Notações da Matemática Infantil:
Igualar e Repartir Grandezas na Origem das Estruturas M

Maria Lucia Faria Moro [1 2]
Universidade Federal do Paraná

Resumo
O estudo trata da aprendizagem das estruturas aditivas em sua passagem às multiplicativas conforme o
as proposições de Vergnaud sobre campos conceituais. Descreve a natureza e as transformações de not
de igualização e de repartição de grandezas, e verifica a significação das notações produzidas no exame da
entre aquelas estruturas. Os 12 participantes (6,4 a 9,5 anos de idade), alunos de duas escolas públicas de
regiões metropolitanas diferentes, executaram, em tríades, tarefas com momentos alternados de execu
interpretada do executado. A análise qualitativa microgenética dos dados videografados resultou em
tendências de transformação conceitual reveladas pelas notações. A discussão sublinha a natureza e as
descritas, e o lugar relevante, nas relações psicogenéticas entre as estruturas consideradas, de esquemas iner
e repartição.
Palavras-chave: Notações matemáticas; iniciação aritmética; estruturas aditivas e multiplicativas.

Notations from Children's Mathematical Thinking:
Equalizing and Dividing Quantities at the Roots of Multiplicative Structu

Abstract
The paper concerns the learning of additive structures on its way to the multiplicative ones according to
and Vergnaud's propositions about conceptual fields. It describes the nature and the changes of children
tasks of equalization and partition of quantities, and verifies the meaning of those notations in the stu
relationship between those structures. The 12 participants (6,4 to 9,5 years old), attending two State E
suburbs of two different metropolitan areas, performed in triads the tasks, which alternated moments of
notations production and their interpretation. The qualitative microgenetic analysis of videotaped data r
and in tendencies of the conceptual transformations shown by the notations. The discussion underlines the r
of the described notations, and the relevant role of equalization and repartition as inherent schemata to the p
between the focused structures.
Keywords: Mathematical notations; arithmetical initiation; additive and multiplicative structures.

Na literatura contemporânea de psicologia da educação matemática, é marcante a presença de resultados que apontam para o expressivo lugar que os sistemas de notação matemática ocupam na compreensão de conceitos e relações da matemática na escola, como também para a complexa elaboração desses sistemas como objeto de conhecimento em si próprios.

O estudo ora relatado foi realizado com os seguintes

ótica construtivista de Piaget, a
aditivas e sua passagem às mult
e de 2ª séries do ensino fundam

A publicação em 1941 das p
gênese do número nas crianças
constituiu-se em um "divisor
das quatro operações aritmétic
conhecimento em construção

Uma das formulações mais interessantes e produtivas a esse respeito veio da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud (Ex.: Vergnaud, 1981, 1990, 1994).

Essa perspectiva permite ver as operações de adição e de subtração como parte do campo conceitual das estruturas aditivas, e as de multiplicação e divisão como parte do campo das estruturas multiplicativas. Configuram-se essas operações como sistemas de esquemas de várias ordens, aplicáveis a diversas situações, e que se coordenam progressivamente em uma construção complexa, em níveis psicogenéticos diferentes, não limitados aos da aritmética. Logo, têm um processo de compreensão que vai além do período da escolaridade fundamental.

Construir um conceito também quer dizer elaborar um conjunto de representações simbólicas interrelacionadas. Porém, Vergnaud (1981, 1989-1990, 1990) alerta para a importante diferença entre o conceito e sua representação, entre os significados conceituais e os sistemas de significantes que os expressam. Não fazer esta diferença traria, em matemática, a idéia errônea de que os símbolos e as operações sobre eles são a essência do conhecimento matemático.

Vergnaud (1994) vale-se das idéias de esquema (organização invariante da conduta para determinada classe de situações, na acepção utilizada pela epistemologia genética) e de situação, para sustentar a possibilidade de comunicação na aprendizagem da matemática na escola. Neste contexto (como em outros), há dificuldades de comunicação pela ausência de correspondência plena entre significantes e significados ou pelas ambigüidades da língua, mas principalmente por causa de os alunos disporem de esquemas conceituais diversificados (invariantes operatórios diferentes). E estes os levam a interpretar de várias maneiras os símbolos matemáticos, as formas lingüísticas empregadas no ensino, as quais trazem, por si sós, muitas armadilhas.

O conceito de esquema permite a Vergnaud (1996) entender as relações e as defasagens entre saberes em atos e saberes teóricos, quando esses saberes permitem a ação em domínios onde a teoria é pobre ou inexistente,

explicitação (via diferentes linguagens)
função de comunicar objetos e suas relaçõ
os conceitos, trazendo novos esquemas.
analisar o papel da linguagem, dos sisten
identificação e na delimitação de domínios
a linguagem natural e sem o simbolisn
impossível..." (Vergnaud, 1996, p. 289).

Portanto, afora permitir tratar de mod
as quatro operações da aritmética clássic
conceituais, e de dar espaço para estudar
psicogenéticas, a teoria dos campos co
sobremaneira ao ensino escolar porqu
analisar a relação dialética ali ocorrente e
prática e verbalização teórica (Vergnau
assim, elementos pertinentes para se trab
de conceitos segundo a perspectiva da impo
do processo da tomada de consciência d
para haver seu processo de conceitualizaç
para ser estudada sua explicitação nota
transformadora desse processo de constr

Essas são algumas das razões para q
olhássemos as notações das crianças,
interpretadas, como dimensão transform
de construção conceitual focalizado, m
aprendizagem em que momentos de exec
material), referentes aos aspectos conceitu
alternados, não só com os de interpr
executado, mas, sobretudo, com os de pro
das realizações práticas e de interpretaçã
Nesse gênero de situação, as hipóteses pr
são referência principal à ativação, pelo a
fatores da construção dos esquemas conce

O interesse de estudiosos pela natu
notacionais da matemática tem-se tradu
recentes, por vários de tipos de investiga

Estudos sobre a psicogênese do s
numérica arábica convencional retrat
precoces, a complexa atividade das crianç

significativa do sistema da escrita numérica (H. Sinclair, 1988, 1990; H. Sinclair & A. Sinclair, 1986). É assim que, no processo de elaboração de hipóteses sobre o significado dos numerais escritos, há o apoio fundamental em noções de transcodificação oral e escrita na seqüência dos numerais, conforme hipóteses aditivas presentes na compreensão do valor posicional dos algarismos (Sinclair & Scheuer, 1993; Sinclair, Tièche-Christinat & Garin, 1994).

Para as autoras citadas, ao se construir na escola um conceito da aritmética, a notação correspondente deve ser trabalhada conforme a seguinte diretiva: as marcas espontâneas das crianças devem ser compreendidas e seguidas para, a partir delas, ser provocada a produção de outras, mais avançadas, sempre segundo os esquemas de interpretação das próprias crianças. O caminho a seguir deve ser então o da figuração em desenho antes da escrita formal, a menos que a criança expresse esta por si mesma, significativamente (H. Sinclair, 1988).

Essa posição responde à questão do tão freqüente confronto e divórcio entre as elaborações matemáticas próprias das crianças e as formas convencionais escolares de representação dos conceitos matemáticos (Ex.: Carraher, Carraher & Schliemann, 1989).

Importante amostra de idéias sobre o ensino dos sistemas de representação da matemática vem das intervenções feitas em simpósio do CIRADE (Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l'Apprentissage et le Développement en Éducation, da Universidade do Québec) (Janvier, 1987). Autores como Lesh, diSessa, Janvier, Kaput, Bélanger, Mason, Goldin, Dufour-Janvier, Bednarz realçam o trabalho escolar com os sistemas representacionais diversificados da matemática, destacando-lhes os benefícios. Entretanto, também apontam a necessidade de ser considerado o que os sistemas de representação significam para os alunos, dado que a construção por estes desses vários sistemas é a meta essencial.

Outros trabalhos sobre o aprendizado da numeração escrita mostram que crianças muito pequenas, de ambientes

numérica, como a recursão, a
sistema, o valor posicional dos
1985; H. Sinclair & A. Sinclair,

Diferentes estudos oferece
dificuldades e resistências do proc
do sistema da numeração oral e
concerne à idéia de valor posicio

- a identificação de três princ
de 1ª a 4ª séries em domin
compreensão do valor pos
do símbolo do zero, como
dos sinais de pontuação (vírg
- a persistência de crianças
vendo o signo numérico pa
algo absoluto. Mesmo após
não recorrem a noções de ag
de base de cada algarismo
1984; Kamii & DeClark, 1
lexicais e sintáticos em tar
números, por conta da gener
construídas para casos típic
1991).
- a apreensão global do sign
numerais por crianças d
argentinas). Mas, para com
dos algarismos, tentam coo
em numerais multidígitos
combinações possíveis; o
aditivas; a posição ordenad
definição do valor (Sinclair
- o avanço de escolares na
numeração escrita quando
"nós" (as potências de base 1
dos numerais dos seus int
falada intervém na compre
vice-versa, quando algumas
sobre essa escrita podem s
Sadovsky, 1996). Na supera

Ainda Teixeira (2001), considerando que as relações entre representações internas e externas são cruciais no estudo da compreensão conceitual na matemática, mostra que alunos de 3ª e 4ª séries do nosso ensino fundamental têm dificuldades típicas de aprendizagem da numeração escrita. Elas seriam ligadas à ênfase inadequada do ensino na apreensão conceitual da idéia de agrupamentos aditivos ou multiplicativos do sistema de numeração, e na sua representação padrão. Para a autora, essas duas dimensões devem ser trabalhadas ao mesmo tempo na escola porque a apreensão conceitual e a representação semiótica são processos inseparáveis.

Por seu lado, Orozco-Hormaza (2002), em alunos colombianos das séries iniciais do ensino fundamental, examina se, na relação entre expressões numéricas verbais e a escrita de numerais no ensino, as regras que regem a notação numérica arábica estão mais ligadas a características morfossintáticas das expressões numéricas verbais, a características operatórias ou ao valor posicional do sistema de numeração. Seus resultados, mostrando erros coincidentes e universais das crianças, levam-na a propor que os erros sintáticos são erros de construção típicos de crianças que ainda não dominam as regras do sistema de notação numérica; mas os erros léxicos vêm de falhas da memória de trabalho, presentes quando as crianças já construíram aquelas regras.

Em síntese, conforme a literatura, poucas dúvidas há sobre o importante lugar da compreensão dos sistemas notacionais na aprendizagem dos conceitos matemáticos. Também há forte demonstração para a idéia de que esses sistemas de notação matemática, um produto cultural, são objetos de conhecimento que as crianças constróem de forma complexa, elaborando sobre eles hipóteses típicas, as quais fazem sentido pela natureza dos conceitos matemáticos e pelas características culturais próprias daqueles sistemas de representação.

Segundo tais perspectivas, configurou-se nosso interesse teórico e pedagógico em analisar a natureza e a transformação das notações das crianças referentes à construção das relações aditivas em sua passagem para as multiplicativas,

lugar, suas transformações forneceriam si
estruturas multiplicativas nas aditivas, ao se
trabalhadas, nas tarefas, a composição e a
uma totalidade em partes equivalentes e/o
um invariante pensado como inerente
estruturas em foco.

A assinalar que, ao igualar-desigualar
tais parcelas e/ou avaliar-lhes a diferenç
colocar em jogo algumas das relações, d
Vergnaud (1985, 1989-1990, 1990), lev
diversos tipos de problemas aditivo-subtr
relações, no caso: a composição de duas g
terceira; a transformação quantificada de u
em uma final; a comparação quantificada en

É a própria literatura piagetiana (Pia
1971; Piaget, 1977; Piaget, 1996) que
expressivos a respeito da fecundidade do
coleções quantitativas para inferências e de
pequenas, e que envolvem outros esq
essenciais ao domínio ainda aritmético de
como sistema de operações inversas. S
esquemas de correspondência biunívoc
decréscimo reiterado um a um de elemen
ordenada, os quais permitem a elaboraç
lógico-matemáticas características, tais c
comutatividade, a recorrência, a conexida

Por outro lado, é conhecida a ampla
quanto o repartir coleções é precoce
realizações infantis, ainda que em formas
o que tem alimentado as discussões so
divisão (Correa, 1996; Correa, Nunes & Br
Dayan, 1980, 1985).

Se repartir coleções (mediante estr
originais, muitas vezes apoiadas em re
considerado relativamente fácil para as
demonstrado que é complexo, para el
compreender as relações específicas da div
dita (Kornilaki & Nunes,1999; Nunes & Br

Bryant (2002), por exemplo, apontam menor dificuldade na obtenção do quociente quando o dividendo aparece às crianças (em desenho de elementos) agrupado pelo divisor em divisão por partição, e pelo quociente em divisão por quota, em comparação com o inverso (agrupar pelo quociente em divisão por partição, agrupar pelo divisor em divisão por quota). Isto ocorreria por apoiar-se a criança no esquema de fazer "porções" ao repartir, o que seria psicologicamente diferente conforme os dois tipos de problemas.

Em suma, essas proposições são as que nos fizeram escolher, para este estudo, as tarefas de igualização de parcelas desiguais, e a de repartição de grandezas com problemas do tipo divisão por partição (dado o dividendo e o divisor, descobrir a extensão da parte).

Método

Os participantes do estudo foram 12 alunos (de 6,4 a 9,5 anos de idade), de duas escolas públicas de municípios diferentes, sendo seis de 1ª série e seis de 2ª série do ensino fundamental. Estas escolas localizam-se na periferia urbana de duas grandes áreas metropolitanas.

Por conta de o projeto de investigação em que este estudo está inserido também voltar-se ao exame das formas de trocas sociais infantis durante a realização das tarefas (dimensão esta não aqui abordada, por causa da necessária delimitação deste texto), os participantes foram agrupados em tríades por sorteio aleatório. Esse sorteio para a composição das tríades seguiu o critério da defasagem ótima (Doise & Mugny, 1981).[3]

As tarefas oferecidas podem ser caracterizadas como situações-problema de conteúdo aritmético. Propostas oralmente pelo pesquisador para solução conjunta dos componentes das tríades segundo estratégias próprias de cada um deles, as tarefas ocorreram, conforme acima justificado, em ciclos alternados de: solução prática com apoio no material com interpretação simultânea e final do executado; produção de notações e interpretação das

desafiar mediante perguntas a
menos avançadas para a busca c
que assim estão todos com o me
intermediar as diferentes soluç
para provocar-lhes alterações e re
de uma e outra delas ("... olhem
será que pode também ser assim?..
expostos na parte de resultados, o
de intervenção podem ser identif

O material utilizado consis
fichas de plástico (mesma cor), u
repartindo-a em duas metade
cartolina, canetas hidrocor. As
elementos conforme suas pr
problemas, por exemplo: fichas
dois bonecos, ou para serem re

As tarefas centradas na igual
sessão) pediam especificamente

- a composição e identifica
  equivalentes, de uma adiç
  crianças, em sua vez ("rodad
  a 16 elementos, seguida da i
  diferença. Por exemplo: para
  "... é para descobrir qua
  boneco...", e "... descobrir c
  mais.., ou a menos que o ou
- a igualização, sem referente
  identificadas. Por exemplo
  elementos "... agora, o que
  bonecos ficarem com a m
  balas?...", " ...por que fic
  (Piaget,1996; Piaget & Szem

Entre cada um desses moment
a "...marcar, desenhar, escrever cor
quiserem ..." na cartolina única
balas do boneco..., o que vocês fi
Após fazer as notações, as cr
interpretar suas produções: "... c

convidadas a produzir notações a respeito do que fora obtido e interpretar a respectiva notação produzida: "Marquem, agora, como vocês quiserem, o que o Juc fez, o que aconteceu quando ele repartiu as fichas..."; "por que você marcou isto assim?..., "...o que você quis dizer com este desenho?".

O registro dos dados ocorreu pela gravação em vídeo e a posterior transcrição, para cada tríade, de todos eventos gravados (ações, verbalizações das crianças e do adulto) de toda a seqüência das tarefas.

A análise dos dados, de ordem qualitativa e microgenética, foi realizada, primeiro, com a identificação das características centrais das notações produzidas e das interpretações das crianças sobre elas; depois, com a descrição, em categorias principais, dos tipos de notação tal como interpretadas pelas crianças, segundo sua significação no processo de elaboração estudado (Gardin, 1974; Gillièron, 1980). Para tanto, recorreu-se a indicadores oferecidos por alguns dos autores de referência já indicados neste texto. Por exemplo, de Vergnaud (1985, 1989-1990, 1990) relações entre estado inicial, transformação e estado final em problemas aditivo-subtrativos; de A. Sinclair (1990) a tipologia de notações infantis para coleções de extensão reduzida.

Resultados

Nos três itens que seguem, descrevemos os diferentes tipos de notações interpretadas que encontramos, agrupados em suas categorias: no primeiro item, as notações produzidas quando da composição e identificação das duas parcelas não equivalentes de uma adição; no segundo item, as notações de igualização das parcelas não equivalentes; e no terceiro, as notações produzidas quando da repartição das coleções em 2, 3 e 4 partes iguais.

Nesses três itens, e para cada categoria, os tipos de notação são descritos dos menos aos mais avançados, conforme a avaliação qualitativa deles efetuada como expressão das relações aritméticas trabalhadas com o material, sempre levando em conta as interpretações que seu autor fez sobre

posterior, pertinente ou não, de un
parcela. Por exemplo:

- tríade 1ªS, 1ª ses., 2ª rod., para parcelas d
(desenha 9 fichas, adiante 1 ficha): *"...coloq*
coleção desenhada); exp: *"Marcou cada pa*
Ade: *"Tudo, ... este não..."* (aponta desenho

b) as duas parcelas, equivalentes à
compostas, em geral reconhecidas co
numerosas, anunciados seus valore
seguintes formas de controle são us
produção: contagem unitária, emp
elementos, sub-parcelamento da
numerosas (10, 11). Por vezes, é ident
da diferença entre as parcelas; mas, ex
apontada a redistribuição eqüitativa de
igualizar as parcelas, com exclusão de
Por exemplo(Figura 1):

- tríade 2ªS, 1ª ses., 2ª rod., para parcela
após Jes apontar 11-2= 9, exp: *"Qua*
(desenho de 11) *tiveram que vir para est*
2*), pra ficar 6 e 6?";* Dei (mão em cima
11, logo, 11- 4): *"Quatro."; exp: "É isto*
do outro lado?"; Dei: (acena sim); exp:
do lado de lá? (em 11- 4)"; Dei: *"Sete.",*
Jes: *"Dois.";* Dei: *"Seis"* (desenho de pa
"Sete e seis? E daí, era a mesma coisa a
"Não."; Dei: *"Não.... tem que tirá um* (7-

2. *Algarismos:*

a) traçados em duas seqüências, cada
extensão de cada parcela. Cada algaris
elemento das parcelas. Por exemplo:

- tríade 1ªS, 1ª ses., 2ª rod., para parcel
Flo (traça 1,2,3, depois 1,2,3,4,5,6), exp
números?"; Flo: *"É porque 3 e 6 chocolates..*
algarismo da primeira e da segunda se

b) traçados de dois numerais, em separado, cada um correspondente à extensão cardinal de cada parcela. Por exemplo:

- tríade 2ªS, 1ª ses., 2ª rod., para parcelas de 11 e 2 fichas, Eve (traça 11 e 2, em duas caselas) "*... porque é onze e dois.*"

B. Notações de igualização de duas parcelas de uma adição

1. Desenhos de uma ou mais coleções de elementos, representando:

a) o total, não equivalente ou equivalente ao composto pelas parcelas trabalhadas, sem e com elemento restante. Por exemplo:

- tríade 1ªP, 1ª ses., 1ª rod., para parcelas de 5 e 4 fichas, Luh (desenha 8 fichas) *"...é tudo junto.";* (desenha mais 3 abaixo e 1 ao lado das 8, em outra cor); Jef (sobre desenho de Luh): *"É o resto."*.

b) duas parcelas não igualizadas, mas vistas apenas em seu total, este tornado equivalente ao total trabalhado mediante marca de exclusão de elemento. Por exemplo:

- tríade 1ªP, 1ª ses., 3ª rod., parcelas de 5 e 5 fichas, Jef (desenha 4 fichas; em separado e alinhadas, outras 7 fichas, aponta-as todas, risca uma ficha das 7, aponta todos os desenhos) *"Dez.... tudo"*.

c) duas parcelas não igualizadas, a mais numerosa vista como equivalente à primeira por correspondência global/espacial. Seu total, não equivalente ao trabalhado, é avaliado como tal. Por exemplo (Figura 2):

- tríade 1ªP, 1ª ses., 1ª rod., para parcelas de 4 e 4 fichas em total de 9 fichas, Jef (desenha 4 fichas grandes alinhadas; acima, desenha 5 fichas menores, alinhando-as nos extremos do espaço com as 4 anteriores; desenha mais uma ficha em espaço vazio, parcela = 6): *"...tá igual."* (conta todos os desenhos...): *"Nove."*.

d) duas parcelas igualizadas, de extensão não correspondente à das parcelas trabalhadas, mas cuja adição eqüivale à do total original, conforme marc
e assim interpretado. Por ex

- tríade 2ªP, 1ª ses., 3ª rod., p
Ann (desenha 5 e 5 fichas
colocá seis em tudo." [...]; exp: (ap
"Aqui tem seis?"; Ann (apon
dois. (risca 2 desenhos de cad
ela (Ann) *tirou dois de um lado*
seis". Exp: *"E daí, quantos fic*
Ann: *"Três..."* (desenha uma
risca este desenho e o algari

Figura 3. A igualização

e) parcelas igualizadas cuja
trabalhado mediante:

(1) duplicação do número de p
equivalente às igualizadas,
excedentes. Por exemplo:

- tríade 2ªS, 1ª ses., 1ª rod., p
Jes (em separado, desenha 6
"...seis de um lado, seis de outro
6); exp: *"E estes daqui...* (sina
você marcou de novo?"; Jes: *"É*

(2) duplicação da extensão d
equivalente ao total. São vist
a extensão das parcelas orig

- tríade 2ªS, 1ª ses., 1ª rod., par

- tríade 1ªS, 1ª ses.,1ª rod., para parcelas de 5 e 5 fichas em total de 11 fichas, Flo (desenha, alinhados, 5 e 5 traços...) (adiante, olhando Eri, que desenha uma ficha à parte...); Flo (afastado, faz um traço): *"É cinco e cinco."*; exp: *"Para os dois bonecos?"*; Flo (aceno afirmativo); exp: *"Como foi que fez?"*; Flo (silêncio); exp: *"E este?"*(traço à parte); Flo: *"É a sobra."*.

g) de duas parcelas desiguais, o estado inicial das parcelas trabalhadas, e que têm sua igualização representada por:

(1) marcas de subtração do excedente de uma das parcelas, identificado como resto. Por exemplo (Figura 4):

- tríade 2ªP, 1ª ses., 2ª rod., para parcelas de 5 e 5 fichas, antes de 6 e 5 fichas, Ju (desenha 6 e 5 fichas, "borra" desenho de uma ficha em um lado, aponta tudo): *"Cinco e cinco, ... é como era no começo..."*.

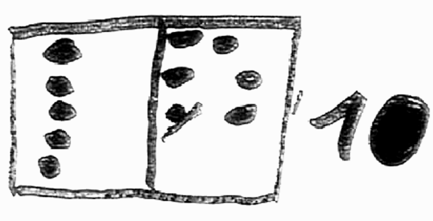


Figura 4. A igualização das parcelas 6 e 5.

(2) traçado delimitador, na parcela mais numerosa, para a diferença em relação à parcela menos numerosa, antecedido por gestos. Aquela diferença é vista como diferença absoluta a subtrair de uma parcela ou como diferença a distribuir entre as parcelas. Por exemplo:

- tríade 2ªS, 1ª ses., 3ª rod., para parcelas de 5 e 5 fichas, antes de 7 e 3 fichas, exp (para desenho de 7 e 3 fichas de Dei e Jes: *"Quantas têm que passar para ficar mesmo tanto igual?"*; Dei (aponta cada desenho da parcela =3, levanta 3 dedos, aponta 3 desenhos na parcela =7 e os 3 parcela =3, cobre com dedos os 3 da parcela =7, aponta 3 desenhos parcela=3, levanta um dedo e o põe em cima =3); exp: *"E daí, dá pra ficar a mesm*
"Não, daí (com gesto) *tem que pôr um*
outro."; exp (apontando desenho parc
mas dá pra descobrir aqui, quantos tem que sa
cada parcela) *pra ir para lá?*"; Dei: *"Q*
desenhos); exp: *"Quatro, mesmo? De ou*
fazer?"; Dei: (aponta cada parcela dese
e faz aceno negativo).

2. Algarismos:

a) traçado repetido (duas vezes) de nume
não a cada parcela trabalhada, mas ao
adição de ambas. São interpretados c
parcelas, o que leva à rememoração da ex
originais, com decorrente indicação de ex
Por exemplo:

- tríade 2ªS, 1ª ses., 2ª rod., para parcel
Eve (traça 12 e 12 em separado); (...)
Não! Tinha seis de um lado e seis de outro."
marcaram doze, não era tudo o que tinha na

b) traçados como "etiqueta" de desenho
visto como resultado da adição das mes
cardinal. Por exemplo:

- tríade 2ªP, 1ª ses., 3ª rod., para parcelas
(para desenhos de 3 e 3 fichas escreve
acima; aponta cada desenho): *"É em t*

A análise das notações descritas m
ausência de relação hierárquica entre a
principais encontradas, desenhos e algaris
o critério de significação das relações a
trabalhadas quando de sua produção e int

Tendências específicas de constru
relações podem ser constatadas nas produ
cada categoria. São elas:

- do registro de estados (inicial e
transformações aditivo-subtrativas e
coleções (Vergnaud, 1985, 1989-1990)

numerosa dos elementos da menos numerosa, um a um (por *counting on first*, segundo Baroody & Ginsburg, 1986).

- da idéia, ainda predominante, de que elementos excedentes de uma parcela devem ser subtraídos na igualização, mas não acrescentados à outra parcela, na recomposição das quantidades mediante transformações coordenadas +1, -1 (da exclusão de elementos das parcelas para a sua inclusão por redistribuição). Logo, é excepcional a idéia de que a igualização das parcelas decorre de transformações aditivo-subtrativas de elementos de estados iniciais (as parcelas não igualizadas), do que somente um caso foi encontrado: Ju (2ª P, 1ª ses., 1ª rod.), de parcelas 6 e 2 faz a adição de 2 fichas da parcela 6 à parcela 2, obtendo parcelas iguais 4 e 4.
- da atribuição de medidas absolutas, isoladas, às parcelas ("mais", "menos"), com valores absolutos a excluir/subtrair quando for o caso, para a atribuição de medidas relativas em compensação (decomposição e recomposição de parcelas "a mais", "a menos").

C. Notações de repartição de coleções em 2, 3 e 4 partes

1. *Desenhos* de coleções de elementos, vistos como:

a) total (dividendo) não equivalente ou equivalente ao trabalhado. Por exemplo:

- tríade 1ª P, 2ª ses., 1ª rod., para 13÷3, Luh (desenha 9 fichas, aponta cada, desenha 4 fichas abaixo, aponta todas); exp: *"Por que você fez estas bolinhas?"*; Luh (silêncio); exp: *"Mas antes você contou estas bolinhas."*; Luh: *"Treze."*; exp: *"Por quê?;* Luh: "Porque tinha treze ali".

b) partes da repartição, em número (divisor) e extensão numérica (quociente) não equivalentes às trabalhadas, sem e com resto pertinente. Por vezes, as partes têm extensão conforme a do total (dividendo), duplicando-o (repartição por 2); e/ou têm elementos excedentes "subtraídos" para igualização, mas nem sempre distribuídos/acrescentados à(s) outra(s) parte(s). Formas de controle (contagem unitária, emparelhamento espacial,

com resto pertinente. São ta
controle (contagem unitári
elementos a cada parte, sub-
ao serem desenhadas partes
(acima de 5). Por exemplo (
- tríade 2ª S, 3ª ses., 1ª rod., para
em separado 4, 4 e 4 fichas, d
jeito, fiz quatro, quatro e quatro."
aqui?"(apontando 1 ficha des
exp: *"Quatro pra você?";* Eve: "
cada parte); exp: *"Então, em*
"Eram treze."(gesto para todos

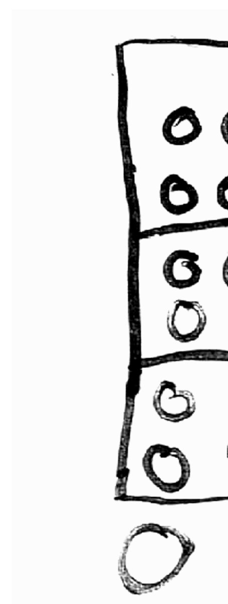


Figura 5. As partes e

d) total e, em separado, suas
pertinente. É excepcional al
Por exemplo:

- tríade 1ª S, 3ª ses., 2ª rod.,

fichas desenhadas) *...foi repartido em quatro."* (aponta desenho de 4 fichas e de uma, riscado); exp: *"E quantas ficaram para cada um?";* Eri: *"Três."* (apontando 3 fichas desenhadas); Eri (desenha outras 3 fichas) *"...o resto.".*

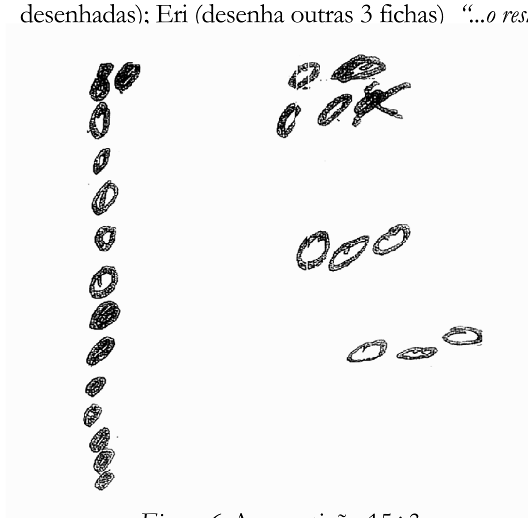


Figura 6. A repartição 15÷3.

- tríade 2ªS, 2ª ses., 2ª rod., para 10÷2, Dei (para desenho de duas partes de 5 fichas): *"Tava dez, depois repartiu e ficou cinco pra cada lado."* (aponta cada parte desenhada); exp: *"Repartiu em partes?"; Dei: "Em duas, dois."*

f) total (dividendo) não equivalente ou equivalente ao trabalhado, contendo as partes resultantes da repartição (marcadas no próprio total), sem e com resto pertinente. Por exemplo (Figura 7):

- tríade 2ª S, 3ª ses., 3ª rod., para 18÷4, Dei (desenha de 3 em 3, 18 fichas, apontando fichas, traça linha contornando cada 4 desenhos, de cima para baixo e ao lado; após Eve, traça 18 ao lado com contorno); exp: *"Repartiu dezoito em quantas partes?";* Dei e Jes: *"Quatro."; Dei: "...quatro, quatro,*

*quatro e quatro..." (*apontando cada par
sobrou dois (aponta 2 fichas desenhadas

2. *Algarismos:*

a) traçado, em sentido inverso, mas na ord
de duas seqüências de numerais, se
misturando-os com outros sinais. Cada s
dado pela extensão da parte obtida d
cada traçado representando um elem
(Figura 8):

- tríade 1ª P, 1ª ses., 1ª rod., para 12÷2, B
esquerda escreve 1,2,3,5,6,6, adiante 1
estrela entre as duas séries) *"... seis de u*

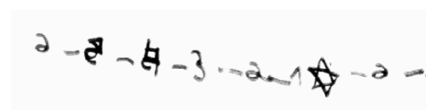
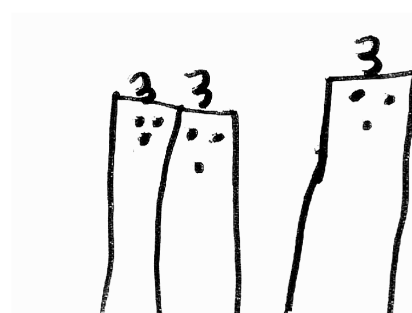


Figura 8. São 12 repartidos p

(aponta cada algarismo, escreve 4 e 5
em uma das séries).

b) traçado de numeral como "etiqueta"
desenhadas, as partes obtidas e/ou o
sua adição. Nem sempre corresponde à
das quantidades desenhadas, embora
trabalhado com o material. Por exemp

- tríade 2ª P, 2ª ses., 3ª rod., para 12÷4, L
de cada uma das quatro partes de 3 des
para duas partes juntas) *"... em tudo a*



- tríade 2ªS, 2ª ses., 2ª rod., para 10÷2, Jes (escreve 5+5=10, abaixo 5+5=10) *"...eu fiz a conta...* (aponta expressões escritas)... *de cinco mais cinco dez."; exp: "O que você fez com os dez? O que o Dei fez com os dez aquela hora?"* .Jes: *"Ele juntou cinco e cinco..."* (aponta cada expressão).

d) traçado repetido e separado de numeral correspondente à extensão das partes, lido como resultado da ação de repartir, sem e com resto pertinente e, por vezes, com numeral para o total repartido. Por exemplo:

- tríade 2ªS, 2ª ses., 1ª rod., para 14÷2, Eve (desenha caixa, traça 7 de um lado e 7 de outro) *"...que é sete para cada um."; "... tudo junto, quatorze.";* exp: *"Em quantas partes você dividiu os quatorze?";* Eve: *"Duas.";* exp: *"E quantos ficaram pra cada boneco?";* Eve: *"Sete."*.

3. *Escrita alfabética:*

a) escrita da resposta ao problema trabalhado no formato escolar tradicional, com marca repetida de algarismo, para duas partes, a do próprio sujeito e a do adulto. Contém a idéia de que o resultado do repartir é a extensão numérica da parte de cada um e de apenas alguns dos parceiros da repartição. Por exemplo (Figuras 10a e10b):

- tríade 2ªP, 2ª ses., 3ª rod., para 12÷4=3, Ann (escreve: *R: CUANTAS BOLACHAS/ SÃO* e abaixo, separados, *3 e 3)*; enquanto Ju (escreve R: *CUANTAS BOLACHAS 33;* Le (escreve: R: *CUANTAS BOLACHAS/ SÃO);* exp*: "Quantas bolachas, vocês escreveram ai?";* Ju: *"Ahn! Ahn!";* exp: *"É a resposta?"; Ann: "Ahn! Ahn!";* exp: *"...quantas bolachas, pra quantas pessoas?";* Ann: *"Três."; exp: "Três, o*

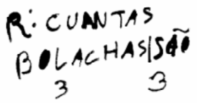


Figura 10a. As duas partes para 12÷4 (de Ann).

Figura 10b. As duas partes para 12÷4 (de Ju).

hierarquia entre elas. Assim
significado do repartir expresso
interpretação das notações, pu
sobretudo pelo desenho que as
conceber a divisão são expr
algarismos e por escrita alfabétic
parte, formas aditivas de concel
em repetir partes iguais, um
marcantes dessa forma de conc

Diversamente, também, do
igualização de parcelas, as not
trazem, em geral, tanto o regis
final (resultado) e, depois, o inic
o da transformação efetuada
registrada por traços de separa
essa perspectiva, manifesta-se a
o estado final da transformaçã
essa transformação, marcar
(Vergnaud, 1985, 1990).

Assim sendo, as característic
modos de sua produção e suas
menos três principais formas, h
de as crianças estudadas tratarer
da noção de divisão, concep
concepção elementar de divisão

A primeira dessas formas, d
idéia de que partes não resulta
Predomina a idéia de que o
mantido, apesar de rememorada
anterior de seus elementos em
equivalente ou equivalente ao t

A segunda, da concepção a
se mediante as seguintes variaç

1ª- presença da idéia de
equivalentes resultam da repart
metades podem ser obtidas, s
qualquer extensão.

2ª- presença da idéia de

partes (divisor) pode ser ou não o da repartição antes trabalhada .

A terceira forma, a concepção elementar de divisão, manifesta-se pela:

1ª- presença de idéia básica do repartir com ênfase no resultado da ação. Mediante provocação, ocorrem identificações pontuais: do dividendo, das partes obtidas como sendo "de todos e de cada um", do resto. Há ainda confusão entre divisor e quociente e entre dividendo e quociente, e o resto admitido é somente o de um elemento.

2ª- presença da idéia elementar de divisão, com identificações dos termos da operação e das relações entre eles, com ênfase na descrição da ação de repartir.

Discussão e Considerações Finais

Em atenção ao primeiro objetivo deste estudo, a descrição das notações das crianças confirmou a presença esperada de desenhos, algarismos e escritas alfabéticas, como suas principais categorias. Presença esperada porque os principais tipos de marcas de que a cultura humana se serve para registrar sua quantificação da realidade (H. Sinclair, 1990) foram sugeridas pelo adulto durante as tarefas, ali aparecendo, inclusive, combinadas entre si.

Esse emprego combinado de marcas das diferentes categorias salienta a rica atividade infantil de representação, quando as crianças mostram-se capazes de lançar mão dos recursos de que dispõem para "dizer" o que assimilaram das tarefas. Em particular, o freqüente uso de desenho com algarismos, estes tantas vezes empregados como "etiqueta" do desenho para "deixar clara" a significação do desenhado, pode ser visto como indício de que, se têm algum conhecimento de tais formas de notação, podem as crianças ativamente passar de uma forma à outra. Isto lhes possibilita fazer as correspondências entre essas diferentes formas ao representar um mesmo significado, algo fundamental para a construção conceitual (Vergnaud, 1985).

Também, o emprego significativo pelas crianças de formas de marcar quantidades de que têm algum domínio

das ações e seus resultados na constru
focalizadas.

Porém, a análise do processo de proc
que fizemos não permite demonstrar o
supostamente necessário e fundamental,
de tomada de consciência conforme a pe
(1974, 1978). Não analisamos a relaçã
qualitativas entre as referidas realizações, e
de transformação, e as execuções práticas
as antecediam ou sucediam. Esta é uma ta
resultados do presente trabalho nos e
somente, indícios fortes da ocorrência da
assinalarmos o quanto, para muitas das c
sido a interpretação de suas notações e/
dos parceiros o que desencadeou hesitaçõ
de suas próprias marcas, com muitas a
seguindo.

É segundo a idéia da provável relevân
consciência de suas produções para
conceitualização, que os resultados do e
novamente, a necessidade de que, na
compreensão dos sistemas de notação mate
transformadora inerente à construção dos c
da área.

Outra dimensão de interesse de noss
respeito à hierarquia entre desenhos e algar
de notação, possibilidade que a literatura
coloca (H. Sinclair, 1988; A. Sinclair, 1
conjunto das notações obtidas, há ausência
entre notações de igualização, mas entr
aquela hierarquia se esboça. Ademais, esc
são usadas para registrar as repartições.

A ausência da hierarquia entre notaçõ
desenho e algarismos pode ser atrib
mecanizada dos numerais, assim aprendid
numerais então evocados ao acaso, sem qu
quantitativa mais avançada (Gelman &
caso das notações de parcelas não igualiz

conceitos trabalhados em que as crianças se encontram. Isto nos leva à proposição de que, não só a apreensão dos conceitos e a representação semiótica seriam mesmo processos inseparáveis (Teixeira, 2001), mas também que, em situação pedagógica mais favorável àquela apreensão, as crianças podem ativamente reorganizar seus recursos de representação, inclusive dando novo sentido aos símbolos da matemática escolar aos quais já tenham sido expostas.

Porém, o que dizer sobre a hierarquia relativa entre desenhos, por um lado, e algarismos e escritas alfabéticas pelo outro, nas tarefas de repartição? E sobre o fato de escritas alfabéticas terem aparecido somente para marcar as repartições?

Muitos dos argumentos acima expostos mais a idéia da inseparabilidade entre a apreensão conceitual e a representação semiótica podem explicar também o fato de os desenhos serem notações de repartição pelas quais formas mais adiantadas de conceber a divisão são representadas, enquanto algarismos e escritas alfabéticas expressam formas menos adiantadas, em especial, a concepção aditiva de divisão. Para as crianças cuja apreensão conceitual da divisão é mais avançada, ainda que elementar, como descrito, não poderia ser diferente: o desenho, uma forma de representação icônica, está, em geral, disponível em seu repertório, antes da escrita de algarismos e da escrita alfabética. Assim, o desenho vem-lhes a ser um recurso praticamente "natural" para marcar: o total repartido, o resultado dessa repartição e a ação mesma de repartir (a transformação).

Embora já dominando a divisão naquele plano mais avançado, crianças, como as estudadas, desconhecem ainda os sinais aritméticos para a divisão, as formas canônicas de expressar as relações de divisão. Porém, já podem formular algumas dessas relações a seu modo; por exemplo, na falta de outro recurso, podem dispor da escrita alfabética para descrever o repartir efetuado, ainda que esse tipo de notação tenha seus limites, do que adviria sua baixa freqüência no estudo.

Já para as crianças cuja compreensão da divisão é ainda

icônica, servem, mas não obri
de formas mais avançadas de co
focalizadas, antes de algarismos
estes tipos de notação est
paralelamente, posto que de
habilidades específicas relativas
matemática.

No entanto, o nível de apre
em que estão as crianças é cruc
significativamente essa compr
margem é dada, na escola, p
trabalharem conceitos e relaçõ
uma notação que lhes tenha sen
que estão compreendendo, ela
tipos de marcas que conhecem
estão compreendendo.

Uma outra diferença entre
igualização e para a repartição es
de marcas para os estados, inicial
e seu total), enquanto que nas segu
para o estado final (resultado do rep
de marcas para a transformação efe
para as transformações aditivas e
e desiguais são muito pouco e
essa diferença?

Nas tarefas de igualizaçã
repartição, as crianças produzi
observar as parcelas antes compo
equivalentes ou não). Passav
desenhar o total (conferindo p
desenhados e/ou os das parce
resultando marcas para os esta
para a ações aditivas ou subtrati
mesmo sendo evocadas às quest
não eram vistas como algo a se
mesmo porque o desenho da
resultado da ação aditiva, ao me

Entretanto, nessas mesmas

Desse modo, o expressivo predomínio de notações de estados (inicial e final) em relação a marcas para as transformações nos dizem que muitas das nossas crianças encontravam-se em um patamar ainda elementar de compreensão da composição de duas grandezas em uma terceira, uma das relações aditivas básicas (Vergnaud, 1985, 1989-1990, 1991). Teriam elas uma apreensão ainda muito figurativa dos estados inicial e final, este um total obtido pela iteração de ações de acrescentar (+1, +1...) também preponderantes em relação ao retirar iterativo (-1, -1...). A propósito, essa apreensão predominantemente figurativa é que daria sentido à idéia inicial de que somente parcelas iguais, simétricas, é que seriam adicionáveis.

Assim, o adicionar transformador das parcelas em outra grandeza não teria sido entendido por muitas das crianças e, muito menos, o teria o seu inverso, o subtrair. Não haveria ainda dessas crianças a tomada de consciência da relação de transformação aditiva de uma grandeza inicial em uma final e, então, da ação inversa de decomposição para obter parcelas quaisquer, cuja adição corresponde a esse mesmo total, mesmo porque também não estariam elas atribuindo valores cardinais estáveis a tais quantidades (exceto às de extensão numérica muito limitada). É importante lembrar que essa atribuição é tida como fruto de uma construção complexa das estruturas aditivas em seus níveis diversos (Vergnaud, 1981, 1991).

Em conseqüência, limitaram-se nossas crianças, em maioria, à idéia da subtração como perda de elementos. Estes tanto ficam "perdidos" que nem foram lembrados como tendo sido acrescentados à outra parcela para a igualização; ou nem foram lembrados como acrescentados, ficando excluídos na obtenção daquela igualização, conforme uma das tendências de construção que descrevemos. As comparações entre grandezas caracterizaram-se assim pela atribuição de grandezas absolutas na avaliação de cada parcela, ausentes as avaliações relativas ligadas a concepções mais avançadas de subtração (o resultado como quantidade complementar ou como diferença relativa entre estados

desenho da coleção total, assim registran
(dividendo) seguido da ação que o transfo

Por outro lado, da literatura referida te
das crianças em repartir coleções por dist
principalmente, quando da repartição em
o repartir seria também mais facilmente r
transformações aditivo-subtrativas de ele
(as que resultam, sobretudo, em parcelas
partes iguais, simétricas, seriam mais pregn
inicial figurativa das crianças do que pa
decompõem um total. Esse aspecto,
significações de ordem afetivo-social
resultantes do repartir terem que ser ig
presente nas falas das crianças) pode falar a
tão marcante do repartir nas produções inf

Entretanto, nenhuma marca para tra
repartir foi feita por crianças que não dispu
noção de divisão. Mesmo provocadas a
recém executado, essas crianças limitavam-
a desenhar a coleção total, muitas vezes a p
de todos os elementos arranjados nas par

Vemos assim que, afora as peculiarid
do repartir no repertório de crianças com
também nesse caso há que se levar em co
de compreensão da divisão identificados,
estar estreitamente ligados àquela presenç
de qualquer idéia de divisão, de fato não
significativamente aquela transformação, ao
de compreensão correspondem expectativ
o repartir como ação que produz a) pa
adicionáveis, como no caso da concepção
desenhadas ou com algarismos, ou b) p
que estão contidas certo número de veze
ou a elas correspondem, como também
cada termo de uma divisão.

As tendências específicas de constru
aditivo-subtrativas que puderam ser
notações interpretadas apontam, com

A análise das notações descritas muito parece dizer sobre a relevância da composição e da decomposição de grandezas, uma expressão da relação parte-todo, na identificação das raízes das estruturas multiplicativas nas aditivas porque: a) no caso da adição-subtração, tais esquemas produzem parcelas de grandezas diversas; assim, combinando-se em um sistema de transformações, permitem apreender tais parcelas como transformáveis a cada e a qualquer momento sem alteração de seu total; b) no caso da divisão, a faceta ora abordada das estruturas multiplicativas, aqueles esquemas (compor-decompor grandezas), como transformadores, encaminhariam a obtenção e a identificação de partes de extensão equivalente e em certo número (como componentes do todo), colocando em cena os termos da divisão e as relações entre eles.

Nessa ótica, as ações de igualar e desigualar em ligação estreita com as de repartir quantidades numéricas seriam centrais para, interdependentes, ativar a coordenação entre estados, logo, a conceitualização de ações de transformação, uma das possíveis formas de ver a inter-relação das estruturas aditivas com as multiplicativas.

Porém, nossos resultados também indicam que o lugar atribuído ao compor e ao decompor partes na psicogênese das estruturas multiplicativas nas aditivas focalizadas não exclui outros invariantes de relevância. O que encontramos aponta, mais uma vez, para o que é tido como uma construção árdua e lenta de relações aritméticas, um processo que apoia-se em diversos invariantes em elaboração, entre os quais a correspondência operatória, logo reversível, entre quantidades. Vemos esta, em conjunto com a relação inclusiva parte-todo da composição-decomposição aditivo-subtrativa, como de presença necessária na compreensão da cardinalidade das coleções numéricas.

As notações que obtivemos muito sugerem sobre o significado da compreensão do valor cardinal das coleções no domínio e avanço das relações aritméticas para outros planos. Mas também a idéia da cardinalidade é construída em trama conjunta progressiva com os demais invariantes o que, no caso das relações da divisão (entre dividendo, divisor

essencial para que as crianças p
aditivo-subtrativas reversíveis, l
e identificar o número de pa
totalidade e a extensão dessas p

Ao argumentar a favor do
esquemas na passagem das estrut
elementares, como fizemos n
excluindo a probabilidade de n
ou mais centrais, estarem no â
psicogenéticas. Por conseguinte
necessários para melhor esclarec
construção da aritmética infanti

Para finalizar, destacamos q
das crianças permitiu-nos chega
nas raízes de estruturas multipl
claro que a construção desses in
como se faz no processo mesmo
Então, novamente destacamo
produção de notações significa
pedagógica de relevo na elabor
numérica, como parte inere
matemática.

Referên

Baroody, A. J. & Ginsburg, H. F. (1986). The
and mechanical knowledge of arithme
procedural knowledge: The case of mathem
Lawrence Erlbaum.

Bideaud, J., Meljac, C. & Fischer, J. P. (Org
Presses Universitaires de Lille.

Brun, J., Giossi, J. M. & Henriquès, A. (19
Math-École, 23(112), 2-11.

Carraher, T., Carraher, D. & Schliemann, A
ed.). São Paulo: Cortez.

Correa, J. (1996). A compreensão inicial do
não-computacionais. Em M. H. Nova
na educação: Articulação entre pesquisa, for
ANPEPP, vol 1, nº 5, pp. 151-165). R
Pesquisa e Pós-Graduação em Psicolog

Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). You
The relationship between division term
of Educational Psychology, 90(2), 321-32

Janvier, C. (Org.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* London/Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Kamii, C. & DeClark, G. (1985). *Young children reinvent mathematics.* New York/London: Teachers College Press.

Kornilaki, E. & Nunes, T. (1999). Do multiplication and division develop in parallel or as co-ordinated operations? Em European Society of Developmental Psychology (Org.), *IXth. European Conference on Developmental Psychology: Human Development at the Turn of the Century. Abstracts* (pp. 389-390). Spetses: ESDP/University of Athens.

Lerner de Zunino, D. (1995). *A matemática da escola: Aqui e agora.* (J. A. Llorens, Trad.) (2ª ed.). Porto Alegre: Artes Médicas. (Original s/d)

Lerner, D. & Sadovsky, P. (1996). O sistema de numeração: Um problema didático. Em C. Parra & I. Saiz (Orgs.), *Didática da matemática. Reflexões psicopedagógicas* (J. A. Llorens, Trad.) (pp. 73-155). Porto Alegre: Artes Médicas. (Original publicado em 1994)

Moro, M. L. F. (1999). Aprendizagem construtivista de estruturas aditivas e multiplicativas na iniciação matemática. *Temas em Psicologia da SBP, 7*(3), 263-282.

Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática* (S. Costa, Trad.). Porto Alegre: Artes Médicas.

Orozco-Hormaza, M. (2002, junho). *Los errorres sintácticos cuando los niños aprenden a escribir numerales.* Trabalho apresentado em simpósio no 32nd, Annual Meeting of the Jean Piaget Society. Philadelphia, USA. (material não-publicado)

Parrat-Dayan, S. (1980). *Étude génétique de l'acquisition de la notion de moitié.* Genève: Edition J. R. de Rougemont.

Parrat-Dayan, S. (1985). À propos de la notion de moitié: Rôle du contexte expérimental. *Archives de Psychologie, 53,* 433-438.

Perret, J.-F. (1985). *Comprendre l'écriture des nombres.* Berne Peter Lang.

Piaget, J. (1974). *La prise de conscience.* Paris: PUF.

Piaget, J. (1978). *Fazer e compreender.* (C. L. de P. Leite, Trad.). São Paulo: EDUSP/Melhoramentos. (Original publicado em1974)

Piaget, J. & Szeminska, A. (1971). *A gênese do número na criança* (C. M. Oiticica, Trad.). Rio de Janeiro: Zahar. (Tradução da 3ª edição de 1964)

Piaget, J. (Org.) (1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 1/ L'abstraction des relations logico-arithmétiques.* Études d'Epistémologie Génétique (Vol. XXXIV). Paris: PUF.

Piaget, J. (1996). *As formas elementares da dialética* (F. M. Luiz, Trad.). São Paulo: Casa do Psicólogo. (Original de 1980)

Schubauer-Leoni, M-L. & Perret-Clermont, A-N. (1980). Interactions sociales et répresentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1, 2, 3,* 297-350.

Schubauer-Leoni, M.-L. & Perret-Clermont, A. -N. (1984). Construction sociale d'écritures symboliques en deuxième primaire (opérations addtitives). *Interactions Didactiques, 4,* 1-40.

Selva, A. C. V. & Brandão, A. C. P. (2000). A notação escrita na resolução de problemas por crianças pré-escolares. *Psicologia: Teoria e Pesquisa,16*(3) 241-249.

Seron, X., Deloche, G. & Noël, M.-P. (1991). Un transcodage des nombres chez l'enfant: la production des chiffres sous dictée. Em J. Bideaud, C. Meljac & J. P. Fischer (Orgs.), *Les chémins du nombre* (pp. 303-327). Lille: Presses Universitaires de Lille.

Sinclair, A. (1990). A notação numérica na criança. Em H. Sinclair (Org.), *A produção de notações na criança* (M. L. F. Moro, Trad.) (pp. 71-96). São Paulo: Cortez. (Original publicado em 1988)

Sinclair, A., Tièche-Christinat, C. & Garin, A. (1994). Com
t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres? Em M. Art
& P. Tavignot (Orgs.), *Vingt ans de didactique des ma*
243-249). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Sinclair, H. (1988). Learning: The interactive re-creation
comunicado no *VI International Congress of Mathem*
ICME (mimeo).

Sinclair, H. (1990). Introdução. Em H. Sinclair (Org.),
criança (M. L. F. Moro, Trad.) (pp. 13-18). São Paulo: C
em 1988)

Sinclair, H. & Sinclair, A. (1986). Children's mastery of
construction of basic number concepts. Em J. Hieb
procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 59
Lawrence Erlbaum.

Squire, S. & Bryant, P. (2002). *From sharing to dividing. You*
division. Trabalho apresentado em simpósio no 32nd
Jean Piaget Society. Philadelphia, USA. (material não

Squire, S., Bryant, P. & Correa, J. (1999). Young children's u
Em European Society of Developmental Psycholo
Conference on Developmental Psychology: Human Deve
Century. Abstracts (p. 389). Spetses: University of A
for Developmental Psychology.

Teixeira, L. R. M. (1996). Aprendizagem inicial do valor
conceituação e simbolização. Trabalho apresenta
Americana pelo Centenário de Nascimento de Jean Piaget.
de São Paulo. (trabalho não-publicado)

Teixeira, L. R. M. (2001). As notações numéricas como re
ensino e a aprendizagem do sistema de numeração p
Reunião Anual de Psicologia da Sociedade Brasileira de
Janeiro: SBP/UERJ.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques
recherches françaises en didactique des mathématiqu
des Mathématiques, 2(2), 215-232.

Vergnaud, G. (1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité* (3

Vergnaud, G. (1989-1990). Psichologie du développe
mathématiques. Un exemple: Les structures additiv

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuel
des Mathématiques, 10(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). L'appropriation du concept de n
longue haleine. Em J. Bideaud, C. Meljac & J.- P. Fisc
nombre (pp. 271-282). Lille: Presses Universitaires de

Vergnaud, G. (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière d
de champ conceptuel. Em M. Artigue, R. Gras, C
(Orgs.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en Franc*
La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptuali
(Org.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 275-29

Vergnaud, G. (1998). *Algebra, additive and multiplicative str*
at the early secondary level? Paris: CNRS/Université d
publicado)