



Lecturas de Economía

ISSN: 0120-2596

lecturas@udea.edu.co

Universidad de Antioquia

Colombia

Introducción a las dinámicas caóticas en la teoría de los ciclos económicos

Lecturas de Economía, núm. 54, enero-junio, 2001, pp. 57-98

Universidad de Antioquia

.png, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=155218297003>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## Introducción a las dinámicas caóticas en la teoría de los ciclos económicos\*

-Introduction. -I.Definición de trayectorias caóticas. -II.Dinámicas caóticas en las fluctuaciones económicas. -Conclusiones. Referencias.

### Introducción

Cuando se observa empíricamente una variable económica, tal como el producto interno bruto, la tasa de desempleo o la tasa de inflación, es claro que ésta fluctúa y que lo hace irregularmente. Periodos de expansión son seguidos por periodos recesivos, y periodos más o menos estables de suave oscilación dan paso a periodos inestables de intensas fluctuaciones. La teoría de los ciclos económicos (TCE) es la rama de la ciencia económica que intenta describir y explicar tales fluctuaciones de las variables económicas. Su interés es el de establecer las condiciones tanto necesarias como suficientes para la existencia de oscilaciones en la economía (Gabisch-Lorenz (1989)). En este orden de

\* Este artículo es una versión reducida del trabajo de grado presentado para optar al título de economista de la Universidad de Antioquia, mismo que obtuvo el segundo puesto en el premio a la investigación estudiantil Universidad de Antioquia año 2000 (área ciencias exactas y naturales, ingeniería, economía y tecnología). Quiero expresar mis agradecimientos al profesor Jorge Pérez Restrepo por su motivación en el tema, a mi profesor y amigo Pedro Ramírez Mejía quien fue mi asesor en el trabajo de grado y muy especialmente a mi amiga Sandra Rodríguez Acosta por su valiosa ayuda en la elaboración de este texto (P.T.).

ideas, en dicha teoría se han planteado dos conjuntos de postulados teóricos con el fin de explicar los ciclos económicos.

Un primer conjunto de propuestas teóricas puede hallarse en las teorías que sustentan la existencia de los ciclos en la presencia de continuos choques tanto económicos como políticos, o de cualquier otro tipo, que impiden que la economía converja a un estado de equilibrio en el que no son posibles las fluctuaciones. Otro conjunto lo constituyen las teorías que afirman que la economía es intrínsecamente perturbada y que por lo tanto ella debe fluctuar por su propia naturaleza como resultado de las decisiones de los agentes económicos. En este sentido, la economía nunca puede alcanzar su estado estacionario dado que la interacción de los agentes económicos realimenta de manera sostenida las fluctuaciones económicas.

Ambos conjuntos de teorías —desarrollados desde las primeras décadas del siglo XX— han arrojado notables explicaciones de porqué fluctúa la economía. Modelos de acelerador-multiplicador (Samuelson (1939)), de ciclos estocásticos (Slutzky (1937)), de expectativas racionales (Muth (1961)), de ciclos endógenos (Kaldor (1940)), han contribuido significativamente al desarrollo de la teoría de los ciclos económicos.<sup>1</sup> Sin embargo, todos estos modelos se quedan cortos en su intento de explicar las irregularidades que caracterizan a los ciclos económicos. Dichos modelos poseen una forma estructural determinista que les impide generar fluctuaciones irregulares; sólo pueden producir oscilaciones irregulares, como las que se observan empíricamente, mediante el uso de perturbaciones aleatorias.

Sin embargo, desde la década de los ochenta han comenzado a surgir algunos modelos, que si bien pueden ubicarse dentro del segundo conjunto de propuestas teóricas, se diferencian de sus antecesores en que poseen una estructura determinista que puede dar cuenta de las irregularidades observadas empíricamente sin recurrir a ninguna clase de perturbación aleatoria. Los ciclos económicos permanentes e irregulares son explicados completamente por las variables del modelo, por el desempeño económico natural de las mismas dadas las decisiones racionales y maximizadoras de los agentes económicos.

<sup>1</sup> Aquí solo se mencionan los trabajos pioneros en los distintos tipos de propuestas teóricas.

Estos últimos modelos son elaborados a partir de una nueva herramienta teórica que ha sido traída desde las ciencias naturales: la teoría del caos. Conceptos como bifurcación de periodos, sensibilidad a los parámetros y a las condiciones iniciales, atractores extraños y muchos más son utilizados por los teóricos de los ciclos económicos para producir modelos que describen trayectorias temporales irregulares permanentes sin necesidad de choques externos, ya sean aleatorios o no.

En este artículo se quiere resaltar la importancia de los modelos caóticos sobre los modelos estándar de la teoría de los ciclos económicos mostrando su éxito al reproducir, teóricamente, situaciones que son observadas en la realidad haciendo uso de supuestos y condiciones puramente económicas. Para tal fin el artículo se divide en dos partes. En la primera se estudia brevemente las matemáticas de la teoría del caos y en la segunda se analizan los modelos de ciclos económicos que hacen uso de la misma.

En la primera parte sólo se estudia un aspecto muy limitado de la teoría del caos, puesto que únicamente se va a tratar el caos en el sentido de Li-York y la bifurcación de duplicación de periodos en la ecuación logística. No obstante esta limitación en el análisis, el caos en el sentido de Li-York es quizás el más utilizado en la formulación de modelos económicos dado su fácil manejo, la claridad y solidez de los resultados obtenidos a partir de su utilización. Esta sección tiene un puro carácter pedagógico pues permitirá entender los modelos desarrollados en la segunda parte además de servir como introducción al conocimiento de la teoría del caos.

En la segunda parte se trabajan algunos modelos de lo que puede llamarse la teoría de los ciclos endógenos irregulares. Allí se expondrán las propiedades y características de dicho tipo de modelos, sus ventajas desarrollan dos modelos que resultan de fácil manejo, los cuales son desarrollados exclusivamente dentro del caos en el sentido de Li-York.

En este artículo se quiere hacer hincapié en las mayores ventajas de los modelos caóticos de ciclos económicos con respecto a los modelos estándar. Se quiere hacer esto de manera clara y sencilla evitando en la

medida de lo posible el uso excesivo de las matemáticas para no entorpecer el carácter introductorio de este artículo.<sup>2</sup>

### 1. Definición de trayectorias caóticas

Cuando se habla de movimiento caótico la primera impresión que se tiene es que se está hablando de un movimiento carente de todo orden, que no sigue ninguna trayectoria definida. Así, se piensa que el caos es el desorden total donde el azar y la indeterminación absoluta impiden conocer la evolución del sistema en el tiempo.

Sin embargo, a pesar de las apariencias, el desorden que caracteriza un sendero caótico descansa sobre un “gran orden” subyacente. El caos está caracterizado por ecuaciones de movimiento deterministas que generan cada una de las intrincadas trayectorias que sigue el sistema en el tiempo. Nada hay de azar o de aleatorio en un sistema caótico;<sup>3</sup> el estado del sistema está determinado por ecuaciones que no contienen ningún factor aleatorio que dé cuenta de las irregularidades observadas.

En un primer orden de ideas, se tiene que la forma funcional más utilizada para ilustrar el caos es una ecuación en diferencias no-lineal de primer orden, conocida como la ecuación logística,<sup>4</sup>

$$x_{t+1} = \mu x_t (1 - x_t) \quad (1.1)$$

Con  $\mu$  como el valor de la variable endógena en el periodo y como un parámetro exógenamente dado. Como puede verse en la figura 1.1 la curva de fase de (1.1) representa un polinomio de segundo orden con forma de colina —por tal motivo su gráfico recibe el nombre de curva de una colina—. A medida que la colina gana altura (en la literatura del caos se dice que se estira) el sistema sufre sucesivos cambios cualitativos en su

2 Mayor rigurosidad matemática puede conseguirse en los artículos originales y en textos especializados tanto sobre teoría del caos como de ciclos económicos, algunos de los cuales son referenciados en este artículo.

3 Este tipo de comportamiento caótico es llamado caos determinista puesto que son ecuaciones deterministas las que establecen la totalidad del movimiento del sistema. Otro tipo de caos, conocido como caos ruidoso, es aquel que se ve “contaminado” por perturbaciones estocásticas que no permiten discernir un verdadero comportamiento caótico.

4 Otras formas funcionales pueden observarse en Ramírez-Ribero (1992).

comportamiento dinámico. Estos cambios reciben el nombre de bifurcaciones de duplicación de periodo<sup>5</sup> las cuales están determinadas por los valores del parámetro  $\mu$  de la ecuación logística, mejor conocido como el parámetro de estiramiento de la curva de fase de dicha ecuación.<sup>6</sup>

Con el objeto de ilustrar el camino desde los estados estacionarios de puntos fijos hasta las trayectorias caóticas vía bifurcación de duplicación de periodos se va a dar una sencilla explicación de la mecánica de dicho proceso. Primero se muestra cómo se produce la bifurcación de duplicación de periodos, exponiendo como después de muchas bifurcaciones de orden par en cierto punto crítico estas terminan por producir una bifurcación de orden impar que implica caos. Luego se muestra que tal bifurcación satisface un conjunto de condiciones que definen el movimiento caótico de un sistema dinámico.

Considérese el siguiente sistema dinámico,

$$x_{t+1} = f(x_t, \mu); x \in \mathbb{R}; \mu \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Con  $x_t$  y  $\mu$  como fueron definidas en (1.1). Específicamente, considérese que el sistema dinámico está dado por la ecuación logística (1.1),

$$x_{t+1} = \mu x_t(1-x_t), x_t \in [0,1], \mu \in [0,4]$$

se tiene que para  $\mu \in [0,4]$ , el intervalo  $[0,1]$  de la variable estado  $x$  de la ecuación logística es dibujado sobre sí mismo,<sup>7</sup> puesto que  $\mu > 4$  para el máximo de la ecuación logística en  $x_t=0.5$  será más grande que  $x_{t+1}=1$  impidiendo que el intervalo se dibuje a sí mismo."

El equilibrio estacionario (o punto fijo) de la ecuación (1.1), es decir, aquel valor de la variable estado  $x$  para el cual  $x_{t-1}=x_t=x_{t+1}$  para todo  $t$ , es determinado por la intersección de la curva de (1.1) y la línea de 45 grados. Junto al origen —el punto  $(0,0)$  del plano cartesiano— como punto de equilibrio trivial, existe un segundo equilibrio estacionario P (figura 1.1) en:

5 Otro tipo de bifurcaciones pueden estudiarse en Lorenz (1993) y en Abraham Frois-Berreri (1995).

6 Esta influencia del parámetro sobre el comportamiento cualitativo del sistema es conocida como la sensibilidad a los parámetros del sistema dinámico.

7 Es decir que el intervalo  $J[0,1]$  en el dominio de la función  $f$  tiene por imagen el intervalo  $J[0,1]$  en el rango de  $f$ . Formalmente,  $f$  se define como una función de  $J$  en  $J$ ;  $f: J \rightarrow J$

$$x^* = 1 - \frac{1}{\mu} \quad (1.3)$$

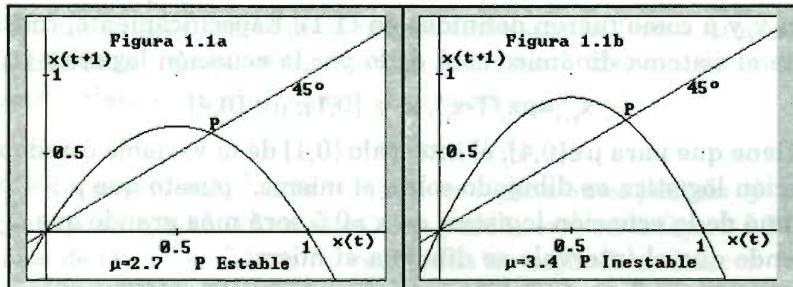
Para  $\mu < 1$  se tiene que  $x^* < 0 \Rightarrow x^* \notin [0,1]$  el punto de equilibrio no trivial está por fuera del intervalo  $[0,1]$  y el origen es un punto de equilibrio estable. Si  $\mu=1 \Rightarrow x^* = 0$  el único punto de equilibrio es el trivial y es estable. Para  $\mu > 1 \Rightarrow x^* > 0$  el punto de equilibrio trivial es inestable y existe un punto de equilibrio en el intervalo  $[0,1]$  este equilibrio se eleva cuando  $\mu$  crece.

La estabilidad del punto de equilibrio depende de la pendiente de  $f(x)$  evaluada en  $x^*$ : el punto fijo es estable mientras que la pendiente de  $f(x)$  es absolutamente más pequeña que la unidad. Con:

$$\left. \frac{df(x_t)}{dx_t} \right|_{x=x^*} = \mu(1-2x^*) = 2 - \mu \quad (1.4)$$

se tiene que el punto fijo  $P$  no trivial es estable (figura 1.1a) si  $\mu \in (1,3)$ , y es inestable (figura 1.1b) en todos los demás casos.

**Figura 1.1** La ecuación logística para diferentes  $m$



Ahora se va averiguar qué ocurre cuando  $\mu \geq 3$  y el punto fijo  $P$  se vuelve inestable; para esto se construye una ecuación en diferencias de segundo orden a partir de la ecuación logística,

$$f^{(2)}: x_{t+2} = f(x_{t+1}) = f(f(x_t)) = f^{(2)}(x_t) \quad (1.5)$$

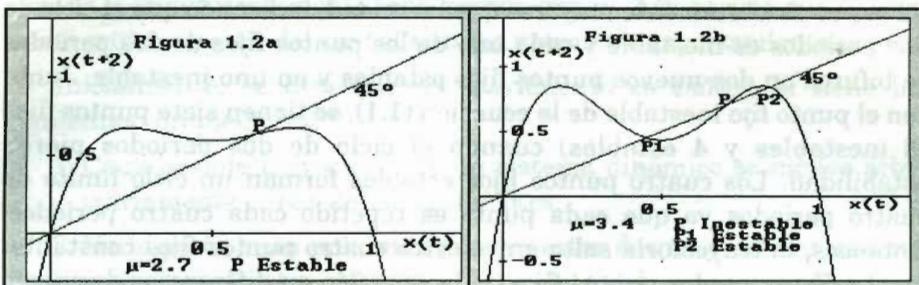
de donde  $x_{t+2} = \mu(x_{t+1} - x_{t+1}^2)$ , y,  $x_{t+1} = \mu(x_t - x_t^2)$ , así:

$$x_{t+2} = \mu(\mu(x_t - x_t^2) - \mu^2(x_t - x_t^2)^2) \quad (1.6)$$

La curva de la ecuación (1.6) está caracterizado por tres extremos, dos exteriores y uno interior. El extremo interior se estira hacia abajo mientras

que los dos extremos exteriores se estiran hacia arriba a medida que crece. Esto le da a la curva la forma de una joroba de camello con dos colinas y un valle que las separa. La profundidad del valle y la altura de las colinas permiten hacer inferencia sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio.

**Figura 1.2** El segundo rezago en la ecuación logística



Dependiendo del valor del parámetro  $\mu$  son posibles una o tres intersecciones con la línea de  $45^\circ$ . Primero se considera el caso de una única intersección (figura 1.2a). El punto fijo  $P$  es estable mientras que  $|df^2(x)/dx| < 1$ . Este punto fijo puede alcanzarse cada dos periodos. Sin embargo, como no hay otro punto fijo éste se repite cada periodo, y como tal punto corresponde a la intersección de la curva de fase de la ecuación (1.1) con la línea de  $45^\circ$  es el punto fijo de la ecuación en primer orden mostrado en la figura 1.1a. Así, la figura 1.2a es una representación del escenario del punto fijo descrito en la figura 1.1a.

Cuando  $\mu$  se incrementa surgen tres puntos de intersección del gráfico de dos colinas y la línea de  $45^\circ$  (figura 1.2b). El punto fijo  $P$  que se ha considerado hasta ahora pierde su estabilidad a causa de que la pendiente de  $f^2$  es mayor que la unidad en valor absoluto. En los dos nuevos puntos ( $P_1$  y  $P_2$ ) esta pendiente es menor que la unidad, por tanto estos puntos fijos del mapa  $f^2$  (puntos fijos de orden 2) serán estables. Se ha producido una duplicación de periodos, al pasar de un punto que se repite en cada periodo a dos puntos que se repiten cada dos periodos. Esta duplicación es conocida como una bifurcación de duplicación de periodos

Considérese uno solo de tales puntos, por ejemplo  $P_1$ : este punto será alcanzado cada dos periodos. Lo mismo se mantiene para el punto  $P_2$ .

Entonces, se tiene que la trayectoria salta entre los dos puntos de intersección de periodo a periodo (los puntos se alternan en cada periodo). El equilibrio estable consiste de un permanente cambio entre dos valores. Tal situación es llamada un ciclo límite de dos periodos.

Si  $\mu$  se incrementa aún más las pendientes de  $f^2$ <sup>2)</sup> evaluadas en P1 y P2 serán absolutamente mayores que la unidad, indicando que el ciclo de dos periodos es inestable y cada uno de los puntos fijos de dos periodos se bifurca en dos nuevos puntos fijos estables y en uno inestable. Junto con el punto fijo inestable de la ecuación (1.1), se tienen siete puntos fijos (3 inestables y 4 estables) cuando el ciclo de dos periodos pierde estabilidad. Los cuatro puntos fijos estables forman un ciclo límite de cuatro periodos ya que cada punto es repetido cada cuatro periodos. Entonces, la trayectoria salta entre estos cuatro puntos fijos constantemente. Estos son los puntos fijos de la ecuación en diferencias de cuarto orden  $f^4$ <sup>4)</sup>. Nuevamente se han duplicado los periodos. Después de  $n$  bifurcaciones de duplicación de periodos se tiene un ciclo de  $2^n$  periodos.

Una propiedad interesante que tiene que ver con la bifurcación de duplicación de periodos está dada por la reducción de la distancia entre sucesivos valores de  $\mu$  para los que la bifurcación ocurre. En efecto, la sucesión de tales valores de  $\mu$  converge a un valor límite  $\mu_c$  donde el periodo del ciclo converge a infinito. Feigenbaum (1978) demostró que en la ecuación logística la sucesión de bifurcación de duplicación de períodos sigue la regla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} \right) = \delta \approx 4.6692\dots$$

Donde el número  $\delta$  es el número de Feigenbaum. Como  $\delta$  es una constante, la sucesión  $\{\mu_n\}$  converge a un valor finito. Si se conocen dos valores sucesivos de bifurcación se puede conocer el próximo valor de bifurcación a partir de la ecuación anterior<sup>8</sup>, haciéndose posible calcular todos los valores de bifurcación de la ecuación logística. Por tanto, incrementando  $\mu$  los puntos fijos de periodo  $2^n$  (con  $n$  tendiendo a infinito) están dados por el valor límite  $\mu_c$ . Para la ecuación logística el valor límite es aproximadamente  $\mu_c = 3.575$ .

8 Por ejemplo, si se tienen  $\mu_1 = 3$ , y  $\mu_2 = 3.45$  que son dos valores de bifurcación sucesivos de la ecuación de Feigenbaum, se tiene que  $\mu_3 = ((1+\delta) \mu_2 - \mu_1) / \delta \approx 3.54$ .

Para  $\mu > \mu_c$  la situación cambia drásticamente, cada uno de los iniciales puntos fijos estables se vuelve inestable. Además, hay un número infinito de puntos fijos con diferentes períodos y un incontable número de valores iniciales  $x_0$  con trayectorias aperiódicas. También pueden ocurrir puntos fijos de períodos impares (período tres), los cuales sólo aparecen cuando  $\mu$  es suficientemente más grande que  $\mu_c$ . Así, se dice que  $\mu_c$  es el punto crítico a partir del cual el sistema entra en comportamiento caótico.

Inicialmente, se dice que un movimiento es caótico si tiene las siguientes propiedades:

1. Cada posible trayectoria de un sistema dinámico se mueve arbitrariamente cerca de cualquier otra.
2. No importa cuan próximas puedan estar dos trayectorias una con respecto a la otra, ellas eventualmente deben separarse.
3. Inclusive si una trayectoria se aproxima temporalmente a un ciclo de orden  $k$ , ella debe alejarse de ese ciclo.

Si además, dos puntos iniciales diferentes, arbitrariamente cercanos, describen trayectorias que divergen drásticamente en los períodos siguientes se dice que el sistema es caótico<sup>9</sup>.

Cuando un sistema dinámico cumple estas propiedades en su movimiento se dice que el sistema es caótico en el sentido de Li-York<sup>10</sup>. Para presentar formalmente las condiciones que debe cumplir un sistema caótico en el sentido de Li-York inicialmente se plantea el siguiente postulado:

Sea  $F: J \rightarrow J$ . Para  $x \in J$ ,  $F^{(0)}(x)$  denota  $x$  y  $F^{(n+1)}(x)$  denota  $F(F^{(n)}(x))$  para  $n=0, 1, \dots$ . Se dice que  $p$  es un punto periódico con período  $n$  si  $p \in J$ , y,  $p = F^{(n)}(p)$  con  $p \neq F^{(k)}(p)$  para  $1 \leq k < n$ .

<sup>9</sup> Esta divergencia de dos puntos que inicialmente estaban muy cercanos se conoce como la sensibilidad a las condiciones iniciales del sistema dinámico.

<sup>10</sup> En 1975 Li y York presentaron un teorema en el que se establecen las propiedades y condiciones de suficiencia para la existencia de caos. Todas las propiedades y condiciones presentadas en esta sección son tomadas de este teorema.

Adicionalmente, se dice que es eventualmente periódico si para algún entero positivo  $m, p = F^{(m)}(q)$  es periódico<sup>11</sup>. Ya que  $F$  no necesita ser uno a uno pueden existir puntos los cuales son eventualmente periódicos pero que no son periódicos. El objetivo es conocer las situaciones para las cuales las iteraciones de un punto pueden ser muy irregulares. Un caso especial de este supuesto dice que si existe un punto periódico con periodo tres, entonces para cada entero  $n=1,2,3,\dots$  existe un punto periódico con periodo  $n$ . Ademas, existe un subconjunto no numerable de puntos  $x \in J$  los cuales ni siquiera son asintóticamente periódicos<sup>12</sup>.

Ahora se plantea el teorema de Li-York para movimientos caóticos:

Sea  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalo, y sea  $F: J \rightarrow J$  continua. Se asume que hay un punto  $a \in J$  para el cual los puntos  $b = F(a), c = F^{(2)}(a)$ , y  $d = F^{(3)}(a)$  satisfacen,

$$d \leq a < b < c \quad \text{y} \quad d \geq a > b > c.$$

Entonces:

T1: Para cada  $k = 1, 2, \dots$  hay un punto periódico en  $J$  que tiene periodo  $k$

Además:

T2: Hay un conjunto no numerable  $S \subset J$  (que no contiene puntos periódicos), el cual satisface las siguientes condiciones:

(A) Para cada  $p, q \in S$  con  $p \neq q$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0 \quad (2.1)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| = 0 \quad (2.2)$$

B) Para cada  $p \in S$  y un punto periódico  $q \in J$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0$$

---

11 El hecho de que un punto periódico con periodo  $n$  satisaga  $p = F^{(n)}(p)$  muestra por qué cuando se pretende mostrar la existencia de puntos fijos de orden dos se recurre a la ecuación de segundo orden de  $f$ , ya que el periodo dos implica que  $P = F^2(p)$ , del mismo modo un ciclo de cuatro periodos es tal que  $p = f^4(p)$  y, por tanto, se requiere el gráfico de la ecuación de cuarto orden de  $f$  dado por  $f^4$  para estudiar la mecánica de dicho ciclo.

12 Se dice que  $x \in J$  es asintóticamente periódico si existe un punto periódico  $p$  para el cual  $F^{(n)}(x) - F^{(n)}(p) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$

Nótese que la hipótesis del teorema se satisfará si existe un punto periódico con periodo 3. Por tanto, se dice que periodo tres implica caos (Li-York (1975)).

Hay otros teoremas que establecen otros conjuntos de condiciones pero es el teorema de Li-York el de mayor utilización en los distintos trabajos que sobre dinámicas caóticas se han hecho en economía<sup>13</sup>. La satisfacción de las condiciones del teorema de Li-York son las condiciones suficientes para que una trayectoria seguida por un sistema dinámico se diga que es caótica en el sentido de Li-York.

Baumol y Benhabib (1989) exponen de una manera bastante intuitiva el modo en que emerge un ciclo de tres períodos en la ecuación logística. Las siguientes líneas se fundamentan en la explicación que dichos autores hacen sobre el tema.

Hasta ahora se ha tratado con ciclos de periodo par; para estudiar los ciclos impares (en este caso periodo tres) es necesario recurrir al diagrama de fase para  $x_{t+3} = f^{(3)}(x_t)$ . En  $f^{(3)}$  existen cuatro colinas cuando  $\mu$  es suficientemente grande (figura 1.3b). Mientras que  $\mu$  sea relativamente pequeña la curva de fase cruza el rayo de  $45^\circ$  una vez (no se está contando el origen): este es el punto de equilibrio estable no trivial para  $f(x_t)$  (figura 1.3a). Sin embargo, cuando  $\mu$  se incrementa crecen las cimas y se profundizan los valles de las colinas de  $f^{(3)}$  y eventualmente  $f^{(3)}$  cruza el rayo de  $45^\circ$  siete veces. Los correspondientes seis nuevos cruces corresponden a puntos sobre dos ciclos distintos de tres períodos, uno de los cuales es estable y el otro inestable. A diferencia de las bifurcaciones de ciclos de orden par, las cuales se derivan desde ciclos de más bajo periodo cuando sus puntos de equilibrio pierden estabilidad, los ciclos de periodo impar no bifurcan a partir de ciclos de más bajo orden, sino que simultáneamente emergen o desaparecen en pares con un ciclo estable y uno inestable constituyendo cada par.

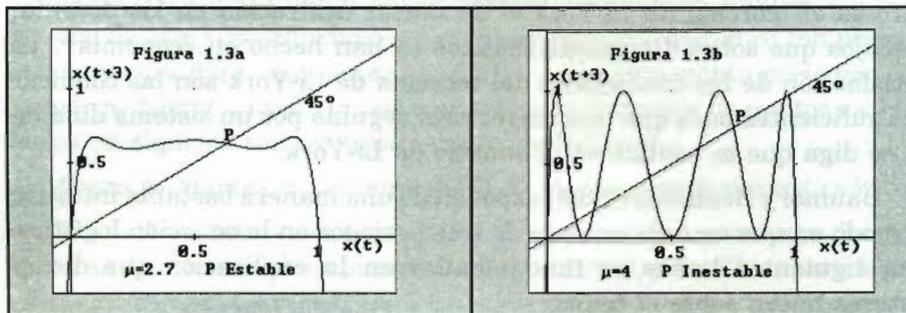
Como ya se dijo antes, para  $\mu$  la dinámica de la ecuación logística cambia drásticamente. En este punto crítico los ciclos pares de orden 2<sup>n</sup>

<sup>13</sup> Otras condiciones de suficiencia son dadas por Diamond (1976) y Li-Misiurewicz-Pianigiani-York (1982).



se ven reemplazados por un ciclo impar de orden tres que satisface las condiciones del teorema de Li-York indicando, por tanto, la presencia de caos.

**Figura 1.3** el tercer rezago de la ecuación logística



Ahora se dispone de las suficientes herramientas para abordar las teorías de ciclos económicos que hacen uso de modelos dinámicos caóticos.

## II. Dinámicas caóticas en las fluctuaciones económicas

### A. Consideraciones teóricas

Al comenzar este artículo se hizo mención de algunos modelos estándar de ciclos económicos. Específicamente se referenciaron el modelo del acelerador-multiplicador lineal de Samuelson, a partir del cual se han hecho diversas versiones y modificaciones<sup>14</sup>, y los modelos estocásticos de ciclos económicos con expectativas racionales, los cuales se constituyeron en una verdadera revolución de la macroeconomía en las décadas sesenta y setenta del siglo XX. Finalmente, se mencionó el modelo de Kaldor. Este último explica las dinámicas endógenas en las oscilaciones económicas y es base para trabajos posteriores sobre las mismas<sup>15</sup>.

<sup>14</sup> Tales como el acelerador de Hicks (1954)—esta fecha corresponde a la traducción española pues el original en inglés data de 1950(HICKS, J.R. (1950), A Contribution to the Theory of the Trade Cycle, Oxford, Oxford University Press.)—, el modelo de influencia de inventarios de Metzler (1941) o el acelerador no-lineal de Goodwin (1951).

<sup>15</sup> Algunas versiones son las de Chang-Smyth (1971), Ichimura (1955). Varian (1979) presentó una versión del mismo haciendo uso de la teoría de catástrofes.

No obstante sus diferencias desde el punto de vista de la necesidad o no de los choques exógenos, todos los modelos de la que puede llamarse teoría clásica de los ciclos económicos (TCCE) presentan una característica común: la estructura matemática de los modelos, en su forma determinista, sólo permite explicar oscilaciones cíclicas regulares en forma de ondas de seno o coseno y la única forma de producir oscilaciones irregulares es mediante la consideración de perturbaciones exógenas estocásticas<sup>16</sup>. Es decir, para que los modelos de la TCCE muestren perturbaciones económicas semejantes a las observadas empíricamente requieren de perturbar su forma determinista mediante factores aleatorios que sigan una determinada distribución de probabilidad.

Si bien la aleatoriedad permite construir modelos que presentan trayectorias temporales muy ajustadas a las reales, el mismo carácter de aleatoriedad no los hace muy deseables dentro de la teoría de los ciclos económicos. No es muy satisfactorio decir que las fluctuaciones se deben al azar que está presente, indefectiblemente, en las variaciones estocásticas. Lo correcto sería que las irregularidades observadas en las variables económicas puedan ser explicadas por factores puramente económicos bien identificados o que al menos la aleatoriedad sea mínima como factor explicativo. Desde el punto de vista teórico el azar se constituye en una debilidad de los modelos estocásticos de ciclos económicos, no obstante su buen ajuste a la realidad. El teórico debe tener el mayor control sobre el modelo que construye y los factores aleatorios reducen dicho control.

Los modelos del tipo acelerador-multiplicador y de ciclos estocásticos le dan gran peso a las consideraciones externas al modelo, pues son ellas las que impiden que la economía alcance su estado estacionario. Además, modelos como el de Samuelson (1939) sólo permiten fluctuaciones endógenas dentro de un rango muy reducido de valores de los parámetros. Mientras que los valores menos restringidos en su consecución determinan trayectorias monótonas u oscilatorias explosivas sin validez conceptual, o trayectorias cíclicas amortiguadas que explican convergencia a un estado natural de equilibrio al que se debe llegar si no existe nada que lo impida. Obviamente

---

16 Esto es válido tanto para los modelos lineales como no-lineales.



estas son aproximaciones muy limitadas a las verdaderas trayectorias temporales de las distintas variables económicas.

Por su parte, los modelos no-lineales que permiten producir ciclos endógenos, tales como el de Kaldor (1940), están reducidos a trayectorias muy estables. Además, estos modelos requieren de supuestos muy restrictivos, en su mayoría *ad hoc*, para garantizar que dichos ciclos endógenos puedan producirse y que ponen en duda su aplicabilidad dentro de la teoría económica. Sus resultados son muy atractivos ya que el azar no existe en estos modelos como causante de los ciclos, porque estos se deben al propio desempeño de la economía<sup>17</sup>. Su limitación radica en que sólo pueden dar cuenta de trayectorias estables regulares.

Un buen modelo de ciclos económicos es aquel que sea capaz de describir la trayectoria temporal irregular de una variable económica, como por ejemplo el PIB, considerando factores netamente económicos, tales que su interacción natural produzca oscilaciones irregulares semejantes a las que se producen con perturbaciones exógenas estocásticas. Es decir, debe ser un modelo determinista de oscilaciones irregulares de apariencia aleatoria. Adicionalmente, sus supuestos no deben violar la intuición y la racionalidad económica, y los parámetros que determinan las oscilaciones irregulares deben obtenerse dentro de un amplio rango de posibilidades tanto teóricas como empíricas.

Ya que los modelos mencionados hasta ahora no cumplen con todos los requisitos del párrafo anterior, sólo pueden ser considerados como convenientes o adecuados modelos de ciclos económicos que se quedan cortos en su apreciación de los mismos. Es aquí donde se presenta una alternativa a la teoría clásica de los ciclos económicos al surgir desde finales de la década de los setenta y comienzo de la de los ochenta<sup>18</sup> una nueva aproximación

17 A no ser que se vean complementados con estructuras de tipo aleatorias tales como un factor de perturbación  $\mu$ . Claro que hacer esto sería una incorrección pues estos modelos lo que pretenden es explicar los ciclos económicos como consecuencia de factores puramente deterministas y no aleatorios.

18 No hay que ser muy estricto con esta fecha pues ya a comienzos de los sesenta se plantean los primeros modelos económicos no-lineales de trayectorias caóticas. Lo que pasa es que oficialmente se reconocen como los primeros en hacer este tipo de modelos a Stutzer, Jess Benhabib y Richard Day quienes presentaron sus trabajos en escritos de 1980 y 1981, respectivamente.

teórica a los ciclos económicos. Esta aproximación puede llamarse la teoría de los ciclos endógenos irregulares (TCEI)<sup>19</sup>. Específicamente irregularidad se refiere a comportamiento caótico desde un punto de vista formal.

En los modelos de la TCEI las variables fluctúan endógenamente sin necesidad de choques exógenos<sup>20</sup>, sin supuestos *ad hoc* y en trayectorias temporales irregulares semejantes a las que se producen por perturbaciones aleatorias. En otras palabras, estos son buenos modelos de ciclos económicos. Si bien estos modelos no dan cuenta perfecta de la realidad sí la representan mejor que los modelos de la TCCE. Para la teoría de los ciclos endógenos irregulares la fluctuación en las variables económicas es una característica natural de la actividad económica propiamente dicha.

La economía fluctúa porque la actividad propia de los agentes económicos, ya sea tanto a nivel individual (micro) como agregado (macro), es inherentemente perturbada y tal perturbación es mostrada por las fluctuaciones irregulares observadas empíricamente en las variables económicas. Las irregularidades pueden obtenerse considerando variables como el consumo, el ahorro, la inversión, el empleo, la tasa de interés, el tipo de cambio y la inflación, entre otras.

Inclusive al comparar los modelos de la TCEI con los modelos de expectativas racionales se puede establecer, teóricamente, que no se requiere que los agentes racionales sean sorprendidos por los hacedores de política para que se produzcan fluctuaciones económicas. Más aún, bajo un esquema de predicción perfecta la economía fluctúa. Grandmont (1992) ofrece un buen modelo que corrobora tal hipótesis.

Esquemas de competencia perfecta Deneckere-Pelikan(1987), o imperfecta Dana-Montrucchio (1987); modelos de generaciones traslapadas Benhabib-Day (1992); modelos clásicos de crecimiento Day (1983); modelos de investigación y desarrollo Baumol-Wolff (1992); modelos de inventarios

<sup>19</sup> Tanto el concepto de teoría clásica de los ciclos económicos (TCCE) como el de teoría de los ciclos endógenos irregulares (TCEI) no están acuñados oficialmente pero son pertinentes por motivos de facilidad de exposición y claridad.

<sup>20</sup> Los cuales no se descartan y siguen teniendo consecuencias económicas importantes pero que ya no son la causa única o primordial de los ciclos económicos.

Laroque (1992) e incluso modelos de tipo Kaldor Day-Shafer (1992) y muchos más pueden producir trayectorias temporales irregulares de tipo caótico.

Los modelos de la TCEI van más allá de los de la TCCE puesto que producen todo un conjunto de resultados teóricos que escapan a las limitaciones de regularidad, exogenidad y aleatoriedad existentes en los modelos de la TCCE. Inclusive bajo los parámetros adecuados los modelos TCEI producen los mismos resultados de estados estacionarios o de trayectorias cíclicas regulares propias de los modelos deterministas TCCE. Obviamente son modelos mucho más completos que los tradicionales por que no sólo producen sus mismos resultados sino otros que los primeros están imposibilitados de alcanzar.

### B. Las estructuras modelísticas

Dada una relación particular entre las variables económicas los modelos TCEI pueden producir trayectorias cíclicas irregulares, siempre y cuando se satisfagan las condiciones de suficiencia para que tales trayectorias se produzcan. En la primera sección se mostró una de tales condiciones suficientes para que un modelo de la teoría de los ciclos endógenos irregulares presente movimientos irregulares, es decir que manifieste dinámicas caóticas.

La estructura matemática de los modelos de la TCEI está dada por ecuaciones de movimiento no-lineales ya sean en tiempo continuo o discreto, de una o varias dimensiones, de primer orden u orden superior<sup>21</sup>. Estas ecuaciones tienen la propiedad de producir diagramas de fase circunscritos en intervalos que se dibujan a sí mismos. Tales diagramas aparecen completamente contenidos en una región específica del espacio de fases y determinan lo que se llama un atractor extraño<sup>22</sup>. Éste posee la propiedad

21 La dimensión está dada por el número de variables independientes en la ecuación de movimiento y que determina que existan sistemas de ecuaciones con una ecuación (unidimensional) o con dos o más ecuaciones (bidimensional, o de alta dimensión). El orden lo da en las ecuaciones en diferencias el número de rezago, mientras que en las ecuaciones diferenciales lo da el número de derivación (ver Chiang (1987) y Gandolfo (1997)).

22 Formalmente se dice que un atractor extraño es un conjunto cerrado y acotado.

de que cualquier punto inicial dentro del intervalo que lo contiene termina por converger a él mismo, y que puntos que inicialmente estaban muy cerca el uno del otro, en poco tiempo están ocupando locaciones muy distantes dentro del atractor. Además, el atractor extraño tiene propiedad ergódica, es decir, todo punto de él tiene la misma probabilidad de ocurrencia<sup>23</sup>.

Si estas condiciones se están dando en un sistema dinámico se dice que el sistema está inmerso en una trayectoria caótica y si la misma está completamente explicada por ecuaciones deterministas libres de toda aleatoriedad se dice que se trata de caos determinista<sup>24</sup>. Y si hay una sola variable explicativa se dice que la trayectoria dinámica presenta caos determinista unidimensional, o de baja dimensión<sup>25</sup>.

Cuando se trata de caos determinista de baja dimensión, la curva de fase que describe el atractor extraño tiene la forma de colina descrita en la primera sección. Es esta forma particular de las ecuaciones de movimiento la que permite que se generen las trayectorias irregulares propias de las dinámicas caóticas. No importa cuán complicada sea la forma del diagrama de fase o atractor extraño unidimensional, todos y cada uno de los puntos que lo determinan están sobre la curva de fase en forma de colina de la primera sección<sup>26</sup>. La curva subyace ineludiblemente en el atractor<sup>27</sup>.

Estas son las propiedades dinámicas que debe cumplir un modelo de ciclos económicos para que puedan producirse ciclos endógenos irregulares que se asemejan a los producidos por choques exógenos aleatorios<sup>28</sup>. Una vez

23 En otras palabras el sistema puede estar en cualquier punto del atractor extraño con la misma probabilidad (ver Lorenz (1993)).

24 Si tiene ruido aleatorio se llama caos ruidoso (ver Brock-Milliaris (1989)).

25 Si tiene más de una variable, lo que implica que se trate de un sistema de más de una ecuación, se habla de caos determinista de alta dimensión. Si hay dos ecuaciones es bidimensional, si hay tres tridimensional y así sucesivamente (ver Lorenz (1993)).

26 Una aproximación muy intuitiva a este respecto puede verse en Restrepo-Rodríguez (2000).

27 Es aquí donde los economistas del caos buscan caos determinista de baja dimensión como motor de las series de tiempo. Ya que si una serie de tiempo es generada por un motor caótico y no por uno estocástico puede ser posible hallar dimensión uno en el diagrama de fase que describe tal trayectoria temporal, cosa que no ocurriría si el motor es estocástico y no caótico. Dimensiones próximas a uno pueden indicar la presencia de caos ruidoso (ver Brock-Milliaris (1989)).

28 Esta semejanza es la que trata de discernir la econometría del caos al separar las irregularidades deterministas de aquellas aleatorias.

que el modelo dinámico en cuestión cumpla con todos los requisitos estructurales ya descritos y satisfaga las condiciones suficientes se dice que el modelo es uno de trayectorias dinámicas caóticas y que es por tanto un modelo de la TCEI.

En la tabla 2.1 se resumen las diferencias expuestas en este artículo entre los modelos de la teoría clásica de los ciclos económicos y la Teoría de los ciclos endógenos irregulares.

**Tabla 2.1 Los modelos de ciclos económicos**

	Teoría clásica de los ciclos económicos TCCE	Modelos que dependen de choques exógenos	Modelos endógenos	Teoría de los ciclos endógenos irregulares TCEI
Deterministas		Estocásticos		
<b>Los modelos tienen estas características:</b>				
Los parámetros que permiten ciclos endógenos son muy limitados	X			
La predicción perfecta no inhibe los ciclos			X	X
Los ciclos son el resultado de la propia actividad económica			X	X
Sensibilidad a las condiciones iniciales				X
Sensibilidad a los parámetros	X*			X
<b>Propiedades dinámicas:</b>				
Trayectorias monótonas	X		X	X
Trayectorias cíclicas regulares	X		X	X
Trayectorias cíclicas irregulares			X	X
<b>Para producir ciclos irregulares requieren de:</b>				
Choques exógenos permanentes	X		X	
Aleatoriedades	X		X	X
Supuestos Ad hoc				X

\*En los modelos deterministas de la TCCE la sensibilidad a los parámetros puede implicar que las trayectorias sean monótonas u oscilatorias y que éstas puedan ser amortiguadas, constantes o explosivas. En los modelos caóticos la sensibilidad tiene que ver con bifurcación de períodos y generación de dinámicas caóticas.

29 En este artículo se está hablando de modelos TCEI que satisfacen las condiciones para caos determinista de baja dimensión, caos topológico o caos en el sentido de Li -York. Caos de más alto orden o en otro sentido, tal como el ergódico, desbordan por completo el alcance de este artículo. Para su estudio puede consultarse Lorenz (1993), Gabisch-Lorenz (1989), Deneckere-Judd (1992), Grandmont (1987).

A continuación se presentan algunos ejemplos de modelos de la teoría de los ciclos endógenos irregulares, estos modelos son fáciles de manejar y presentan resultados muy visibles; además, son bastante didácticos y permiten un buen punto de comparación con los modelos ya mencionados de la TCCE<sup>30</sup>.

#### a. Un modelo de caos keynesiano<sup>31</sup>

En 1985 Richard Day y Wayne Shafer presentaron un modelo de ciclos económicos de precios fijos, con supuestos puramente keynesianos y con formas funcionales específicas<sup>32</sup>. En este modelo ellos recurren a lo que denominan "Teoría K" para dar cuenta de trayectorias irregulares descritas por modelos puramente deterministas. Mediante el uso de ciertos supuestos sobre el consumo y la inversión, y a partir de una ecuación en diferencias no-lineal de primer orden, los autores construyen un modelo de dinámica perturbada (*dynamic scrambling*) que reúne todos los requisitos para producir las trayectorias caóticas de las que se habló en la primera sección.

Especificamente se considera un modelo macroeconómico de precios fijos. El sector monetario de la economía está representado por la demanda de dinero  $D^m(r, Y)$  y la oferta de dinero  $S^m(r, Y; M)$ , donde  $r$  es la tasa de interés,  $Y$  es el ingreso nacional medido en términos reales y  $M$  es el stock de dinero (parámetro de la oferta monetaria). Además, se tiene una ecuación de equilibrio en el mercado de dinero,  $D^m(r, Y) = S^m(r, Y; M)$ . Esta ecuación define la curva LM. En ella se tiene que la tasa de interés que equilibra el mercado de dinero es función del ingreso nacional y del stock de dinero,  $r = L(Y; M)$ .

El mercado de bienes está representado por la función de consumo  $C = (r, Y)$  y la función de inversión  $I = I(r, Y)$ . El gasto y la inversión autónomos están dados por el parámetro Sustituyendo la función de

30 La literatura económica es abundante en modelos TCEI de las más variadas características. En este artículo ya se mencionaron algunos.

31 Este modelo fue inicialmente publicado en 1985 en el *Journal of macroeconomics* 7, pp. 277-95. En este artículo se toma el publicado en 1992. Day-Shafer (1992).

32 Por razones de espacio y sencillez, en este artículo sólo se va a tomar la forma kaldoriana de tales funciones específicas.

interés en las funciones de consumo e inversión se tienen la función de consumo-ingreso (CY),

$$G(Y; M) = C[L(Y; M), Y] \quad (2.1)$$

Y la función de inversión-ingreso (IY),

$$H(Y; M) = I[L(Y; M), Y] \quad (2.2)$$

Se define una función de demanda agregada en la que la demanda del próximo periodo depende del consumo y la inversión actuales, que son determinados por el ingreso corriente y el stock de dinero constante,

$$Y_{t+1} = \theta(Y_t; \mu, M, A) = G(Y_t; M) + \mu H(Y_t; M) + A \quad (2.3)$$

Donde  $\mu \geq 0$  es un parámetro de la fuerza o la intensidad de la inversión<sup>33</sup> y representa el gasto del gobierno. Para que esta ecuación en diferencias presente fluctuaciones irregulares es suficiente mostrar que la ecuación de demanda agregada (2.3) sea continua y cerrada<sup>34</sup> en un intervalo  $J=[0, Y^u]$  y que exista un nivel de ingreso agregado,  $Y^c$ , tal que

$$\theta^{(3)}(Y^c) \leq Y^c < \theta(Y^c) < \theta^{(2)}(Y^c) \quad (2.4a)$$

$$\text{o que, } \theta^{(3)}(Y^c) \geq Y^c > \theta(Y^c) > \theta^{(2)}(Y^c) \quad (2.4b)^{35}$$

Donde  $\theta^{(n)}$  es el n-ésimo rezago de  $\theta$ . Una vez establecido el modelo de manera genérica comienzan a construirse las formas funcionales específicas que permitirán que se satisfagan las condiciones (2.4a y 2.4b) y que, por tanto, se tenga caos determinista de baja dimensión en el sentido de Li-York.

Especificamente Day y Shafer establecen tres diferentes supuestos de formas funcionales de CY e IY para aplicar las condiciones de Li-York. En este artículo solo se van a considerar dos<sup>36</sup>.

33 Este parámetro puede considerarse como equivalente al acelerador-multiplicador de Samuelson, ya que ambos determinan la respuesta de la economía ante cambios en el consumo (caso samuelsoniano) y en la inversión, como es el caso en el modelo de Day-Shafer.

34 Cerrado significa que  $\theta(Y) \in J = (0, Y^u] \forall Y \in [0, Y^u]$  para alguna cota  $Y^u$ . El intervalo  $J = [0, Y^u]$  es equivalente al intervalo  $[0, 1]$  del teorema de Li-York. Por tanto, cerrado significa que la función se dibuja a sí misma en el intervalo  $[0, Y^u]$ .

35 Obviamente estas son equivalentes a las condiciones de Li-York mostradas en la primera sección.

36 El segundo supuesto da cuenta de curvas de inversión en forma de colina similares a las de la primera sección, y dentro de un contexto teórico corresponden a curvas de inversión de tipo Kaldor.

**Supuesto 1 (S1):** El consumo  $G(Y)$  es una función continua del ingreso con pendiente positiva, acotada por debajo por una función de consumo lineal  $\beta Y$  con  $0 < \beta < 1$  y por arriba por  $Y$ . Se supone también que  $G(0) = 0$ . Este supuesto puede ser satisfecho si  $C(r, Y) = \beta Y$ , que se constituye en un caso lineal.

Para la función de inversión se considera:

**Supuesto 2 (S2):** La inversión es una función continua no negativa, la cual es creciente y luego decreciente aproximándose a cero cuando  $Y$  se aproxima a alguna cota  $Y^u$  con  $H(Y^u) = 0$  (véase la figura 2.1a).

S2 es relevante cuando hay un impacto directo del ingreso sobre la inversión pero el cual es compensado por la creciente tasa de interés.

De (2.3) se observa que si  $\mu$  es cero no hay inversión y si  $\theta(Y^u) < Y^u$  un único estado estacionario existe, el cual es positivo si  $A > 0$ .  $Y^u$  es el ingreso de pleno empleo y plena capacidad. Cuando  $\mu$  es pequeña pero positiva, la inversión afecta la demanda agregada pero aún se mantiene el estado estacionario. A medida que  $\mu$  crece las propiedades dinámicas de la demanda agregada se ven modificadas ya que la inversión va teniendo mayor efecto sobre la misma. Con  $\mu$  creciente la demanda agregada dada por (2.3) exhibirá la forma de un anzuelo de pescado o de  $Z$  inclinada. En este artículo sólo se considera la segunda forma<sup>37</sup> (véase figura 2.1b).

La posibilidad de caos se da mediante el siguiente procedimiento. Haciendo uso de la forma funcional representada en la figura 2.1b se tiene la existencia de un máximo local  $Y^{max}$  con maximizador  $Y^*$ <sup>38</sup> (figura 2.2a). Dada esta forma existe un estado estacionario  $\bar{Y}$ . Si  $Y^{**} > \bar{Y}$  existe un  $\mu$  suficientemente grande tal que:

$$\theta(Y^{max}) \leq \min \theta^{-1}(Y^*) \quad (2.5)$$

Sea  $Y^c = \min \theta^{-1}(Y^*)$ , y se tiene,

$$\theta(Y^{max}) \leq Y^c < Y^* < Y^{max} \quad (2.6)$$

37 La forma de anzuelo de pescado también permite la existencia de caos en la demanda agregada. Se excluye en este artículo por razones de espacio, y porque el modelo tipo Kaldor que se verá a continuación se acomoda más adecuadamente a la forma de  $Z$  inclinada.

38  $Y^{**}$  es el valor del ingreso que minimiza la demanda agregada,  $Y^{min}$

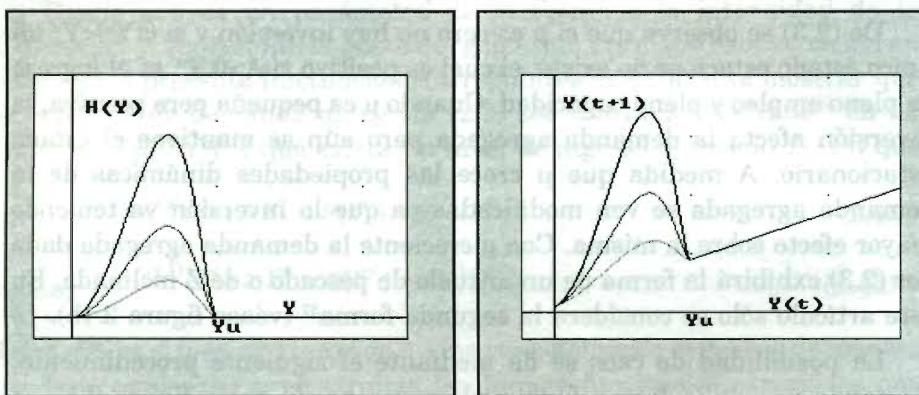
Ya que  $Y^* = \theta(Y^c)$ ,  $Y^{max} = \theta(Y^*) = \theta^{(2)}(Y^c)$ , y  $\theta(Y^{max}) = \theta^{(3)}(Y^c)$  se tienen las condiciones suficientes dadas por (2.4a) para la existencia de caos. Dado que existe un  $\mu$  con  $Y^{max} < Y^u$  (véase la figura 2.2a).

**Figura 2.1** Formas funcionales

para la inversión y la demanda agregada

**Figura 2.1a** Función de inversión-ingreso (IY)

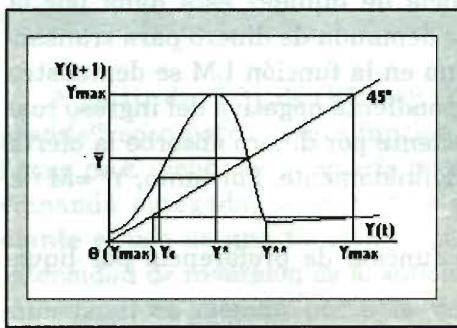
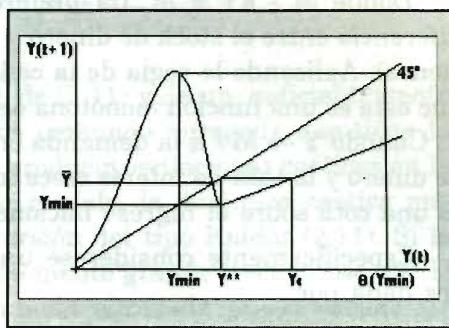
**Figura 2.1b** Función de demanda agregada



De manera análoga puede obtenerse comportamiento caótico haciendo uso de  $Y^{**}$  y  $Y^{min}$  (figura 2.2b). Nuevamente existe un solo estado estacionario  $Y$ . Este punto es estable si  $Y^{**} < Y$ , pero si  $Y^{**} > Y$  existe un  $m$  suficientemente grande tal que.

$$\theta(Y^{min}) \geq \max \theta^{-1}(Y^{**}) \quad (2.7)$$

Como en el caso anterior,  $Y^c = \max \theta^{-1}(Y^{**})$ . Por lo tanto  $\theta(Y^{min}) \geq Y^c > Y^{**} > Y^{min}$ . A causa de que  $Y^{**} = \theta(Y^c)$ ,  $Y^{min} = \theta^{(2)}(Y^c)$ , y  $\theta Y^{min} = \theta^{(3)}(Y^c)$ . Se tienen suficientes condiciones para caos (2.4b) dado que allí existe  $\mu$  con  $\theta(Y^{min}) < Y^u$ , ver figura 2.2b.

**Figura 2.2 Función de demanda agregada****Figura 2.2a Condiciones  
(2.4a) para caos****Figura 2.2b Condiciones  
(2.4b) para caos**

Ahora es posible presentar una forma funcional que se ajusta a los requerimientos establecidos arriba. Para poder generar una curva de demanda agregada que presente la forma de Z inclinada se considera una curva de consumo que satisface S1, por ejemplo,  $G(Y) = \beta Y$  y una curva de inversión dada por S2. Esta curva se conoce como una curva de inversión de tipo Kaldor. La construcción de esta curva de inversión se realiza del modo siguiente:

La demanda de dinero para transacciones está dada por:

$$M_1 = kY,$$

donde  $k = 1/V$ . Con  $V$  como la velocidad de circulación del dinero<sup>39</sup>. Por su parte, la demanda por liquidez está dada por la función de preferencia de liquidez,

$$M_2 = L(r), r \geq r^* \geq 0.$$

Donde  $r^*$  es el nivel de tasas de interés en el que la preferencia de liquidez crece indefinidamente<sup>40</sup>. Se supone que  $L(r)$  es monótona con

39 Véase Dornbusch-Fischer (1994).

40 Este fenómeno es conocido como la trampa de liquidez en el que  $L(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow r^*$  (véase Dornbusch-Fischer (1994)).

pendiente decreciente y que posee inversa para todo  $r > r^*$  la cual es denotada por  $L^{-1}(M_2)$ . Así, la curva LM está dada por<sup>41</sup>:

$$r = L^{-1}(M - kY), 0 \leq Y \leq M/k$$

Donde  $M - kY = M_2$  (la preferencia de liquidez está dada por la diferencia entre el stock de dinero y la demanda de dinero para transacciones). Aplicando la regla de la cadena en la función LM se demuestra que esta es una función monótona de pendiente negativa del ingreso real  $Y$ . Cuando  $Y \rightarrow M/k$  la demanda creciente por dinero absorbe la oferta de dinero y la tasa de interés crece indefinidamente. Por tanto,  $Y^b = M/k$  es una cota sobre el ingreso nacional.

Específicamente considérese una función de preferencia por liquidez dada por:

$$M_2 = \frac{\lambda}{r - r^*}, r \geq r^* \quad (2.8)$$

Con  $\lambda$  como el parámetro de ajuste entre las variaciones en la preferencia de liquidez y las variaciones en la tasa de interés<sup>42</sup>.

La correspondiente curva LM está dada por:

$$r = r^* + \frac{\lambda}{M - kY}, Y \leq \frac{M}{k} \quad (2.9)$$

Se asume el siguiente plan de inversión,

$$I(r, Y) = \begin{cases} 0, & r'' < r \\ Y^\alpha (r'' - r)^\delta, & 0 < r < r'' \end{cases} \quad (2.10)$$

Donde  $\alpha$  y  $\delta$  son, respectivamente, la elasticidad-ingreso y la elasticidad-interés de la inversión. es la tasa de interés para la cual la inversión es cero;  $I(r, Y) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow r''$ . La función IY se obtiene a partir de (2.10) en (2.9),

<sup>41</sup>  $L^{-1}(M_2) \rightarrow r$  cuando  $M_2 \rightarrow \infty$ . Además  $L^{-1}(M_2) \rightarrow \infty$  cuando  $M_2 \rightarrow 0$ , de este modo la curva LM es una curva de pendiente negativa tal y como es conocida tradicionalmente (véase Dornbusch-Fischer (1994)).

<sup>42</sup>  $\lambda$  es la constante de proporcionalidad entre la preferencia de liquidez y la tasa de interés.

$$H(Y) = \begin{cases} Y^\alpha \left( \frac{(r'' - r^*)(M - kY) - \lambda}{M - kY} \right)^\delta, & 0 \leq Y \leq M/k - \frac{\lambda}{k(r'' - r^*)} \\ 0, & M/k - \frac{\lambda}{k(r'' - r^*)} \leq Y \end{cases} \quad (2.11)$$

A partir de (2.3), de  $G(Y) = \beta(Y)$ , de (2.11) y de un suficientemente grande<sup>43</sup> se construye una función de demanda agregada que tiene la forma de Z inclinada necesaria para producir oscilaciones caóticas en la demanda agregada, obteniéndose un modelo de dinámica caótica mediante el uso de una función de inversión del tipo Kaldor (2.11). Si la intensidad de inversión es lo suficientemente grande (recuérdese que la intensidad es medida por  $\mu$ ) la demanda agregada puede oscilar sin necesidad de choques exógenos y en trayectorias irregulares bastante parecidas a las observadas empíricamente. De este modo, Day y Shafer muestran que las fluctuaciones irregulares se deben al efecto de la inversión-ingreso (IY) sobre la demanda agregada<sup>44</sup>.

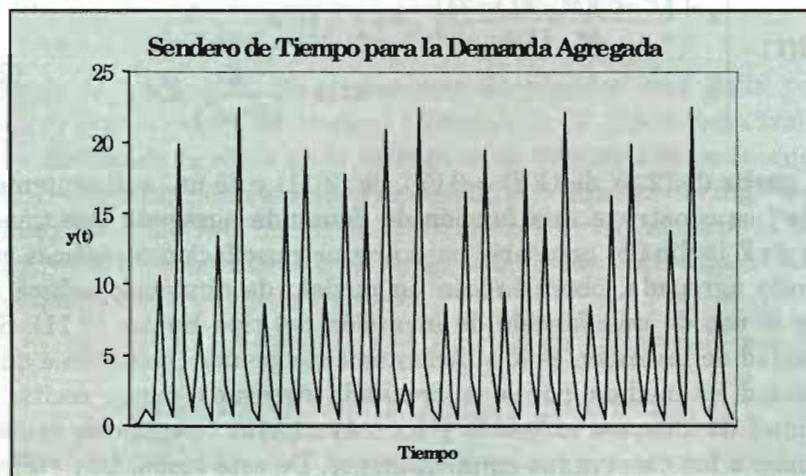
La figura 2.3 muestra la trayectoria irregular para la demanda agregada. Es muy significativo que este comportamiento haya sido obtenido por la estructura misma del modelo sin necesidad de factores exógenos al mismo. Es la forma particular de la curva de inversión la que posibilita la obtención de dinámicas irregulares que contrastan claramente con los ciclos regulares producidos por Kaldor<sup>45</sup>.

43 No es posible calcular un rango para en el que se presenten trayectorias caóticas; sin embargo, mediante simulaciones se pueden generar trayectorias caóticas.

44 Claro que la inversión-ingreso (IY) debe satisfacer una de las formas funcionales establecidas por Day y Shafer. La inversión de tipo Kaldor es un ejemplo de curva de inversión que satisface tales condiciones.

45 Kaldor (1940) consideraba tanto la inversión como el ahorro. En este modelo no se considera este último sino que se recurre al consumo. Mientras que en 1940 Kaldor consideraba una función de ahorro no-lineal, en el presente modelo la función de consumo es lineal. La regularidad de las fluctuaciones permanentes del modelo de Kaldor fue demostrada por Chang-Smyth (1971). Estos autores demuestran que los ciclos producidos por los equilibrios inestables y los factores de desplazamiento en el ahorro y la inversión del modelo de Kaldor pertenecen a una órbita cerrada, o lo que es lo mismo, a un ciclo límite de dos períodos. Una definición formal de órbita cerrada puede hallarse en Gandolfo (1997) y en Lorenz (1993).

**Figura 2.3.** Comportamiento irregular en la demanda agregada



**b. Realimentación entre el crecimiento de la productividad y el gasto en investigación y desarrollo (I&D): un modelo caótico<sup>46</sup>.**

Este modelo tiene una particularidad muy especial, pues Baumol y Wolff parten de una situación observada empíricamente en Estados Unidos. Los gastos en I&D han crecido como proporción del PIB, creciendo desde 1.62% del PIB en 1973 hasta el 1.86% en 1980, pero el número de científicos dedicados de tiempo completo ha caído como proporción del PIB, pasando de 0.23 por millón de dólares (de 1982) en 1967 a 0.19 en 1979. Baumol y Wolff pretenden analizar estos hechos mediante el uso de un modelo que describa un proceso de realimentación entre la producción y difusión de información, considerados como los productos finales de la I&D, y la tasa de crecimiento de la productividad en la industria.

La magnitud de la producción de información por parte del sector I&D afecta la tasa de crecimiento de la productividad y esta última afectará

<sup>46</sup> Baumol-Wolff (1992).

producción de información. El proceso de realimentación se da por tres componentes:

1. La producción de información estimula el crecimiento de la productividad en la industria.

2. La producción y difusión de información están caracterizadas por crecimientos de la productividad que tienden a quedarse rezagados del crecimiento que se observa en la industria. Como resultado, el precio relativo de la información crece, y lo hace más rápidamente que la tasa de crecimiento de la productividad industrial.

3. Cuando esto ocurre, otros factores sustituyen a la información, y así su demanda es inhibida, lo que sirve como un impedimento al crecimiento de la productividad.

A su vez la caída en la productividad reduce los precios relativos de la información por lo que su demanda aumenta y en consecuencia crece la productividad de la industria. Nuevamente se ha llegado a la situación descrita por el primer componente.

El anterior es un proceso dinámico que describe trayectorias oscillatorias en el producto (PIB) debido a las oscilaciones en la I&D que son provocadas por las fluctuaciones del PIB. Baumol y Wolff demuestran que este proceso, bajo las condiciones apropiadas, puede ser altamente irregular. A continuación se describe el modelo.

Primero los autores intentan mostrar por qué es posible que simultáneamente se incremente el gasto en I&D y que la proporción de científicos decrezca por unidad de producto.

Inicialmente se considera el componente 2 del modelo: el crecimiento de la productividad en la economía eleva los costos de producción y difusión de conocimiento. Para dar cuenta de este componente se usa una variante del modelo del costo de enfermedad o de crecimiento desbalanceado (Baumol (1967)). En ese modelo hay dos sectores: Progresivo, o sector 1, en el que la productividad crece exponencialmente y un sector 2, o estancado, en el que la misma permanece constante. Existe un único factor, el trabajo con las cantidades  $L_1$  y  $L_2$  usadas por los respectivos sectores. El producto está dado por:

$$\begin{aligned} y_1 &= cL_1 e^{rt} \\ y_2 &= bL_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Los costos unitarios son:

$$C_1 = \frac{wL_1}{y_1} = \frac{w}{ce^{rt}} \quad \wedge \quad C_2 = \frac{wL_2}{y_2} = \frac{w}{b} \quad (2.13)$$

Donde tasa de salario. El costo relativo para el sector estancado está dado por:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{c}{b} e^{rt} \quad (2.14)$$

De aquí se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1: En el modelo del costo de enfermedad, el costo unitario del producto del sector 2 crecerá sin límite relativo al costo unitario del sector 1. Este fenómeno es referido como el costo de enfermedad<sup>47</sup>.

En este punto se amplía el modelo básico y se introduce un tercer sector, el denominado sector 3, o asintóticamente estancado. Este sector ofrece una actividad que utiliza proporciones más o menos fijas de dos diferentes tipos de factores, uno derivado del sector progresivo y otro proveniente del sector estancado. Baumol y Wolff presentan dos ejemplos de industrias para el sector 3: la televisión y el uso de computadores; el primero utiliza equipo técnico y transmisiones en vivo como factores productivos, el segundo tiene como factores hardware sofisticado y trabajo humano usado en la producción de software.

Con el supuesto de que las proporciones factor/producto<sup>48</sup> son absolutamente fijas, con  $y_{13}$  como el producto del sector 3 y con  $y_1$  y  $y_2$  como los factores (inputs) de los otros dos sectores usados en la producción de se tiene,

$$\frac{y_{13}}{y_3} = k_1 \quad \wedge \quad \frac{y_{23}}{y_3} = k_2 \quad (2.15)$$

<sup>47</sup> En el modelo de 1967 el costo de enfermedad proviene del sector servicios de la economía pues es considerado como un sector estancado.

<sup>48</sup> Proporciones input/output.

Donde por elección de numerario se tiene  $k_2 = 1$  Los costos promedios para el sector 3 son:

$$C_3 = k_1 C_1 + k_2 C_2 = \frac{k_1 w}{c e^{r_1 t}} + C_2 \quad (2.16)$$

De (2.16) se observa que los costos del sector 3 convergerán a los del sector 2. Esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k_1 w}{c e^{r_1 t}} + C_2 = C_2$$

esta convergencia es la que permite decir que el sector 3 es asintóticamente estancado.

**Proposición 2:** El comportamiento del costo promedio de un sector asintóticamente estancado se aproximará, asintóticamente, a aquel del sector estancado.

La ecuación (2.16) muestra que a consecuencia de la reducción en los costos debidos al sector progresivo los únicos costos verdaderamente onerosos para el sector 3 son los provenientes del sector estancado. Mientras que el sector 1 consigue mejoras que reducen el costo en el uso de sus factores, la falta de evolución en el sector 2 determina que el sector 3, asintóticamente, termine por comportarse como un sector estancado. Es curioso, puesto que la televisión y el uso de computadores son sectores de alta tecnología, pero mientras que la técnica se hace cada vez más barata la mano de obra o las transmisiones en vivo que hacen uso de esa técnica no reducen sus costos. Tal situación hace que estas industrias se vean dominadas por estos últimos costos y que se cataloguen dentro del sector 3.

Ahora se supone que hay variaciones en el uso de los distintos factores por parte del sector 3<sup>49</sup>. Específicamente se supone que el factor del sector 1,  $y_{13}$ , sustituye al factor del sector 2,  $y_{23}$ . Sea  $r_1$  la tasa de crecimiento del uso del factor progresivo por el sector 3, y sea  $r_2$  la tasa de declinación en el uso del factor del sector 2 por el sector 3. Entonces,

$$\frac{y_{13}}{y_3} = k_1 e^{r_1 t} \quad \frac{y_{23}}{y_3} = k_2 e^{-r_2 t} \quad r_1 > 0, r_2 > 0 \quad (2.17)$$

Hasta ahora se había considerado que eran constantes, (2.15).

de (2.16) y (2.17) se tiene,

$$\begin{aligned} C_3 &= C_1 \frac{y_{13}}{y_3} + C_2 \frac{y_{23}}{y_3} \\ \frac{C_3}{C_1} &= \frac{y_{13}}{y_3} + \left( \frac{y_{23}}{y_3} \right) \frac{C_2}{C_1} \\ &= k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{-r_2 t} \frac{e^{r_1 t} c}{b} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Así:

$$\frac{C_3}{C_1} = k_1 e^{r_1 t} + k^* e^{(r_1 - r_2)t} \quad (2.19)$$

Con  $k^* = k_2 c / b$ .  $C_3 / C_1$  se incrementará exponencialmente si  $r_2 \leq r_1$ , esto es, que la tasa en el crecimiento de la productividad sea mayor que la reducción en el uso del factor del sector 2. En realidad siempre que  $r_1 > 0$ , es decir, que una reducción en  $y_{23}/y_3$  requiera un incremento de  $y_{13}/y_3$ , el resultado debe mantenerse. Si  $r_2 \geq r_1$  el último término en (2.19) se aproxima a cero asintóticamente,  $yC_3/C_1 \approx k_1 e^{r_1 t}$ . La sustitución por el factor del sector progresivo por unidad de producto en el sector 3 genera un aumento progresivo en el costo promedio del sector 3 relativo al sector 1.

Como I&D utiliza dos factores: trabajo mental (tiempo humano) y equipo tecnológico, tal como computadores, cuyo uso constituye una actividad del sector 3, se sugiere que la actividad en I&D se comporta de manera muy parecida a la del sector 3<sup>50</sup>. De aquí se concluye que (2.19) pone de manifiesto el segundo componente del modelo: un mayor crecimiento en la productividad aumenta los costos en la producción y difusión de información.

En este punto se intenta demostrar otro hecho observable empíricamente: que no obstante el aumento del gasto en I&D como proporción del PIB la producción de información se reduce, lo mismo que la cantidad de trabajo utilizado en I&D. Para esto se consideran los precios en la producción y difusión de información y las elasticidades precio de la demanda por I&D. En el modelo, los dos elementos cruciales de demanda por I&D son la respuesta de la cantidad demanda ante el aumento del ingreso real, debido al crecimiento de la productividad del sector progresivo, y la respuesta de la demanda ante cambios en los costos relativos (y precios) en los distintos sectores.

---

Ya que I&D utiliza equipo computacional que proviene del sector 1 y tiempo humano que pertenece al sector 2, se dice que I&D pertenece al sector 3.



Por simplicidad se asume que los efectos del ingreso y el precio sobre la cantidad demanda de I&D son multiplicativos. Es decir, que el efecto de cada una de estas dos variables es representado por una expresión de sí misma y que la función de demanda es el producto de estas dos expresiones. Adicionalmente, se supone que la elasticidad precio de la demanda es constante. Asumiendo que el precio del sector  $i$  es proporcional a su costo promedio se tiene la función de demanda,

$$y_i = f_i(y)C_i^{-E_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

Donde  $y$  es el ingreso total de la economía en un tiempo dado y  $E_i$  es la elasticidad precio de la demanda para el bien  $i$ , la cual es constante. Tomando la  $E_i$ -sima raíz a ambos lados se tiene,

$$\frac{y_1^{1/E_1}}{y_j^{1/E_j}} = g_j(y) \frac{C_j}{C_1} \quad (j = 2, 3) \quad (2.21)$$

$\text{Cong}_j(y) = [f_j(y)]^{1/E_j} / [f_1(y)]^{1/E_1}$ . Así, si todo  $E_i$  satisface  $0 < E_1^* \leq E_i \leq E_1^{**} < \infty$  donde  $E_1^*, E_1^{**}$  son constantes, y por (2.14) y (2.16)  $C_j/C_1$  debe crecer sin límite. De aquí se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3: A menos que las elasticidades ingreso de la demanda sean tales que compensen los efectos de los precios, mientras que las elasticidades precio están acotadas lejos de cero e infinito,  $y_1$  debe crecer sin límite relativo al producto de los sectores 2 ó 3. Así, la demanda relativa para los dos últimos productos debe aproximarse a cero.

La ecuación (2.21) dice que ante un incremento en los precios relativos de los sectores 2 y 3 se requiere que la repuesta de la demanda ante el incremento en el ingreso real, gracias al crecimiento de la productividad en el sector 1, sea tal que compense el efecto negativo del incremento de los precios. De lo contrario, la demanda por los productos de estos sectores caerá con respecto a la demanda del sector 1. No obstante, una caída en términos relativos no significa que exista una caída en términos absolutos. Esto es lo que se observa en la actividad I&D: un aumento absoluto acompañado de una declinación relativa.

Para abordar el último hecho empírico, el aumento en el gasto en I&D y la reducción en el número de científicos por unidad de producto, los autores muestran como en el modelo el gasto en los sectores 2 y 3 puede



incrementarse en el tiempo y, sin embargo, la razón del factor trabajo de los sectores no progresivos puede caer respecto al producto del sector progresivo. Esta relación refleja la paradoja que si bien el gasto en I&D crece respecto al PIB, el número de científicos cae respecto al mismo.

**Proposición 4:** Tomando los precios de modo que sean proporcionales a los costos promedios, el valor del producto del sector 3 respecto a aquel del sector 1,

$$\frac{\text{valor de } y_3}{\text{valor de } y_1} = \frac{C_3 y_3}{C_1 y_1} \quad (2.22)$$

puede ser creciente. Y el tamaño de la fuerza de trabajo del sector 3 relativo al valor del producto del sector progresivo,

$$\frac{L_3}{C_1 y_1} \quad (2.23)$$

puede estar cayendo.

Ahora se demuestra que (2.22) y (2.23) se pueden dar simultáneamente. Se supone que a causa de que la fecha  $t$  excede a algún valor  $t^*$   $C_2$  es, de esta manera, una aproximación para  $C_3$ , en concordancia con (2.16). Por (2.14) se tiene,

$$\frac{C_3 y_3}{C_1 y_1} \cong \frac{c e^{rt}}{b} \frac{y_3}{y_1} \quad (2.24)$$

se asume que  $L_3$  es directamente proporcional al producto del sector 3 mediante la relación,

$$L_3 \cong \frac{y_3}{m}, \quad m = \text{constante} \quad (2.25)$$

Además se tiene,

$$\frac{y_3}{y_1} = h e^{-r_3 t}, \quad 0 \leq r_3 \leq r \quad (2.26)$$

Donde es la tasa de decaimiento del producto del sector 3 por unidad de producto en el sector 1. De (2.24) y (2.26) se tiene que:

$$\frac{C_3}{C_1} \frac{y_3}{y_1} \cong \frac{c h e^{(r-r_3)t}}{b} \quad (2.27)$$

estará creciendo mientras que, tomando a como numerario, tal que

$$p_1 = C_1 = 1, \quad \frac{L_3}{C_1 y_1} = \frac{y_3}{y_1 m} = \frac{h e^{-r_3 t}}{m} \quad (2.28)$$

será decreciente.

Así se prueba la Proposición 4. Se observa que el aumento en el gasto en I&D es compatible con una disminución en el uso de fuerza de trabajo en I&D relativo al PIB.

Ahora sólo queda por mostrar el proceso de realimentación que rige la relación existente entre el gasto en I&D y el crecimiento de la productividad en la industria.

En el modelo se considera que en el sector progresivo la productividad del trabajo está creciendo a una tasa constante,  $r$ . Sin embargo, la producción de información tiene impacto sobre la productividad del sector 1. Así,  $r$  debe considerarse como una función de  $y_{31}$ , la cantidad de información usada como factor por el sector 1.

El proceso de realimentación se describe del modo siguiente: como el costo promedio en el sector 3 es creciente (ver (2.16)) el precio relativo comenzará a crecer y por tanto su demanda y uso por el sector 1 comenzara a decrecer<sup>51</sup> hasta aproximarse a cero (ver (2.21)), con lo que  $r$  (que está en función de  $y_{31}$ ) también caerá. Así, el carácter de sector asintóticamente estancado de la actividad I&D actúa como un obstáculo para el crecimiento de la productividad de la economía. Pero la declinación en  $r$  conducirá a la caída en el precio relativo de I&D (ver (2.19)), lo que a su vez conduce a que se reactive la demanda por I&D y nuevamente crezca la tasa de productividad,  $r$ . Esta relación es la que describe la última parte del modelo de Baumol y Wolff.

Sean  $r_t$  la tasa de crecimiento de la productividad de las industrias distintas a las I&D en el periodo  $t$ ,  $y_t$  el producto de la industria I&D, y  $p_t$  el precio de la información. Se tiene que la producción de información contribuye a la productividad,

<sup>51</sup> Las excepciones a esta situación son mostradas en la proposición 3.

$$r_{t+1} = a + b y_t \quad (2.29)$$

el precio de la información crece proporcional a  $r_t$ ,

$$\frac{p_{t+1} - p_t}{p_t} = v r_{t+1} \quad (2.30)$$

donde  $v$  es la constante de proporcionalidad. También se tiene la función de demanda de información,

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = -E \left( \frac{p_{t+1} - p_t}{p_t} \right) \quad (2.31)$$

donde  $E$  es la elasticidad precio de la demanda, la cual se supone constante. Sustituyendo (2.29) y (2.31) en (2.30) se obtiene,

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = -k(a + b y_t), \text{ donde } k = vE > 0$$

operando algebráicamente se tiene,

$$y_{t+1} = (1 - ka)y_t - kby_t^2 \quad (2.32)^{52}$$

la cual es la relación de realimentación y cuyas propiedades dinámicas dependiendo de los parámetros son las mismas que las mostradas en la primera sección. Para (2.32) haciendo  $y_e = y_{t+1} = y_t$  se obtienen dos valores de equilibrio,

$$y_e = 0, y, y_e = -a/b; \quad (2.33)$$

para probar la estabilidad de los dos puntos se recurre a la derivada de (2.32),

$$\frac{dy_{t+1}}{dy_t} = (1 - ka) - 2kby_t \quad (2.34)$$

la cual es igual a:

$$(1 - ka) - y_t = y_e = 0 \quad (2.35)$$

y a:

$$(1 + ka) - y_t = y_e = -a/b \quad (2.36)$$

52 Si se supone que  $a < 0$ , se tiene que (2.32) se transforma en  $y_{t+1} = (1 - ka)y_t - kby_t^2$ , que es la misma ecuación logística (1.1) de la primera sección. (2.32) es un polinomio de segundo orden cuya curva de fase tiene forma de colina.

Se supone que  $vEa=ka<1$ , lo que parece correcto ya que puede decirse que  $v\leq 1$  en (2.30) y que la elasticidad precio de la demanda por información no es mucho más grande que 2, mientras que  $a$ , el valor de la tasa de crecimiento de la productividad cuando la producción de información es cero, es probablemente muy pequeña.

Sin embargo, este último parámetro es de gran importancia dentro del comportamiento dinámico del sistema ya que dependiendo de si es positivo o negativo los puntos de equilibrio pueden ser estables o inestables. Si el valor del parámetro es positivo se tiene que en ausencia de producción de información la productividad (ver (2.29)) continuará creciendo a una tasa autónoma  $a$ . Entonces (2.35) indica que  $y_e = 0$  es estable, mientras que por (2.36)  $y_e = -a/b < 0$  será inestable y así el sendero temporal tenderá hacia el origen, moviéndose monótonamente hacia cero actividad en I&D y crecimiento de la productividad a la tasa autónoma  $a$ . Esta situación es mostrada en la figura 2.4a.

Si el parámetro  $a$  es negativo se tiene que una producción de información nula reduce la tasa de crecimiento de la productividad en cada periodo (ver (2.29)). Cuando  $a < 0$  el origen es inestable y  $y_e = -a/b$  puede ser estable. Si  $ka > -1$  y por (2.36) será estable, y el equilibrio se obtiene mediante movimientos monótonos (véase figura 2.4b).

**Figura 2.4** Diagrama de fase de la productividad de la actividad I&D

Figura 2.4a.  $a > 0$

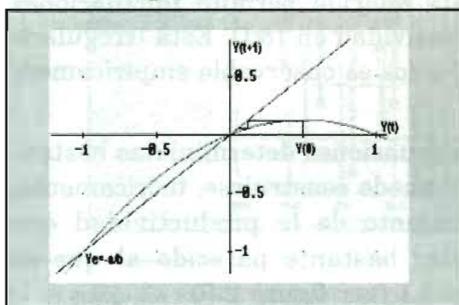
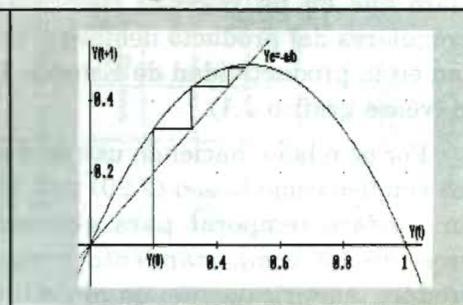


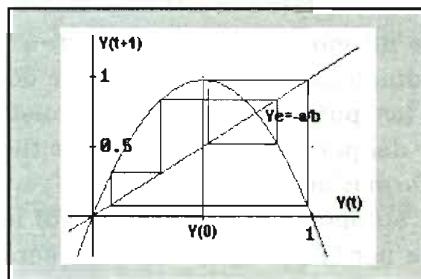
Figura 2.4b.  $a < 0$



Si  $ka < -1$  la pendiente del diagrama de fase evaluada en  $y_e = -a/b$  será negativa y el sendero de tiempo comenzará a oscilar. Para  $ka \leq -2$  estas

oscilaciones comenzarán a seguir el camino de bifurcación de duplicación de períodos descrito en la primera sección hasta converger finalmente a un régimen caótico (véase figura 2.5).

**Figura 2.5** Diagrama de fase de la productividad de la actividad I&D

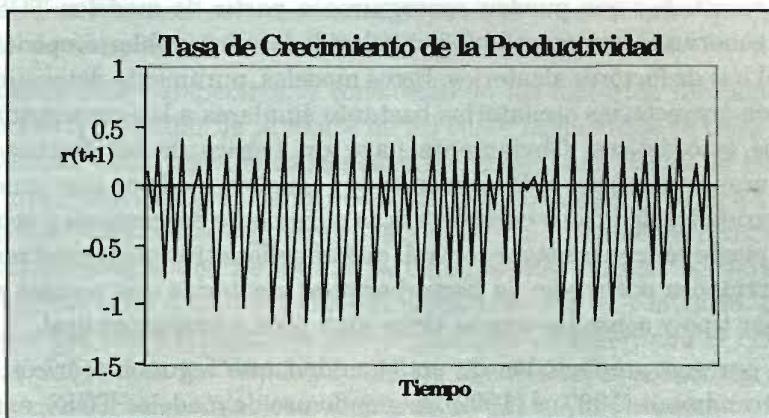
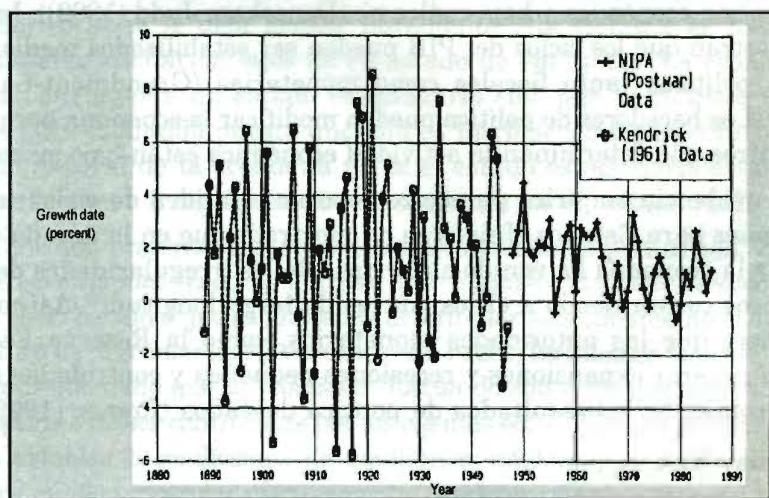


Baumol y Wolff suministran una explicación intuitiva de por qué un parámetro a positivo o negativo tiene diferentes comportamientos cualitativos. Cuando  $a > 0$  y  $y_t = 0$  la productividad continuará creciendo en el próximo periodo (ver (2.29)). Esto implica que el precio de información,  $p_t$ , crecerá (ver (2.30)) y ejercerá una presión descendente sobre la cantidad de información demandada, aun cuando su producto sea cero. Sin embargo, cuando  $a < 0$  incluso con  $y_t$  positivo pero suficientemente próxima a cero, la productividad comenzará a declinar; esto deprimirá el precio de información por (2.30) y estimulará la cantidad demandada. Claro que en un régimen caótico esta relación permite fluctuaciones irregulares del producto debidas a la actividad en I&D. Esta irregularidad en la productividad de Estados Unidos es observable empíricamente (véase gráfico 2.1).

Por otro lado, haciendo uso de dos ecuaciones deterministas bastantes simples como lo son (2.29) y (2.32) puede construirse, teóricamente, un sendero temporal para el crecimiento de la productividad que presente un comportamiento irregular bastante parecido al que se produce, empíricamente, en el gráfico 2.1 (ver figura 2.6).

---

53 Aquí se cumple el caos en el sentido de Li-York. Para el caso particular antes citado de  $(1 - ka) = kb = \mu$  se tiene que el régimen caótico comienza en  $-ka \approx 2.57$ .

**Figura 2.6 Crecimiento de la productividad****Gráfico 2.1 Tasa de crecimiento de la productividad del trabajo<sup>54</sup>**

<sup>54</sup> El gráfico fue tomado de Baumol-Wolff (1992). Los datos utilizados para construir el gráfico 2.1 provienen de dos fuentes que son las que aparecen con distintos símbolos en el cuadro de convenciones de la esquina superior derecha. Así, los datos anteriores a la segunda guerra mundial provienen de Kendrick-NBER (publicados en 1961). Mientras que los datos de la posguerra provienen del National Income and Product Accounts (NIPA).



Los dos modelos presentados en esta sección son dos buenos ejemplos de los resultados que pueden conseguirse a partir de modelos TCEI, los cuales generan teóricamente las irregularidades observables empíricamente sin el uso de factores aleatorios. Estos modelos, puramente deterministas, producen trayectorias oscilatorias bastante similares a las conseguidas con modelos estocásticos. Obviamente para un teórico de las fluctuaciones económicas son mucho más convenientes aquellos modelos que muestren irregularidades debidas a características puramente económicas y sobre las que se puede tener un mayor control, que aquellos otros que muestren esas irregularidades por medio de perturbaciones aleatorias que pueden ser de cualquier tipo y sobre las que se tiene muy poco o ningún control.

Es por sus propiedades de endogenidad que algunos teóricos, tales como Grandmont (1987) y (1992), haciendo uso de modelos TCEI, exponen que las autoridades económicas tienen un elevado control sobre la actividad económica. Los teóricos sugieren bajo qué condiciones es adecuada la intervención económica y bajo cuáles no (Deneckere-Judd (1992)). Inclusive, muestran que los ciclos del PIB pueden ser estabilizados mediante el uso de políticas tanto fiscales como monetarias (Grandmont-Laroque (1987)). Los hacedores de política pueden modificar la economía porque los parámetros que determinan la actividad económica están bajo su control.

La evidencia empírica parece corroborar esta idea de ciclos controlados, pues para Estados Unidos se ha mostrado que en la década de los noventa la economía ha venido alejándose de las irregularidades de años anteriores convergiendo a ciclos suaves de larga longitud.<sup>55</sup> Así mismo, se sugiere que las autoridades monetarias, como la Reserva Federal, pueden generar expansiones y recesiones pequeñas y controladas con el fin de conseguir los resultados de política deseados (Romer (1999)).

### Conclusiones

Al intentar explicar las fluctuaciones económicas observadas empíricamente, la teoría de los ciclos económicos utiliza modelos teóricos para dar cuenta de dichos ciclos. Puesto que estos modelos no son más

55 Un ejemplo de tal situación puede observarse en el gráfico 2.1.

que idealizaciones de la realidad, sólo pueden explicar las oscilaciones de manera fragmentaria mediante supuestos y condiciones que garanticen la presencia de los ciclos en los modelos en cuestión.

Desde esta perspectiva, y considerando las distintas limitaciones de los modelos estándar de la teoría de los ciclos económicos se tiene que los modelos de ciclos económicos desarrollados haciendo uso de la teoría del caos presentan una gran ventaja teórica, puesto que estos modelos pueden reproducir los ciclos irregulares observados empíricamente con estructuras deterministas que no requieren de supuestos ad hoc, de parámetros restringidos o de choques exógenos aleatorios. Por el contrario, en estos modelos los ciclos irregulares son producidos considerando el comportamiento natural de las variables y de los agentes en la economía, a partir de las relaciones que se desprenden de su mutua interacción.

Desde este punto de vista, se considera que las fluctuaciones económicas son el producto del desempeño natural de la economía y que por tal motivo si se le deja actuar libremente ella siempre se hallará en permanente oscilación lejos de su estado de equilibrio. La economía no puede converger a un estado estacionario sino que permanece indefectiblemente oscilando puesto que ella es intrínsecamente perturbada. El estado natural de la economía no es el estado estacionario estable sino las oscilaciones irregulares que se observan en el mundo real.

Teniendo presente una economía intrínsecamente perturbada, los teóricos de las dinámicas caóticas afirman que es equivocado hacer predicciones de largo plazo debido a que es imposible determinar adecuadamente el desempeño futuro de la economía. No obstante este hecho, los mismos teóricos también sugieren que dado que la economía fluctúa debido a condiciones endógenas, susceptibles de ser controladas por los agentes económicos, es posible generar ciclos estables o condiciones de equilibrios estables que los hacedores de política pueden controlar efectivamente. Sugieren que mediante el uso de las herramientas de política tradicionales –sin importar si los agentes se anticipan o no a las acciones de política–, se puede llevar a la economía a la situación que se desea, contrario a lo que afirman los teóricos de la nueva macroeconomía clásica (new classical macroeconomics), quienes dicen que las acciones de política son más nocivas que favorables para la economía.

## Referencias

- ABRAHAM-FROIS, G. et BERRERI, E. (1995), *Instabilité, cycles, chaos*, Paris, Economica.
- BAUMOL, W.J. (1967), "Macroeconomics of unbalanced growth: the anatomy of urban crisis", *American economic review*, Vol. 57, No. 3, 415-426.
- BAUMOL, W.J. and BENHABIB, J. (1989), "Chaos: significance, mechanism. and economic applications", *The journal of economic perspectives*, Vol. 3, No. 1, 77-105.
- BAUMOL, W.J. and WOLFF, E.N. (1992), "Feedback between R&D and productivity growth: a chaos model", En: *Cycles and chaos in economic equilibrium*, Benhabib J., Princeton N.J., Princeton University Press, 355-373.
- BENHABIB, J. and DAY, R.H. (1981), "Rational choice and erratic behavior", *Review of economic studies*, Vol. 48, No. 3, 459-471.
- BENHABIB, J. and DAY, R.H. (1992), "A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations model", En: *Cycles and chaos in economic equilibrium*, Benhabib J., Princeton N.J., Princeton University Press, 64-81.
- BROCK, W.A. and MALLIARIS, A.G (1989), *Differential equations, stability and chaos in dynamic economics*, Amsterdam, North-Holland.
- CHANG, W.W. and SMYTH, D.J. (1971), "The existence and persistence of cycles in a non-linear model: Kaldor's 1940 model re-examined", *Review of economic studies*, Vol. 38, No. 1, 37-44.
- CHIANG, A.C. (1987), *Métodos fundamentales de economía matemática*, Tercera Edición, Madrid, McGraw-Hill.
- DANA, R.E. and MONTRUCCHIO, L. (1987), "Dynamic complexity in duopoly games" En: *Nonlinear economic dynamics*, Grandmont J.M., Boston, Academic Press Inc, 40-56.
- DAY, R.H. (1982), "Irregular growth cycles", *American economic review*, Vol. 72, No. 3, 406-414.
- DAY, R.H. (1983), "The emergence of chaos from classical economic growth", *Quarterly journal of economics*, Vol. 98, No. 392, 201-213.
- DAY, R.H. and SHAFER, W. (1992), "Keynesian chaos", En: *Cycles and chaos in economic equilibrium*, Benhabib J., Princeton N.J., Princeton University Press, 339-354.

- DENECKERE, R.J. and JUDD, K.L. (1992), "Cyclical and chaotic behavior in a dynamic equilibrium model, with implications for fiscal policy", En: Cycles and chaos in economic equilibrium, Benhabib J., Princeton N.J., Princeton University Press, 308-329.
- DENECKERE, R.J. and PELIKAN, S. (1987), "Competitive chaos". En: Nonlinear economic dynamics, Grandmont J.M., Boston, Academic Press Inc, 13-25.
- DIAMOND, P. (1976), "Chaotic behavior of systems of difference equations", International journal of systems science, Vol. 7, 953-956.
- DORNBUSCH, R. y FISCHER, S. (1994), Macroeconomía, Sexta edición, Madrid, McGraw-Hill.
- FEIGENBAUM, M. (1978), "Quantitative universality for a class of non-linear transformations", Journal of statistical physics, Vol. 19, 25-52, Vol. 21, 669-706.
- GABISCH, G and LORENZ, H.W. (1989), Business cycle theory: a survey of methods and concepts. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag.
- GANDOLFO, G. (1997), Economic dynamics, Study edition, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag.
- GRANDMONT, J.M. (1987) "Stabilizing competitive business cycles", En: Nonlinear economic dynamics, Grandmont J.M., Boston, Academic Press Inc, 57-76.
- GRANDMONT, J.M. (1992), "On endogenous competitive business cycles", En: Cycles and chaos in economic equilibrium, Benhabib J., Princeton N.J., Princeton University Press, 82-137.
- GRANDMONT, and LAROQUE, G. (1987), "Stability of cycles and expectations". En: Nonlinear economic dynamics, Grandmont J.M., Boston, Academic Press Inc, 138-151.
- GOODWIN, R.M. (1951), "The non-linear accelerator and the persistence of business cycles", Econometrica, Vol. 19, No. 1, 1-17.
- HICKS, J.R. (1954), Una aportación a la teoría del ciclo económico, Madrid, Aguilar.
- ICHIMURA, S. (1955), "Towards a general non-linear macrodynamic theory of economic fluctuations", En: Post-keynesian economics, Kurihara K.K., New Brunswick Rutgers University Press, 192-226.
- KALDOR, N. (1940), "A model of the trade cycle", Economic Journal, Vol. 50, No. 157, 78-92.

- LAROQUE, G. (1992), "Recent theories of the business cycle: the role of speculative inventories". En: Cycles and chaos in economic equilibrium, Benhabib J., Princeton N.J., Princeton University Press, 180-198.
- LI, T.Y and YORKE, J.A. (1975), "Period three implies chaos". American mathematical monthly, Vol. 82, No. 10, 985-992.
- LI, T.Y. MISIUREWICZ, M. PIANIGIANI, G. and YORKE, J.A. (1982), "Odd chaos", Physics letters, 87A, 271-273.
- LORENZ, H.W. (1993), Nonlinear dynamical economics and chaotic motion, Second edition, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag.
- METZLER, L.A. (1941), "The nature and stability of inventory cycles", Review of economic statistics, Vol. 23, No. 3, 113-129.
- MUTH, R.F. (1961), "Rational expectations and the theory of price movements", Econometrica, Vol. 29, No. 3, 315-335.
- RAMÍREZ, M. y RIBERO, R. (1992), "Caos: definición, detección y ejemplos", Desarrollo y sociedad, No. 30, 189-214.
- RESTREPO, M. (2000), Introducción a las dinámicas caóticas en la teoría de los ciclos económicos. Trabajo de grado para optar al título de economista de la Universidad de Antioquia, Medellín.
- RESTREPO, M. y RODRÍGUEZ, S. (2000), "La teoría del caos: alternativa teórica para el conocimiento económico", Oikos, No. 13, 3-20.
- ROMER, C.D. (1999), "Changes in business cycles: evidence and explanations", Journal of economic perspectives, Vol 13, No. 2, 23-44.
- SAMUELSON, P.A. (1939), "Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration", Review of economic statistics, Vol. 21. No. 2, 75-78.
- SLUTZKY, E. (1937), "The summation of random causes as the source of cyclic processes", Econometrica, Vol. 5, No. 2, 105-146.
- STUTZER, M. (1980), "Chaotic dynamics and bifurcation in a macro-model", Journal of economic dynamics and control, Vol. 2, No. 4, 1980, 353-376.
- VARIAN, H.R. (1979), "Catastrophe theory and the business cycle" Economic inquiry, Vol. 17, 14-28