INVESTIGACIONES GEOGRÁFICAS

Investigaciones Geográficas (Esp)
E-ISSN: 1989-9890
inst.geografia@ua.es
Universidad de Alicante
España

Tornadijo Rodríguez, Tomás F.

CONFIRMACIÓN DE LA POSICIÓN DE FLAVIONAVIA POR IGUALACIÓN DE ÁREAS DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

Investigaciones Geográficas (Esp), núm. 47, 2008, pp. 175-184
Universidad de Alicante
Alicante, España

Investigaciones Geográficas, nº 47 (2008) pp. 175-184
ISSN: 0213-4691

Instituto Universitario de Geografía
Universidad de Alicante

CONFIRMACIÓN DE LA POSICIÓN DE *FLAVIONAVIA* POR IGUALACIÓN DE ÁREAS DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

Tomás F. Tornadijo Rodríguez
Analista informático

RESUMEN

El propósito de este artículo es mostrar la aplicación de un procedimiento de georreferenciación, basado en la igualación de triángulos esféricos, de utilidad para interpretar las posiciones de los lugares hispanos descritos por Claudio Ptolomeo en su obra *Geographikè Uphégesis,* en el siglo II. Desarrollaremos un ejemplo concreto, contrastando el resultado obtenido para la posición de *Flavionavia*, con la posición asignada por la historiografía, en el valle del bajo Nalón.

Palabras clave: Flavionavia, georreferenciación, Ptolomeo, triángulo esférico, trigonometría.

ABSTRACT

The purpose of this article is to show the implementation of a procedure for georeferencing, based on the equalization of spherical triangles, useful for interpreting the positions of the Hispanic places described by Claudius Ptolemy in his work *Geographikè Uphégesis*, in the second century. We will develop a concrete example, contrasting the result obtained for the position of *Flavionavia*, with the position assigned by the historiography in the valley of low Nalón.

Key words: *Flavionavia*, georeferencing, Ptolemy, spherical triangle, trigonometry.

1. Introducción

Vamos a localizar un núcleo de la *Geographia*, adaptando un método descrito para reconstruir el mapa de Ptolomeo de África occidental (Lyudmila *et al*, 2005: 4-5).

Fecha de recepción: 31 de octubre de 2008. **Fecha de aceptación:** 28 de mayo de 2009.

Para realizar una identificación, estos autores buscan en la *Geographia* tres puntos de referencia, de posiciones conocidas, delimitando un área que encierre el núcleo cuya posición se desea reducir. A continuación ponderan las coordenadas de los vértices del área real con un coeficiente, calculado como la razón de las áreas ptolemaica y real, obteniendo entonces la posición del punto interior, con respecto a este sistema.

Luego veremos detalladamente la adaptación de este procedimiento, que emplearemos para contrastar la posición del núcleo de *Flavionavia* (*Geographia*: II, 6, 5), entre los astures *paesici*.

Según señalaba J. M. González (González, 1953: 35-37), el punto más cercano a *Flavionavia* citado por Ptolomeo es la desembocadura del río *Nailos* (Nalón), señalada a 15' al este de *Flavionavia* y 5' al norte de esta ciudad.

Por otra parte, observaba que los puntos interiores aparecían en la *Geographia* desplazados en dirección Oeste, de modo que caminando hacia el Este para corregir la desviación de estos puntos interiores, y hacia el Sur unos 5', desde la boca del Nalón, encontraba los alrededores de Pravia como emplazamiento plausible para *Flavionavia*.

Más adelante J. M. González (González, 1953: 40-41), tras examinar los vestigios romanos del bajo Nalón, terminaba estableciendo Santianes de Pravia, donde la Monarquía Asturiana tuvo corte con el rey Silo en el año 774, como emplazamiento más probable para la población hispanorromana de *Flavionavia*, reducción que, en general, sostiene la historiografía actual (Yanguas, 1997: 420-421).

2. Metodología

2.1. Triángulos geográficos

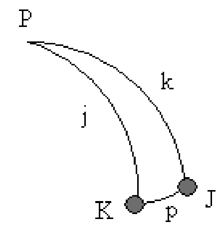
Para reducir un lugar no identificado, buscaremos en la *Geographia* tres coordenadas que conformen los vértices de un triángulo cuyo perímetro encierre el punto buscado. Además, estas tres coordenadas tendrán que pertenecer a lugares ya perfectamente localizados.

Hay que comprobar, también, que estas coordenadas guarden alguna relación con las reales. Podemos hacer que ambos conjuntos de datos verifiquen una prueba de linealidad, pero, podría darse el caso de que algún vértice pertenezca a un territorio que presente un desplazamiento con respecto al que estamos estudiando, como los puntos interiores de los astures que comentábamos supra, en relación con los puntos litorales. En tal caso habría que comprobar si ese vértice puede insertarse en otro conjunto coherente, que guarde alguna relación con las coordenadas reales.

2.2. Lados de los triángulos

A continuación calcularemos las longitudes, en radianes, de todos los lados, tanto del triángulo ptolemaico, como del triángulo construido sobre la cartografía real. Para ello utilizaremos la fórmula 1 (figura 1) con la que podemos obtener la longitud del arco entre J y K, dados dos puntos de latitudes $\varphi_{J,}$ φ_K y longitudes $\lambda_{J,}$ $\lambda_{K.}$[1]

1 Si empleamos las funciones trigonométricas de las hojas de cálculo, hay que tener en cuenta que trabajan usualmente con radianes, por lo que necesitaremos multiplicar los grados por π / 180°.



$$j = PK = (90^{\circ} - \varphi_K)\ \pi / 180^{\circ}$$

$$k = PJ = (90^{\circ} - \varphi_J)\ \pi / 180^{\circ}$$

$$p = (\lambda_J - \lambda_K)\ \pi / 180^{\circ}$$

(1) $L = \arccos(\cos(j)\cos(k) + \mathrm{sen}(j)\mathrm{sen}(k)\cos(p))$

FIGURA 1. Teorema del coseno.

2.3. Áreas de los triángulos

Con estas longitudes, ya podemos obtener la superficie del triángulo geográfico, por medio de la fórmula de L'Huillier, (fórmula 2) similar a la conocida fórmula de Herón, pero para triángulos esféricos, que precisa las longitudes de los lados (a, b, c) del triángulo, en radianes.

(2) $\varepsilon = 4\arctan(\sqrt{(\tan(s/2)\tan((s-a)/2)\tan((s-b)/2)\tan((s-c)/2))})$

$$s = (a + b + c)/2$$

Este cálculo, lo realizaremos para el triángulo real y el ptolemaico, y nos permitirá calcular el coeficiente Ω: la razón de ambas áreas.

2.4. Áreas de las tres subdivisiones

Calculamos los valores de superficie de los tres triángulos que podemos formar, tomando de dos en dos los vértices de referencia ptolemaicos y las coordenadas del núcleo a localizar (Figura 2), empleando para ello la fórmula 2.

2.5. Distancias reales al punto problema

Ahora podemos plantear una ecuación con la fórmula de L'Huillier, igualando la superficie encerrada entre dos vértices reales y el punto a resolver, a la superficie ptolemaica, afectada del coeficiente de conversión Ω. La suma de las áreas ptolemaicas, ponderadas por Ω, será igual al área real.

Necesitaremos un sistema con tres ecuaciones, donde las incógnitas serán las tres distancias desde los vértices al punto problema (figura 3).

Este proceso, de subdivisión del área real en tres trozos proporcionales a sus equivalentes ptolemaicos, es el que nos permite resolver la deformación de los territorios descritos en la *Geographia*.

En realidad, la fórmula 2 nos proporciona el *exceso esférico*, y para obtener la superficie tendríamos que multiplicar por el cuadrado del radio de la esfera, pero los radios de la Tierra de Ptolomeo y de la Tierra real son dos constantes que nos desaparecen en las ecuaciones del sistema 1 (tabla 5), lo que tiene la enorme ventaja de que no es preciso hacer elucubraciones sobre las dimensiones de la Tierra utilizada por Ptolomeo, ni sobre sus unidades de medición, ya que trabajamos en radianes.

2.6. Coordenadas reales

Resolviendo el sistema de ecuaciones, una vez obtenidas las distancias tendremos que plantear aún otro sistema, con dos ecuaciones y dos incógnitas, (con la fórmula 1) para, finalmente, obtener las coordenadas a partir de esas distancias.

3. Localización de *Flavionavia*

3.1. Triángulos geográficos

En la tabla 1 vemos los tres vértices utilizados para la referenciación, junto a sus reducciones geográficas actuales y, en última posición, el punto problema: *Flavionavia*. Los minutos han sido convertidos en fracciones de grado. Se ha utilizado el SIGPAG para obtener información geográfica[2], y se han tomado los valores de coordenadas ptolemaicas utilizados por J. M. González (González, 1952: 42) y por E. Martínez Hombre, (Martínez, 1964: 76).

Geographia	***Longitud***	***Latitud***	***Real***	***Longitud***	***Latitud***
Lucus Asturum	11º	45º	Sta. Mª de Lugo (Llanera)	5,81666º	43,43333º
Nailos	12º	45,5º	Boca río Nalón	6,07545º	43,56525º
Navia Albion	11,33333º	45,75º	Boca río Navia	6,72385º	43,55728º
Flavionavia	11,75º	45,41666º	?	?	?

Tabla 1

Los valores asignados por Ptolomeo para las coordenadas de los ríos *Navia Albion* y *Nailos* están claramente relacionados con los valores geográficos reales, pues la diferencia de longitudes resulta casi idéntica a la real, existiendo sólo cierta inexactitud en las latitudes (González, 1952: 42-43).

En cuanto a *Lucus Asturum*, resulta posible insertar sus coordenadas en un esquema general para Hispania, como hizo E. Martínez Hombre, (Martínez, 1964: 76), de modo que podemos concluir que estos tres pares de coordenadas ptolemaicas constituyen un conjunto relacionado, de diferentes formas, con las magnitudes de sus posiciones reales.

2 SIGPAC (*Sistema de Información Geográfica de Identificación de Parcelas Agrarias*) URL: http://sigpac.mapa.es/fega/visor/

3.2. Lados de los triángulos

Obtenemos las distancias, en radianes, a los vértices (figuras 2 y 3, tablas 1 y 2).

Arco (real)	***Distancia en radianes***
R. Nalón-Sta. Mª de Lugo	0,004004
Sta. Mª de Lugo-R. Navia	0,011688
R. Navia-R. Nalón	0,008202

Tabla 1

Arco (Geographia)	***Distancia en radianes***
Nailos-Lucus Asturum	0,015071
Lucus Asturum-Navia Albion	0,013713
Navia Albion-Nailos	0,009234

Tabla 2

3.3. Áreas de los triángulos

Obtenemos ε y el coeficiente Ω (tabla 3).
Coeficiente real/ptolemaico, Ω = 0,161290322580645.

Vértices áreas		ε
Geographia	*Lucus Asturum-Naelus-Navia Albion*	0,000062
Real	Sta. Mª de Lugo-R. Nalón-R. Navia	0,000010

Tabla 3

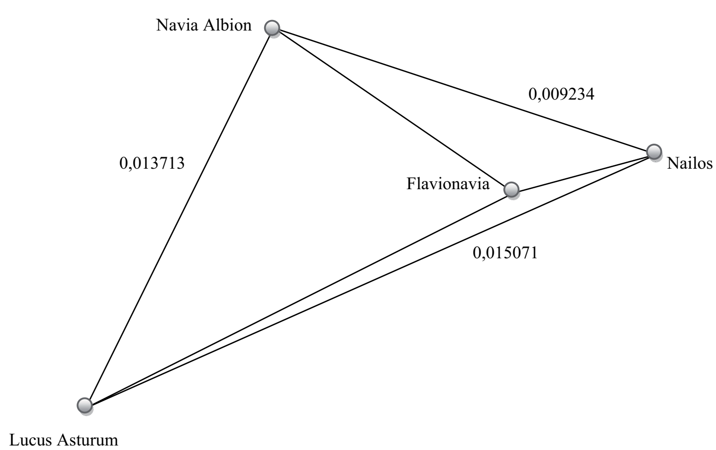


FIGURA 2. Vértices Ptolemaicos.

3.4. Áreas de las tres subdivisiones

Obtenemos ε para los tres triángulos con *Flavionavia* (tabla 4).

Geographia: Vértices áreas	ε
Nailos-Lucus Asturum-Flavionavia	0,000004
Lucus Asturum-Navia Albion-Flavionavia	0,000045
Navia Albion-Flavionavia	0,000013

Tabla 4

3.5. Distancias reales al punto problema

Igualamos los tres valores anteriores, afectados del coeficiente Ω, a las tres ecuaciones con los vértices reales y resolvemos el sistema. (Figura 3, tabla 5)

Sistema de ecuaciones 1. Distancias reales.
$a_0 = (0{,}004004 + x + y)/2 \;;\; a_1 = (y + z + 0{,}011688)/2 \;;\; a_2 = (0{,}008202 + z + x)/2$
$4\arctan(\sqrt{(\tan(a_0/2)\tan((a_0 - 0{,}004004)/2)\tan((a_0 - x)/2)\tan((a_0 - y)/2)}) = 0{,}000004\Omega$
$4\arctan(\sqrt{(\tan(a_1/2)\tan((a_1 - y)/2)\tan((a_1 - z)/2)\tan((a_1 - 0{,}011688)/2)}) = 0{,}000045\Omega$
$4\arctan(\sqrt{(\tan(a_2/2)\tan((a_2 - 0{,}008202)/2)\tan((a_2 - z)/2)\tan((a_2 - x)/2)}) = 0{,}000013\Omega$

Tabla 5

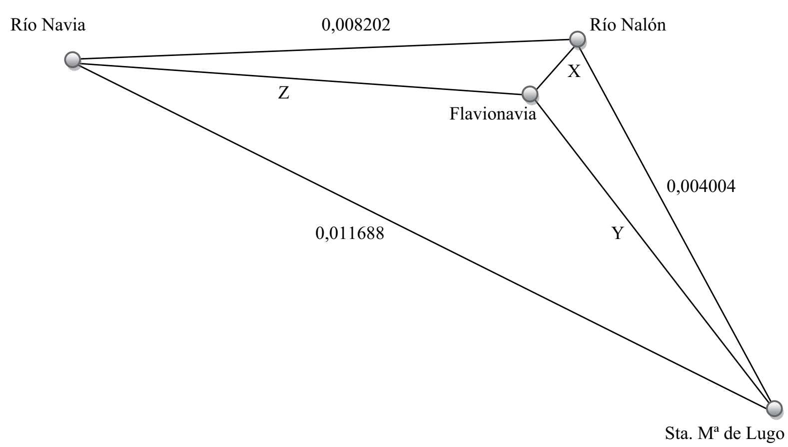


FIGURA 3. Vértices reales.

3.6. Coordenadas reales

Con las distancias x = 0,000557, y = 0,0035643, z = 0,0084389 planteamos, con la fórmula 1, un sistema de ecuaciones para obtener las coordenadas buscadas (figura 3, tabla 6).

Sistema de ecuaciones 2. Cálculo de coordenadas.	
Nalón-Flavionavia	$a_0 = (90º\text{-}43{,}56525º)\pi/180º = 0{,}81043927$ $b_0 = (90º\text{-}\varphi)\pi/180º$ $p_0 = (\lambda - 6{,}075447º)\pi/180º$
	$\arccos(\cos(a_0)\cos(b_0) + \text{sen}(a_0)\text{sen}(b_0)\cos(p_0)) = 0{,}000557$
Sta. Mª de Lugo-*Flavionavia*	$a_1 = (90º\text{-}43{,}43333º)\pi/180º = 0{,}81274171$ $p_1 = (\lambda - 5{,}81666º)\pi/180º$
	$\arccos(\cos(a_1)\cos(b_0) + \text{sen}(a_1)\text{sen}(b_0)\cos(p_1)) = 0{,}0035643$

Tabla 6

4. Análisis

Vamos a comparar los valores obtenidos de longitud y latitud, λ = 6º 3' 29,484'' W, φ = 43º 32' 11,04'' N, con la posición de la iglesia de Santianes de Pravia (6º 5' 51,84''W 43º 30' 11,19''N), para determinar si podemos considerar válido el resultado, pues Ptolomeo contaba de 5 en 5 minutos.

El valor de grado de latitud que proporciona Dieter Lelgemann para la *Geographia* en el occidente europeo (Lelgemann, 2004: 3-4), es de 500 estadios de Eratóstenes (estadios de 158,7 metros), con un valor de 700 estadios para la latitud real, lo que supone un factor de escala de 500/700.

Como valor de grado ptolemaico de longitud podemos utilizar 3:4 del grado de latitud (Gómez, 2005: 39), esto es: 375 estadios, lo que nos da los márgenes siguientes:

$$5'\text{latitud} = \frac{158{,}7 \bullet 500}{1.000 \bullet 60} \bullet 5 = 6{,}6125\text{Km} \qquad 5'\text{longitud} = \frac{158{,}7 \bullet 375}{1.000 \bullet 60} \bullet 5 = 4{,}959\text{Km}$$

Como el valor de un minuto de latitud real es de 1,851 km, y el de longitud, para esa latitud, es de 1,343 km, y tenemos menos de 3 minutos de diferencia en longitud y unos 2 minutos en latitud, la posición generada queda dentro de los márgenes de 5 minutos ptolemaicos.

5. Conclusiones

A partir de cuatro enclaves de la *Geographia* situados en territorios descritos de forma independiente por Claudio Ptolomeo, hemos sido capaces de obtener una reducción coincidente con las conclusiones historiográficas y los datos arqueológicos, y hemos sido capaces de hacerlo con toda la precisión exigible y acotando nuestro margen de error.

Este método, que no depende de valores concretos de grado ptolemaico, parece potencialmente capaz de resolver las posiciones de todos aquellos enclaves hispanos, cuyas coordenadas no resulten erróneas, ni hayan sufrido alteraciones en su transmisión hasta nuestros días.

6. Post Scriptum: Noega

Comprobada la posición de *Flavionavia,* podemos hacer un intento para verificar la situación propuesta por J. M. González para *Noega Ucesia* (González, 1952: 43-44), en la margen izquierda de la desembocadura del Sella.

Para ello utilizaremos un procedimiento muy sencillo: repetiremos los cálculos anteriores, pero reemplazando las coordenadas ptolemaicas del *Nailos*, por las de *Noega Ucesia* (figura 4), y las del Nalón por las de la desembocadura del río Sella, en la inteligencia de que si los valores ptolemaicos apuntasen efectivamente al Sella, entonces tendríamos que obtener unas coordenadas compatibles con la posición de Santianes de Pravia, demostrándose así la hipótesis de partida.

Sin embargo la prueba no resulta satisfactoria, situándonos, en longitud, más de 13' al este de Santianes, sobre el concejo de Corvera.

En vista de este resultado, podemos substituir las coordenadas de la boca del Sella por las del Parque Arqueológico de La Campa Torres (5º 42' 14,36"W 43º 34' 9,05"N) en la bahía de Gijón/Xixón, (figura 5) como posible emplazamiento del *Noega oppidum* (González, 1952: 37).

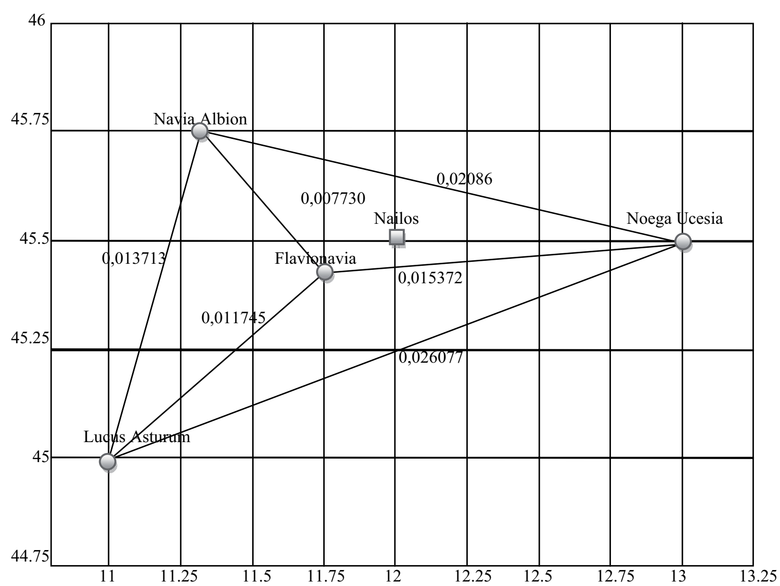


Figura 4: Noega. Distancias en radianes.

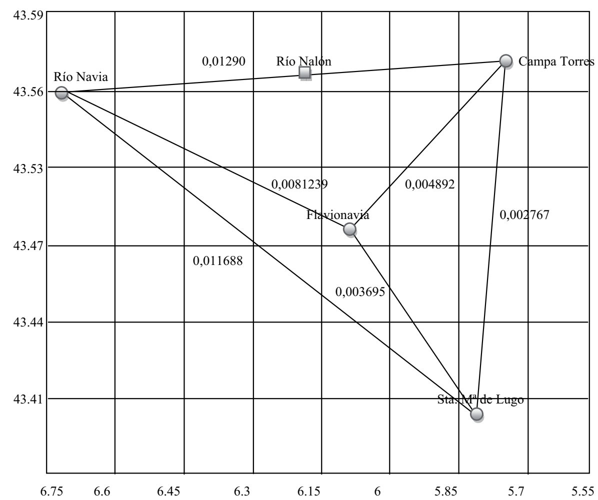


FIGURA 5: La Campa Torres. Distancias en radianes

Repitiendo los cálculos con esta nueva referencia, conseguimos: λ = 6º 4' 48'' W, φ = 43º 31' 12'' N, una buena aproximación a Santianes de Pravia, comprobándose así la idoneidad de las coordenadas de La Campa Torres para *Noega Ucesia*.

Ahora bien: Ptolomeo (*Geographia*: II, 6, 6) asigna esta ciudad a los cántabros, en tanto que las obras inspiradas en el *Orbis Pictus* de Agripa la sitúan en el *limes* astur con Cantabria, ubicaciones que no cuadran con las proporcionadas por otras tres fuentes clásicas: Mela (Mela III, 13), Plinio (Plinio, IV, 111) y Estrabón (*Geographiká* III, 4, 20), que hacen referencia a una *Noega* astur.

Para resolver esta dificultad se ha propuesto la existencia de dos ciudades con el nombre de *Noega* en la costa asturiana (González, 1952: 51-52): astur una y cántabra la otra. De acuerdo con esta idea y teniendo en cuenta que Ptolomeo sólo cita a los pesicos en su descripción de la costa astur, omitiendo a otros grupos astures como los lugones, parece razonable suponer que la *Geographia* ha sufrido una alteración en este punto, tal vez haciendo una sola ciudad de dos localidades distintas y preservándose el topónimo *Noega* con las coordenadas correspondientes al *Noega oppidum* astur.

7. Bibliografía

DIETER LELGEMANN (2004). «On the ancient Determination of the Meridian Arc Length by Eratostehenes of Kyrene», en *History of Surveying and Measurement*. Atenas, Grecia.

GÓMEZ FRAILE, J. M. (2005). «Sobre la antigua cartografía y sus métodos: Los fundamentos numéricos de la Hispania de Claudio Ptolomeo», en *Iberia: Revista de la Antigüedad*, nº 8, pp. 35-64.

GONZÁLEZ, J. M. (1952). «Noega. Un problema de la antigua geografía astur», en *Boletines de letras del RIDEA* nº 15, pp. 35-55.

GONZÁLEZ, J. M. (1953). «Flavionavia. Antigua población de los Paesicos», en *Boletines de letras del RIDEA* nº 18, pp. 32-45.

LYUDMILA M. FILATOVA, DMITRI A. GUSEV, SERGEY K. STAFEYEV (2005)
«Ptolemy's West Africa Reconstructed», en *Cartography and Geographic Information Science (CaGIS)* .
MARTÍNEZ HOMBRE, E. (1964). *Vindius, el lado septentrional clásico de Hispania*, ed. Varicop, Madrid.
SANTOS YANGUAS, NARCISO (1997). «Flavionavia, una civitas romana en territorio de los Astures Transmontanos», en *Espacio Tiempo y Forma. Serie II. Historia Antigua, t. 10*. 1997, pp. 415-436.