Nova Scientia
E-ISSN: 2007-0705
nova_scientia@delasalle.edu.mx
Universidad De La Salle Bajío
México

Sánchez-Galván, Fabiola; Garay-Rondero, Claudia L.; Mora-Castellanos, Consuelo; Gibaja-Romero, Damián E.; Bautista-Santos, Horacio
Optimización de costos de transporte bajo el enfoque de teoría de juegos. Estudio de caso.
Nova Scientia, vol. 9, núm. 19, 2017, pp. 185-210
Universidad De La Salle Bajío
León, Guanajuato, México

Nova Scientia
Revista de Investigación de la Universidad De La Salle Bajío

Revista Electrónica Nova Scientia

Optimización de costos de transporte bajo el enfoque de teoría de juegos. Estudio de caso. Transport costs optimization under game theory approach. Case study.

Fabiola Sánchez-Galván[1], Claudia L. Garay-Rondero[2], Consuelo Mora-Castellanos[3], Damián E. Gibaja-Romero[2] y Horacio Bautista-Santos[1]

[1] Instituto Tecnológico Superior de Tantoyuca
[2] Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla
[3] Universidad de Sonora

México

Fabiola Sánchez Galván. E-mail: fsgalvan01@gmail.com

Resumen

La teoría de juegos es una herramienta matemática que permite modelar la cooperación entre agentes racionales e inteligentes. En este trabajo se presenta la teoría de juegos como una aplicación que propone escenarios de cooperación dentro de la cadena de suministro (CS) para mantener el equilibrio entre los costos logísticos de distribución que son cubiertos por los clientes de una empresa distribuidora de productos abarroteros. A partir de la aplicación del valor de Shapley y el modelo del ruteo de vehículos con capacidad (CVRP), se logró encontrar una distribución equilibrada de costos entre todos los clientes; considerando variables como la demanda, la distancia entre los nodos-clientes, la capacidad de carga y el rendimiento del vehículo. Los resultados obtenidos permitieron a la empresa lograr ahorros cercanos al 40% con relación a los costos actuales de distribución.

***Palabras Clave*:** teoría de juegos; valor de Shapley; ruteo de vehículos; juegos colaborativos

Recepción: 25-01-2017 *Aceptación: 22-05-2017*

Abstract

Game theory is a mathematical tool that allows modeling the cooperation between rational and intelligent agents. In this paper, game theory is presented as an application that proposes cooperation scenarios within the supply chain (SC) for maintaining the balance concerning logistics costs that are paid by customers of a company that distributing grocery products. From Shapley value and Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) application, the balanced costs distribution among all customers were obtained. Variables such as demand, distance between all customer nodes, load capacity and vehicle performance are considered. The results obtained allowed to achieve savings closer than 40% in relation to company current distribution costs.

Keywords: game theory; Shapley value; vehicle routing problem; cooperative games.

Introducción

La cadena de suministro (CS) se define como todas las actividades relacionadas con el flujo y transformación de las materias primas hasta que el producto sea proporcionado al usuario final, entre dichas actividades se encuentra el transporte, por tanto el diseño de rutas de reparto es una de las funciones operativas más críticas que enfrentan las organizaciones que se dedican a la distribución de productos (Boweson, D., Closs, D., Cooper, 2007); además de ser un tema central que permite mejorar la planificación y coordinación entre los elementos que componen la CS.

Un primer enfoque seguido para la optimización de los costos de distribución de productos, ha sido el diseño de territorios comerciales agrupados, donde se ha intentado equilibrar el número de clientes y volumen de ventas (Salazar-Aguilar, M. Angélica; Ríos-Mercado, Roger Z.; González-Velarde, José L.; Molina, 2012). Se ha buscado también minimizar la dispersión territorial para evitar el traslape de territorios, logrando disminuir el desbalance entre los mismos (Ríos Mercado, 2015); en ambos casos, se han utilizado metaheurísticas para encontrar la solución más factible, debido a que se trata de problemas denominados en la literatura como NP- duros.

El segundo enfoque es el que considera el problema del enrutamiento de vehículos, que consiste en atender la demanda de diferentes clientes ubicados geográficamente de forma dispersa y se cuenta para ello con una flota de vehículos que parten desde un centro de distribución; la problemática consiste en asignar a cada vehículo una ruta de clientes de tal manera que los costos de transporte se minimicen. En este contexto, el ruteo cobra particular importancia para los mayoristas que todos los días entregan productos a partir de un punto de distribución a diferentes locaciones de un territorio y que además buscan generar ahorros en costos de transporte (Chopra, S; Meindl, 2008).

En el ámbito de la logística industrial, son de gran interés investigativo los procesos de abastecimiento y distribución para establecer rutas de vehículos; existen un sin número de modelos que tienen como objetivo mejorar el desempeño logístico y minimizar los costos de transporte, desde el Problema del Agente Viajero (TSP) planteado en 1956, donde se considera una demanda determinista, la capacidad del vehículo, el tipo de flota, ya sea homogénea o heterogénea (Hillier, Frederick S.; Lieberman, 2010), hasta trabajos recientes utilizando heurísticas clásicas como el algoritmo de los pétalos y ramificación y acotación, entre otros, y metaheurísticas en las que puede considerarse una demanda con incertidumbre (distribuciones probabilísticas); aunque los resultados no son los óptimos globales, pueden ser utilizados para la toma de decisiones. Entre algunas metaheurísticas se encuentran los algoritmos genéticos, las redes neuronales, recocido simulado, búsqueda Tabú y el vecino más cercano (Rocha Medina, Linda Bibiana; González La Rota, Elsa Cristina; Orjuela Castro, 2011).

Por otra parte, la literatura sobre teoría de juegos en su mayoría se ocupa de dar formulaciones en ciencias económicas o ciencias políticas, mediante la demostración de equilibrios (García, 2009); sin embargo, trabajos recientes demuestran que la teoría de juegos es considerada una heurística que puede incursionar en el ámbito de la ingeniería si se tiene claro qué es lo que se busca (maximizar los beneficios o minimizar las pérdidas), además de proponer el modelo adecuado y las estrategias del juego (Restrepo Carvajal, 2009). La toma de decisiones para la planeación y la operación de los sistemas de transporte se plantea como un problema de optimización, modelados a partir de la teoría de juegos no cooperativos de Nash y los juegos de Stackberg, por lo que se demuestra que la teoría de juegos es un fuerte algoritmo de solución (Fisk, 1984). Para los transportistas, la incertidumbre sobre los tiempos y los costos de los viajes, son aspectos omnipresentes en el ruteo de vehículos y su programación; por lo tanto, un retraso imprevisto causa un impacto sustancial en los costos. Los transportistas a menudo desean saber qué enlaces son críticos y qué rutas y horarios son menos riesgosos en términos de costos, por lo que proponer un enfoque de teoría de juegos para determinar la confiabilidad de la red de transporte con respecto a las probabilidades de fallo es totalmente factible (Bell, 2004).

El concepto de juego se enfoca en representar grandes problemas con pequeños casos a escala y establece principios teóricos, su contribución está en la introducción cualitativa de nuevas ideas y si se incluye un elemento computacional, éste es de naturaleza discreta. El instrumento de juegos acuerda un tamaño fijo, escenarios realistas y aplicaciones orientadas que tienen como objetivo principal determinar valores cuantitativos de variables continuas. El otro método de agrupamiento tiene que ver con lo que los jugadores hacen y se definen cuatro grupos al respecto: juegos entre viajeros, juegos entre autoridades, juegos entre viajeros y autoridades y juegos contra una "entidad malvada" (Hollander & Prashker, 2006).

Para los ingenieros involucrados con la temática de diseño de redes, se propone aplicar la teoría de juegos como un novedoso enfoque para medir la confiabilidad del desempeño de una red mediante la estrategia de escenarios no-cooperativos, en el que un jugador busca establecer un camino que minimice el costo de viaje esperado y en el otro extremo una "entidad malvada" que determine un escenario que maximice el costo esperado de viaje. El enfoque del equilibrio de Nash sin cooperación se establece como estrategia mixta en la que no se le permite al usuario reducir el costo esperado de viaje al cambiar su elección de la ruta probable, mientras que el otro es incapaz de incrementar el costo esperado de viaje por un cambio de probabilidades. El equilibrio de Nash mide el desempeño de la red cuando los usuarios son extremadamente pesimistas, por lo que se debe ser cauteloso en el diseño de la misma (Bell, 2000).

La teoría de juegos ha sido utilizada para medir la influencia de los factores de emisión de contaminantes como parte del comportamiento de los viajeros para elegir una ruta, considerando costos generalizados de viaje que son definidos mediante un problema de programación lineal en el que la función objetivo se integra por la suma de los factores contaminantes, tiempos de viaje y confiabilidad de los tiempos de viaje (Yu-qin, Feng; Jun-qiang, Leng; Zhong-Yu, Xie; Guie, Zhang; Yi, 2013).

La teoría de juegos ayuda a modelar interacciones entre grupos que participan en la toma de decisiones, cuando las acciones individuales determinan un resultado en conjunto. El modelado de sistemas de transporte es tratado como dos modelos de teorías de juegos, la teoría de Nash con enfoque no-cooperativo y la teoría de juegos de Stackelberg y algunos modelos de problemas de transporte que abordan la teoría de juegos como una alternativa de solución con un fuente potencial de solución algorítmica (Fisk, 1984).

El presente artículo tiene como objetivo aplicar la teoría de juegos con el valor de Shapley, para encontrar una repartición equilibrada de los costos de transporte entre los clientes de una empresa distribuidora de abarrotes, a partir del diseño previo de rutas de reparto utilizando el modelo CVRP.

La aplicación práctica se realizó en una empresa del ramo abarrotero con alto rendimiento respecto a los ingresos del promedio de las empresas del mismo giro en la zona norte del estado de Veracruz; se dedica a la distribución de abarrotes a mayoreo y menudeo, posee 22 puntos de distribución a clientes que abarcan un radio de aproximadamente 250 kilómetros. El envío de mercancía se realiza con vehículos de capacidades de 5, 6, 9 y 14 toneladas, en 10 rutas establecidas empíricamente. En trabajos previos se realizaron propuestas para el rediseño de rutas de reparto a partir del modelo *CVPR*, dicho modelo minimiza las distancias recorridas por los vehículos y garantiza que sólo un vehículo visite a cada nodo de demanda buscando mantener la continuidad de las rutas, ya que el modelo exige que si un vehículo entra a un nodo entonces tiene que salir del mismo, además de respetar las capacidades de los vehículos para lograr cubrir la demanda requerida (Baldacci, Toth, & Vigo, 2010).

El presente artículo toma como base los resultados del modelo CVRP para definir cuatro rutas de reparto que serán cubiertas por un vehículo de nueve toneladas de capacidad (Sánchez Galván, Bautista Santos, Mora Castellanos, & Alcaraz Zuñiga, 2015) y se propone una repartición equilibrada de los costos de transporte entre los clientes mediante la obtención del Valor de Shapley, de tal manera que la empresa pueda tener un conocimiento de los costos que implican el desarrollo de la ruta y de esta forma pueda tomar decisiones para transmitir los costos de transporte hacia los clientes de una manera justa y eficiente, aplicándolos en el costo total de venta.

El artículo se estructuró en siete secciones: 1) introducción al tema de estudio, 2) revisión de la literatura consultada que permite conceptualizar el sustento teórico de la investigación realizada, 3) los materiales y métodos que hacen referencia a la metodología y las herramientas científicas utilizadas, 4) los resultados y discusión de los mismos, 5) las conclusiones obtenidas del estudio. Se presentan también una sección para 6) agradecimientos y otra para las 7) referencias bibliográficas.

Revisión de la literatura

Las decisiones y comportamientos de los integrantes de la CS, se analizan a través de modelos matemáticos (Mahdavi Mazdeh & Karamouzian, 2014), asumiendo que la CS está integrada verticalmente y que los socios cooperan plenamente. Partiendo de este contexto, la revisión de la literatura aquí expuesta, se enmarca en tres grandes grupos de aplicaciones relacionadas con la solución a los problemas de transporte, abarcando desde la perspectiva de los métodos clásicos hasta las heurísticas modernas. Se hace especial énfasis en las aplicaciones del ruteo de vehículos con teoría de juegos como un mecanismo de reparto justo, que motiva a los socios a cooperar y adoptar la mejor política de distribución dentro de la CS (Mahdavi Mazdeh & Karamouzian, 2014).

El problema de ruteo de vehículos surge en el campo de la investigación de operaciones como una herramienta que considera aspectos gerenciales, físicos, geográficos e informativos, así como las disciplinas teóricas que afectan a este campo emergente (Eksioglu, Vural, & Reisman, 2009). El problema de ruteo de vehículos (VRP, *Vehicle Routing Problem*) ha tenido considerables avances desde que fue propuesto por primera vez en los años 60s. Los modernos algoritmos se concentran principalmente en el factor tiempo para resolver conjuntos de datos grandes encontrando soluciones cercanas a la óptima (Laporte, Gendreau, Potvin, & Semet, 2000).

El problema de ruteo de vehículos es planteado como un método de asignación que según criterios específicos logran determinar la ruta óptima entre clientes, sin embargo es posible plantear el modelo de ruteo de vehículos como un problema de juegos cooperativos con funciones características, en el cual los costos son asignados para minimizar el máximo descontento entre los jugadores en un juego cooperativo (Göthe-Lundgren, Jörnsten, & Värbrand, 1996). En otras palabras, la teoría de juegos cooperativos proporciona conceptos de solución a partir de los cuales se puede determinar una distribución justa y eficiente de los costos totales relacionados con el transporte (Guajardo & Rönnqvist, 2015).

Los crecientes costos de transporte hacen que sea necesario buscar una solución en la que todos los agentes afectados logren minimizar sus pérdidas. Así, la teoría de juegos cooperativos proporciona conceptos de solución, como lo es el valor de Shapley, que permite realizar una distribución justa y eficiente de los costos.

En años recientes, nuevos enfoques y algoritmos han sido desarrollados a partir de los modelos clásicos del problema de ruteo de vehículos de carácter determinístico, entre ellos se encuentran los métodos estocásticos y variaciones dinámicas (Bertsimas & Simchi-levi, 1996). Estos algoritmos se basan en teorías de análisis que combinan distribuciones probabilísticas con modelado combinatorio y proporcionan soluciones cercanas a la óptima con un profundo entendimiento de cuestiones de incertidumbre en ruteo de vehículos dinámicas. Lo anterior ha permitido extender las aplicaciones del modelo de ruteo a otros contextos; una mayor exposición de los avances en esta área y sus posibles aplicaciones se pueden consultar en Beraldi *et al.* (2015).

Existen algoritmos de optimización bio-inspirados como los algoritmos genéticos, colonia de hormigas, redes neuronales artificiales y enjambre de partículas, que han sido utilizadas para resolver las variantes del problema del agente viajero o problema del ruteo de vehículo. Estos algoritmos han sido utilizados en conjunto con técnicas heurísticas para encontrar un mínimo local y también reducir el tiempo computacional (Kulkarni & Tai, 2010).

La teoría de juegos cooperativos es una herramienta matemática que relaciona las competencias, la cooperación, los conflictos, las negociaciones de reparto de beneficios y la distribución de costos, entre otros (Rosenthal, 2017; Sánchez-Pérez, n.d.). En los juegos cooperativos, los jugadores pueden negociar contratos vinculados que les permitan adoptar estrategias conjuntas. Los juegos cooperativos son una práctica común para competir en mercados, donde las barreras de entrada son difíciles de romper, ya sea por costos altos, exigencias gubernamentales, competencia establecida con alta receptividad en el medio, monopolio de insumos, etc. Antes de establecer una coalición es necesario identificar cuáles serán los beneficios posibles que obtendría la empresa por sí sola o estableciendo alianzas con otras, y de este modo, poder establecer cuál será el resultado posible del juego en ambos casos. Todo trato o decisión que se tome implica un sacrificio, de ahí la necesidad de establecer unas reglas de juego claras, de modo que todos los que intervengan en el juego hagan alianza y así puedan definir una ruta de transporte más conveniente para su organización (Restrepo Carvajal, 2009).

El enfoque cooperativo de teoría del juego ha sido aplicado al problema de la distribución de una red social, donde un grupo de viajeros conectados a través de la misma, forman coaliciones y organizan viajes a corto plazo. Dos aspectos fundamentales son considerados en este problema: el primero se centra en el problema de la optimización para la formación de coaliciones de viajeros que minimizan el costo de viaje del sistema en su conjunto; para ello, se modela como una formación de coalición restringida por grafos, donde el conjunto de coaliciones viables está restringido por la red social; este enfoque permite a los usuarios especificar las preferencias espaciales y temporales para los viajes; el segundo aspecto aborda la asignación de pagos de la distribución social, calculando pagos estables para sistemas con miles de agentes. Se realiza una evaluación empírica sistemática que utiliza conjuntos de datos del mundo real (como GeoLife y Twitter); se calculan soluciones óptimas para sistemas de tamaño mediano (100 agentes), y soluciones de alta calidad para sistemas muy grandes (hasta 2000 agentes). Los resultados muestran que el enfoque propuesto mejora el bienestar social (es decir, reduce los costos de viaje) en un 36.22% con respecto al escenario sin compartimiento de viajes. Por último, el método de asignación de pagos calcula los pagos estables para 2000 agentes en menos de una hora (Bistaffa, Farinelli, Chalkiadakis, & Ramchurn, 2017).

La estructura combinatoria de los juegos, relacionada con la determinación del espacio de estrategias factible para cada jugador, eleva la complejidad de los mismos al momento de definir un concepto de solución. En el caso de los juegos no-cooperativos, el equilibrio de Nash es el concepto de solución clásico para resolver situaciones de conflicto en donde cada agente posee un objetivo específico. Así, el equilibrio de Nash es un perfil de estrategias bajo las que ningún jugador tiene incentivos a cambiar su comportamiento; este concepto ha permitido el análisis de numerosas situaciones, no sólo en el aspecto económico. Por ejemplo, se puede estudiar el problema de ruteo desde una perspectiva egoísta sobre una red consistente de enlaces paralelos, que asume *n* usuarios, donde cada uno proyecta una estrategia mixta, la cual es representada con la probabilidad de distribución sobre los otros enlaces para controlar el ruteo de su propio tráfico asignado. En el equilibrio de Nash cada usuario envía egoístamente su tráfico a aquellos enlacen que minimizan el costo social esperado (Fotakis, Kontogiannis, & Koutsoupias, Elias; Mavronicolas, Marios; Spirakis, 2002).

Los sistemas complejos generalmente tienen muchos componentes, no es posible entender cada sistema con sólo conocer los componentes individuales y sus comportamientos, esto es debido a que cualquier movimiento de un componente afecta las decisiones de los demás componentes y así sucesivamente. En un sistema complejo el número de componentes crece linealmente y la complejidad crece exponencialmente, haciendo que el sistema entero sea visto como una colección de subsistemas o un Sistema Multi-Agente (SMA). El mayor reto es hacer que los agentes trabajen de manera coordinada, optimizando sus utilidades y contribuyendo a la optimización de un objetivo global. Se demuestra un enfoque de optimización con la función Rosenbrok con la que parejas de variables son vistas como agentes autónomos trabajando colectivamente para lograr la función óptima. Para demostrarlo se realizaron dos casos del *Multi-Depot Multiple Traveling Salesman Problem* con 3 almacenes, 3 vehículos y 15 nodos, los vehículos fueron considerados como agentes autónomos buscando minimizar la ruta más corta (Kulkarni & Tai, 2010).

Se investiga si los juegos de transporte son herramientas adecuadas para la toma de decisiones mediante un análisis comparativo de juegos que describe el problema de transporte, cada análisis es utilizado para identificar oportunidades y riesgos envueltos en el desarrollo matemático de juegos no cooperativos. Las situaciones modeladas tienen diferentes intereses en los que se necesita decidir cómo será el comportamiento. El nivel de beneficio ganado por cada participante depende no sólo de sus propias acciones, sino también de las elecciones de los demás participantes. Definir un juego requiere la identificación de los jugadores, sus alternativas de estrategias y sus objetivos. Formular el problema como un juego vale la pena si la solución conduce a nuevas ideas sobre el problema analizado. Se clasifica a los juegos en dos grupos, uno que distingue la categorización entre concepto de juegos e instrumento de juegos.

La teoría de juegos también ha sido utilizada como un modelo simplificado para un programa de compartimiento de coches (juego) para evaluar cómo es el desempeño de sus participantes (jugadores) que presentan diferentes comportamientos (estrategias), ya sean de cooperación o deserción. También se evalúan las estrategias puras y mixtas de los jugadores y se discute cómo y cuándo se consigue el equilibrio de Nash, mediante el análisis evolutivo de estrategias estables en un sistema de transporte en grandes ciudades (Hernández, Cárdenas, & Muñoz, 2017). Particularmente, el problema de envío de embarques y la distribución de materiales peligrosos, con probabilidades de incidentes en enlaces desconocidos, se puede formular como un juego no cooperativo. El problema se formula como un problema maxmin (no cooperativo) basado en la ruta sobre la red expandida espacio-tiempo (Szeto, 2013).

Se ha introducido un procedimiento nuevo para el diseño óptimo de rutas en tráfico dinámico a través de un análisis de juegos ficticios con intereses idénticos, donde los vehículos son tratados como jugadores con una recompensa de pago en común por el tiempo de viaje promedio experimentado en la red. Se demuestra que un enfoque descentralizado de juegos repetidos llevan a converger en busca de encontrar un enrutamiento óptimo (Garcia, Reaume, & Smith, 2000). En otras palabras, a pesar de la idoneidad del Equilibrio de Nash como concepto de solución eficiente, los autores anteriores demuestran que en problemas de ruteo los agentes tienden a tener un carácter cooperativo. Es decir, la evidencia empírica demuestra que estos equilibrios no caen en los marcos estándares de los juegos de enrutamiento no cooperativos y que la singularidad de los equilibrios puede fallar incluso en el caso de la topología simple de enlaces paralelos (Altman, Rachid El, & Abramov, 2004).

El envío de materiales peligrosos presenta considerable atención debido a las consecuencias que puede traer consigo la manipulación de los materiales, como lo son los problemas de contaminación ambiental, daños económicos, lesiones y muertes, que son sumamente indeseables. Puesto que la evidencia empírica sugiere que los agentes cooperan en este tipo de problemas, el presente artículo utiliza el enfoque de la Teoría de Juegos Cooperativos para estudiar la determinación de costos en un problema de ruteo.

Materiales y Métodos

El desarrollo del presente trabajo se llevó a cabo en cinco etapas: (1) realización de una revisión de la literatura acorde a la aplicación del modelo CVRP (ruteo de vehículos con capacidad) y su relación con la teoría de juegos; en particular en conceptos y métodos de juegos cooperativos; (2) recopilación de la información proporcionada por la distribuidora de abarrotes, y la utilización de hojas de cálculo electrónicas para el procesamiento de los datos; la información concerniente a la distancia entre nodos, la demanda y las rutas originales fueron obtenidas de Sánchez *et al*. (2015), y están disponibles en https://drive.google.com/file/d/0B6db0oTJB5NhUTM4VUlqUm1ObXc/view?usp=sharing; (3) selección de una instancia a analizar con teoría de juegos a partir de las rutas previas obtenidas con el modelo CVRP; (4) diseño del juego cooperativo y realizar el cálculo de valor de Shapley (Shapley, 1952) utilizando un software de resolución de modelos de optimización; (5) redacción de resultados y conclusiones.

Las rutas originales de distribución se muestran en la Tabla 1, las mismas fueron diseñadas de forma empírica por los agentes de ventas de la empresa y se recorren 824.21 kilómetros para una cobertura del 100% de sus clientes. Del centro de distribución determinado por la letra A se visitan a los clientes de C1 a C22; por ejemplo, para la ruta 6 se sale del centro de distribución y se visita a los clientes C5 y C6 (ubicados en Chicontepec e Ixhuatlán de Madero), regresando al centro de distribución.

Tabla 1. Rutas originales de la distribuidora de abarrotes

Rutas diseñadas empíricamente		
Ruta	***Nodos de la ruta***	***Km***
1	A→C1→A	27.5
2	A→C8→A	89.0
3	A→C12→C13→C20→A	186.1
4	A→C11→C16→C17→ C18→A	278.6
5	A→C10→C14→C15→ C19→A	266.8
6	A→C5→C6→A	128.02
7	A→C7→C9→A	223.0
8	A→C4→C21→C22→A	140.2
9	A→C3→A	24.51
10	A→C2→A	59.1
Total de kilómetros recorridos: 824.21		

(Sánchez Galván *et al.*, 2015)

En la Tabla 2 se muestra el diseño de rutas de la instancia seleccionada a partir de la aplicación del modelo CVRP para un vehículo de nueve toneladas de capacidad, con sus respectivos nodos y demandas. Se muestran las cuatro rutas obtenidas al ejecutar el modelo y cómo se visitarían a cada uno de los clientes.

Tabla 2. Rutas obtenidas con el modelo CVRP

Instancia 5: Vehículo de 9 toneladas de capacidad		
Ruta	***Nodos de la ruta***	***km***
1	A→C1→C2→C8→A	112.90
2	A→C6→C5→C9→C7→A	207.80
3	A→C10→C11→C12→C13→C20→C18→C17→ C16→C15→C14→C19→A	193.60
4	A→C3→C4→C21→C22→A	77.71
Kilómetros totales recorridos 592.01 (Disminución del 28.17% en kilómetros recorridos)		

(Sánchez Galván *et al.*, 2015)

Una vez seleccionadas las rutas, se diseña el juego cooperativo y se aplica la modelación matemática para calcular el valor de Shapley, para lo cual es necesario conocer las distancias entre los nodos. Es importante resaltar que el juego cooperativo requiere de los siguientes dos supuestos: el primero es que la empresa sea capaz de cubrir la demanda de todos los clientes y el segundo, que los clientes estén dispuestos a pagar por los costos de transporte. Por consiguiente, el estudio de caso analiza una situación en la que los jugadores involucrados (clientes y centros de distribución) están dispuestos a cooperar para cubrir los costos relacionados con el transporte. La ecuación 1 representa el valor de Shapley asociado a cada jugador *i*.

$$Sh_i(N,c) = \sum_{S \subset \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}\,(c(S \cup \{i\}) - c(S)) \qquad \dots(1)$$

Donde:

- N es el conjunto de jugadores, el cual se asume con cardinalidad n. En el presente estudio de caso, los jugadores son los clientes del centro de distribución y son representados por una ciudad o nodo. Por ejemplo:

$$N = \{C1, C2, C8, A\},\ \mathrm{n} = 4$$

- S es cualquier subconjunto de $N - \{i\}$, es decir si $i = C1$, $N - \{i\} = \{\,C2,\ C8,\ A\}$. En términos de un juego cooperativo, el subconjunto S representa una coalición de agentes.
- Se obtienen $2^n - 1$ subconjuntos, para este estudio de caso habría un total de $2^4 - 1$, equivalente a 15 subconjuntos.

La expresión $c(S \cup \{i\}) - c(S)$ representa el costo marginal del jugador *i* con respecto a la coalición S. Es decir, es la cantidad en qué se incrementa el costo de transporte relacionado con la coalición S cuando el jugador *i* se incorpora a esta última.

El objetivo del valor de Shapley es determinar el costo que debe cubrir cada jugador en una situación donde los participantes están dispuestos a cooperar. Para que la cooperación no se rompa, la asignación de costos debe ser de tal forma que los jugadores no tengan incentivos a dejar de cooperar con todos los demás. Es decir, la asignación debe ser justa, ya que nadie debe de pagar menos (o más) de lo que les corresponde a sus actividades; y eficiente, una vez hecha la asignación de costos los jugadores no pueden mejorar su situación a menos que perjudiquen a alguien más. Por lo tanto, el valor de Shapley de cada jugador es el promedio ponderado de los costos marginales con respecto a cada una de las coaliciones posibles en las que puede participar. Lo anterior con la finalidad de evitar que un conjunto de agentes decida distribuirse los costos entre ellos, en lugar de cooperar con el resto de los agentes (Shapley, 1952).

Nótese que para aplicar el valor de Shapley, se debe de tener toda la información relacionada con la función de costos del problema. Puesto que los costos varían de acuerdo con el tipo de coalición que se analice, se eleva la complejidad computacional cada vez que se determina el costo en el que incurre cada coalición; es decir, el costo asociado a $2^n -1$ coaliciones distintas.

Retomando el problema de ruteo y su relación con la teoría de juegos, el objetivo es mostrar la asignación de costos de transporte entre los agentes que integran una ruta. Es decir, $2^n - 1$ representa a las coaliciones entre los n clientes que integran una ruta fija. Si se quiere determinar el costo para cada cliente en cada ruta posible, el número de escenarios se incrementa a $(2^n - 1)n!$, donde $n!$ determina el número de rutas posibles que se pueden obtener con sólo n clientes.

Derivado de lo anterior, el presente estudio de caso se enfoca en analizar la asignación de costos en rutas con a lo más cuatro nodos (clientes) y un centro de distribución. Entonces, se encuentra que el juego se conforma como se muestra en las Tablas 3, 4 y 5, para las rutas 1, 2 y 4 respectivamente. El costo de recorrido por ruta se calcula multiplicando la distancia en kilómetros por el costo de la gasolina y se divide entre el rendimiento del vehículo que en este caso es de 3.5 kilómetros por litro.

Tabla 3. Diseño del juego para la Ruta 1

Coaliciones Ruta 1	Kilómetros recorridos	Costo marginal del destino (i)
C1	27.5	$ 124.14
C2	59.1	$ 266.79
C8	89	$ 401.77
A	0	$ -
C1,C2	34	$ 153.49
C1,C8	67.3	$ 303.81
C1,A	27.5	$ 124.14
C2,C8	51.41	$ 232.08
C2,A	59.1	$ 266.79
C8,A	89	$ 401.77
C1,C2,C8	85.41	$ 385.57
C1,C2,A	34	$ 153.49
C1,C8,A	67.3	$ 303.81
C2,C8,A	51.41	$ 232.08
C1,C2,C8,A	85.41	$ 385.57

Tabla 4. Diseño del juego para la Ruta 2

Coaliciones Ruta 2	**Kilómetros recorridos**	**Costo marginal del destino (i)**
C6	49.1	$ 322.77
C5	37	$ 255.96
C9	53.4	$ 514.63
C7	54.3	$ 492.06
A	0	$ -
C6, C5	63.5	$ 67.71
C6, C9	70.2	$ 329.54
C6, C7	85.7	$ 375.59
C6, A	49.1	$ 322.77
C5, C9	55.2	$ 261.83
C5, C7	170.7	$ 307.87
C5, A	37	$ 255.96
C9, C7	112	$ 285.75
C9, A	53.4	$ 514.63
C7, A	54.3	$ 492.06
C6, C5, C9	116.9	$ 582.34
C6, C5, C7	117.8	$ 559.77
C6, C5, A	63.5	$ 67.71
C6, C9, C7	124.5	$ 821.60
C6, C9, A	70.2	$ 329.54
C6, C7, A	85.7	$ 375.59
C5, C9, C7	109.5	$ 753.89
C5, C9, A	55.2	$ 261.83
C5, C7, A	170.7	$ 307.87
C9, C7, A	112	$ 285.75
C6, C5, C9, C7	171.2	$ 1,074.40
C6, C5, C9, A	116.9	$ 582.34
C6, C5, C7, A	117.8	$ 559.77
C6, C9, C7, A	124.5	$ 821.60
C5, C9, C7, A	109.5	$ 753.89
C6, C5, C9, C7, A	171.2	$ 1,074.40

Tabla 5. Diseño del juego para la Ruta 4

Coaliciones Ruta 4	**Kilómetros recorridos**	**Costo marginal del destino (i)**
C3	24.51	$ 110.65
C4	33.5	$ 151.23
C21	63.7	$ 287.56
C22	60.3	$ 272.21
A		$ -
C3, C4	13.9	$ 62.75
C3, C21	23.4	$ 105.63
C3, C22	47.7	$ 215.33
C3, A	24.51	$ 110.65
C4, C21	13.3	$ 60.04
C4, C22	37.6	$ 169.74
C4, A	33.5	$ 151.23
C21, C22	26	$ 117.37
C21, A	63.7	$ 287.56
C22, A	60.3	$ 272.21
C3, C4, C21	77.6	$ 350.31
C3, C4, C22	74.2	$ 334.96
C3, C4, A	13.9	$ 62.75
C3, C21, C22	83.7	$ 377.85
C3, C21, A	23.4	$ 105.63
C3, C22, A	47.7	$ 215.33
C4, C21, C22	73.6	$ 332.25
C4, C21, A	13.3	$ 60.04
C4, C22, A	37.6	$ 169.74
C21, C22, A	26	$ 117.37
C3, C4, C21, C22	137.9	$ 622.52
C3, C4, C21, A	77.6	$ 350.31
C3, C4, C22, A	74.2	$ 334.96
C3, C21, C22, A	83.7	$ 377.85
C4, C21, C22, A	73.6	$ 332.25
C3, C4, C21, C22, A	137.9	$ 622.52

Para la obtención del valor de Shapley, se toma en consideración que cuando éste es aplicado a un problema de ruteo, cada uno de los subconjuntos de nodos representa una ruta diferente; esto es importante de considerar cuando se modela en el software de optimización Lingo. El código utilizado se muestra la figura 1, cabe mencionar que en la programación del modelo en el software Lingo, se requiere especificar el nodo que se desempeña como depósito.

```
SETS:
NODO: costo1, ValorShapley;
r2(NODO, NODO)| &1 #lt# &2: costo2;
r3(r2, NODO)  | &2 #lt# &3: costo3;
r4(r3, NODO)  | &3 #lt# &4: costo4;
ENDSETS
DATA:
NODO = C1 C2 C8 A;
costo1 =   124.14     266.79 401.77 0;
costo2 =   153.49 303.81 124.14 232.08 266.79 401.77;
costo3 =   385.57 153.49 303.81 232.08;
costo4 =   385.57;
ENDDATA
@FOR(NODO(i):
 ValorShapley(i) = (
  costo1(i)*6 +
  (@SUM(r2(i1,i2)| i2 #eq# i:
        costo2(i1,i) - costo1(i1)) +
    @SUM(r2(i1,i2)| i1 #eq# i:
        costo2(i,i2) - costo1(i2)))*2 +
   (@SUM(r3(i1,i2,i3)| i3 #eq# i:
        costo3(i1,i2,i ) - costo2(i1,i2)) +
   @SUM(r3(i1,i2,i3)| i2 #eq# i:
        costo3(i1, i,i3) - costo2(i1,i3)) +
   @SUM(r3(i1,i2,i3)| i1 #eq# i:
        costo3(i, i2,i3) - costo2(i2,i3)))*2 +
   (@SUM(r4(i1,i2,i3,i4)| i4 #eq# i:
       costo4(i1,i2,i3,i ) - costo3(i1,i2,i3)) +
    @SUM(r4(i1,i2,i3,i4)| i3 #eq# i:
       costo4(i1,i2,i,i4 ) - costo3(i1,i2,i4)) +
    @SUM(r4(i1,i2,i3,i4)| i2 #eq# i: costo4(i1,i,i3,i4 ) - costo3(i1,i3,i4)) +
    @SUM(r4(i1,i2,i3,i4)| i1 #eq# i: costo4(i,i2,i3,i4 ) - costo3(i2,i3,i4)))*6)/24;
);
```

Figura 1. Código Lingo. Valor Shapley.

Resultados

Para la ruta 1, el cliente 1 (Tempoal) deberá pagar $57.33 pesos por concepto de costo de transporte; el cliente 2 (El Higo) deberá pagar $92.79 pesos y el cliente 8 (Pánuco) deberá pagar $235.44 pesos por costos de transportación.

Para la ruta 2, el cliente 6 (Benito Juárez) deberá pagar $74.22 pesos; el cliente 5 (Chicontepec) deberá pagar $49.50, el cliente 9 (Ixhuatlán) 126.20 pesos y el cliente 7 (Zontecomatlán) deberá pagar $127.07 pesos por costos de transporte.

Para la ruta 4, los clientes 3, 4, 21 y 22 correspondientes a las ciudades de Platón Sánchez, Chalma, Huejutla y San Felipe Orizatlán deberán pagar por concepto de transporte la cantidad de $46.37, $39.70, $59.98 y $71.02 respectivamente, para mantener el equilibrio en dichos costos.

Cabe mencionar que la ruta 3 no pudo ser analizada debido a que posee 12 nodos-clientes, lo que significa un total de 4095 ($2^{12} - 1$) subconjuntos, con 12 factorial de posibles coaliciones (479,001,600), y la licencia que se utilizó del software lingo no permite ejecutar dicha instancia; por ello se propone como trabajos de investigación futuros el diseño de una heurística y el uso de cómputo distribuido para su resolución con el método de Shapley o bien analizar la posibilidad de segmentar la ruta colocando un centro de distribución.

Los resultados obtenidos de la aplicación del modelo con el código en Lingo se muestran en las figuras 2, 3 y 4. La Tabla 6 detalla los costos que cada cliente debe de pagar para mantener en equilibrio los costos de transporte, así como el costo equivalente por tonelada transportada.

```
Feasible solution found.
Total solver iterations:                                   0

                                      Variable           Value
                                   COSTO1( C1)        124.1400
                                   COSTO1( C2)        266.7900
                                   COSTO1( C8)        401.7700
                                    COSTO1( A)        0.000000
                             VALORSHAPLEY( C1)        57.33333
                             VALORSHAPLEY( C2)        92.79333
                             VALORSHAPLEY( C8)        235.4433
                              VALORSHAPLEY( A)        0.000000
                               COSTO2( C1, C2)        153.4900
                               COSTO2( C1, C8)        303.8100
                                COSTO2( C1, A)        124.1400
                               COSTO2( C2, C8)        232.0800
                                COSTO2( C2, A)        266.7900
                                COSTO2( C8, A)        401.7700
                           COSTO3( C1, C2, C8)        385.5700
                            COSTO3( C1, C2, A)        153.4900
                            COSTO3( C1, C8, A)        303.8100
                            COSTO3( C2, C8, A)        232.0800
                        COSTO4( C1, C2, C8, A)        385.5700
```

Figura 2. Resultado en Lingo para la ruta 1.

```
Feasible solution found.
Total solver iterations:                                   0

                                      Variable           Value
                                   COSTO1( C6)        322.7700
                                   COSTO1( C5)        255.9600
                                   COSTO1( C9)        514.6300
                                   COSTO1( C7)        492.0600
                                    COSTO1( A)        0.000000
                             VALORSHAPLEY( C6)        74.22167
                             VALORSHAPLEY( C5)        49.49900
                             VALORSHAPLEY( C9)        126.2047
                             VALORSHAPLEY( C7)        127.0777
                              VALORSHAPLEY( A)        0.000000
                               COSTO2( C6, C5)        67.71000
                               COSTO2( C6, C9)        329.5400
                               COSTO2( C6, C7)        375.5900
                                COSTO2( C6, A)        322.7700
                               COSTO2( C5, C9)        261.8300
                               COSTO2( C5, C7)        307.8700
                                COSTO2( C5, A)        255.9600
                               COSTO2( C9, C7)        285.7500
                                COSTO2( C9, A)        514.6300
                                COSTO2( C7, A)        492.0600
                           COSTO3( C6, C5, C9)        582.3400
                           COSTO3( C6, C5, C7)        559.7700
                            COSTO3( C6, C5, A)        67.71000
                           COSTO3( C6, C9, C7)        821.6000
                            COSTO3( C6, C9, A)        329.5400
                            COSTO3( C6, C7, A)        375.5900
                           COSTO3( C5, C9, C7)        753.8900
                            COSTO3( C5, C9, A)        261.8300
                            COSTO3( C5, C7, A)        307.8700
                            COSTO3( C9, C7, A)        285.7500
                       COSTO4( C6, C5, C9, C7)        1074.400
                        COSTO4( C6, C5, C9, A)        582.3400
                        COSTO4( C6, C5, C7, A)        559.7700
                        COSTO4( C6, C9, C7, A)        821.6000
                        COSTO4( C5, C9, C7, A)        753.8900
                    COSTO5( C6, C5, C9, C7, A)        1074.400
```

Figura 3. Resultado Valor Shapley para la ruta 2

```
Feasible solution found.
Total solver iterations:                              0

                                   Variable           Value
                                COSTO1( C3)        110.6500
                                COSTO1( C4)        151.2300
                               COSTO1( C21)        287.5600
                               COSTO1( C22)        272.2100
                                 COSTO1( A)        0.000000
                          VALORSHAPLEY( C3)        46.36600
                          VALORSHAPLEY( C4)        39.70167
                         VALORSHAPLEY( C21)        59.97800
                         VALORSHAPLEY( C22)        71.02300
                           VALORSHAPLEY( A)        0.000000
                            COSTO2( C3, C4)        62.75000
                           COSTO2( C3, C21)        105.6300
                           COSTO2( C3, C22)        215.3300
                             COSTO2( C3, A)        110.6500
                           COSTO2( C4, C21)        60.04000
                           COSTO2( C4, C22)        169.7400
                             COSTO2( C4, A)        151.2300
                          COSTO2( C21, C22)        117.3700
                            COSTO2( C21, A)        287.5600
                            COSTO2( C22, A)        272.2100
                      COSTO3( C3, C4, C21)        350.3100
                      COSTO3( C3, C4, C22)        334.9600
                        COSTO3( C3, C4, A)        62.75000
                     COSTO3( C3, C21, C22)        377.8500
                       COSTO3( C3, C21, A)        105.6300
                       COSTO3( C3, C22, A)        215.3300
                     COSTO3( C4, C21, C22)        332.2500
                       COSTO3( C4, C21, A)        60.04000
                       COSTO3( C4, C22, A)        169.7400
                      COSTO3( C21, C22, A)        117.3700
                 COSTO4( C3, C4, C21, C22)        622.5200
                   COSTO4( C3, C4, C21, A)        350.3100
                   COSTO4( C3, C4, C22, A)        334.9600
                  COSTO4( C3, C21, C22, A)        377.8500
                  COSTO4( C4, C21, C22, A)        332.2500
              COSTO5( C3, C4, C21, C22, A)        622.5200
```

Figura 4. Valor Shapley para la ruta 4.

Tabla 6. Costos de transporte equilibrados

Nodo	Cliente	Costo Equilibrado	Demanda (ton)	Costo por tonelada
C1	Tempoal	$57.33	1500	$0.038
C2	El Higo	$92.79	1000	$0.093
C8	Pánuco	$235.44	1000	$0.235
	Total Ruta 1:	**$385.56**		
C6	Benito Juárez	$74.22	1000	$0.074
C5	Chicontepec	$49.50	1000	$0.049
C9	Ixhuatlán	$126.20	1000	$0.126
C7	Zontecomatlán	$127.07	1000	$0.127

	Total Ruta 2:	**$376.99**		
C3	Platón S.	$46.37	1500	$0.030
C4	Chalma	$39.70	1000	$0.040
C21	Huejutla	$59.98	1000	$0.060
C22	San Felipe O.	$71.02	600	$0.011
	Total Ruta 4:	**$217.07**		

En la Tabla 7 se pueden apreciar los ahorros obtenidos por la empresa, tanto al aplicar el modelo CVRP, como en el costo equilibrado (valor de Shapley) obtenido por el modelo de teoría de juegos. Se puede apreciar que para la ruta 1 se tiene un ahorro del 24.3% con relación al valor obtenido con el modelo CVRP. Se observa también un decremento en los costos del 59.8% y 38.1%, para las rutas 2 y 4 respectivamente. La ruta número 3 no pudo ser evaluada debido a la falta de capacidad del software utilizado y del equipo de cómputo. El porcentaje de ahorro en promedio de las tres rutas analizadas es de 40%.

Tabla 7. Análisis de costos obtenidos

	Kilómetros		**Costos por kilómetro recorrido**			**% ahorro**	
Rutas	**Rutas empíricas**	**Rutas CVRP**	**Rutas empíricas**	**CVRP**	**Valor Shapley**	**CVRP Vs Rutas empíricas**	**Costo equilibrado Vs Costo CVRP**
Ruta 1	175.6	112.9	$ 792.71	$ 509.66	$ 385.56	51.4%	24.3%
Ruta 2	351.0	207.8	$ 1,584.60	$ 938.07	$ 376.99	76.2%	59.8%
Ruta 3	132.9	193.6	$ 599.86	$ 873.97	--	--	--
Ruta 4	164.71	77.71	$ 743.55	$ 350.81	$217.07	70.8%	38.1%

Conclusiones

La teoría de juegos ha sido utilizada en una amplia gama de intereses, el concepto no sólo se basa en conflicto y combate, también puede ayudar a cooperar ya que al jugar también genera beneficios en todas las partes involucradas. La teoría de juegos se enfoca en saber que hacer teniendo en cuenta lo que pensamos que harán los demás. Los juegos se pueden resolver apoyándose en diversos métodos matemáticos, en este caso específico se utilizó el método de Shapley.

Haciendo referencia a la pregunta de investigación planteada, se concluye que la aplicación de la Teoría de Juegos en problemas de ruteo, en específico el método valor de Shapley, es un gran complemento para la metodología CVRP, al proporcionar información suficiente y justa a la toma de decisiones de la organización. Se confirma que al optimizar las rutas de envío a diferentes clientes, el conocimiento de los costos de transportación generados por las distancias recorridas, así como otros factores como es el costo de combustibles, el tipo vehículo, su capacidad de carga y rendimiento, son variables importantes a considerar para realizar una aplicación adecuada del método matemático.

El valor Shapley aplicado al diseño de rutas de la distribuidora de abarrotes, permitió un ahorro cercano al 40% que se suma al porcentaje de ahorro ya proporcionado a la empresa al aplicar el modelo CVRP en un trabajo previo.

Por lo anterior, el valor de Shapley es una solución adecuada para una situación donde el centro de distribución tiene que transportar producto a cada uno de sus clientes. Los resultados obtenidos son de gran impacto para controlar y manejar de mejor forma los recursos para la operación diaria de la distribuidora de productos abarroteros. De manera específica, el enfoque de teoría de juegos contribuye a determinar una distribución justa de los costos de transporte en una situación donde los agentes pueden cooperar entre ellos.

En el presente trabajo, la asignación de costos mediante el valor de Shapley se realizó sólo para rutas con a lo más cuatro clientes y un centro de distribución. Lo anterior debido a que el cálculo de la función de costos se hace cada vez más complejo conforme se incrementa el número de clientes en cada ruta. Es por ello que un trabajo futuro se buscará implementar cómputo distribuido para minimizar los tiempos de procesamiento y poder analizar instancias con un mayor número de clientes.

Agradecimientos

Se agradece al Instituto Tecnológico Superior de Tantoyuca, a la Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla y a la empresa Limón-Almacenes por todas las facilidades otorgadas para la realización del presente proyecto.

Referencias

Altman, E., Rachid El, A., & Abramov, V. (2004). Non-cooperative routing in loss networks. *Performance Evaluation*, *49*(2002), 257–272.

Baldacci, R., Toth, P., & Vigo, D. (2010). Exact algorithms for routing problems under vehicle capacity constraints. *Annuals of Operations Research*, *175*(1), 213–245. https://doi.org/10.1007/s10479-009-0650-0

Bell, M. G. . (2000). A game theory approach to measuring the performance reliability of transport networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, *34*(6), 533–545. https://doi.org/10.1016/S0191-2615(99)00042-9

Bell, M. G. H. (2004). Games , Heuristics , and Risk Averseness in Vehicle Routing Problems, (March), 37–41.

Bertsimas, D. J., & Simchi-levi, D. (1996). A New Generation of Vehicle Routing Research : Robust Algorithms , Addressing Uncertainty, (August 2015).

Bistaffa, F., Farinelli, A., Chalkiadakis, G., & Ramchurn, S. D. (2017). A cooperative game-theoretic approach to the social ridesharing problem. *Elsevier*. *Artificial Intelligence*, *246*, 86–117. https://doi.org/10.1016/j.artint.2017.02.004

Boweson, D., Closs, D., Cooper, M. (2007). *Administración y Logística en la cadena de suministros*. México: Mc Graw Hill Interamericana.

Chopra, S; Meindl, P. (2008). *Administración de la cadena de suministro: Estrategia, planeación y operación*. México: Pearson Educación.

Eksioglu, B., Vural, A. V., & Reisman, A. (2009). The vehicle routing problem: A taxonomic review. *Computers and Industrial Engineering*, *57*(4), 1472–1483. https://doi.org/10.1016/j.cie.2009.05.009

Fisk, C. S. (1984). Game theory and transportation systems modelling. *Transportation Research Part B: Methodological*, *18*(4–5), 301–313. https://doi.org/10.1016/0191-2615(84)90013-4

Fotakis, D., Kontogiannis, S., & Koutsoupias, Elias; Mavronicolas, Marios; Spirakis, P. (2002). The Structure and Complexity of Nash Equilibria for a Selfish Routing Game. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, *14186*, 123–134.

García, A. (2009). La estructura lógica de la teoría de juegos. *Everyday Life and Games in the Civic Formation of Children. (English)*, *41*(122), 3–27. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=35955700&lang=es&site=ehost-live

Garcia, A., Reaume, D., & Smith, R. L. (2000). Fictitious play for ® nding system optimal routings in dynamic tra • c networks q. *Transportation Research Part B*, *34*, 147–156.

Göthe-Lundgren, M., Jörnsten, K., & Värbrand, P. (1996). On the nucleolus of the basic vehicle. *Mathematical Programming*, *72*, 83–100.

Guajardo, M., & Rönnqvist, M. (2015). A review on cost allocation methods in collaborative transportation. *International Transaction in Operational Research*, *23*, 371–392. https://doi.org/10.1111/itor.12205

Hernández, R., Cárdenas, C., & Muñoz, D. (2017). Game theory applied to transportation systems in Smart Cities: analysis of evolutionary stable strategies in a generic car pooling system. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*. https://doi.org/10.1007/s12008-017-0373-4

Hillier, Frederick S.; Lieberman, G. (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones* (Novena). México: Mc Graw Hill.

Hollander, Y., & Prashker, J. N. (2006). The applicability of non-cooperative game theory in transport analysis. *Transportation*, 481–496. https://doi.org/10.1007/s11116-006-0009-1

Kulkarni, A. J., & Tai, K. (2010). Probability Collectives : A multi-agent approach for solving combinatorial optimization problems. *Applied Soft Computing Journal*, *10*(3), 759–771. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2009.09.006

Laporte, G., Gendreau, M., Potvin, J.-Y., & Semet, F. (2000). Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem. *International Transactions in Operational Research*, *7*, 285–300. https://doi.org/10.1111/j.1475-3995.2000.tb00200.x

Mahdavi Mazdeh, M., & Karamouzian, A. (2014). Evaluating strategic issues in supply chain scheduling using game theory. *International Journal of Production Research*, *52*(23), 7100–7113. https://doi.org/10.1080/00207543.2014.937880

Restrepo Carvajal, C. A. (2009). Aproximación a la teoría de juegos. *Revista Ciencias Estratégicas*, *17*(22), 157–175.

Ríos Mercado, R. (2015). Revista Electrónica Nova Scientia Mejorando la planificación de sistemas territoriales con optimización metaheurística Improving territory design planning through metaheuristic optimization. *Nova Scientia. Revista de Investigación de La*

Universidad de La Salle Bajío, *7*(3), 81–95.

Rocha Medina, Linda Bibiana; González La Rota, Elsa Cristina; Orjuela Castro, J. A. (2011). Una Revisión al Estado del Arte del Problema de Ruteo de Vehículos: Evolución Histórica Y Métodos De Solución. *Ingeniería*, *16*(2), 35–55. Retrieved from http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/reving/article/view/3832

Rosenthal, E. C. (2017). A cooperative game approach to cost allocation in a rapid-transit network. *Transportation Research Part B*, *97*, 64–77. https://doi.org/10.1016/j.trb.2016.11.014

Salazar-Aguilar, M. Angélica; Ríos-Mercado, Roger Z.; González-Velarde, José L.; Molina, J. (2012). Multiobjective scatter search for a commercial territory design problem. *Ann Oper Res*, *199*, 343–360. https://doi.org/10.1007/s10479-011-1045-6

Sánchez-Pérez, J. (n.d.). Juegos cooperativos y sus aplicaciones económicas. *Perspectivas. Revista de Análisis de Economía, Comercio Y Negocios Internacionales.*, 59–75.

Sánchez Galván, F., Bautista Santos, H., Mora Castellanos, C., & Alcaraz Zuñiga, C. A. (2015). *Rediseño de rutas en una PyME utilizando el problema de ruteo de vehículos con capacidad Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla*. Puebla, Puebla. Retrieved from https://drive.google.com/file/d/0B6db0oTJB5NhUTM4VUlqUm1ObXc/view?usp=sharing

Shapley, L. S. (1952). A value for n-person games. *Clearing House for Federal Scientific and Technical Information*, *295*, 1–13.

Szeto, W. Y. (2013). Routing and scheduling hazardous material shipments : Nash game approach. *Transportmetrica B: Transport Dynamics*, *1*(February 2015), 237–260. https://doi.org/10.1080/21680566.2013.861330

Yu-qin, Feng; Jun-qiang, Leng; Zhong-Yu, Xie; Guie, Zhang; Yi, H. (2013). Route choice model considering generalized travel cost based on game theory. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1155/2013/464038

Apéndice. Datos y Resultados

Enlace para obtener datos referentes a Clientes, demanda y Tabla de Distancias entre nodos.

https://drive.google.com/file/d/0B6db0oTJB5NhUTM4VUlqUm1ObXc/view?usp=sharing