La dinámica de la distribución del ingreso en los modelos de crecimiento

Fernando Jaramillo[1]

Resumen

En el presente artículo se introducen dos contribuciones a la teoría de la dinámica del crecimiento y la distribución del ingreso. En primer lugar, se presenta un modelo de crecimiento endógeno basado en el aprendizaje en la producción. En este modelo se introduce de manera explícita la función de aprendizaje, lo que permite analizar la dinámica de transición hacia el equilibrio. La segunda contribución consiste en introducir un marco conceptual global con el fin de analizar de una manera integrada la dinámica de la distribución del ingreso en diversos modelos de crecimiento con preferencias homotéticas. Se comparan el modelo neoclásico, el modelo de Romer (1986) y el de aprendizaje en la producción desarrollado por el autor. Se muestra la importancia de la dinámica de la tasa de ahorro en la dinámica de la distribución del ingreso, y de la propensión a ahorrar los ingresos salariales en la persistencia de las desigualdades. Se resalta que la dinámica de la distribución del ingreso en economías con preferencias homotéticas y un mercado financiero perfecto es un proceso no ergódico.

---

[1] Investigador del CEGA. Al momento de la elaboración de este estudio, el autor era investigador del CEDE y profesor de la Facultad de Economía de la Universidad de los Andes.

1. Recuento histórico

La teoría económica se ha preocupado por integrar dentro de un mismo marco conceptual la distribución del ingreso entre países y en el interior de los mismos. Los modelos de crecimiento endógeno y neoclásicos incorporan de diversas formas heterogeneidades iniciales entre los miembros de una sociedad y, asimismo, entre las distintas sociedades.

La interacción entre crecimiento económico se presenta en diferentes direcciones. Una parte importante de la teoría ha intentado analizar el efecto de la distribución del ingreso sobre el crecimiento económico en presencia de mercados financieros imperfectos y/o preferencias no homotéticas. En el presente artículo se hará abstracción de dicha causalidad, no porque se considere poco importante, sino con el fin de subrayar la persistencia de las desigualdades y los mecanismos que la hacen persistir en el tiempo. Nos concentraremos en analizar la dinámica de la distribución de la riqueza en modelos en los que la tasa ahorro agregada es independiente de la distribución del ingreso.

La presente sección presenta un recuento histórico de las teorías de la distribución del ingreso dentro de un país y entre países. La sección 2 analiza la dinámica de la distribución del ingreso en los modelos de Kaldor y Solow, en los que existe una tasa de ahorro exógena. Se demuestra que la distribución del ingreso es un proceso ergódico, a menos que la tasa de ahorro de los ingresos salariales sea nula, tal como lo supuso Kaldor. La sección 3 presenta la relación entre ahorro y distribución del ingreso cuando los agentes son hogares que maximizan una función de utilidad homotética con un horizonte infinito. Se demuestra que en el estado estacionario la tasa de ahorro de los ingresos salariales es nula. Las secciones 4 y 5 analizan la dinámica de la distribución del ingreso y de la tasa de ahorro en los modelos neoclásicos y de aprendizaje en la producción, respectivamente.

El papel de la distribución en la teoría económica

Durante muchos años el estudio teórico de la evolución de la distribución del ingreso jugó un papel secundario en la literatura económica internacional. Los estudios empíricos sobre la distribución del ingreso realizados por Kuznets eran la referencia básica: la mayoría de los trabajos teóricos trataban de explicar sus hallazgos empíricos.

Tales trabajos inspiraban optimismo sobre los beneficios sociales del desarrollo económico. En efecto, este autor encontró que la relación entre desigualdad y producto interno bruto puede ser descrita por una curva U invertida. En las primeras etapas del desarrollo la desigualdad se incrementa hasta llegar a un punto límite a partir del cual se mejora la distribución del ingreso. Alcanzar el nivel de desarrollo crítico a partir del que existe una relación directa entre producción y distribución del ingreso sería el objetivo fundamental de la política económica.

El modelo neoclásico de crecimiento económico y la curva de Kuznetz constituían el núcleo central de la teoría ortodoxa. Dejar actuar libremente el mercado se consideraba la solución más eficiente; no sólo porque en el modelo neoclásico el máximo nivel de producción realizable en el estado estacionario es el correspondiente al libre cambio, sino, también, porque en las sociedades más desarrolladas la desigualdad está inversamente correlacionada con el nivel de producción. Los trabajos sobre las interrelaciones entre crecimiento y distribución de los autores post-keynesianos, de los estructuralistas latinoamericanos y de los teóricos del desarrollo económico eran considerados como herejías que se estrellaban con los hallazgos empíricos de Kuznetz.

No obstante, la correspondencia lógica entre la teoría distributiva del modelo neoclásico y la curva de Kuznets no fue un motivo fundamental de preocupación. Se presentó una división del trabajo entre los teóricos de la economía: los estudiosos de la distribución explicaban la curva de Kuznets como el resultado de una transición de una economía rural hacia una economía urbana unida a la existencia de una distribución más igualitaria en el campo que en la ciudad. Por su parte, la mayoría de los teóricos neoclásicos se contentaban con constatar que en sus modelos la distribución del ingreso no tiene ningún efecto sobre el crecimiento, y estudiaban la dinámica de este último a través del modelo de Solow.

Los estudios sobre la dinámica de la distribución del ingreso en el modelo neoclásico son escasos. Hay cinco trabajos que vale la pena subrayar: Stiglitz (1969), Bourguignon (1981), Chatterjee (1994), Caselli y Ventura (1996) y Vellutini (1997). Estos artículos analizan las fuerzas que conllevan a la convergencia en la distribución del ingreso o a la persistencia de las desigualdades sociales. Los modelos de Stiglitz y Bourguignon utilizan funciones de ahorro exógenas con una fuerza de trabajo homogénea y desigualdades en la distribución inicial de la riqueza. Demuestran que la distribución del ingreso tiende, ya sea hacia una igualdad perfecta, ya sea hacia una sociedad con dos clases sociales.

Sin embargo, el modelo de Stiglitz considera una situación en la cual la distribución inicial persiste en el tiempo. Es aquella que corresponde a la teoría distributiva de Kaldor: una tasa de ahorro igual a cero para los ingresos del trabajo y una tasa de ahorro positiva para los ingresos del capital.

Chatterjee (1994) estudia un modelo neoclásico con tasas de ahorro endógenas, las que son determinadas por la maximización de funciones de utilidad semi-homotéticas. Pero en su modelo se suponen ingresos laborales nulos y, por lo tanto, no se puede estudiar las consecuencias de las diferencias entre las tasas de ahorro de los ingresos laborales y de capital. Sin embargo, el comportamiento de la tasa de ahorro de los ingresos laborales es de una importancia capital para la dinámica de la distribución del ingreso según los modelos de Kaldor y Stiglitz. Por otro lado, Caselli y Ventura (1996) y Vellutini (1997) estudian la dinámica de la distribución del ingreso en el modelo de Cass-Koopman, pero suponen un crecimiento de largo plazo nulo. En este caso la tasa de ahorro en el estado estacionario es nula y es imposible constatar el papel de la tasa de ahorro de los ingresos del salario sobre la persistencia de las desigualdades.

Los trabajos de Chaterjee (1994), Caselli y Ventura (1996) y Vellutini (1997) predicen convergencia condicional en la distribución del ingreso. En contraste, el presente artículo muestra que la dinámica de la distribución del ingreso durante la transición hacia el equilibrio cambia de una manera fundamental al introducir crecimiento económico.

Recientemente se han desarrollado modelos teóricos con fundamentos microeconómicos que estudian las interrelaciones entre crecimiento y distribución del ingreso. Muchos de estos estudios abandonan los supuestos del modelo neoclásico, como, por ejemplo, la convexidad de las tecnologías, o la existencia de un mercado de capitales perfecto (Galor y Zeira,1993; Picketty, 1992; Bertola, 1993). Las interrelaciones entre el crecimiento y la distribución encontradas en estos trabajos se alejan frecuentemente de las supuestas por la teoría neoclásica y la curva de Kuznetz[2].

En efecto, en algunos de estos trabajos teóricos, el crecimiento y/o la distribución del ingreso en el estado estacionario dependen de la desigualdad inicial. Los artículos de Galor y Zeira (1993), Banerjee y Newman (1994), Aghion y Bolton (1997), y Picketty (1992) comparan la dinámica de la distribución del ingreso de dos modelos: el neoclásico, con mercado de capitales perfecto, y otro con imperfecciones en el mercado financiero. Ellos encuentran que en el largo plazo, el modelo neoclásico predice una convergencia de la

[2] Por otro lado, los trabajos empíricos más recientes, realizados con series de tiempo y con estadísticas de corte transversal más confiables, han demostrado que la curva de Kuznetz no es válida. En los años ochentas se incrementaron las desigualdades sociales en los países desarrollados y en los años noventas lo mismo está sucediendo en los países latinoamericanos. El crecimiento económico no es una condición suficiente para disminuir la desigualdad.

distribución del ingreso hacia una perfecta igualdad. Por el contrario, en el modelo con imperfecciones financieras, la distribución del ingreso en el estado estacionario no es igualitaria. Además, en algunos de estos modelos la distribución de equilibrio depende de la desigualdad inicial y, en consecuencia, no es ergódico.

Es cierto que los autores de estos modelos no afirman que las propiedades de convergencia o de ergodicidad de la distribución del ingreso sea una consecuencia inevitable de la existencia de un mercado de capitales perfecto, o de una tecnología convexa. No obstante, en la literatura económica se asocia la teoría neoclásica a la convergencia o ergodicidad de la distribución del ingreso:

> Once augmented with idiosyncratic shocks, most versions of the neoclassical growth model imply convergence in distribution: countries with the same fundamentals should tend towards the same invariant distribution of wealth and pre-tax income. Barring unexplained differences in tastes for equity or in the distribution of innates abilities, persistent differences in the degree of inequality would conversely indicate the presence of some form of increasing return or complementarily in the economic or politico-economic structure Bénabou (1996).

Sin embargo, esta asociación no tiene ninguna base teórica. En este artículo se utilizará un modelo neoclásico a la Cass-Coopman, con una función de utilidad homotética y agentes heterogéneos en la distribución inicial de la riqueza, para demostrar que la ergodicidad de la distribución del ingreso es compatible con la teoría neoclásica más estándar. También, se estudia la dinámica de la distribución del ingreso por fuera del equilibrio estacionario, lo cual permite obtener las implicaciones empíricas del modelo neoclásico con funciones de utilidad homotéticas. En contraste con Caselli y Ventura (1996) y Vellutini (1997), nosotros encontramos que, cuando se suponen valores razonables para los parámetros del modelo neoclásico, la distribución del ingreso tiende a deteriorarse durante la transición hacia el equilibrio.

La teoría neoclásica presentada en el presente artículo ofrece algunas ventajas frente a los modelos de Stiglitz, Bourguignon, Caselli y Ventura, Chaterjee, y Vellutini; en primer lugar, la tasa de ahorro es endógena, en segundo lugar, la dinámica de la distribución del ingreso hacia el equilibrio depende del crecimiento económico de largo plazo. Sin embargo, este modelo no es completamente satisfactorio puesto que no explica tal crecimiento de largo plazo.

El crecimiento y la distribución entre países

Aún no existe consenso entre los economistas sobre los determinantes del crecimiento de largo plazo. En los últimos años la controversia más conocida en torno al crecimiento económico ha estado protagonizada por los teóricos neoclásicos y de crecimiento endógeno. En el plano empírico dicha controversia se centró en la existencia o no de convergencia entre los países ricos y pobres. En las primeras versiones del modelo neoclásico se afirma que la producción de todos los países tiende a un mismo nivel y la tasa de crecimiento de largo plazo es exógena e idéntica para todos los países. Por su parte, la tasa de crecimiento de un país en el corto plazo depende de la diferencia entre su nivel de producción actual y el nivel de producción de equilibrio en el largo plazo. En efecto, en los países con menor nivel de desarrollo la tasa de retorno del capital es superior y, por lo tanto, los incentivos a la acumulación de capital. Ésta es la llamada hipótesis de convergencia absoluta.

Sin embargo, al comparar los datos de crecimiento por país con los de nivel de producción per cápita no se evidencia una mayor tasa de crecimiento para los países más pobres, lo cual llevó a Kaldor y a los teóricos del crecimiento endógeno a rechazar la pertinencia empírica de los modelos de crecimiento endógeno. De acuerdo con Kaldor, una teoría del crecimiento económico debería explicar, entre otras cosas, la persistencia en las diferencias en las tasas de crecimiento observada entre los países. A esta crítica, los teóricos neoclásicos respondieron mediante una modificación de su modelo. En esta nueva versión, el nivel de producción de equilibrio en el largo plazo es diferente para cada uno de los países y depende de sus propensiones a ahorrar, a educarse, a tener hijos, y de las políticas adoptadas. La tasa de crecimiento de largo plazo sigue siendo exógena e idéntica para todos los países, pero la tasa de crecimiento de corto plazo depende de la diferencia entre el nivel de producción de corto plazo de cada país con respecto a su propio nivel de producción de equilibrio en el largo plazo. Así, en un análisis de corte transversal, la tasa de crecimiento de un país depende de su nivel inicial de producción y de los determinantes del equilibrio en el largo plazo. Ésta es la llamada hipótesis de la convergencia condicional, la cual ha sido corroborada empíricamente por Mankiw, Romer y Weil (1992) y por Barro (1991), entre otros. Aunque la tasa de convergencia condicional entre países, y la tasa de convergencia absoluta entre regiones, calculada en los trabajos empíricos (entre un 1.5% y 3% por año) no es compatible con una participación del capital en el producto nacional muy inferior al 75%, los teóricos neoclásicos arguyen que si se entiende el capital como un concepto global, que incluye tanto el capital físico como el capital global, entonces, una participación del capital en el producto del 70% o 75% es perfectamente razonable.

Ante esta nueva evidencia empírica, los teóricos del crecimiento endógeno arguyen que sus modelos de crecimiento también son compatibles con la existencia de una convergencia condicional (Grossman y Helpman, 1994; Barro y Sala-I-Martin, 1995). En algunos de los modelos de crecimiento endógeno basados en la investigación y desarrollo (Grossman y Helpman,1991) existe un proceso de difusión de la tecnología de los países ricos hacia los países pobres, y, por lo tanto, el crecimiento de la tecnología en los países pobres es superior. Tanto en los modelos de investigación y el desarrollo con difusión de tecnología como en el modelo neoclásico, el crecimiento depende del nivel inicial de producción per cápita y la tasa de crecimiento de equilibrio en el largo plazo de todos los países es la misma. Sin embargo, el modelo neoclásico supone que el nivel de desarrollo tecnológico es el mismo para todos los países en todos los periodos del tiempo y que la tasa de crecimiento de equilibrio en el estado estacionario es exógena.

Aunque existe alguna evidencia parcial en favor de la hipótesis de convergencia, también existen algunos hechos históricos que no pueden ser explicados por la teoría neoclásica. En primer lugar, al analizar los datos de países individuales no se observa una tendencia a la disminución en las tasas de crecimiento (Romer, 1994). En segundo lugar, la tasa de crecimiento en la productividad total de los factores difiere entre países (Grossman y Helpman, 1994). En tercer lugar, los patrones internacionales de migración y diferenciales salariales no son compatibles con la existencia de una misma tecnología para todos los países. Finalmente, la evidencia empírica en favor de la convergencia en las tasas de crecimiento entre países es muy ambigua. Algunos estudios indican que al combinarse series de tiempo con estadísticas de corte transversal no se puede corroborar la hipótesis de convergencia condicional (Andres y Lamo, 1995); otros estudios empíricos de corte transversal muestran que la convergencia se presenta entre países con niveles de desarrollo similares (clubes de convergencia), lo que no es compatible con la existencia de una función de producción única para todos los países (Quah,1997, 1996a, 1996b).

La evidencia empírica más estrechamente relacionada con el modelo que desarrollaremos en el presente artículo tiene que ver con los trabajos de Searle (1945) y Rapping (1965) quienes utilizan datos de la producción de buques de carga de los astilleros *Liberty Shipyards* durante la Segunda Guerra Mundial. Ellos encuentran que la cantidad de horas de trabajo necesarias para producir un barco se reduce entre un 11% y 34% cada vez que se dobla la producción. Algunos autores como Lucas (1993) y Sala-I-Martin (1994) afirman que esta evidencia confirma la existencia de un proceso de aprendizaje en la producción, pero que el efecto del aprendizaje sobre la producción encontrado por Searle y Rapping no es suficiente para garantizar un crecimiento de largo plazo. Sin embargo, en el presente artículo se demostrará que la elasticidad de la producción con respecto al aprendizaje estimada por Searle y Rapping puede garantizar un crecimiento endógeno cuando la participación del capital en el producto es similar a la supuesta por el modelo neoclásico (cercana al 75%); es decir, cuando el capital es un concepto global que incluye tanto capital físico como capital humano.

Los modelos de crecimiento endógeno basados en el aprendizaje en la producción (Romer, 1986) pueden explicar la persistencia en las diferencias en el crecimiento entre los países y la existencia de una tasa de crecimiento positiva y estable en el largo plazo. Sin embargo, en estos modelos la economía se encuentra siempre en el estado estacionario, y, por lo tanto, no hay una dinámica de transición hacia el equilibrio, lo que dificulta la comprobación empírica del modelo.

En el modelo neoclásico el desarrollo tecnológico está representado por una variable exógena (A_t), mientras que en el modelo de Romer (1986) el desarrollo tecnológico es proporcional al *stock* de capital, y por lo tanto es endógeno ($A_t = aK_t$). Esto supone que existe un proceso de aprendizaje ligado a la inversión. En este sentido el modelo de Romer no se aprende en la producción (*learning-by-doing*), sino en la inversión (*learning-by-investing*): un aumento en el *stock* de capital conlleva a un incremento en el nivel de conocimiento.

Existen algunos modelos de crecimiento como los de Lucas (1988) y Krugman (1987) en los cuales el nivel de conocimientos es igual a su producción acumulada, pero en los cuales no existe ni capital ni ahorro, y, por lo tanto, no se puede estudiar el papel del ahorro sobre el crecimiento de largo plazo. Además, en estos modelos, no hay dinámica de transición hacia el equilibrio, a menos que existan varios bienes con tasas de aprendizaje diferentes. Debido a que en equilibrio el *stock* de capital es proporcional a la producción acumulada, se podría pensar que en el estado estacionario el modelo de Romer es equivalente a uno de aprendizaje en la producción (*learning by doing*). Sin embargo, esta interpretación es equivocada ya que el factor de proporcionalidad es endógeno. En términos formales esto podría expresarse de la siguiente manera:

$$A_t = aK_t,$$

en donde el A_t es la producción acumulada, K_t es el *stock* de capital y a es el factor de proporcionalidad, el cual es endógeno y depende de los mismos factores que determinan el crecimiento de largo plazo.

En el presente artículo se presentará un modelo de crecimiento endógeno en el que el desarrollo tecnológico está determinado por la producción acumulada. El papel del ahorro en el crecimiento económico puede ser estudiado puesto que se introducen dos factores de producción: el capital y el trabajo. Además se demuestra que en este modelo existe una dinámica de transición hacia el equilibrio relativamente simple y muy similar a la del modelo neoclásico, pero con un crecimiento endógeno de largo plazo. La introducción de una dinámica de transición hacia el equilibrio estacionario puede ayudar a mejorar las implicaciones empíricas de los modelos de aprendizaje en la producción.

2. La dinámica de la distribución del ingreso con ahorro exógeno

La dinámica de la distribución de la riqueza en el modelo de crecimiento de Solow con agentes heterogéneos en su riqueza inicial fue estudiada por Stiglitz (1969) y Bourguignon (1981). Según estos autores la dinámica de la distribución del ingreso depende fundamentalmente del comportamiento de la tasa de ahorro. Cuando el ahorro es una función lineal del ingreso, la economía tiende hacia una igualdad perfecta. Por el contrario, si el ahorro es una función convexa la distribución del ingreso converge hacia una economía con dos clases sociales. Por otro lado, de acuerdo con Stiglitz (1969) y Bourguignon (1981) si la tasa de ahorro de los ingresos laborales es igual a cero, pero la tasa de ahorro del capital es positiva, entonces la distribución inicial del ingreso es idéntica a la del estado estacionario.

En este artículo se demostrará que la propensión a ahorrar los ingresos laborales es nula cuando se cumplen dos condiciones: los agentes enfrentan una restricción presupuestal intertemporal, y existe un crecimiento balanceado de largo plazo. Antes de esto se presentará una versión modificada del modelo de Stiglitz (1969), la que permitirá resaltar los vínculos existentes entre las diferentes teorías distributivas.

La dinámica de la distribución de la riqueza está representada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\dot{a}_{it}}{a_{it}} = s_{wit} \frac{w_{it} l_{it}}{a_{it}} + s_{ait} r_{it} - n_i . \qquad (1)$$

En donde, a_{it} es el *stock* de riqueza per cápita de la familia i en el periodo t, w_{it} es el salario promedio de familia i, l_{it} es la oferta de trabajo de un individuo de la familia i, s_{wit} es la tasa de ahorro de los ingresos laborales, s_{ait} es la tasa de ahorro de los ingresos del capital, r_{it} es la remuneración al capital del agente i en el periodo t, n_{it} es la tasa de crecimiento de las familias de tipo i. Un punto sobre una variable representa su tasa de crecimiento. Una variable sin índice corresponde al promedio de la economía.

La evolución de la distribución de la riqueza depende del comportamiento de cada una de las siguientes variables: la tasa de ahorro (s_{wit}, s_{ait}) de cada una de las familias, la riqueza medida en unidades de salario (a_{it}/w_{it}), la remuneración al capital de cada familia (r_{it}), la oferta de trabajo per cápita l_{it}, y la tasa de crecimiento de la población perteneciente a cada familia (n_{it}). Todos los modelos concernientes a la distribución del ingreso estudian el papel de al menos alguna de estas variables. Así, por ejemplo: Bourguignon (1981) y Pasinetti (1962) estudian el papel de la riqueza de una familia sobre su tasa de ahorro; Galor y Zeira (1993) suponen una tasa de interés (r_{it}) superior para los deudores más pobres; Tamura (1991) supone un retorno al capital humano (r_{it}) inferior para los agentes más ricos; Perotti (1995) estudia el efecto de la riqueza sobre la tasa de fertilidad (n_{it}).

La distribución de la riqueza en el modelo de Solow

En el modelo de Solow hay un mercado de capitales perfecto y, en consecuencia, la remuneración al capital de todos los agentes es la misma. Además, la remuneración al trabajo (w_{it}), la oferta horas de trabajo per cápita (l_{it}) y el crecimiento de la población (n_{it}) es el mismo para todas las familias. Por último, la tasa de ahorro es la misma para todos los tipos de ingreso y todos los agentes. En este caso la ecuación (1) implica una relación inversa entre el nivel de riqueza de cada agente y la tasa de crecimiento del mismo.

$$\frac{\dot{a}_{it}}{a_{it}} = s\left(\frac{w_t}{a_{it}} + r_t\right) - n . \qquad (2)$$

Hay por lo tanto una tendencia a la convergencia de los niveles de riqueza de los agentes. En efecto, puesto que el salario es el mismo para todos los agentes, el cociente entre ingreso y riqueza es inferior para los individuos más ricos. Como el ahorro es proporcional al ingreso, la tasa de crecimiento de la riqueza depende directamente del cociente entre ingreso y riqueza.

El análisis más detallado de la dinámica de la distribución del ingreso requiere el conocimiento de la evolución del salario y la tasa de interés, para lo cual se utiliza la siguiente función de producción:

$$Y_t = f(K_t, A_t L_t), \qquad (3)$$

en donde Y_t, K_t y L_t son la producción, el capital y el empleo agregados. La variable A_t representa la tecnología cuya tasa de crecimiento (x) es exógena. Esta función de producción cumple todas las propiedades del modelo neoclásico. En particular, tiene rendimientos constantes a escala y satisface las condiciones de Inada.

Los factores de producción son remunerados de acuerdo a su productividad marginal:

$$\begin{aligned} r &= f_1\ (k_t, A_t L_t) - \delta \\ w_t &= f_2\ (k_t, A_t L_t)\ A_t, \end{aligned} \tag{4}$$

en donde δ es la tasa de depreciación del capital, y $f_{j=1,2}$ representa la derivada de la función de producción f con respecto a su argumento j.

La dinámica de la distribución de la riqueza es fácil de estudiar cuando se definen las variables[3] $\hat{a}_{it}, \hat{a}_t, \hat{w}_t, \hat{k}_t$, y b_{it} :

$$\hat{a}_{it} = \frac{a_{it}}{A_t}; \qquad \hat{a}_t = \hat{k}_t = \frac{k_t}{A_t}; \qquad \hat{w}_t = \frac{w_t}{A_t}; \qquad b_{it} = \frac{\hat{a}_{it}}{\hat{a}_t}.$$

En efecto la evolución de la variable b_{it} está ligada a la de la distribución del ingreso. En el caso de una igualdad perfecta, la variable b_{it} es igual a uno para todos los agentes. A partir de la ecuación (2) se puede deducir la dinámica de la variable b_{it}:

$$\frac{\dot{b}_{it}}{b_{it}} = s\,\frac{\hat{w}_t}{\hat{k}_t}\left(\frac{1}{b_{it}} - 1\right) = s\left[\frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t} - f'(\hat{k}_t)\right]\left(\frac{1}{b_{it}} - 1\right). \tag{5}$$

[3] La riqueza media de la economía debe ser igual al *stock* de capital promedio $a_t = K_t$.

Si $b_{it} > 1$ entonces $\dot b_{it} < 0$ y viceversa. En consecuencia, la economía converge hacia una igualdad perfecta. En el largo plazo la distribución del ingreso es perfectamente igualitaria, independientemente de la desigualdad inicial, por lo tanto la distribución es un proceso ergódico.

La distribución del ingreso en el modelo de Kaldor

La teoría distributiva de Kaldor (1956) supone propensiones al ahorro diferentes para los ingresos provenientes del capital y del trabajo. En este caso el crecimiento de la riqueza del agente i puede ser descrito por la ecuación

$$\frac{\dot a_{it}}{a_{it}} = s_{wit}\frac{w_t}{a_{it}} + s_{kit}\, r - n, \tag{6}$$

y la dinámica de la distribución de la riqueza por la ecuación:

$$\frac{\dot b_{it}}{b_{it}} = s_w \frac{\hat w_t}{\hat k_t}\left(\frac{1}{b_{it}} - 1\right) = s_w\left[\frac{f(\hat k_t)}{\hat k_t} - f'(\hat k_t)\right]\left(\frac{1}{b_{it}} - 1\right). \tag{7}$$

La distribución del ingreso tiende hacia una igualdad perfecta $(b_{it} = 1, \forall i)$, a menos que la propensión a ahorrar los ingresos del trabajo sea igual a cero. En efecto, si los ingresos del trabajo son nulos, los únicos ingresos susceptibles de generar ahorro son provenientes del capital; y estos últimos son proporcionales al *stock* de riqueza. En el modelo de Kaldor, la convergencia en la distribución del ingreso se debe a la misma causa que en el modelo de Solow: los ingresos laborales de un agente son independientes de su nivel de riqueza. Cuando la propensión a ahorrar los ingresos laborales es nula, esta causa desaparece.

3. El ahorro y la dinámica de la distribución del ingreso con agentes optimizadores

En la primera sección de este artículo se mostró la importancia del ahorro sobre la dinámica de la distribución del ingreso. Sin embargo, el ahorro se supuso exógeno. En esta sección se presenta la relación entre ahorro y distribución del ingreso cuando los agentes son hogares que maximizan una función de utilidad homotética con un horizonte infinito. El programa de maximización de cada familia es:

$$max \int_0^{\infty} L_{t0} e^{nt} e^{\rho t} \frac{c_{it}^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} dt$$

$$s.a. \qquad \dot{a}_{it} = ra_{it} + w_t - c_{it} - na_{it}$$

Las condiciones de primer orden del programa de los consumidores implican:

$$\frac{\dot{c}_{it}}{c_{it}} = \frac{r_t - \rho}{\sigma} = \frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

La función de producción es igual a la ecuación (3) y la remuneración a los factores, a la ecuación 4, con A_t, y x_t exógenos para el modelo neoclásico y, A_t y x_t endógenos para los modelos de crecimiento endógeno. Puesto que en los modelos de crecimiento endógeno se supone una infinidad de agentes, x_t está dado para cada una de las familias. Así, la estructura del programa de los consumidores de los modelos de crecimiento endógeno es similar a la del modelo neoclásico.

Por lo tanto, la dinámica de la riqueza y el consumo de cada agente están descritas por las ecuaciones:

$$\frac{\dot{\hat{c}}_{it}}{\hat{c}_{it}} = \frac{\dot{\hat{c}}_{t}}{\hat{c}_{t}} = \frac{r_t - \rho}{\sigma} - x_t \tag{8}$$

$$\frac{\dot{\hat{a}}_{it}}{\hat{a}_{it}} = r + \frac{\hat{w}_t}{\hat{a}_{it}} - \frac{\hat{c}_{it}}{\hat{a}_{it}} - n - x_t \qquad \frac{\dot{\hat{a}}_{t}}{\hat{a}_{t}} = r + \frac{\hat{w}_t}{\hat{a}_{t}} - \frac{\hat{c}_{t}}{\hat{a}_{t}} - n - x_t \tag{9}$$

en donde x representa el crecimiento de la productividad.

Las ecuaciones (8) y (9) muestran que la distribución de la riqueza no tiene ningún efecto sobre la evolución del consumo y de la riqueza agregados. Esto se debe a la existencia de preferencias homotéticas y a la presencia de mercado de capitales perfecto. Así, la dinámica de las variables agregadas es idéntica a la de un modelo con un agente representativo.

La evolución de la distribución de la riqueza depende del consumo de cada uno de los agentes, en cada uno de los períodos. Este consumo se puede deducir de las ecuaciones (8) y (9):

$$\hat{c}_{it} = \frac{\hat{a}_{it} + \int_t^{\infty} e^{-(\bar{r}(v,t) - \bar{x}(v,t) - n)(v-t)} \hat{w}_v dv}{J_t} \tag{10}$$

en donde

$$\bar{r}(v,t) = \frac{\int_t^v r_m dm}{v-t}$$

$$\bar{x}(v,t) = \frac{\int_t^v x_m dm}{v-t}$$

$$J_t = \int_t^{\infty} e^{\left[\frac{1-\sigma}{\sigma}\bar{r}(v,t) - \frac{\rho}{\sigma} + n\right](v-t)} dv$$

A continuación se analizará la distribución del ingreso en el estado estacionario. Como se vio en la sección anterior la dinámica de la distribución del ingreso depende de las propensiones a ahorrar los ingresos salariales. A menos que la propensión a ahorrar los ingresos laborales en el estado estacionario sea nula, la economía tenderá a una situación perfectamente igualitaria. La siguiente proposición demuestra que un valor nulo para la propensión a ahorrar los ingresos del trabajo no es una situación excepcional.

Proposición 1. Cuando la economía se encuentra en el estado estacionario y los agentes están sujetos a una restricción presupuestal intertemporal, la propensión a ahorrar los ingresos laborales es igual a cero.

Para demostrar esta proposición se reescribe la ecuación 10 de la siguiente manera:

$$\hat{c}_{it} \int_t^{\infty} e^{-(\bar{r}(v,t)-\bar{x}(v,t)-n)(v-t)} e^{\bar{\gamma}_{\hat{c}i}(v,t)(v-t)} =$$

$$\hat{a}_{it} + \hat{w}_t \int_t^{\infty} e^{-(\bar{r}(v,t)-\bar{x}(v,t)-n)(v-t)} e^{\bar{\gamma}_{\hat{w}i}(v,t)(v-t)} dv$$

en donde,

$$\gamma_{\hat{w}}(v,t) = \frac{\int_t^v \gamma_{\hat{w}_m} dm}{v-t} \quad ; \qquad \gamma_{\hat{c}}(v,t) = \frac{\int_t^v \gamma_{\hat{c}_m} dm}{v-t} \ .$$

$\gamma_{\hat{w}_m}$ y $\gamma_{\hat{c}_m}$ son las tasas de crecimiento de $\hat{w}$ y $\hat{c}$ en el periodo m.

Puesto que en el estado estacionario $\bar{\gamma}_{\hat{w}}(v,t) = \bar{\gamma}_{\hat{c}}(v,t)$, entonces:

$$\hat{c}_{i\infty} = \frac{\hat{a}_{i\infty}}{J_{\infty}} + \hat{w}_{\infty}$$

Q.E.D.

La existencia de una restricción presupuestal intertemporal y de un crecimiento estacionario son una condición suficiente para la presencia de una propensión a consumir los ingresos laborales igual a uno. En efecto, de acuerdo a la restricción presupuestal intertemporal la suma actualizada del consumo debe ser igual al capital inicial más la suma actualizada de los ingresos salariales. En el estado estacionario el consumo y los salarios crecen al mismo ritmo por lo tanto, el cambio en una unidad en el salario del periodo corriente debe reflejarse en el cambio en una unidad en el consumo del mismo periodo. Así, la proposición 1 es valida para los modelos de crecimiento endógeno con un equilibrio estacionario balanceado, lo cual habíamos analizado en un artículo anterior (Jaramillo, 1996).

En la transición hacia el equilibrio, la evolución de la distribución de la riqueza y del consumo están íntimamente ligados. Además, de acuerdo con la ecuación (8) la distribución del consumo permanece constante durante toda la etapa de transición. La relación entre la evolución de la distribución del consumo y la de la riqueza puede deducirse de las ecuaciones (8), (9) y 10):

$$\frac{\hat{a}_0}{J_0\hat{c}_0}\left(\frac{\hat{a}_{i0}-\hat{a}_0}{\hat{a}_0}\right)=\frac{\hat{c}_{i0}}{\hat{c}_0}-1=\frac{\hat{c}_{it}}{\hat{c}_t}-1=\frac{\hat{a}_t}{J_t\hat{c}_t}\left(\frac{\hat{a}_{it}-\hat{a}_t}{\hat{a}_t}\right)$$

Con el fin de expresar la distribución de la riqueza en el periodo t en función de la distribución inicial, se reescribirá la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\frac{\hat{a}_{it}-\hat{a}_t}{\hat{a}_t}=\frac{\hat{a}_0}{J_0\hat{c}_0}\frac{J_t\hat{c}_t}{\hat{a}_t}\left(\frac{\hat{a}_{i0}-\hat{a}_0}{\hat{a}_0}\right)$$

$$\frac{\hat{a}_{it}-\hat{a}_{jt}}{\hat{a}_t}=\frac{\hat{a}_0}{J_0\hat{c}_0}\frac{J_t\hat{c}_t}{\hat{a}_t}\left(\frac{\hat{a}_{i0}-\hat{a}_{j0}}{\hat{a}_0}\right) \tag{11}$$

$$G_t = \frac{\hat{a}_0}{J_0 \hat{c}_0} \frac{J_t \hat{c}_t}{\hat{a}_t} G_0 \tag{12}$$

en donde G_t es el índice de concentración de Gini[4].

De acuerdo con las ecuaciones (11) y (12) la distribución de la riqueza en cada período depende de la distribución inicial y de la siguiente expresión:

$$\frac{J_t \hat{c}_t}{\hat{a}_t} = 1 + \lambda_t$$

en donde λ_t es:

$$\lambda_t = \frac{\int_t^{\infty} e^{-(r(v,t)-x(v,t)-n)(v-t)} \hat{w}_v dv}{\hat{a}_t} = \frac{\int_t^{\infty} e^{-(r(v,t)-x(v,t)-n)(v-t)} \hat{w}_v dv}{\hat{k}_t} \tag{13}$$

en donde se utilizó la igualdad $\hat{a} = \hat{k}$ existente en una economía cerrada.

Es fácil verificar que en el estado estacionario la variable λ es finita y superior a cero. Por lo tanto, en en el equilibrio estacionario no existe perfecta igualdad; pero tampoco una desigualdad extrema, en la que un agente posee todo el ingreso. La siguiente proposición utiliza este hecho para establecer el vínculo entre la distribución inicial del ingreso y la del estado estacionario.

Proposición 2. Las desigualdades iniciales determinan las desigualdades en el estado estacionario. En particular, el índice de con-

---

[4] Para pasar de la ecuación (11) a la (12) se utilizó la fórmula:

$$G_t = \frac{\sum \sum \hat{a}_{it} - \hat{a}_{jt}}{2n^2 \hat{a}_t}$$

centración de Gini en el estado estacionario es proporcional al del período inicial.

Esta proposición es una consecuencia directa de las ecuaciones (12) y (13).

La propiedad de no ergodicidad del proceso de distribución del ingreso es compatible con el modelo neoclásico más ortodoxo. Las imperfecciones del mercado financiero no son una condición necesaria para explicar la persistencia de las desigualdades sociales. En los modelos neoclásico y en los modelos de crecimiento endógeno la historia es importante en el sentido en que un accidente histórico temporal puede generar cambios en la distribución del ingreso del equilibrio estacionario.

De acuerdo a la ecuación (12), la evolución de la distribución del ingreso por fuera del estado estacionario depende del comportamiento de la variable λ_t. Así, la reducción de las desigualdades está ligada a la baja de λ. Para analizar la dinámica de esta variable se deriva la ecuación (13) con respecto al tiempo:

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{(r_t - x_t - n)\int_t^{\infty} e^{-(r(v,t)-x(v,t)-n)(v-t)}\hat{w}_v dv - \hat{w}_t}{\int_t^{\infty} e^{-(r(v,t)-x(v,t)-n)(v-t)}\hat{w}_v dv} - \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}_t}$$

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = (1+\lambda_t)\left[\frac{1}{J_t} - \frac{\hat{w}_t}{\hat{k}_t\lambda_t}\right]$$

En consecuencia

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} < 0 \leftrightarrow \hat{k}_t\lambda_t < \hat{w}_t J_t . \leftrightarrow \int_t^{\infty} e^{-(\bar{r}(v,t)-\bar{x}(v,t)-n)(v-t)}\hat{w}_v dv < \hat{w}_t J_t$$

de donde se obtiene

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} < 0 \leftrightarrow \hat{w}_t \int_t^{\infty} e^{-(\bar{r}(v,t)-\bar{x}(v,t)-n)(v-t)} e^{\bar{\gamma}_{\hat{w}(v,t)}(v-t)} dv$$

$$< \hat{w}_t \int_t^{\infty} e^{-(\bar{r}(v,t)-\bar{x}(v,t)-n)(v-t)} e^{\bar{\gamma}_{\hat{c}_t(v,t)}(v-t)} dv$$

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} < 0 \leftrightarrow \bar{\gamma}_{\hat{w}(v,t)} < \bar{\gamma}_{\hat{c}t(v,t)}.$$

Si se sabe que el promedio del crecimiento del salario entre el año t y el infinito es inferior (superior) al promedio del consumo agregado durante el mismo periodo, se puede deducir que en el año t el crecimiento de λ es negativo (positivo) y las desigualdades disminuyen (aumentan).

Cuando la función de producción (3) es Cobb-Douglas:

$$Y = \Gamma K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

$$\frac{\dot{\hat{w}}}{\hat{w}_t} = \alpha \frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} \rightarrow \frac{\dot{\hat{w}}_t}{\hat{w}_t} < \frac{\dot{\hat{c}}_t}{\hat{c}_t} \leftrightarrow \alpha \frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} < \frac{\dot{\hat{c}}_t}{\hat{c}_t} \qquad (14)$$

en donde α es la participación del capital en la producción nacional.

Las desigualdades disminuyen durante la transición hacia el equilibrio cuando $\alpha \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}_t} < \frac{\dot{\hat{c}}_t}{\hat{c}_t}$ para todos los años. Es decir, que la distribución del ingreso es cada vez más igualitaria cuando la tasa de ahorro agregada es decreciente durante todo el periodo de transición[5]:

[5] La tasa de ahorro es igual a 1 menos la tasa de consumo, y esta última es igual a:

$$z_t = \frac{\hat{c}_t}{\hat{k}_t^{\alpha}}.$$

$$\frac{\dot{z}_t}{z_t} > 0, \forall v \in (t, \infty) \rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} < 0 \tag{15}$$

$$\frac{\dot{z}_t}{z_t} < 0, \forall v \in (t, \infty) \rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} > 0$$

La dinámica de la tasa de consumo (z) puede deducirse de las ecuaciones (3), (4), (8) y (9):

$$\gamma_{z_t} = \alpha\Gamma\hat{k}_t^{\alpha-1}\left(z_t - \frac{\sigma-1}{\sigma}\right) + \alpha(n + x_t + \delta) - \frac{\rho + \delta + \sigma x_t}{\sigma} \tag{16}$$

$$\gamma_{k_t} = \Gamma\hat{k}^{\alpha-1}(1 - z_t) - (n + x_t + \delta)$$

en donde el crecimiento de la productividad es exógeno para el modelo neoclásico, y endógeno para los modelos de crecimiento endógeno.

4. La dinámica de la distribución del ingreso en el modelo neoclásico

Se puede estudiar la dinámica de la tasa de consumo agregado por medio del diagrama de fases del sistema de ecuaciones (16). Las figuras 1-3 muestran el diagrama de fases para tres valores diferentes de los parámetros cuando el crecimiento de la productividad (x) es exógeno. El conjunto de puntos z y k para los cuales el crecimiento de la tasa de ahorro es nulo está representado por la ecuación:

$$\gamma_z = 0 \rightarrow z_{\gamma_z=0} = z_{\gamma_z=0}(\hat{k}) = \frac{\sigma-1}{\sigma} - \frac{(\delta + \rho + \sigma x)\left(s^* - \frac{1}{\sigma}\right)}{\alpha\Gamma}\hat{k}^{1-\alpha}$$

Figura 1: Modelo neoclásico $s^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \end{pmatrix}$

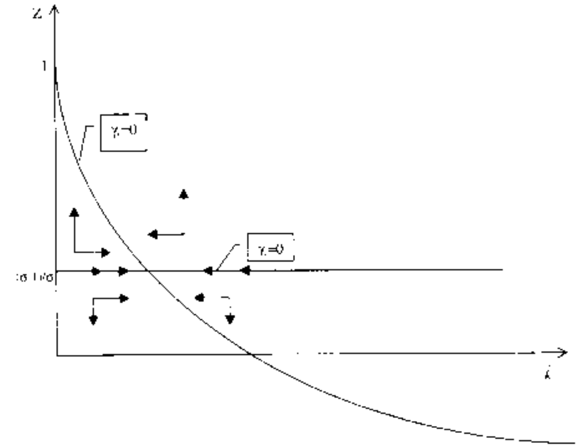


Figura 2: Modelo neoclásico $s^* > \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \end{pmatrix}$

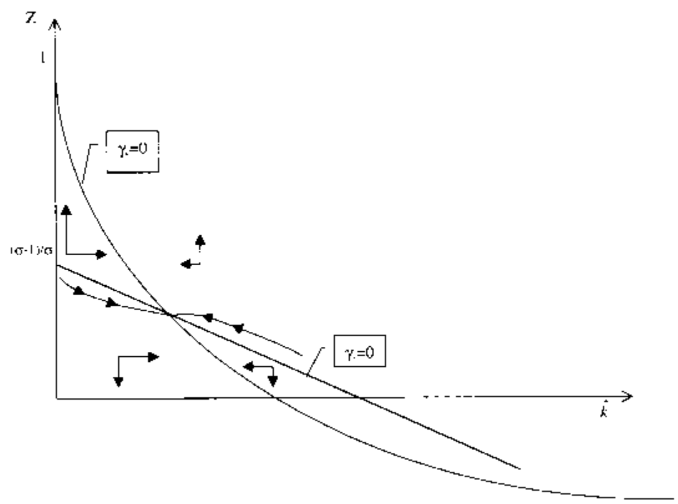
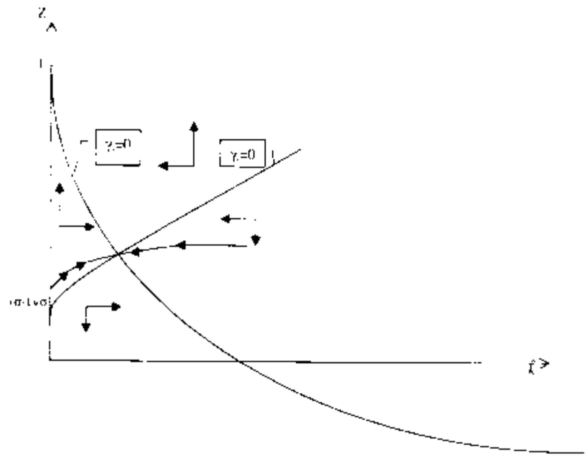


Figura 3: Modelo neoclásico $s^* < \left(\frac{1}{\sigma}\right)$



en donde s^* es la tasa de ahorro en el equilibrio estacionario[6]:

$$s^* = \frac{\alpha(x_t + n + \delta)}{\rho + \sigma x_t + \delta}.$$

La pendiente de la curva z_{γ_z} es nula cuando $s^* = \frac{1}{\sigma}$ (figura 1), es positiva cuando $s^* > \frac{1}{\sigma}$ (figura 2), y es negativa si $s^* < \frac{1}{\sigma}$ (figura 3).

El conjunto de puntos z y k para los cuales el crecimiento del capital por trabajador efectivo es nulo está representado por la ecuación:

---

[6] Ver Barro y Sala-I-Matin (1995) para una deducción de la tasa de ahorro en el estado estacionario.

$$\gamma_k = 0 \rightarrow z_{\gamma_{k=0}} = z_{\gamma_{k=0}}(\hat{k}) = 1 - (x + n + \delta)\hat{k}^{1-\alpha}.$$

La pendiente de la curva $z_{\gamma_{k=0}}$ siempre es negativa.

Los diagramas de fase muestran que en los tres casos existe un equilibrio de punta de silla. Sin embargo, la dinámica de la tasa de consumo cambia de un caso al otro. En la figura 1, la tasa de consumo permanece constante durante la transición hacia el equilibrio estacionario; en la figura 2, la tasa de consumo disminuye; y en la figura 3 aumenta. Puesto que la tasa de consumo disminuye (aumenta) durante todo el período de transición, se puede deducir que el crecimiento del salario es superior al del consumo, y, por lo tanto, las desigualdades aumentan (disminuyen). Por otro lado, si la tasa de consumo es constante durante la transición (figura 1), las desigualdades no varían.

La siguiente proposición establece la dinámica de la distribución de la riqueza en el modelo neoclásico teniendo en cuenta la evolución de la tasa de ahorro (consumo) agregada.

Proposición 3. a)Durante la transición hacia el equilibrio estacionario, la desigualdad y la tasa de ahorro agregada decrecen cuando:

$$s^* = \frac{\alpha(x_t + n + \delta)}{\rho + \sigma x_t + \delta} < \frac{1}{\sigma},$$

en donde s^* es la tasa de ahorro agregada en el equilibrio estacionario[7].

b) Durante la transición hacia el equilibrio estacionario, la desigualdad y la tasa de ahorro agregada aumentan cuando:

[7] Ver Barro y Sala-I-Matin (1995) para una deducción de la tasa de ahorro en el estado estacionario.

$$s^* = \frac{\alpha(x+n+\delta)}{\rho+\sigma x+\delta} > \frac{1}{\sigma},$$

en donde s^* es la tasa de ahorro agregada en el equilibrio estacionario.

La pertinencia empírica del modelo neoclásico

De acuerdo con Barro y Sala-I-Martin (1995), el modelo neoclásico con un agente representativo optimizador es compatible con la evolución real de la economía mundial en los últimos 40 años cuando se interpreta el capital como una combinación de capital físico y capital humano, y se suponen los siguientes valores de los parámetros: $\rho = 0.02$, $\delta = 0.05$, $n = 0.01$, $x = 0.02$, $\alpha = 0.75$ y $\sigma > 2$. En este caso el producto interno bruto de las economías converge a un ritmo similar al encontrado en los trabajos empíricos realizados por ellos, y la tasa de ahorro aumenta levemente durante la transición al equilibrio. Asimismo, de acuerdo a la proposición 3, la distribución del ingreso se desmejora durante este mismo período.

Los trabajos econométricos de Barro y Sala-I-Martin (1995) demuestran que la tasa de ahorro aumenta con el nivel del producto. Además, si se aplican los parámetros de Barro y Sala-I-Martin (1995) a nuestro modelo, se encuentra que las desigualdades y la tasa de ahorro aumentan durante la transición hacia el equilibrio. El modelo neoclásico no predice ni convergencia absoluta, ni convergencia condicional de los ingresos individuales.

5. La dinámica de la distribución del ingreso en los modelos de aprendizaje

En los modelos de crecimiento endógeno a la Romer (1986), la productividad es igual al *stock* de capital agregado, la economía siempre se encuentra en el estado estacionario y, por ende, la tasa de ahorro es constante. En la sección anterior se demostró que cuando la tasa de ahorro es constante, la distribución del ingreso es invariable. En consecuencia, en los modelos de crecimiento a la

Romer, la distribución del ingreso permanece constante (Jaramillo, 1996).

En esta sección se presenta un modelo de crecimiento endógeno en el que existe una dinámica de transición hacia el equilibrio y un crecimiento de largo plazo endógeno. Se puede, por lo tanto, estudiar la dinámica de la distribución del ingreso.

La función de producción sigue siendo igual a la ecuación (3), pero el desarrollo tecnológico es proporcional a la producción acumulada.

El nivel de desarrollo tecnológico es proporcional a la producción acumulada:

$$A_t = \int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-v)} b\Gamma F(k_v,\ A_v L_v)\,dv; \qquad L_v = 1; \qquad n = 0 \qquad (17)$$

en donde n es la tasa de crecimiento de la población y b es un parámetro que indica el efecto de una unidad de producción sobre el nivel conocimiento acumulado. El modelo de Solow corresponde al caso en el cual (b) es igual a cero, es decir, al caso en el que no existe aprendizaje. Si el desarrollo tecnológico está descrito por la ecuación (17) entonces el crecimiento de la economía depende del tamaño de la población, y será creciente a menos que el crecimiento de la población sea nulo. Por el contrario, si el desarrollo tecnológico depende de la producción per cápita acumulada, entonces el crecimiento económico es independiente del tamaño de la población.

Es más lógico pensar que en una empresa el aprendizaje de un trabajador depende de la producción por cabeza. En efecto, en un proceso de producción todos los obreros que realizan, de manera simultánea, las mismas tareas deben aprender las mismas cosas; pero, un trabajador que no realiza estas tareas puede apropiarse sin ningún costo de los conocimientos de los otros obreros. Sin embargo, no se puede sacar ningún provecho del aprendizaje de los otros obreros cuando se tiene el mismo conocimiento que ellos: un individuo puede aprender trabajando o sin trabajar, pero el aprendizaje de todos los individuos no es aditivo. En consecuencia la ecuación (17) se va a reescribir de la siguiente manera:

$$A_t = \int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-v)} b \frac{\Gamma F(k_v, A_v L_v)}{L_v} dv; \qquad \frac{\dot{L}_t}{L_t} = n \tag{18}$$

en donde el crecimiento de la población es exógeno. En nuestro artículo se utiliza la ecuación (18), pero si se utilizara la ecuación (17), la dinámica sería idéntica.

A partir de la ecuación (18) se deduce que el cambio tecnológico es proporcional a la producción por cabeza:

$$\dot{A}_t = b\frac{\Gamma F(k_t, A_t L_t)}{L_t} - \mu A_t, \tag{19}$$

y la tasa de crecimiento de la productividad es proporcional a la producción por trabajo efectivo:

$$x_t = b\hat{y}_t = b\Gamma f\left(\hat{k}_t\right) - \mu \tag{20}$$

$$\hat{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \Gamma F(\hat{k}_t, 1) = \Gamma f(\hat{k}_t)$$

La dinámica del crecimiento, de la tecnología y del consumo por trabajo efectivo

La dinámica del consumo y del capital por trabajo efectivo puede deducirse de las ecuaciones (2), (3), (4), (8), (9), y (20):

$$\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = \frac{\Gamma f\left(\hat{k}_t\right)}{\hat{k}_t} - \delta - \frac{\hat{c}_t}{\hat{k}_t} - n - b\Gamma f\left(\hat{k}_t\right) + \mu \tag{21}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}_t}{\hat{c}_t} = \frac{\Gamma f'(\hat{k}_t) - \delta - \rho}{\sigma} - x_t = \frac{\Gamma f'(\hat{k}_t) - \delta - \rho}{\sigma} - b\Gamma f(\hat{k}_t) + \mu \tag{22}$$

Así, la dinámica del consumo y del capital agregados está determinada por la ecuación (21) y la condición de transversalidad

$$lim_{t\to\infty} \quad e^{-\rho t} c_t^{\ \sigma} L_t\ k_t = 0.$$

La dinámica de transición hacia el equilibrio estacionario puede ser descrita por un diagrama de fases. Con la ecuación (21) se encuentra el gráfico del conjunto de puntos $\hat{c}$ y $\hat{k}$ para los cuales $\dot{\hat{k}} = 0$:

$$\hat{c}_{\dot{\hat{k}}=0} = g(\hat{k}*) = \Gamma f(\hat{k}*) - (\delta + n)\hat{k}* - b\Gamma f(\hat{k}*)\hat{k}* + \mu \hat{k}*. \tag{23}$$

La función $g(\hat{k})$ tiende hacia cero (menos infinito) cuando $(\hat{k}*)$ tiende hacia cero (infinito). Además, dicha función es superior o igual a cero cuando

$$\frac{\Gamma f(\hat{k}*)(1 - b\hat{k}*)}{\hat{k}*} \geq \delta + n - \mu. \tag{24}$$

En adelante se supondrá la suma de la tasa de depreciación del capital físico y la tasa de crecimiento de la población es superior a la tasa de depreciación del conocimiento $\delta + n - u > 0$. Este es un valor razonable pues, como se verá más adelante, la evidencia empírica sugiere que la tasa depreciación del capital humano no excede a la del capital físico. En consecuencia, para que el consumo de equilibrio sea positivo es necesario, aunque no suficiente, que $\hat{k}* < 1/b$.

La primera derivada de la función $g\ (\hat{k}*)$.

$$g'(\hat{k}*) = (1 - b\hat{k}*)\Gamma f'(\hat{k}*) - (\delta + n - \mu) - b\Gamma f(\hat{k}*).$$

tiende al infinito (menos infinito) cuando $(\hat{k}*)$ tiende a cero (infinito)[8]. El máximo de la función $g(\hat{k}*)$ está descrito por la condición

$$g'(\hat{k}*)=0 \rightarrow (1-b\hat{k}*)\,\Gamma f'(\hat{k}*)-b\Gamma f(\hat{k}*)=(\delta+n-\mu).$$

La segunda derivada de la función $g(\hat{k}*)$

$$g''(\hat{k}*)=(1-b\hat{k}*)\,\Gamma f''(\hat{k}*)-2b\Gamma f'(\hat{k}_t)$$

es negativa si $(\hat{k}*<1/b)$. Anteriormente se encontró que esta condición se cumple cuando el consumo de equilibrio es positivo (ecuación (24)).

Por otro lado, a partir de la ecuación (22), se pueden encontrar los puntos $\hat{c}$ y $\hat{k}$ para los cuales el crecimiento del consumo por trabajo efectivo es igual a cero $(\hat{c}=0)$:

$$\Phi(\hat{k}*)=\Gamma f(\hat{k}*)-\sigma\left[b\,\Gamma f(\hat{k}*)-\mu\right]=\rho+\delta. \tag{25}$$

El diagrama de fases presentado en el gráfico (4A) permite analizar la transición hacia el equilibrio estacionario. En él se observa que existe un único equilibrio de punta de silla. Si el capital por trabajo efectivo es inferior al del equilibrio estacionario, entonces el consumo y el capital por trabajo efectivo aumentan, y lo mismo sucede con el crecimiento del desarrollo tecnológico.

En el equilibrio estacionario, el consumo por trabajo efectivo y el capital por trabajo efectivo son constantes, pero el crecimiento del desarrollo tecnológico es positivo. Los valores de las dos últimas

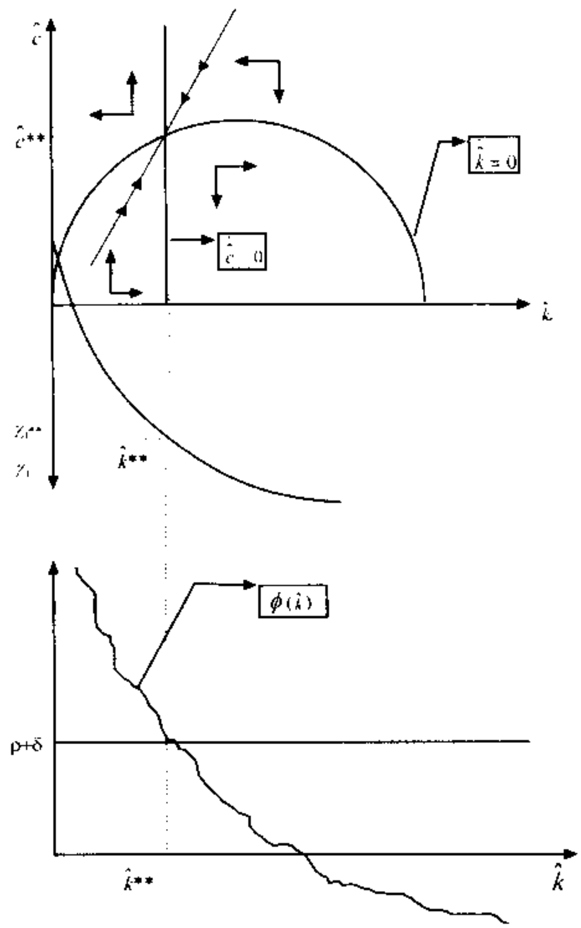
---

[8] Esta conclusión se deduce de la identidad:

$$\lim_{\hat{k}*\to\infty}\hat{k}*f(\hat{k}*)=\lim_{\hat{k}*\to\infty}\hat{k}*\lim_{\hat{k}*\to\infty}\frac{f(\hat{k}*)}{\hat{k}*}.$$

variables están determinados por la ecuación (25), pero el valor del consumo por trabajo efectivo está determinado por las ecuaciones (23) y 25). Además, en el equilibrio estacionario, el capital, el consumo y la producción per cápita aumentan al mismo ritmo que el desarrollo tecnológico.

La figura (4a) presenta la curva $g(\hat{k}*)$ con las propiedades descritas.



La figura (4B) presenta la solución a la ecuación (25).

La dinámica de la tasa de ahorro y la distribución del ingreso

La dinámica de la tasa de ahorro puede deducirse de las ecuaciones (16) y (20). En efecto, si la función de producción es Cobb-Douglas, entonces:

$$\gamma_{z_t} = \alpha\,\Gamma \hat{k}_t^{\alpha-1}\left(z_t - \frac{\sigma-1}{\sigma}\right) + (\alpha-1)\left[b\Gamma k_t^{\alpha} - \mu\right] + \alpha(n+\delta) - \frac{\rho+\delta}{\sigma} \qquad (26)$$

$$\gamma_{k_t} = \Gamma \hat{k}^{\alpha-1}(1-z_t) - (n+\delta) - b\Gamma k_t^{\alpha} + \mu$$

El conjunto de puntos que corresponden a una tasa de crecimiento nula está representado por la ecuación:

$$\gamma_z = 0 \rightarrow z_{\gamma_z=0} = z_{\gamma_z=0}(\hat{k})$$

$$z_{\gamma_z=0}(\hat{k}) = \frac{1-\alpha}{\alpha} b\hat{k} + \left(\frac{\rho+\delta}{\alpha\sigma\Gamma} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\mu - \frac{n+\delta}{\Gamma}\right)\hat{k}^{1-\alpha} + \frac{\sigma-1}{\sigma}.$$

Si el *stock* de capital es igual a cero, la variable $z_{\gamma_z=0}$ es $\frac{\sigma-1}{\sigma}$. La pendiente de la curva $z_{\gamma_z=0}$ es positiva cuando la expresión $v = \left(\frac{\delta+\rho}{\alpha\sigma} - (\delta+n) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\mu\right)$ es superior (figura 6) o igual a cero (figura 5). La derivada segunda es nula cuando la expresión v es igual a cero, y dicha derivada es negativa cuando v es superior a cero.

Cuando la expresión v es inferior a cero, la segunda derivada de la curva $z_{\gamma_z=0}$ es positiva. La pendiente de la curva $z_{\gamma_z=0}$ inicialmente es negativa, y después se convierte en positiva (figura 7a y 7b). La tasa de consumo mínima corresponde al *stock* de capital definido por:

$$\hat{k}^{\alpha}_{min} = \frac{\alpha(\delta+n)}{b\Gamma} - \frac{\delta+\rho}{\sigma b\Gamma} + \frac{(1-\alpha)\mu}{b\Gamma}. \tag{27}$$

El conjunto de puntos en los que el crecimiento del *stock* de capital por trabajo efectivo es nulo está representado por la ecuación:

$$\gamma_{\hat{k}} = 0 \rightarrow z_{\gamma_{\hat{k}}=0} = z_{\gamma_{\hat{k}}=0}(\hat{k}) = 1 - \frac{\delta+n-\mu}{\Gamma}\hat{k}^{1-\alpha} - b\hat{k},$$

Figura 5: Crecimiento endógeno: $\left(\frac{\delta+\rho}{\alpha\sigma}\right) - \delta - n - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\mu = 0$

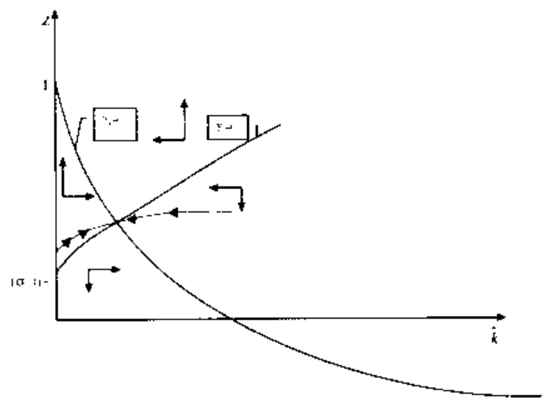
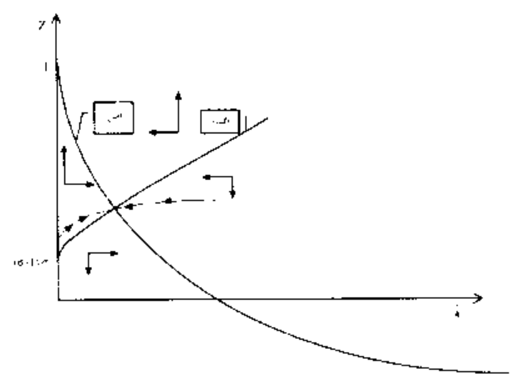


Figura 6: Crecimiento endógeno: $\left(\frac{\delta+\rho}{\alpha\sigma}\right) - \delta - n - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\mu > 0$



Cuando el *stock* de capital es igual a cero la variable $z_{\gamma_{\xi}=0}$ es 1. La pendiente de la curva $z_{\gamma_{\xi}=0}$ siempre es negativa y su segunda derivada es positiva ya que se supuso $\delta + n > \mu$.

De acuerdo al diagrama de fases del sistema de ecuaciones (26), siempre existe un equilibrio de punta de silla. En el caso de un valor nulo para la variable v, la figura (5) muestra que la tasa de consumo aumenta durante la transición hacia el equilibrio, y, en consecuencia, la distribución del ingreso se mejora. En la figura (6) se encuentra la misma conclusión cuando $v > 0$.

La dinámica de la transición hacia el equilibrio es un poco más complicada cuando $v < 0$. En efecto, si el *stock* de capital por trabajo efectivo que minimiza la curva $z_{\gamma_{\xi}=0}$ es superior al de equilibrio, la tasa de consumo disminuye durante la transición hacia el equilibrio, y, en consecuencia, las desigualdades aumentan (figura 7b).

Según la ecuación (27), el capital por trabajo efectivo que minimiza la curva $z_{\gamma_{\xi}=0}$ es superior al de equilibrio, si se verifica la siguiente condición:

$$b\Gamma\hat{k}^{\alpha}_{min} = \alpha(\delta + n) - \frac{\delta + \rho}{\sigma} + (1 - \alpha)\mu > x^{**} + \mu \Rightarrow$$

$$b\Gamma\hat{k}^{\alpha}_{min} > b\Gamma\hat{k}^{\alpha}_{**} \rightarrow \hat{k}_{min} > \hat{k}_{**}$$

en donde x^{**} es la tasa de crecimiento de equilibrio.

Si el capital por trabajo efectivo que minimiza la curva $z_{\gamma_{\xi}=0}$ es inferior al de equilibrio, la tasa de consumo disminuye durante un tiempo, y después comienza a aumentar (figura 7a). Es claro que en los años en que la tasa de consumo aumenta, las desigualdades disminuyen puesto que dicha tasa continuará aumentando, y, en consecuencia, el promedio del crecimiento del salario será inferior al promedio del crecimiento del consumo (ecuación 14). Pero antes de esto no se puede saber si las desigualdades están aumentando puesto que no se puede decir nada ni sobre la tasa de crecimiento promedio del consumo, ni sobre los salarios. Esto se debe al cambio de signo de la tasa de crecimiento del consumo. En todo caso, si al comienzo del proceso hubiese un aumento de las desigualdades, al final habría una disminución. Con nuestro modelo se puede, por lo tanto, encontrar una curva de Kuznetz con una implicación muy fuerte: si la tasa de ahorro decrece en el tiempo, las desigualdades también lo harán.

La siguiente proposición sintetiza la dinámica de la distribución del ingreso descrita en las figuras (5), (6), (7 a), (7b)

Proposición 4. a) Durante la transición hacia el equilibrio, la desigualdad y la tasa de ahorro agregada disminuyen cuando:

Figura 7: Crecimiento endógeno $\left(\frac{\delta+\rho}{\alpha\sigma}\right)-\delta-n-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\mu<0$

Figura 7A

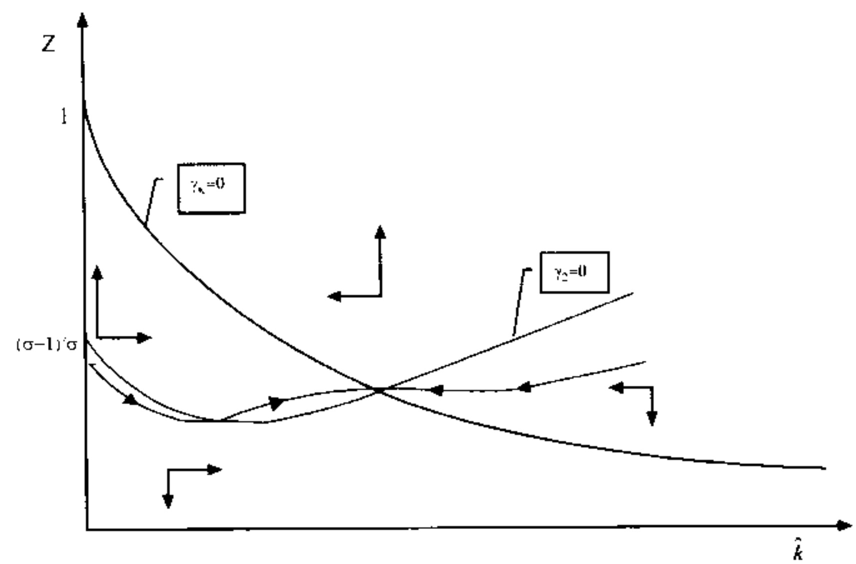
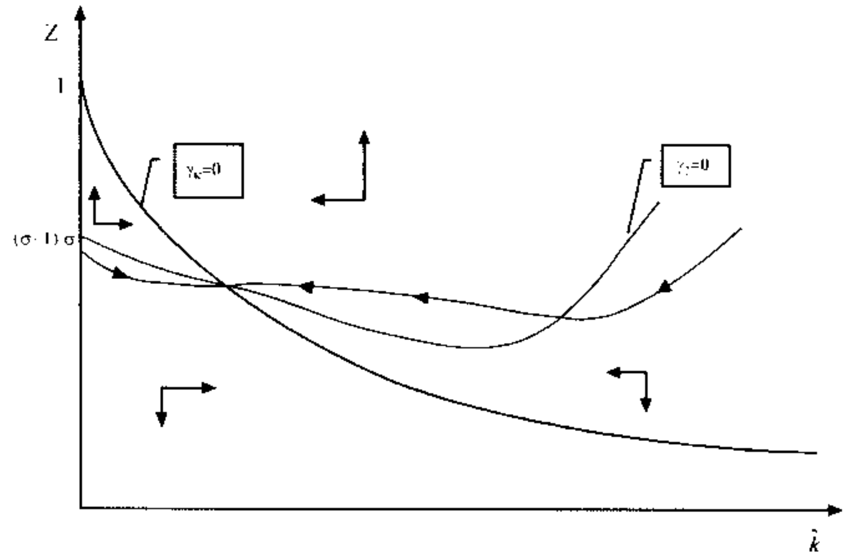


Figura 7B



$$v = \left(\frac{\delta + \rho}{\alpha\sigma} - (\delta + n) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\mu \right) \geq 0$$

b) Durante la transición hacia el equilibrio, la desigualdad y la tasa de ahorro agregada aumentan cuando:

$$v = \left(\frac{\delta + \rho}{\alpha\sigma} - (\delta + n) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\mu \right) < 0$$

y

$$\alpha(\delta + n) - \frac{\delta + \rho}{\sigma} > x^*$$

en donde x^* ***es la tasa de crecimiento de la economía en el estado estacionario.***

c) Si

$$v = \left(\frac{\delta + \rho}{\alpha\sigma} - (\delta + n) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\mu \right) < 0$$

$$\text{y}\, \alpha(\delta + n) - \frac{\delta + \rho}{\sigma} < x^*,$$

la tasa de ahorro aumenta al comienzo de la transición al equilibrio, y después comienza a disminuir. Cuando la tasa de ahorro es decreciente, existe una relación directa entre dicha tasa y la desigualdad.

Pertinencia empírica del modelo de aprendizaje mediante la producción

Para saber cuales de las figuras (5), (6), (7a), (7b) es la pertinente para el análisis de la dinámica de la distribución del ingreso, se suponen los mismos parámetros que en la sección (3.1). Para la tasa de depreciación del aprendizaje se empleará el valor $\mu = 0.04$ estimado por Heckman (1976).

Las figuras (5) y (6) no son pertinentes para el análisis de la dinámica del modelo ya que cuando $\rho = 0.02$, $\delta = 0.05$, $n = 0.01$, $\alpha = 0.75$, $\mu = 0.04$, $\sigma > 2$ y la tasa de crecimiento equilibrada es $x^{**} = 0.02$, entonces:

$$v = \left(\frac{\delta + \rho}{\alpha\sigma} - (\delta + n) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\mu \right) < 0 \Leftrightarrow \sigma > 1.27.$$

La figura (7b) tampoco es pertinente puesto que con estos valores

$$\alpha(\delta + n - \mu) - \frac{\delta + \rho}{\sigma} < x^* \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} > -0.07$$

Así, si se supone una elasticidad de substitución intertemporal superior a 2, la figura (7a) describe la dinámica de la distribución del ingreso. Es posible que al comienzo del periodo de transición hacia equilibrio las desigualdades aumenten, pero hacia el final del mismo, las desigualdades tienden a disminuir.

6. Conclusiones

El presente artículo estudió la dinámica de la distribución del ingreso en varios modelos de crecimiento basados en agentes optimizadores cuyas preferencias son homotéticas. En los modelos presentados, la distribución del ingreso no converge hacia una perfecta igualdad, y, por lo tanto, la eliminación de las imperfecciones del mercado financiero no son una condición suficiente para la existencia de una sociedad igualitaria en el largo plazo.

Además, se introduce un modelo de crecimiento basado en el aprendizaje en la producción en el que el proceso de aprendizaje se modela de una manera explícita. En dicho modelo no sólo existe persistencia en las desigualdades en un país, sino también entre países.

La persistencia de las desigualdades en los modelos neoclásico, de crecimiento endógeno y en el de Kaldor está explicada por las mismas razones: la propensión a ahorrar los ingresos del trabajo en el estado estacionario es nula. La existencia de una restricción intertemporal y de un crecimiento equilibrado son condiciones suficientes para explicar una tasa de ahorro nula para los ingresos del trabajo. Estas condiciones son válidas tanto en los modelos neoclásicos como en los de crecimiento endógeno.

Se demostró, igualmente, la no ergodicidad del proceso de distribución del ingreso, de donde se concluye la importancia de los accidentes históricos en la explicación de la distribución del ingreso de largo plazo.

La dinámica de la distribución del ingreso durante la transición hacia el equilibrio estacionario depende del comportamiento de la tasa de ahorro. Si se utiliza el valor de los parámetros supuestos por Barro y Sala-I-Martin (1995), entonces el modelo neoclásico predice un aumento de las desigualdades durante la transición. Por otro lado, al aplicar el mismo valor de los parámetros a un modelo de crecimiento endógeno, se encuentra que la tasa de ahorro aumenta al comienzo de la transición al equilibrio, y después comienza a disminuir. Además, cuando la tasa de ahorro es decreciente, existe una relación directa entre dicha tasa y la desigualdad. La distribución del ingreso sigue un patrón similar al predicho por Kutnetz: se deteriora en las fases iniciales de desarrollo, y después se mejora. Sin embargo, la distribución estacionaria depende de su valor inicial.

Bibliografía

Andres, Javier y Ana Lamo (1995), "Dynamics of the Income Distribution Across OECD Countries", Documento de discusión del Centre For Economic Performance.

Aghion, P. y P. Bolton, (1997), "A Trickle-Down Theory of Growth and Development with Debt-Overhand", *Review of Economic Studies,* 64, 151-172.

Barro, Robert J. (1991), "Economic Growth in a Cross-Section of Countries", *Quarterly Journal of Economics,* 106(2), 407-443.

Barro, R. y X. Sala-I-Martin (1995), *Economic Growth,* McGraw-Hills, New-York.

Banerjee A. y A. Newman (1994), "Poverty, Incentives and Development", *AEA Papers and Proceedings,* Mayo.

Bénabou, R. (1996), "Inequality and Growth", *NBER Macroeconomics Annual.*

Bertola, G. (1993): "Factor Shares and Savings in Endogenous Growth", *American Economic Review,* 83, 1184-1198.

Bourguignon F. (1981), "Paretto Superiority of Inegalitarian Equilibria in Stiglitz Model of Wealth Distribution with Convex Saving Function", *Econometrica,* 49, 1469-1475.

Caselli, F. y J. Ventura (1996), "A Representative Consumer Theory of Distribution", *Working Paper MIT,* Avril.

Chatterjee, S. (1994), "Transitional Dynamics and the Distribution of Wealth in a Neoclassical Growth Model", *Journal of Public Economics*, 54, 97-119.

D'Autume A. y P. Michel (1992), "Les Théories de la Croissance Endogène-Partie 1" *Cahiers Ecomath,* Université de Paris 1.

Galor, O. y J.Zeira, (1993), "Income Distribution and Macroeconomics", *Review of Economics Studies*, 60, 30-52.

Grossman, Gene M. y Elhanan Helpman (1991), *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge: MIT Press.

__________. (1994), "Endogenous Innovation in the Theory of Growth," *Journal of Economic Perspectives*, 8(1), 23-44.

Heckman (1976), "A Life-Cycle Model of Earnings, Learning and Consumption," *Journal of Political Economy*, 84(4): S11-S44.

Jaramillo, F. (1996), "Croissance et Repartition du Revenu dans un Modèle de Croissance Endogène", *Revue d'Economie Politique*, Diciembre.

Kaldor, N. (1956), "Alternatives Theories of Distribution", *Review of Economic Studies,* Vol. XXIII, 83-100.

Krugman, Paul R. (1987), "The Narrow Moving Band, the Dutch Disease, and the Consequences of Mrs. Tatcher: Notes on Trade in the Presence of Scale Economics," *Journal of Development Economies*, 27, 41-55.

Lucas, Robert E. (1988), "On the Mechanics of Economic Development," *Journal of Monetary Economics*, 22, 3-42.

________. (1993), "Making a Miracle," *Econometrica*, 61(2), 251-272.

Mankiw, N. Gregory, David Romer y David N. Weil (1992), "A Contribution to the Empirics of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407-437.

Pasinetti, L. (1962), "Rate of Profit and Income Distribution in Relation to the Rate of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, vol. 29, 267-279.

Perotti, R. (1995), "Growth, Income Distribution, and Democracy: What the Data Say", Mimeo, Columbia University.

Picketty, T. (1992), "Imperfect Capital Markets and Persistence of Initial Wealth Inequalities", Working Paper STICERD-LSD.

Quah, D. (1996a),"Twin Peaks: Growth and Convergence in Models of Distribution Dynamics," *The Economic Journal*, Julio, 1045-1055.

________. (1996b), "Empirics for Economic Growth and Convergence", *European Economic Review*, Diciembre, 1353-1375.

________. (1997), "Empirics for Growth and Distribution: Stratification, Polarization, and Convergence Clubs," *Journal of Economic Growth*, 2:27-59.

Rapping, Leonard A. (1965), "Learning and the World War II Production Functions," *Review of Economics and Statistics*, 47, 81-86.

Romer, Paul (1986), "Increasing Returns and Long-Run Growth," *Journal of Political Economy*, 94, 1002-1037

________. (1994), "The Origins of Endogenous Growth," *Journal of Economic Perspectives*, 8(1), 3-22.

Sala-I-Martin (1994), *Apuntes de Crecimiento Económico*. Barcelona: Antoni Bosch.

Searle, Allan D. (1945), "Productivity Changes in Selected Wartime Shipbuilding Programs," *Monthly Labor Review*, 61, 1132-1147.

Stiglitz, J.E. (1969), "Distribution of Income and Wealth Among Individuals", *Econometrica*, Vol 37, No 3, Julio.

Tamura, R. (1961), "Income Convergence in an Endogenous Growth Model", *Journal of Political Economy*, 99, 522-540.

Vellutini, Charles (1997),"Inégalités et Mobilité du Capital dans le Modèle Néo-Classique à Horizon Infini", Working Paper, MAD, Paris, Diciembre.