REVISTA VIRTUAL
Universidad Católica del Norte
CATÓLICA DEL NORTE Fundación Universitaria Pioneros en educación virtual
http://revistavirtual.ucn.edu.co
No. 45| Mayo - Agosto, 2015
ISSN-0124-5821 (en línea)

Cómo citar el artículo
Llorens Fuster, J. L. & Prat Villar, M. (2015). Extensión del Modelo de Van Hiele al concepto de área. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 45, 113-128. Recuperado de
http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/660/1192

Extensión del Modelo de Van Hiele al concepto de área

An Extension of Van Hiele's Model to the Area Concept

En étendant le modèle de Van Hiele au concept de surface

Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO InformationServices,Redalyc, Dialnet, DOAJ, Actualidad Iberoamericana, Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México.

José Luis Llorens Fuster
Doctor en Ciencias Matemáticas
Catedrático del Departamento de Matemática Aplicada de la
Universidad Politécnica de Valencia (España)
llorens@mat.upv.es

Mónica Prat Villar
Licenciada en Ciencias Matemáticas
Doctoranda en Matemáticas en la
Universidad Politécnica de Valencia (España)
mnipravi@doctor.upv.es

Recibido: 9 de marzo de 2015
Evaluado: 13 de abril de 2015
Aprobado: 23 de abril de 2015
Tipo de artículo: Resultado de investigación científica y tecnológica

Resumen

Se detallan los descriptores de cada uno de los niveles de razonamiento propios del modelo de Van Hiele para el concepto de área de una figura plana, obtenidos mediante entrevistas socráticas semiestructuradas cuyo guion también se analiza. Asimismo, se relaciona esta extensión del modelo con otras precedentes en el contexto de la aproximación local así como con las imágenes conceptuales de Vinner, cuya relación con el modelo de Van Hiele ya se puso de manifiesto con anterioridad y vuelve a repetirse ahora: Los conflictos en las imágenes conceptuales impiden el progreso a un nivel superior.

Palabras clave

Área, Razonamiento, Van Hiele, Vinner.

Abstract

In this paper we discuss the descriptors for each one of the thinking levels of Van Hiele model for the concept of area of a plane figure, obtained through semi-structured Socratic interviews whose script is also analysed in detail. This extension of the model is also related to other precedents in the context of the local approximation as well as conceptual images of Vinner whose relationship with Van Hiele model has been previously shown and repeats now: Conflicts in conceptual images avoid progress to a higher level.

Keywords

Area, Reasoning, Van Hiele, Vinner.

Résumé

On présente en détail les descripteurs de chacun des niveaux de raisonnement du modèle de Van Hiele pour le concept de surface d'une figure plane, obtenus au moyen d'interviews socratiques semi structurées dont le scenario a été aussi analysé. De la même manière, on met en relation cette extension du modèle avec des autres précédentes dans le contexte de l'approximation local de même que avec les images conceptuelles de Vinner, dont la relation avec le modèle de Van Hiele se met en évidence à l'avance et se répète maintenant. Les conflits des images conceptuelles empêchent d'avancer vers un niveau supérieur.

Mots-clés

Surface, raisonnement, Van Hiele, Vinner.

Introducción

El modelo de Van Hiele proporciona una descripción de los procesos de aprendizaje, postulando la existencia de unos niveles de razonamiento que no se identifican con destrezas de cálculos computacionales o habilidades de conocimientos académicos. En este trabajo, siguiendo la nomenclatura usada en Llorens (1994, p.21 y ss.), los referiremos como Nivel 0 (predescriptivo), Nivel I (de reconocimiento o visual), Nivel II (de análisis) y Nivel III (de clasificación y relación). El propio Van Hiele (1986, p.47) señaló la dificultad para detectar niveles superiores e indicó que su estudio *"sólo tiene un interés teórico"*. Lo deseable es que los estudiantes alcancen el nivel III (como mínimo), en el que se puede considerar que, propiamente, se dan todos los elementos que garantizan la compresión de un concepto.

Los descriptores de los niveles de Van Hiele se pueden definir como las principales características que permiten reconocer cada uno de los niveles de razonamiento matemático a partir de la actividad de los estudiantes. Tienen propiedades tales como la *secuencialidad* (cada nivel se apoya en el anterior, de modo que no se adquiere uno sin haber adquirido previamente el precedente), *distinción* (el nivel *n* requiere una cierta reorganización del conocimiento adquirido en el nivel *n*-1), *separación* (dos personas que razonen en niveles diferentes no pueden entenderse en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático), etc. (Llorens & Pérez Carreras, 1997). Además, existe una estrecha relación entre el *lenguaje* y los niveles, de modo que cada uno de ellos tiene un lenguaje específico.

Desde la difusión inicial de los trabajos de los Van Hiele, a mediados de los años 70 del siglo pasado, ha habido un interés creciente por el modelo. Al principio, muchos trabajos se ciñeron a cuestiones geométricas en niveles medios o elementales, quizá por la dificultad que comporta el análisis del razonamiento sin la contaminación de los conceptos previos ya que, repetimos, no se trata de detectar habilidades algebraicas, sino de estudiar características del razonamiento. Sin embargo, hace veinte años se extendió al concepto de aproximación local (Llorens, 1994), uno de los conceptos básicos del análisis matemático ya en el ambiente universitario o preuniversitario, usando su manifestación quizá más visual o geométrica: la recta tangente a una curva en un punto.

Posteriormente se sucedieron contribuciones en el mismo sentido: por ejemplo, se estudió el mismo concepto desde otra perspectiva (Esteban, 2000); se extendió al de continuidad de una función (Campillo y Pérez-Carreras, 1998) y, además de media docena de tesis doctorales, ha habido no pocos trabajos que comparten esa extensión del modelo fuera de los ámbitos mencionados.

En esos últimos trabajos, la extensión del modelo se ha interpretado en su aspecto de enunciar una serie de **descriptores** para cada uno de los niveles de razonamiento, es decir, identificar unos comportamientos que permitan clasificar cada estudiante en el nivel en que se encuentra. Tanto para obtenerlos como para comprobar que se ajustan a las exigencias del modelo, se suele utilizar como instrumento la *entrevista*: entrevista abierta o, como en nuestro caso, entrevista semiestructurada y con carácter socrático, esto es, en la que se usan también las respuestas para tratar de contribuir a que la propia entrevista sea una experiencia de aprendizaje.

Nuestro trabajo se enmarca en ese contexto. Desde luego, creemos que la extensión al concepto de área de una figura plana tiene interés en sí mismo, pues hablamos de un concepto fundamental propio del análisis matemático directamente relacionado con el de integral. Además, el carácter geométrico del concepto y su presentación inicial en niveles educativos elementales sugiere una concordancia con los trabajos de investigación antes mencionados y, en particular, con el de Llorens (1994).

Por otra parte, en ese mismo trabajo se estableció la relación entre el modelo de Van Hiele y los trabajos de Vinner relativos a las dualidades conceptuales: el posible conflicto entre el *concepto-imagen* —la estructura cognitiva que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados— y el *concepto-definición* —la fórmula con palabras usadas para especificar ese concepto— explica muy bien muchas dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos básicos del análisis matemático que se manifiestan en los primeros años de la enseñanza universitaria y en los últimos de la preuniversitaria (Vinner, 1991). Ahora, en el contexto del modelo de Van Hiele, podemos asegurar que la existencia de conflictos entre la imagen y la definición de un concepto imposibilita el progreso hacia los niveles de razonamiento superiores, es decir, a los niveles III y IV (Llorens, 1996, p.14 y ss.).

El concepto de aproximación local es un "concepto dinámico", en el sentido de que requiere la noción de límite y, por tanto, es abstracto en sí mismo, no visualizable. Desde luego, su comprensión sólo puede darse a partir del nivel III de razonamiento. El concepto de área de una figura plana tiene todas esas características y muchos paralelismos con el citado de recta tangente. Por ejemplo, también es introducido en la enseñanza primaria en un contexto puramente estático. Así, pronto se enseñan fórmulas que permiten medir el área de algunas figuras geométricas sencillas, del mismo modo que se introduce la recta tangente a una circunferencia como aquella que sólo tiene un punto en común con dicha curva. En ambos casos, si años más tarde no se hace la adecuada revisión del concepto, se generan fácilmente esas imágenes a las que antes nos referíamos. La imagen conceptual de que una recta tangente es la que "toca" a la curva en el punto de tangencia se mantendrá en el estudiante a menos que se haga una revisión expresa del concepto de tangente. Eso ocurrirá aunque supuestamente conozca el concepto de derivada y su dichosa "interpretación geométrica". Es decir, si no hay una revisión, una nueva definición, tendrá ese conflicto que evidenciará en diversas situaciones y, aunque pueda ser capaz de obtener la derivada de una función en un punto así como la ecuación de la recta tangente a una función derivable en un punto, mostrará su sorpresa ante una imagen como la que corresponde a una representación gráfica de $y=x^3$ y su tangente en el origen, por mencionar un conocido ejemplo.

Del mismo modo, la ausencia de una redefinición de área como consecuencia de la introducción del cálculo integral, puede llevar al estudiante a aferrarse a su imagen del área como una mera aplicación de una fórmula, válida para algunas figuras sencillas, por mucho que quizá sea capaz de aplicar la regla de Barrow en determinadas circunstancias.

Por otra parte, por la misma definición de área de una figura plana, nuestro trabajo tiene que abordar esa cuestión. Es decir, no sólo tratamos con aspectos visuales o geométricos, sino que nos hemos de referir a la componente numérica del área y, en ese sentido, este trabajo aporta también esa significativa novedad que lo diferencia de sus precedentes. En efecto, aunque no se haya hecho de una forma exclusiva, se ha explorado esa vinculación con los aspectos numéricos del concepto. Al hacerlo nos apoyamos, en parte, en la misma imagen antes mencionada. Es decir, asumimos que *estamos de acuerdo* en que el área es un número (positivo) que se asocia a una cierta región del plano, pues esa es la *parte de verdad* que compartiría con la pura visión estática del concepto.

Ciertamente, el carácter dinámico del concepto de área se suele enfrentar por primera vez al considerar las aplicaciones de la integral, si es que eso se hace, claro está. Es decir, un estudiante puede seguir identificando "área" con la "fórmula" que permite calcularla mientras no se vea en la necesidad de aplicarla a una figura que se salga de sus modelos. El ejemplo más sencillo sería un trapecio mixtilíneo, a pesar de que pudiéramos pensar que hay mil situaciones cotidianas (como una mancha, la fotografía de un objeto, etc.) que podrían conducirle a considerar la insuficiencia de "su" concepto. Sin embargo, una vez más comprobamos que el aprendizaje ocurre cuando hay verdaderas experiencias de aprendizaje, de modo que será muy difícil que espontáneamente se genere, por mucho que mil objetos tengan un área que sería imposible calcular con la mera aplicación de una fórmula sencilla. Y, por eso mismo, es necesario conducir a una experiencia que muestre claramente esa insuficiencia, justo en el contexto de definir (de nuevo) lo que entendemos por área, usando la imagen del trapecio mixtilíneo.

Sin embargo, sabemos que estudiantes que han aprobado algún curso de cálculo en la universidad y que, por tanto, han recibido lecciones de cálculo integral, no siempre son capaces de dar respuesta correcta a esas situaciones. Más aún, la falta de integración del concepto de integral con el de área, seguramente por una ausencia de la revisión de aquellas imágenes conceptuales estáticas de su infancia, lleva a situaciones paradójicas como las relatadas por Mundy, recogidas por Llorens y Santonja (p.63-64):

Así, por ejemplo, cuando se les pide que calculen el área de la zona sombreada de la figura anterior, fracasan o se equivocan porque no saben calcular . Es un claro ejemplo de activación del concepto-definición que acaban de recibir (activación que se produce por el contexto, claro está) y que les conduce a un callejón sin salida porque esa definición no les aporta la solución, ya que no está integrada en su concepto-imagen (en cuyo contexto evidentemente sí sabrían dar respuesta a la obtención del área de un cuadrado).

Por otra parte, en muchos de los trabajos citados se ha constatado que la mera adquisición de cierto nivel académico no garantiza el nivel de razonamiento adecuado o presuntamente correspondiente. También por ese motivo, nuestro trabajo se ha centrado en estudiantes entre 16 y 19 años que se mueven entre el bachillerato y los primeros años universitarios. En concreto, se hicieron diez entrevistas a estudiantes de bachillerato de la rama científico-técnica y once a universitarios que habían cursado y aprobado un primer curso de matemáticas para ingeniería.

Metodología

Como hemos dicho, la entrevista socrática ha demostrado reiteradamente ser un instrumento eficaz para detectar y validar los niveles de razonamiento: A partir de una conjetura acerca de los descriptores, fruto de la experiencia y de la reflexión, se realizan entrevistas (que se graban) con un guion preestablecido que permite, no obstante, ciertas variaciones y hasta una aparente improvisación, fruto de la propia experiencia y del trabajo de campo desarrollado: eso es lo propio del carácter semiestructurado y socrático de la entrevista.

Como ya hemos indicado, los entrevistados tenían una cierta formación en matemáticas. En el caso de los universitarios, desde luego habían estudiado el concepto de integral y sus aplicaciones al concepto y cálculo del área de una figura plana. También ocurría así con los de bachillerato aunque, lógicamente, con menor profundidad y extensión.

La entrevista tiene un contenido esencialmente visual: aunque las preguntas se formulaban verbalmente, en cada una se mostraba al entrevistado una hoja que reproducía el enunciado, al tiempo que se le dejaba ver alguna representación gráfica sobre la que versa la pregunta (el guion completo puede verse en el apéndice-1). Como puede comprobarse, en determinados momentos se entrega información, coherentemente con el carácter socrático del guion de la entrevista.

Se evita entrar en las definiciones de los términos que se usan: curvas, rectas, rectángulo, triángulo, puntos, gráfica y, desde luego, área. Recordemos que el reconocimiento de esos mismos términos se relaciona con nuestros descriptores (0.1). El término *zoom* se usa acompañado de sinónimos tales como magnificar, ampliar, lente de aumento, etc.

El aspecto numérico se introduce como una suerte de "*mecanismo que permite sumar áreas de rectángulos y obtener su valor (aproximado)*". Es decir, seguimos dentro de lo estático porque precisamente queremos escuchar qué significan para cada entrevistado ese mecanismo y los números que suministra. Desde luego, no se utiliza la palabra «integral» en ningún momento y su mención por parte de algún entrevistado —casi siempre de forma imprecisa— no fue corregida. El ritmo al que transcurría cada entrevista era bien distinto según el nivel que iba manifestando el entrevistado, hasta el punto de que pudiéramos considerar una posible relación entre ese nivel previo y el tiempo transcurrido en completarla, generalmente inferior a los treinta minutos. Como cualquier entrevista de este tipo, se procuró iniciarla en un ambiente relajado, dejando bien claro que no era un examen, que no se podía "hacer mal". Las primeras preguntas sirven también para confirmar esa impresión. Sin embargo, el socratismo supuso en todos los casos un esfuerzo de concentración para los estudiantes: Muchos de ellos dijeron haber terminado la entrevista cansados.

El guion que adjuntamos es el resultado final de ese proceso de refinamiento para la formulación de los descriptores: Esa última versión es la que ya proporciona seguridad en la detección de los niveles, de acuerdo con la formulación de los descriptores a la que finalmente se ha llegado.

Como ya hemos indicado, una característica importante de estos trabajos tiene que ver con el instrumento "visual" que se relaciona con el concepto. Así, del mismo modo que para el concepto de recta tangente a una curva en un punto se usó la idea de un "zoom" sobre la gráfica de la curva, nos pareció conveniente utilizar figuras simples junto con la idea de rectángulos que pudieran asimilarse a las representaciones gráficas de las sumas de *Riemann*, es decir, un mecanismo que sencillamente va incrementando ese número de rectángulos, del que después mostraríamos una visión numérica.

Las primeras preguntas (1 a 6) no sólo pretenden evocar el área de un rectángulo sino que introducen la idea de la *descomposición* para obtener el área, que inmediatamente va a desembocar en una situación más compleja, donde la mera descomposición y la fórmula para un rectángulo no son suficientes (7 a 9).

En este momento introducimos el mecanismo numérico que permite sumar áreas de rectángulos para ver si, ligado a la aproximación gráfica, se evidencia el carácter dinámico del área. Después de trabajar con un trapecio mixtilíneo se retoma otra figura que podría tratarse de forma estática, el trapecio. Siendo capaces de obtener el área de esta figura se les enfrenta al uso del mecanismo numérico y se insiste en la secuencia numérica para, según el caso, consolidar la idea de convergencia o empezar a perfilarla.

El final de la entrevista (15 a 16) sirve para mostrar la idea que el entrevistado tiene en ese momento (puede que no sea la misma que al principio de la entrevista) sobre el concepto de área y se invita a describir un método general.

Aunque se ha trabajado con un único guion, se puede decir que cada entrevista ha sido diferente. Según el tipo de respuesta de cada entrevistado y del lenguaje utilizado, se han añadido preguntas clarificadoras sobre sus respuestas; en algunos casos se ha podido saltar preguntas pues las contestaban en momentos anteriores; en otras ocasiones ha habido que volver a preguntas precedentes para ayudar a "reconstruir" o afianzar alguna idea que en algunos momentos parecía clara y más tarde dejaba de estarlo... En fin, lo habitual en este contexto de entrevista semiestructurada y socrática.

Resultados

A continuación, detallamos los descriptores de los niveles.

Nivel 0:

el mero reconocimiento de los objetos (polígonos de aristas rectas: cuadrado, rectángulo, triángulo, trapecio y/o aristas curvas: círculo) constituye lo que consideramos nivel 0 o pre-descriptivo. Un estudiante en este nivel reconoce los diferentes tipos de polígonos nombrados y sus elementos (base, altura, lado, radio...). Asocia la idea de área con "la medida" de la superficie. Conoce que ni un punto ni una línea tienen área.

Nivel I:

I.1. El nivel 1 se caracteriza porque su imagen conceptual sobre la obtención del área se reduce a la aplicación de una fórmula que conoce o es capaz de encontrar, basada en medidas de los lados u otras medidas complementarias.

I.2. Entiende el área como un valor (exacto) de comparación con la unidad patrón.

I.3. Es capaz de descomponer una figura de lados rectos en otras figuras conocidas para calcular el área mediante la suma de todas ellas.

I.4. (separación del nivel II): Ante figuras con lados curvos, como un trapecio mixtilíneo, no es capaz de encontrar ningún modo de obtener el área ni una aproximación, aunque quizá intente ajustar la figura mediante rectángulos o arcos de circunferencia, esperando un ajuste "perfecto".

Nivel II:

II.1. Usa la descomposición en franjas para aproximar el área de una figura plana tal como un trapecio mixtilíneo.

II.2. Reconoce que si se aumenta el número de franjas rectangulares, mejora la aproximación del área del trapecio mixtilíneo porque hay un mejor ajuste de la figura.

II.3. (Separación): Sin embargo, reduce la estimación del área a un mero redondeo de los valores numéricos y no como un proceso indefinido de aproximación.

II.4. (Separación): Así, si se pide que calcule el área de un trapecio mixtilíneo, sugiere utilizar un número grande de franjas para descomponerla, pero afirma que será imposible llegar a conocer su valor exacto porque “siempre quedarán huecos”.

Nivel III:

III.1. Propone descomponer en infinitas franjas para hallar el área de un trapecio mixtilíneo y manifiesta que el proceso de descomposición en franjas no tiene fin.

III.2 Ante la correspondiente sucesión de aproximaciones numéricas del área obtenida mediante la descomposición en franjas, considera la estabilización de los valores o la existencia de una tendencia numérica para establecer el valor del área.

III.3. Se siente capaz de obtener el área de cualquier figura plana, incluyendo figuras “amorfas” mediante el mismo proceso de descomposición en franjas y su correspondiente aproximación numérica.

III.4. (Progreso hacia el nivel IV) Es capaz de definir el área como el límite del proceso de aproximación mediante franjas.

Discusión

La validación de los descriptores se ha considerado suficiente tras más de una veintena de entrevistas con el guion definitivo. No obstante, pretendemos seguir en el futuro el esquema de tesis doctorales precedentes (Llorens, 1994, y Esteban, 2000, por ejemplo) para tratar de obtener una validación independiente de los descriptores, usando una prueba escrita de respuesta múltiple que permita detectar la existencia de esos niveles en muestras suficientemente grandes de estudiantes.

También es sugestiva la cuestión de la concordancia en el nivel de razonamiento con otra manifestación de la idea de aproximación local, que bien podría ser la de tangente a una curva en un punto: sospechamos que existirá una clara relación, de modo que el nivel de razonamiento será el mismo o fuertemente correlacionado si se hiciera el estudio a través de los respectivos test. Y es que, consecuentemente con los postulados del modelo de Van Hiele, el nivel de razonamiento que permite a un estudiante concluir que para obtener el área de un trapecio mixtilíneo necesita hacer una descomposición infinita y estudiar la convergencia de ese proceso, no parece diferir de quien concluye que la tangente a una curva en un punto será, si existe, aquella recta que se obtenga por infinitas magnificaciones locales de la curva. Así pues, trataremos de verificar esa hipótesis razonable en trabajos posteriores.

Conclusiones

Una vez más, se ha probado que el modelo de Van Hiele es capaz de describir el proceso de razonamiento en alguno de los pilares del cálculo, del análisis matemático. Y, ciertamente, también una vez más se concluye que determinadas rutinas presentes en los sistemas educativos no favorecen el correcto aprendizaje de los conceptos que aparecen en esos pilares: Hay demasiados estudiantes que no han alcanzado el nivel III, aún habiendo superado un nivel académico que casi lo exigiría si hubiese un énfasis en estas cuestiones, en detrimento de las puramente mecánicas o algebraicas. Es decir, se ha evidenciado que la destreza en las herramientas algebraicas no va ligada a un nivel de razonamiento elevado y, recíprocamente, que carecer de ellas no impide razonar correctamente.

En el desarrollo de este trabajo se han puesto de manifiesto otras dificultades que, desde hace años, aparecen en multitud de artículos de educación matemática y que, a pesar de los *supuestos* cambios en los planes de estudio, se siguen apreciando hoy en día. Uno de ellos es el concepto de límite. Las palabras “límite” o “tendencia” han sido usadas en muy pocos casos de manera natural, a pesar de ser alumnos que ya han “calculado” límites en varios cursos. La mayoría de los que finalmente las han usado, lo han hecho tras no poca insistencia por parte del entrevistador. Un par de entrevistados han identificado el concepto de límite con cierta sorpresa, como detectando en ese momento de qué se trataba. Casi todos han sido capaces de ver la “estabilización” numérica, pero la verbalización apuntaba mayoritariamente hacia una mera aproximación. De la mano de esta problemática va el desconocimiento generalizado sobre el infinito. Son pocas y anecdóticas las experiencias de los alumnos con el infinito, por lo que no generan un aprendizaje sobre él. Otro aspecto que llama la atención es que en los estudiantes del nivel I y, en un primer momento, en algunos de nivel II, se observa una búsqueda del *valor exacto* (de lo exacto, diríamos) que les impide plantearse siquiera una aproximación, llegando incluso a incorrecciones tales como considerar que son triángulos los espacios comprendidos entre los lados superiores de las franjas y la curva que delimita superiormente el trapecio mixtilíneo.

Veinte años más tarde del primer trabajo en este contexto y, por tanto, cuando la irrupción de la tecnología se supone que ha invadido la vida cotidiana, comprobamos que eso no se manifiesta en la adquisición de habilidades de razonamiento, quizá porque el uso de recursos tecnológicos en el ámbito docente aún se sigue considerando una novedad y porque, al mismo tiempo, los niveles académicos en nuestro contexto sociocultural manifiestan claros síntomas de deterioro.

Tanto el concepto de aproximación local en cualquiera de sus manifestaciones como el concepto de área, suponen una habilidad del pensamiento, del modo de razonar, que no se desarrolla espontáneamente: Esa habilidad *requiere experiencias concretas de aprendizaje.* Los recursos tecnológicos facilitan que esas experiencias se produzcan de forma natural en el proceso de enseñanza y aprendizaje pero, claro está, se requiere voluntad para llevarlas a cabo. La permanente tentación de reducir los conceptos matemáticos —especialmente, los que son complejos— a cuestiones meramente algebraicas que, además, sean fácilmente evaluables y que soslayen los aspectos teóricos, trae como consecuencia que tales habilidades del pensamiento no se desarrollen y, así, persisten las imágenes conceptuales insuficientes adquiridas en la seguridad de la infancia.

¿Por qué va a dejar de pensar un estudiante que el área de una figura es algo que puede obtener sin más que aplicar la fórmula correspondiente? Incluso la misma tecnología (por ejemplo, la convicción de que “en internet está todo”) le reafirman en esa convicción: si necesita calcular un área, puede pensar que “ya encontrará en internet la fórmula necesaria”. Las situaciones de conflicto en este contexto, que entiende como raras y nada aplicables a lo cotidiano, quizá pueda resolverlas con aproximaciones más o menos imprecisas (“la figura *se parece* a otra u otras en la que es capaz de usar la fórmula apropiada”). Usando la terminología de Vinner, diríamos que las aplicaciones del cálculo integral pertenecerían a otro contexto que no se integra en su imagen conceptual, sencillamente porque no hace una revisión de esa imagen, seguramente porque no lo necesita o no se le ayuda a hacer esa revisión. Desde luego que un estudiante, sumergido en el contexto, *sabe* que el área de ciertas superficies se calcula mediante una integral. Pero eso no necesariamente le obliga a cambiar su imagen de que el área es algo estático que se obtiene aplicando una fórmula y, como mucho, si se enfrenta a una figura “rara”, la podrá aproximar con figuras conocidas en las que sí que valen sus fórmulas...

El modelo de Van Hiele y las ideas de Vinner siempre se acompañan de propuestas metodológicas que, en este caso, son bien patentes, casi evidentes. Sin ahondar en la cuestión de las fases de aprendizaje propugnadas por el modelo, parece claro que, en lo que al concepto de área de una figura plana se refiere, los fundamentos del cálculo integral que se imparten en el primer año de muchas carreras (técnicas o científicas) o en los últimos cursos preuniversitarios, brindan la ocasión apropiada. Se trataría, desde luego, de mostrar las insuficiencias de la versión estática del concepto y de redefinir el área de una figura plana en general tal como permite hacerlo el cálculo integral. Claro que eso seguramente exigirá que se dé una definición de integral y que no se reduzca el cálculo integral a un mero ejercicio de obtención de primitivas (cfr. Llorens y Santonja, 1997).

El uso de la tecnología (programas de cálculo simbólico o páginas web adecuadas, por ejemplo) facilita enormemente la cuestión: no sólo porque puede reducirse el dichoso cálculo de primitivas a su mínima expresión (porque, con mucho, es lo menos importante del tema) sino que, además, se puede recurrir a los apoyos simbólicos y gráficos que brinda ese contexto.

En realidad, el progreso de nivel se produce casi de forma natural cuando en el proceso de enseñanza hay voluntad clara de provocarlo con el uso de los recursos adecuados, incluyendo los tecnológicos. Eso no es una novedad, pero este trabajo también lo pone de manifiesto por el tipo de estudiantes que alcanzan el nivel III, casi todos participantes de una metodología en la que se usan habitualmente esos recursos y se prioriza lo conceptual a lo puramente mecánico.

Referencias

Campillo, P. & Pérez-Carreras, P. (1998). La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de Van Hiele*. Divulgaciones Matemáticas*, *6*(1), 69–80.

Esteban, P. (2000). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de Van Hiele*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Valencia (España).

Llorens, J. L. (1994). *Aplicación del Modelo de Van Hiele al concepto de Aproximación Local*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Valencia (España).

Llorens, J. L. (1996). Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. *SUMA* (22), 13-24.

Llorens, J. L. & Pérez-Carreras, P. (1997). An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Aproximation. *Int. Journal Math. Educ. Sci. Technol. 28*(5), 713-726**.**

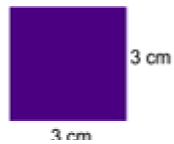
Llorens, J. L. & Santonja, F.J. (1997). Una Interpretación de las dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas. 5* (1/2), 61-76**.**

Van Hiele, P.M., (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. New York, Academic Press.

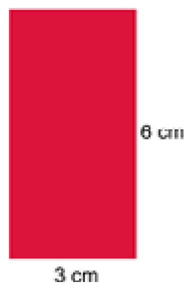
Vinner, S. (1991). *The Role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics*. Advanced Mathematical Thinking. Dordrech (Holanda) Kluwer Ac. Pub. (cap. 5), pp. 65-81.

Apéndice: *Guion de la entrevista socrática*

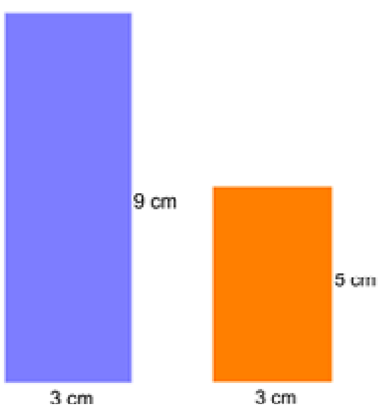
1.¿Cuál es el área de esta figura?



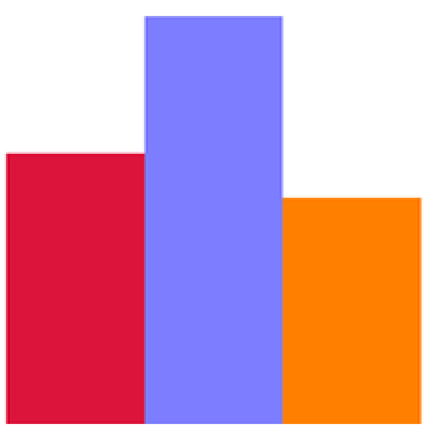
2.¿Y de esta otra?



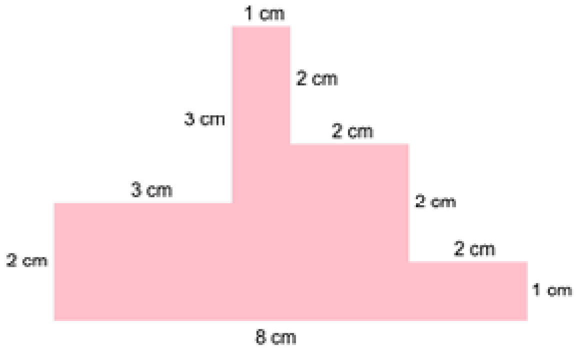
3.Indica ahora las área de las dos figuras siguientes



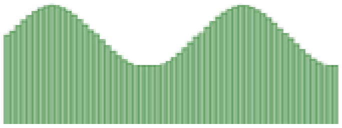
4.¿Cuál será el área de esta figura?



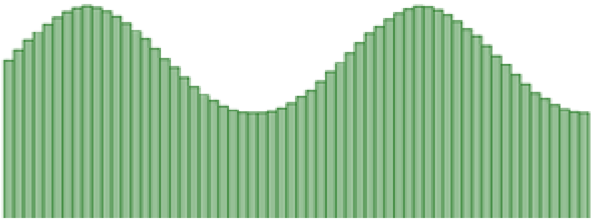
5.¿Cómo obtendrías el área de la figura siguiente?



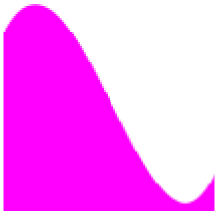
6.¿Y el área de?



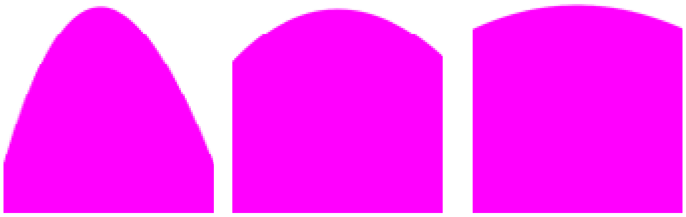
Con la imagen mejor definida vemos que tenemos



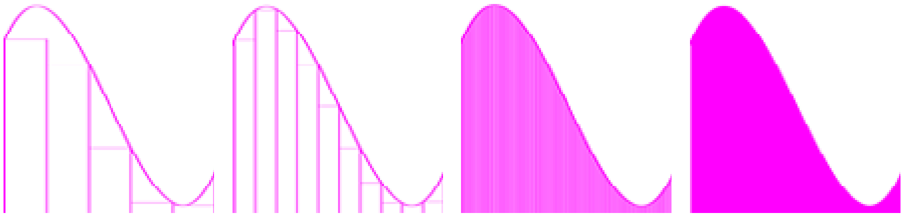
7.Y si tuvieras esta otra figura en la que el lado superior es una curva ¿podrías obtener el área?



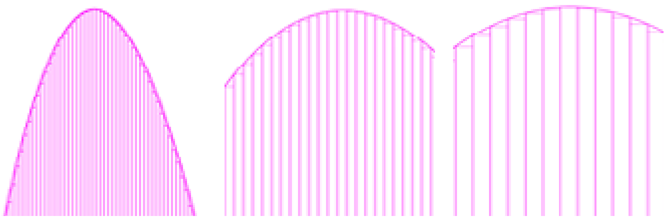
Haciendo varias veces zoom sobre la imagen observamos la secuencia.



8.Ahora observa estas imágenes. ¿Qué se está haciendo?

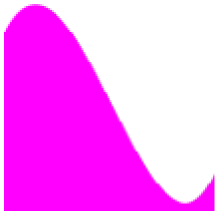


Observa estos zoom de la última imagen



9.¿Tienes alguna sugerencia ahora respecto a la pregunta 7?

7. Y si tuvieras esta otra figura en la que el lado superior es una curva ¿podrías obtener el área?



10.Imagina que tenemos una "herramienta" a la que llamaremos S_REC que descompone una figura plana en franjas como en el ejerci-cio anterior y nos da la Suma de las áreas de los RECtángulos.

En el caso anterior tendríamos

S_REC(5)= 11,5296

S_REC(10)= 13,2648

S_REC(100)= 14,819415

S_REC(200)= 14,9096980725

¿Qué observas?

11.Aumentado el número de rectángulos tendremos:

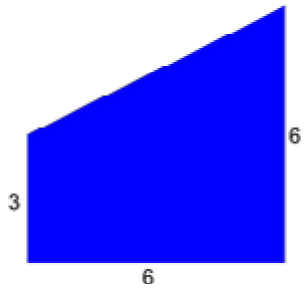
S_REC(500)= 14,9638772849

S_REC(1000)= 14,9819383430

S_REC(10000)= 14,9981938342

¿Qué aprecias en los valores obtenidos?

12. ¿Cuál es el área de este trapecio?



Vamos a aplicarle S_REC.

S_REC(1)= 18

S_REC(3)= 24

S_REC(5)= 25.2

S_REC(10)= 26.1

S_REC(20)= 26.55

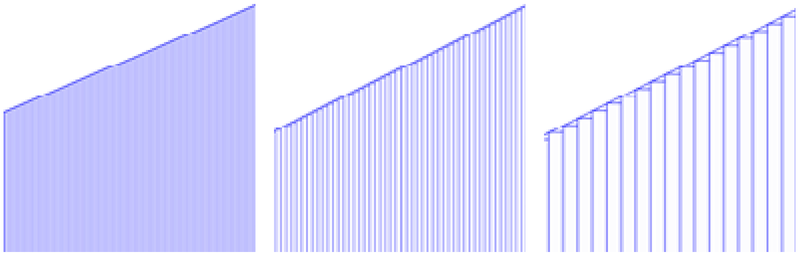
S_REC(50)= 26.82

S_REC(100)= 26.91

S_REC(1000)= 26.991

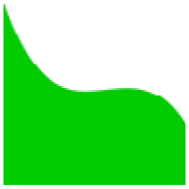
S_REC(10000)= 26.9991

13.Observa qué pasa en la representación de S_REC(100) si ha-cemos zoom.

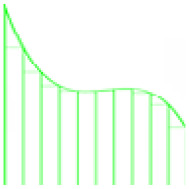


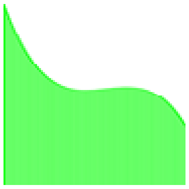
14.¿Cómo conseguirás obtener con S_REC el valor del área del trapecio?

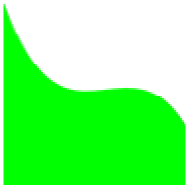
15.¿Cómo obtendrías el área de ?

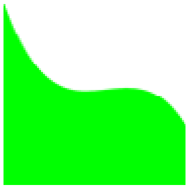


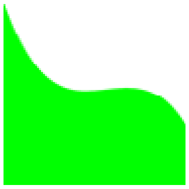
Observa qué hace S_REC

S_REC(10)=14.8374 

S_REC(100)=15.65578898 

S_REC(200)=15.70283444 

S_REC(500)=15.73112014 

S_REC(1000)=15.74055781 

16.¿Cómo expresarías el modo de obtener el área?