,953/1,05 = 90,4762\%$), que é a condição de Pareto (Debreu, 1951).

Com esse novo ponto de barganha $\varepsilon = (0,95; 1,05)$ para a DMU 5, mantendo $\varepsilon = (1; 1)$ para as demais DMUs, e utilizando

nível- $\alpha = 0,4$, obtiveram-se do modelo FDG as recomendações de que o alvo para a redução dos recursos produtivos (*inputs*) seria de 5,36% e o alvo para o aumento de nível de produção (*outputs*) seria de 6,68%. Ou seja, nesse caso, seria possível e interessante o atendimento à demanda crescente do cliente acerca do produto associado à DMU 5 com uma diminuição concomitante nos recursos produtivos associados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo propôs um novo modelo FDG como apoio à tomada de decisão sob incerteza no estabelecimento de portfólio de produtos numa empresa do setor de energia. O modelo FDG mostrou-se viável dos pontos de vista computacional e prático, identificando as eficiências relativas dos produtos que compunham o portfólio da empresa estudada e propondo valores-alvo para as decisões relativas à diminuição de recursos produtivos e aumentos de níveis de produção de cada produto (DMU).

De fato, a otimização do modelo FDG, feita por meio do *software The General Algebraic Modeling System* (GAMS, 2013) utilizando o *solver* CPLEX 12.1.1, mostrou-se rápida, com um custo computacional de aproximadamente 10 segundos para a otimização dos 30 modelos, permitindo, assim, a simulação em tempo real de vários cenários testando diferentes pontos de barganha e diferentes valores de nível- α de maneira rápida e confiável.

Adicionalmente, o modelo FDG possibilita a identificação das DMUs mais sensíveis ao efeito da incerteza, avaliando o impacto desta no valor da eficiência das DMUs. Isso resultou no oferecimento de uma ferramenta interessante para os gestores, auxiliando a análise de cenários mais confiáveis, sem a incorporação de grande complexidade matemática e de conhecimentos de estatística, como seria o caso da adoção de modelos DEA estocásticos (Sueyoshi, 2000).

Na empresa objeto do estudo, o emprego de diferentes pontos de barganha (Negociação) entre as DMUs possibilitou aos gestores a identificação de metas (alvos) de redução dos *inputs* e aumentos de *outputs*, facilitando o entendimento sobre possíveis estratégias de vendas que poderiam ser adotadas na fabricação de cada produto.

Outro aspecto importante do modelo FDG é favorecer um maior envolvimento dos gestores com o desenvolvimento, otimização e análise das soluções obtidas, promovendo uma maior interação com os analistas. Isso contribui para aumentar a confiabilidade dos resultados em situações reais, e dessa forma, o modelo FDG auxiliou a empresa estudada a desenvolver novas estratégias de produção e vendas de seus produtos.

Como proposta para desdobramentos futuros deste trabalho, sugere-se a utilização da abordagem DEA em dois estágios, conhecida como DEA – *Network* (Lozano, Gutiérrez, & Moreno, 2013).

NOTA DE AGRADECIMENTO

Esta pesquisa teve apoio do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Processo No. 303362/2012-0 e Processo No. 470189/2012), da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Processo No. 024/2008) e da FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Processo No. 2014/06374-2).

REFERÊNCIAS

- Aouni, B., Martel, J.-M., & Hassaine, A. (2009). Fuzzy Goal Programming model: an overview of the current state-of-the-art. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 16(5-6), 149-161.
- Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social. (2010). *Circular n. 11/2010*. Recuperado em 20 dezembro, 2012, de http://www.bndes.gov.br/SiteBNDES/export/sites/default/bndes_pt/Galerias/Arquivos/produtos/download/Circ011_10.pdf
- Banker, R. D. (1980). A game theoretic approach to measuring efficiency. *European Journal of Operational Research*, 5(4), 262-266.
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-1092.
- Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W., Swarts, J., & Thomas, D. A. (1989). An introduction to Data Envelopment Analysis with some of its models and their uses. *Research in Governmental and Non-Profit Accounting*, 5, 125-163.
- Bertrand, J. W. M., & Fransoo, J. C. (2002). Operations management research methodologies using quantitative modeling. *International Journal of Operations and Production Management*, 22(2), 241-264.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
- Cook, W. D., & Seiford, L. M. (2009). Data Envelopment Analysis (DEA) – thirty years on. *European Journal of Operational Research*, 192(1), 1-17.
- Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (1999). IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA. *Management Science*, 45(4), 597-607.
- Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (2001a). An illustrative application of IDEA (Imprecise Data Envelopment Analysis) to a Korean mobile telecommunication company. *Operations Research*, 49(6), 807-820.
- Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (2001b). IDEA (Imprecise Data Envelopment Analysis) with CMDs (Column Maximum Decision Making Units). *The Journal of the Operational Research Society*, 52(2), 176-181.

- Cooper, W. W., Sieford, L. M., & Tone, K. (2007). *Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, application, references and DEA-Solver Software* (2nd ed.). New York: Springer Science + Business Media.
- Debreu, G. (1951). The coefficient of resource utilization. *Econometrica*, 19(3), 273-292.
- Du, J., Liang, L., Chen, Y., Cook, W. D., & Zhu, J. (2011). A bargaining game model for measuring performance of two-stage network structures. *European Journal of Operational Research*, 210(2), 390-397.
- Entani, T., Maeda, Y., & Tanaka, H. (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, 136(1), 32-45.
- Ferreira, C. M. C., & Gomes, A. P. (2009). *Introdução à Análise Envoltória de Dados – Teoria, Modelos e Aplicações*. Viçosa: Editora UFV.
- Fiani, R. (2006). *Teoria dos jogos* (2a ed.). Rio de Janeiro: Editora Campus.
- Garcia, P. A. A., Melo, P. F. F., & Schirru, R. (2009). Aplicação de um modelo fuzzy DEA para priorizar modos de falhas em sistemas nucleares. *Pesquisa Operacional*, 29(2), 383-402.
- Guo, P., & Tanaka, H. (2001). Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets and Systems*, 119(1), 149-160.
- Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A., & Tavana, M. (2011). A taxonomy and review of the Fuzzy Data Envelopment Analysis literature: two decades in the making. *European Journal of Operational Research*, 214(3), 457-472.
- Hatami-Marbini, A., Saati, S., & Makui, A. (2010). Ideal and anti-ideal decision making units: a Fuzzy DEA approach. *Journal of Industrial Engineering International*, 6(10), 31-41.
- Kahraman, C., & Tolga, E. (1998). Data envelopment analysis using Fuzzy concept. In: International Symposium on Multiple-Valued Logic, 6, Fukuoka – Japan. Anais. Fukuoka: 28th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic.
- Kao, C., & Lin, P.-H. (2012). Efficiency of parallel production systems with Fuzzy data. *Fuzzy sets and systems*, 198(1), 83-98.
- Kao, C., & Liu, S.-T. (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopments analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 133(3), 427-437.
- Lertworasirikul, S., Fang, S.-C., Joines, J. A., & Nuttle, H. L. W. (2003). Fuzzy Data Envelopment Analysis (DEA): a possibility approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 139(2), 379-394.
- Liang, G.-S., & Wang, M.-J. (1993). Evaluating human reliability using Fuzzy relation. *Microelectronics Reliability*, 33(1), 63-80.
- Lin, C. Y., & Okudan, G. E. (2009). An exploration on the use of Data Envelopment Analysis for product line selection. *IEMS*, 8(1), 47-53.
- Lozano, S., Gutiérrez, E., & Moreno, P. (2013). Network DEA approach to airports performance assessment considering undesirable outputs. *Applied Mathematical Modelling*, 37(4), 1665-1676.
- Nash, J. F. (1950). The bargaining problem. *Econometrica*, 18(2), 155-162.
- Nash, J. F. (1953). Two-person cooperative games. *Econometrica*, 21(1), 128-140.
- Oliveira, F. A. de, Paiva, A. P. de, Lima, J. W. M., Balestrassi, P. P., & Mendes, R. R. A. (2011). Portfolio optimization using mixture design of experiments: scheduling trades within electricity markets. *Energy Economics*, 33(1), 24-32.
- Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2002). *Microeconomia* (6a ed.). São Paulo: Prentice Hall.
- Santos, M. A., Marins, F. A. S., & Salomon, V. A. P. (2011). Utilização da função arbitragem de Nash nos modelos DEA CCR: uma abordagem na orientação combinada input/output sob a ótica da Teoria dos Jogos de Barganha. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 12, Ubatuba. Anais. Ubatuba: XLIII SBPO.
- Sengupta, J. K. (1992). A Fuzzy systems approach in data envelopment analysis. *Computers and Mathematics with Applications*, 24(8-9), 259-266.
- Silva, A. F., Marins, F. A. S., & Montevechi, J. A. B. (2013). Multi-choice mixed integer goal programming optimization for real problems in a sugar and ethanol milling company. *Applied Mathematical Modelling*, 37(9), 6146-6162.
- Sueyoshi, T. (2000). Stochastic DEA for restructure strategy: an application to a Japanese petroleum company. *The International Journal of Management Science*, 28(4), 385-398.
- Triantis, K. P., & Girod, O. (1998). A mathematical programming approach for measuring technical efficiency in a Fuzzy environment. *Journal of Productivity Analysis*, 10(1), 85-102.
- Wen, M., Qin, Z., & Kang, R. (2011). Sensitivity and stability analysis in Fuzzy Data Envelopment Analysis. *Fuzzy Optimization Decision Making*, 10(1), 1-10.