Praxis Filosófica
ISSN: 0120-4688
revistapraxis@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle
Colombia

de La Pava, Luz Victoria; Gálvez, Edgar Fernando

EL ESTRUCTURALISMO FILOSÓFICO Y LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS: EL DEBATE HELLMAN-AWODEY

Praxis Filosófica, núm. 45, julio-diciembre, 2017, pp. 197-218
Universidad del Valle
Cali, Colombia

EL ESTRUCTURALISMO FILOSÓFICO Y LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS: EL DEBATE HELLMAN-AWODEY

Luz Victoria de La Pava
Edgar Fernando Gálvez
Universidad del Valle - Colombia

Resumen

En el marco de la filosofía de las matemáticas contemporáneas, Hellman y Awodey sostienen un debate acerca del rol de la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) y la Teoría de Categorías (TCat) en la perspectiva de una buena fundamentación estructuralista para las matemáticas. Según Hellman, ni ZF ni TCat constituyen un buen marco fundacional para las matemáticas; sin embargo, su punto central en este debate es que TCat no logra una autonomía, en sentido fuerte, respecto a ZF, y, además, sostiene que la tesis de Awodey, favorable a TCat, es inevitablemente una tesis fundacionalista. Desde la otra orilla, Awodey sostiene que la noción categórica de estructura no es fundacional, pero sí constituye la mejor opción para interpretar las matemáticas de manera integral y articulada. De esta manera, pone en cuestión el ideal fundacionalista conjuntista. El objetivo del presente artículo es poner de relieve los aspectos filosóficos centrales de esta polémica, fijar algunas posiciones en relación con la misma y mostrar algunas consecuencias relevantes para la filosofía de las matemáticas.

Palabras clave*: estructuralismo; estructura; fundamentos de las matemáticas; teoría de categorías; teoría de conjuntos.*

Recibido: 20 de enero de2017. **Aprobado:** 13 de junio de 2017.

Praxis Filosófica Nueva serie, No. 45 Suplemento, julio-diciembre 2017: 197 - 218
DOI: 10.25100/pfilosófica.v0i45S.6146

ISSN (I): 0120-4688 / ISSN (D): 2389-9387

The Philosophical Structuralism and the Foundations of Mathematics: the Hellman-Awodey Controversy

Abstract

In the framework of the philosophy of contemporary mathematics, Hellman and Awodey both hold an interesting discussion on the role of Zermelo-Fraenkel Set Theory and Category Theory in the perspective of a good foundation for mathematics. For Hellman, neither Set Theory nor Category Theory constitutes a good foundational framework for mathematics and, in addition, Categories does not achieve a strong autonomy regarding Sets. Awodey's claim is that Category Theory is a best option in the frame of a new way of understanding what a foundation of mathematics means. In this sense, the aim of this paper is to highlight the philosophical main features of this discussion, to establish some related positions and to show some interesting consequences for the philosophy of mathematics.

Keywords: *structuralism; structure; foundation of mathematics; category theory; set theory.*

Luz Victoria de La Pava: Profesora de la Universidad del Valle. Licenciada en matemáticas y física. Magister en matemáticas por la Universidad del Valle. Sus principales áreas de trabajo y de investigación son: historia de las matemáticas, lógica y fundamentos de las matemáticas.

Dirección electrónica: victoria.delapava@correounivalle.edu.co

Edgar Fernando Gálvez: Profesor de la Universidad del Valle. Licenciado en Filosofía y Magister en Educación Matemática por la Universidad del Valle. Estudios doctorales en filosofía matemática. Sus principales áreas de trabajo y de investigación son: filosofía de la matemática, historia y educación matemática.

Dirección electrónica: edgar.f.galvez@correounivalle.edu.co

EL ESTRUCTURALISMO FILOSÓFICO Y LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS: EL DEBATE HELLMAN-AWODEY

Luz Victoria de La Pava
Edgar Fernando Gálvez
Universidad del Valle - Colombia

Introducción

A partir de los trabajos de Paul Benacerraf, el estructuralismo filosófico ha enriquecido significativamente el debate clásico sobre los fundamentos de las matemáticas. En particular, esta perspectiva ha avivado la discusión sobre la existencia de un sistema conjuntista que provea un marco fundacional adecuado para las matemáticas. El estructuralismo filosófico ofrece opciones y enfoques a favor y en contra de ZF. Por ejemplo, el estructuralismo *ante rem*[1] (ARS) de Stewart Shapiro desarrolla un enfoque filosófico inspirado en ZF. Pero, de otro lado, hay posiciones que se pueden juzgar en franca ruptura con dicho sistema, entre las que se destacan el *Estructuralismo Modal*[2] (Modal-Structural Interpretation, MSI) de Geoffrey Hellman y el *Estructuralismo Categórico* (TCat) de Steve Awodey. Ahora bien, aunque estos dos últimos autores comparten un sesgo "anti-conjuntista", ellos sostienen una polémica filosófica en la que Hellman se declara más distante de TCat que de ZF. Esta discusión tiene su origen, principalmente, en dos artículos: *Structure in Mathematics and Logic: a Categorical Perspective*

---

[1] Esta es la versión realista del estructuralismo filosófico. La idea central es que las estructuras y los lugares en la estructura son objetos matemáticos que existen en un sentido fuerte. Para más detalles ver (Shapiro, 1997).

[2] Ver (Hellman, 1989).

(Awodey, 1996) y *Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?* (Hellman, 2003). El centro del debate gira en torno a las nociones de conjunto, estructura y categoría.

La Teoría de Categorías y la noción de estructura matemática

En su explicación sobre el papel que juega TCat en el marco global de las matemáticas, Awodey, en (Awodey, 1996), fija su atención especialmente en la noción de estructura matemática y en la necesidad de su clarificación filosófica. En el desarrollo de este objetivo, él busca mostrar que la noción categórica de estructura ofrece ventajas sobre la noción de estructura conjuntista, cuyo referente histórico es el trabajo de Bourbaki, en particular (Bourbaki, 1950) y (Bourbaki, 1958). Esta ventaja comparativa que plantea Awodey constituye un punto central en la polémica con Hellman, quien cuestiona el alcance que se le puede atribuir a TCat como marco fundacional de las matemáticas.

TCat es el resultado de un proceso de sofisticación de enfoques y métodos matemáticos implementados en los siglos XIX y XX, en los cuales la noción de estructura emerge como eje de la actividad matemática. La idea que ha inspirado el estructuralismo, desde sus orígenes (con los trabajos de Richard Dedekind) hasta la formulación de TCat propiamente (con los trabajos de Mac Lane), es que la estructura no está determinada por las características específicas de los objetos tomados de manera individual. En el contexto de las matemáticas modernas[3], un enfoque estructuralista se caracteriza por privilegiar los sistemas de morfismos (relaciones que preservan la estructura) y "the idea that mathematical objects are determined by their 'admissible transformations'" (Awodey, 1996, p.210).

Sin duda, el entorno filosófico en el que Awodey desarrolla y presenta TCat justifica preguntarse si él busca postular TCat como un marco fundacional para las matemáticas. Por esta razón él quiere, desde el inicio de su artículo acotar los límites de su discurso filosófico en los siguientes términos:

[3] Entendemos la distinción entre matemáticas modernas y contemporáneas en el sentido histórico de (Zalamea, 2009): Las primeras, de mediados del siglo XIX a mediados del siglo XX, las caracteriza el uso de propiedades estructurales y cualitativas; las segundas, de mediados del siglo XX a nuestros días, el uso sofisticado de propiedades de transferencia, reflexión y pegamento.

> It should be noted that my purpose is not to discuss categorical foundations of mathematics, or to present a comprehensive structuralist philosophy of mathematics based on category theory, but to elaborate a notion of mathematical structure from a categorical perspective, so that discussions of other issues may proceed directly. Although I think that some basic philosophical questions may fruitfully be addressed using this conception of mathematical structure, and that it serves the purposes of philosophical structuralism well, I have limited myself in §1 to only occasional indications in order to preserve the integrity and utility of the essay. The whole of §2 may then serve as a detailed example of the philosophical utility of this notion of structure (Awodey, 1996, p. 210).

De esta manera, Awodey parece renunciar a cualquier pretensión fundacional. Entonces, ¿qué justifica que Hellman tome a Awodey como representante de la concepción fundacionalista de TCat? Para responder de manera apropiada esta pregunta es necesario enfocarse inicialmente en el propósito que Awodey explícitamente se ha trazado: la caracterización, desde TCat, de una noción de estructura, según él, mucho más rica y fecunda que aquella heredada de la tradición bourbakista.

Según Awodey, la filosofía de las matemáticas se alimentó por mucho tiempo del suministro que proveía la Teoría de Modelos. En efecto, esta teoría fue por mucho tiempo la fuente de suministro para el estructuralismo filosófico, en la medida en que ella provee una noción de estructura bastante familiar, definida a partir de un lenguaje dado de primer orden y un modelo de una teoría de primer orden en dicho lenguaje (Awodey, 1996, p. 211)[4]. Ahora bien, en el marco de esta tradición conjuntista del estructuralismo matemático, que se podría denominar "proto-estructuralista", Awodey toma como referente la noción de estructura definida por Bourbaki, con el fin de mostrar que esta noción constituye un nivel de desarrollo matemático superior en el marco de la tradición conjuntista, y que supera en mucho el alcance de la noción de estructura agenciada desde la Teoría de Modelos, ya que ella es aplicable en contextos matemáticos más complejos como el de los espacios topológicos.

[4] Awodey parece indicar que toda la tradición de la filosofía de las matemáticas que no atendió las directrices marcadas por el desarrollo de las matemáticas modernas y, en particular, por el rol central de la noción de estructura, fueron intentos o empresas interpretativas que partían de la nada.

En términos generales, Awodey reconoce el valor que alcanzó la noción de estructura de Bourbaki en la consolidación de principios básicos del estructuralismo, tales como: la profundización del método axiomático en las matemáticas modernas, la caracterización y distinción de los objetos matemáticos, lo cual nos hereda la noción actual de objeto matemático, y, en últimas el hecho de haber enfatizado el carácter estructural de buena parte de las propiedades y de los hechos matemáticos. Es decir, Awodey exalta no solo el valor histórico sino epistemológico y matemático que tuvo la descripción de los objetos matemáticos como "conjuntos con estructura", en la perspectiva de un desarrollo estructuralista más profundo como el estructuralismo categórico. Sin embargo, el punto de Awodey es que en el contexto de las matemáticas contemporáneas la noción de estructura de orden superior de Bourbaki es menos útil y fecunda de lo que sugiere la influyente obra de Bourbaki (Awodey, 1996, p. 211). Para Awodey, lo que es esencial en el quehacer de las matemáticas contemporáneas no es la estructura conjuntista de un cierto dominio matemático ni el estudio de objetos específicos, sino el estudio de objetos invariantes bajo *isomorfismos*. TCat establece condiciones de preservación de una estructura a partir de *morfismos* entre objetos. En este sentido, él afirma que:

> ...The object of modern mathematical study is rarely a specific set with given Bourbaki structure, but rather a mathematical object determined up to isomorphism, the various relations between such objects bearing similar structure, relations between different kinds of structure on such objects, and so on. While the Bourbaki notion of mathematical structure surely plays a role in such studies, the method of using mappings to isolate, describe, and compare different kinds of mathematical structure has emerged as a more effective tool. Category theory thus arose, not as an alternative foundational scheme, but in response to a mathematical need for a language and methods well suited to problems involving different kinds of mathematical structure (Awodey, 1996, p. 212).

Awodey fija las condiciones generales que distinguen la noción de estructura caracterizada en TCat, con respecto a la noción de estructura conjuntista de Bourbaki. Además, reafirma que la primera describe mejor los objetos de la matemática moderna. Sin embargo, él insiste en negar el carácter fundacional de TCat y defiende la eficacia de ésta para responder a problemas que involucran diferentes tipos de estructura matemática. En este sentido, esta teoría cuenta con un lenguaje suficientemente expresivo para caracterizar cualquier estructura matemática, y a su vez hace posible establecer vínculos entre estructuras de diverso tipo, de manera que un problema identificado en el contexto de una estructura puede ser abordado o resuelto en el marco de otra.

A manera de ejemplo, Awodey presenta tres tipos principales de categorías: la categoría *Top* cuyos objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las aplicaciones continuas entre ellos; la categoría *Group* cuyos objetos son los grupos y los morfismos son los homomorfismos de grupos; y, la categoría *Set* cuyos objetos son los conjuntos y los morfismos son las funciones entre ellos. Con estos elementos preliminares presentamos la definición formal o axiomática de categoría:

Una *categoría* $\mathcal{A}$ es una estructura que satisface los siguientes principios[5]:

- Una colección ob($\mathcal{A}$) de *objetos*. Estos objetos, en general, van a tener un mismo tipo de estructura.
- Para cada par de objetos A y B en ob($\mathcal{A}$), hay una colección de *morfismos* (o *flechas*), denotada por $Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$. Los elementos de tal colección son aplicaciones $f\colon A\to B$ que transportarán de manera óptima la estructura del objeto A al objeto B. Para cada morfismo $f\colon A\to B$, el objeto A se llama *dominio* y el objeto B se llama *codominio*, y estos objetos son únicos para tal f.
- Para los morfismos, hay una ley de composición, en el sentido de que para cada par de morfismos $f\colon A\to B$ y $g\colon B\to C$ se tiene otro morfismo $g \circ f\colon A\to C$. Nótese que el morfismo f transporta la información estructural de A en B y, a su vez, g transporta la información estructural de B en C; así que $g \circ f$ transporta la información de A hasta C.
- Para cada A en ob($\mathcal{A}$), hay un elemento identidad $1_A\colon A\to A$. Este morfismo preserva la información estructural de un objeto en sí mismo.
- La ley de composición es asociativa y satisface las leyes de identidad. Esto es, para cualesquiera tres flechas f, g, h se cumple que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ y para cada flecha $f\colon A\to B$, se tiene que $f \circ 1_A = f$ y $1_B \circ f = f$.

Esta presentación axiomática fija el conjunto de condiciones básicas que caracterizan una categoría. Además, permite precisar las

[5] El lector interesado puede consultar (Leinster, 2014) o (Mac Lane & Moerdijk, 1992).

diferencias significativas con respecto a la concepción bourbakista de estructura.

Las categorías *Top*, *Group* y *Set* satisfacen todas las condiciones anteriores. Sin embargo, en una categoría los objetos no son necesariamente conjuntos o colecciones y los morfismos no son necesariamente funciones. El siguiente ejemplo satisface todos los ítems de la definición anterior y muestra el alcance de TCat: un conjunto parcialmente ordenado[6] $(P, \leq)$ es una categoría, cuyos objetos son los elementos del conjunto P, y para cada a y b elementos de P, un morfismo $a \rightarrow b$ existe si y sólo si $a \leq b$.

Estos ejemplos muestran que no es necesario que los objetos de una categoría tengan elementos ni que sus morfismos sean funciones. Esta característica evidencia una franca ruptura con la tradición conjuntista. En el contexto de TCat no es importante la especificidad de los objetos ni de los morfismos en una categoría particular, las propiedades no categóricas de ellos no son relevantes.

Como Awodey lo expresa, el foco de atención está en el lenguaje de objetos, morfismos, dominios, co-dominios, composición e identidad de morfismos (Awodey, 1996, p. 213).

La idea central aquí es que los objetos y morfismos son los insumos básicos de una categoría, pero ellos determinan también una clase de estructura; es decir, una categoría determina un tipo de estructura y, por lo dicho arriba, esta determinación ignora aquellas condiciones y propiedades que presentan ciertos conjuntos con estructura que no son en estricto sentido propiedades estructurales[7]. Esta posibilidad plantea una ventaja comparativa a favor de la descripción de estructura que ofrece el lenguaje de categorías, en el cual la descripción de un tipo de estructura es invariante sintácticamente, mientras que en la descripción bourbakista existen diversos modelos que expresan de forma diferente un mismo tipo de estructura.

---

[6] Un conjunto $(P, \leq)$ es parcialmente ordenado si la relación $\leq$ es reflexiva (para cada elemento p de P, $p \leq p$); antisimética (si $p \leq q$ y $q \leq p$ entonces $p = q$); y transitiva (si $p \leq q$ y $q \leq r$ entonces $p \leq r$).

[7] Awodey toma como ejemplo el caso de la estructura topológica y su caracterización a partir de la categoría *Top*: the topology of a given space is determined by its continuous mappings to and from other spaces, regardless of whether it was initially specified in terms of open sets, limit points, a closure operator, or whatever. (Awodey, 1996, p. 213).

En particular, en Teoría de Categorías, es posible definir con precisión qué significa que dos cosas tengan "la misma estructura de un cierto tipo". La noción que captura esta propiedad es la de *isomorfismo*: Un morfismo $f: A \to B$ es un *isomorfismo* si y sólo si existe un morfismo $g: B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Así, dos objetos A y B en una categoría son *isomorfos* (estructuralmente indistinguibles) si existe un isomorfismo $f: A \to B$.

Awodey sabe que esta presentación general de isomorfismo tiene una virtud respecto al parámetro bourbakista. En efecto, una categoría define un tipo particular de estructura y así mismo los morfismos f y g, son relativos al mismo tipo de estructura. Es decir, el concepto de isomorfismo recoge, de una manera sintética, todas aquellas definiciones de isomorfismo en las diferentes estructuras bourbakistas, e incluso va más allá, pues captura además la idea de objetos indistinguibles con otros tipos de estructura. Por ejemplo, en el caso de la categoría $(P, \leq)$, descrita en la página anterior, donde los objetos son los elementos de P y para cada par de objetos a y b en P un morfismo $a \to b$ existe si y sólo si $a \leq b$, se tiene que a y b son isomorfos si y sólo si $a = b$. Nótese que aquí el concepto de isomorfismo no está mediado por la existencia de una biyección.

En la categoría *Group* (resp. *Ring*), dos objetos G y H son isomorfos si existe un homomorfismo *biyectivo* $f: G \to H$, de grupos (resp. anillos). En general, en categorías algebraicas un isomorfismo es un homomorfismo biyectivo. Sin embargo, en estructuras topológicas esto no es suficiente; dos espacios topológicos X e Y son isomorfos si existe una función continua $f: X \to Y$ (un morfismo en *Top*) que sea biyectiva y que además su inversa $f^{1}: X \to Y$ también sea continua. Es decir, en *Top*, un isomorfismo es más que un morfismo biyectivo.

La universalidad que alcanza la definición categórica de isomorfismo provee estabilidad y uniformidad a la noción de estructura, toda vez que garantiza las condiciones formales de identidad estructural. En resumen, el poder expresivo de esta definición consiste en la garantía que ella ofrece para decidir o afirmar cuándo dos objetos, dentro de una categoría, poseen la misma estructura. Así, esta identidad acota, y precisa, el sentido de aquello que intuitivamente se reconoce como una *propiedad estructural*: es aquello que siempre se respeta bajo isomorfismos. De esta manera, en cualquier descripción estructural de un campo de las matemáticas, las únicas propiedades que intervienen son propiedades estructurales. Es en este sentido, que el modelo estructuralista de Bourbaki resulta limitado[8].

A pesar de las ventajas del lenguaje de la teoría de categorías en términos de expresividad y universalidad, Awodey insiste en desdeñar el interés filosófico de una tesis fundacional y en querer mostrar que su objetivo se enmarca dentro de una tesis "más modesta", que se puede expresar así: TCat posee un lenguaje más rico y más preciso para caracterizar las matemáticas contemporáneas desde una perspectiva estructuralista. En este sentido, considera importante defender la diferencia esencial de estos dos enfoques y rechazar cualquier interpretación de TCat como una reformulación de la perspectiva bourbakista. Un caso que permite ilustrar estas diferencias entre estas dos perspectivas es el de los espacios topológicos. Por ejemplo, en algunos casos el paso de un modelo topológico bourbakista, a la categoría *Top*, implica desechar muchos de los contenidos de la especificación inicial. La herramienta fundamental, en la categoría *Top*, que transporta propiedades estructurales entre espacios topológicos es la función continua, la cual no aparece en ninguna definición de espacio topológico ofrecida en las diversas especificaciones bourbakistas. Por otro lado, existen categorías muy útiles que no caen bajo la caracterización de estructura de Bourbaki; categorías como $O(X)$, cuyos objetos son los abiertos de un espacio topológico X, y cuyos morfismos son las aplicaciones de inclusión, es decir, para dos abiertos $U, V \in O(X)$ existe un morfismo $U \to V$ si y sólo si $U \subseteq V$, caracterizan un tipo de estructura que no es considerada como aquellas tipo Bourbaki (Awodey, 1996, pp. 215-216)[9].

La noción de espacio topológico ha jugado un rol muy importante en el desarrollo de la teoría de categorías y principalmente en la articulación y formulación de una noción de estructura más robusta que la de Bourbaki. Esta noción ha jalonado desarrollos muy significativos en torno a la noción de estructura como, por ejemplo, el estudio de

[8] Se hace referencia al modelo estructuralista de Bourbaki, según Awodey, por considerarse a Bourbaki el máximo representante de la tradición conjuntista.

[9] Nótese que esta categoría , es un caso particular de aquellas categorías del tipo definidas en páginas anteriores, pues es un conjunto parcialmente ordenado.

las relaciones entre estructuras de diferente tipo, el cual significa un salto cualitativo esencial para TCat:

> …By 'relating structures of different kinds' is meant, of course, mapping one to the other; so category theory can be applied in particular to the theory of categories, which proves to be quite potent. One thus studies a particular category, not just by contemplating its 'multiplication table' of morphisms, but by mapping it to and from other categories, for example by mapping **Top** into **Groups.** Indeed, since the categorical perspective involves a shift of attention from objects alone to objects and morphisms, one of the central notions of category theory is that of a functor (Awodey, 1996, p. 216).

El dispositivo que permite este cambio a un nivel de abstracción más complejo reposa sobre un concepto central, el de *funtor*. Es posible formar ahora una categoría en la que los objetos sean a su vez categorías, y los morfismos, que ahora se llamarán funtores, son los encargados de preservar la estructura[10].

¿Es la perspectiva de Awodey fundacionalista?

En el ítem precedente hemos mostrado las condiciones básicas, tanto filosóficas como técnicas, que apoyan las tesis estructuralistas de Awodey. Como ya se ha mencionado, éste ha afirmado explícitamente que no busca articular una propuesta fundacionalista para las matemáticas. Sin embargo, esta posición representa un punto de partida sustancial en la controversia que se quiere exponer a continuación, pues Hellman afirma que la teoría de categorías, desde la perspectiva de Awodey, debe interpretarse en la misma línea filosófica de la tesis de Mac Lane, es decir como un proyecto fundacionalista para las matemáticas. Según Hellman, si Awodey pretende un estatus de autonomía para Tcat respecto a la Teoría de Conjuntos, no puede eludir su compromiso fundacionalista. Hellman señala que a través de todo el artículo se puede leer una intención distinta, la cual se evidencia en el cierre de las conclusiones, donde Awodey expresa lo siguiente:

> The structural perspective on mathematics codified by categorical methods might be summarized in the slogan: The subject matter of pure mathematics is invariant form, not a universe of mathematical objects consisting

[10] Un *funtor* es un morfismo entre categorías, es decir, dadas dos categorías $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, un funtor es una aplicación F: $A \rightarrow B$ que satisface:

i) Para cada objeto A en $\boldsymbol{A}$ hay un objeto F(A) en $\boldsymbol{B}$.

ii) Para cada morfismo f: $A \rightarrow B$ en $\boldsymbol{A}$ hay un morfismo $F(f)$: $F(A) \rightarrow F(B)$ en $\boldsymbol{B}$.

iii) Si f: $A \rightarrow A$ y g: $A' \rightarrow A''$ entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

of logical atoms. This trivialization points to what may ultimately be an insight into the nature of mathematics. The tension between mathematical form and substance can be recognized already in the dispute between Dedekind and Frege over the nature of the natural numbers, the former determining them structurally, and the latter insisting that they be logical objects. My aim here was not to make the case for philosophical structuralism, but to suggest that it be pursued using a technical apparatus other than that developed by logical atomists since Frege, one with a mathematical heritage sufficiently substantial, and mathematical applications sufficiently uniform, to render significant a view of mathematics based on the notion of 'structure' (Awodey, 1996, pp. 235-236).

Este párrafo sintetiza una idea central: el objeto de las matemáticas puras son las 'formas invariantes', es decir las estructuras. Para Awodey, una interpretación acertada de las matemáticas debe venir agenciada desde una perspectiva estructuralista. En particular, él ha mostrado las ventajas de la noción de estructura y cómo TCat captura de manera precisa ésta visión de las matemáticas, pero ésta ventaja no sólo es metodológica. Cuando él afirma que es la que mejor modela formas invariantes en matemáticas, quiere significar que es la teoría que mejor interpreta la naturaleza de las matemáticas, en comparación con la teoría de conjuntos. En otras palabras, en esta propuesta la forma de interpretar la teoría de categorías, permite responder mejor a la pregunta: ¿qué son las matemáticas? Pareciera haber buenas razones para afirmar que la propuesta de Awodey es fundacionalista, como lo plantea Hellman.

En este orden de ideas, para Hellman hay dos posturas en el trabajo de Awodey (una no fundacionalista explícita, y otra fundacionalista implícita), las cuales son incompatibles. Para Hellman, hay razones suficientes para decir que la apuesta preponderante en el trabajo de Awodey es, en efecto, la fundacionalista. No obstante, Awodey, en (Awodey, 2004), insiste en precisar en qué sentido TCat ofrece un marco para las matemáticas; la idea es que no se trata de promover una postura filosófica a favor de un "estructuralismo categórico", sino de mostrar las ventajas de un estructuralismo matemático metodológico, a la luz de la práctica matemática. De manera aún más específica, se trata para Awodey de mostrar la potencia del lenguaje de categorías para determinar una noción de "estructura" suficientemente precisa y flexible[11], y que pueda facilitar la reflexión filosófica (Awodey, 2004, p. 54). En estos términos, Awodey considera que la pregunta correcta

[11] Flexible, en el sentido de que el lenguaje de teoría de categorías acepta la existencia de clases propias.

debe ser: *Does category theory provides a framework to philosophical structuralism?*, en lugar de la planteada por Hellman: *Does category theory provides a framework to mathematical structuralism?*

Awodey reclama que su objetivo no es ni formular ni adherir a una tesis fundacionalista; por el contrario, TCat evita *the whole bussiness of 'foundations'*. Él va más allá y afirma que los programas de fundamentación categórica, entre ellos el de Mac Lane, están más orientados a la 'construcción de puentes' (*bridge-building*) para las matemáticas que a la 'construcción de fundamentos' (*foundation-building*):

> …No one doing category theory thinks we are someday going to find the one "true topos," in which all mathematics happened. The translation of set theory into topos theory (and other categories) are intended to show that categories like toposes can be used to do a lot of mathematics *for those used to do mathematics in set theory*; they are no supposed to show that topos theory is the new universal 'system of foundations', intended to replace set theory. Indeed, the idea of 'doing mathematics categorically' involves a different point of view than the customary foundational one, as I shall try to explain in this note. (Awodey, 2004, p. 55)

La idea aquí es que la Teoría de Conjuntos como fundamento para las matemáticas parte de un presupuesto esencial: un universo dado, fijo y único de objetos lo suficientemente grande para dar cuenta de todas las matemáticas. TCat por su parte no busca formular ni postular la existencia de un universo, *el 'topos verdadero'*, donde viviría toda la matemática presente y futura. En este sentido, la noción de *bridge-building* significa que el lenguaje de TCat puede articular de manera sistemática la matemática estructuralista a través de una noción de estructura adecuada, que permite el tránsito natural entre estructuras de diferentes tipos. En particular, los topos sería la herramienta que realiza dichos puentes entre distintas estructuras. Presentamos una definición informal de topos, pero el lector interesado puede profundizar más al respecto en (Mac Lane & Moerdijk, 1992) o en (Caramello, 2010).

Un *topos* es una categoría con: (1) límites y colímites finitos; (2) exponenciales y (3) un clasificador de subobjetos.

En particular, la categoría *Set* constituye un topos. En este sentido, los items (1), (2) y (3) de arriba se pueden explicar así:

1. La existencia de límites y colímites finitos garantiza la existencia de: un objeto inicial (algo como el conjunto vacío); un objeto terminal (algo como un singleton); coproductos binarios (algo como la unión disjunta

de dos conjuntos); productos binarios (algo como el producto cartesiano de dos conjuntos); igualadores (algo como el subconjunto de X dado por $\{x \in X: f(x) = g(x)$ donde $f, g: X \rightarrow Y$; y coigualadores (algo como el conjunto cociente de X donde dos elementos $f(y)$ y $g(y)$ son identificados y donde f, g: $X \rightarrow Y$).

2. Para cualquier par de objetos X e Y hay un objeto X^Y llamado exponencial que actúa como el conjunto de funciones de Y en X.
3. Existe un objeto llamado clasificador de subobjetos que actúa como el conjunto {0, 1} en Set, que clasifica subconjuntos de un conjunto dado X. Este objeto Ω puede tener una estructura booleana, pero en general tiene estructura de álgebra de Heyting (lógica interna intuicionista).

Ahora bien, a pesar de la explicación de Awodey, el argumento inicial de Hellman según el cual Awodey es fundacionalista, no se invalida. En este sentido, es pertinente abrir y desarrollar algunos puntos centrales de la controversia planteada por Hellman; en particular, en la formulación de la noción de estructura matemática se justifica la pregunta: ¿es, la noción de estructura de TCat, independiente y autónoma, con relación a la noción de estructura conjuntista?

¿Es la Teoría de Categorías 'parasitaria' de la Teoría de Conjuntos?

En términos generales el argumento de Hellman se puede expresar de la siguiente forma: TCat no logra una independencia total de la Teoría de Conjuntos en la medida en que su base teórica presume ciertas nociones conjuntistas de manera arbitraria, y es en este sentido parasitaria; por tanto, TCat no puede ser un buen fundamento para las matemáticas. Esta crítica se basa en dos aspectos principales: la ausencia de una teoría abstracta de relaciones y la ausencia de algunos axiomas de existencia. Este último es el conocido *home address problem*: ¿de dónde vienen las categorías y dónde viven?[12]

---

[12] Hellman señala además dos elementos de alguna relevancia en este análisis. El primero es de carácter sociológico: TCat no es presentada de manera formal en los textos de matemáticas y no goza de un estatus 'oficial' como el que se le reconoce a la Teoría de Conjuntos. En el contexto de la comunidad matemática resulta evidente que el lenguaje de la Teoría de Conjuntos sigue siendo el discurso y la presentación dominantes (Hellman, 2003, p.3). El otro elemento preliminar de Hellman tiene que ver con el llamado que hace Mac Lane, en (Mac Lane & Moerdijk, 1992), a asumir un marco conjuntista en la presentación de TCat y la sugerencia que hace a sus lectores de trabajar situándose dentro de un universo fijo de conjuntos . En efecto, los criterios de elección y las condiciones de este universo no son un tema de preocupación para TCat. En este sentido, Hellman considera que, si ésta se considera la "postura oficial" de TCat, ella sería sin duda una evidencia del fondo conjuntista que la subyace y así, no estaría autorizada de reconocerse como un marco teórico autónomo, pues heredaría automáticamente los problemas ya bastante documentados que carga el estructuralismo conjuntista (Hellman, 2003, pp. 3-4).

Este análisis se adentra en aspectos internos de TCat para medir su verdadero alcance como marco fundacional. La estrategia que diseña Hellman, una vez ha definido a Awodey como fundacionalista, consiste en evaluar las condiciones básicas que plantean autores como Mac Lane y Moerdijk en la formulación de una teoría de topos como un tipo de fundamento para las matemáticas. La pregunta de Hellman busca precisar si Mac Lane considera la teoría de topos como un medio "novedoso" de desarrollar las matemáticas ordinarias a través de la recuperación de la Teoría de Conjuntos, o si va más allá, y se trata de una novedad en el sentido de afirmar el carácter totalmente independiente de la teoría de topos (*strong autonomy*):

> …One would be showing that category theory is autonomous from set theory in a strong sense: not only is its primitive basis capable of standing on its own and sufficient for some recovery of ordinary mathematics, even if via a detour through set-theoretic constructions (call this "autonomy" simpliciter), but, without any such detour, it can achieve a genuinely distinctive, intelligible conceptual development throughout, not just in its initial stages. (Call this "strong autonomy".) (Hellman, 2003, p. 6)

En aras de discutir un sentido de "autonomía fuerte" de TCat, Hellman retoma la crítica que Feferman, en (Feferman, 1969), ha planteado a este respecto y según la cual TCat no es adecuada como marco fundacional para las matemáticas, ya que para definir la noción de categoría o para establecer relaciones entre categorías a través de morfismos y funtores, se apela de manera informal a nociones como *operación* y *colección*, las cuales juegan el rol de nociones primitivas. Mac Lane en efecto acepta que la formulación de TCat presupone la noción de función. Pero él considera que esta noción es usada cotidianamente por los matemáticos, y fundamentarla a través de una teoría de funciones no es tan diferente a fundamentar una Teoría de Conjuntos. Es decir que, en últimas, Teoría de Conjuntos y TCat podrían compartir el mismo marco fundacional. Mac Lane, según Hellman, se está reclamando el derecho de partir de algo, como pasa en todas las teorías:

> … Why not with an informal notion of "collection of (structure-preserving) mappings related by composition" which one tries to systematize with axioms? Why, the category theorist may ask, do we need a general theory of collections and operations rather than merely a sufficient collection (a topos) of suitably interrelated maps in which ordinary mathematics can be carried out? (Hellman, 2003, p. 7).

Pero esto plantea un problema a los estructuralistas categóricos: ¿cuál es el papel de los axiomas en Teoría de Categorías? ¿Buscan ellos dar cuenta de las nociones primitivas que sirven de base a la teoría? Justamente, es en este sentido que los estructuralistas categóricos quieren diferenciarse profundamente de los conjuntistas. La noción intuitiva de función en efecto inspira una buena parte del desarrollo de TCat. Pero la presentación 'oficial' de la teoría es algebraica; se hace a través de axiomas cuyo rol es definir las condiciones bajo las cuales se puede asegurar que una estructura es de cierto tipo. De manera más precisa, se trata de una presentación esquemática o formal y, en este sentido, los axiomas de TCat no cumplen el papel de los axiomas de la Teoría de Conjuntos, no son asertóricos. Por esta razón de principio, el matemático categórico no puede reclamarse el derecho de presuponer primitivos en el mismo sentido que lo hace el conjuntista. Los axiomas de TCat son vacíos de contenido ontológico, no afirman nada en particular de un supuesto objeto. La pregunta de Hellman es entonces si ciertos desarrollos o nociones topológicas (o algebraicas) claves serían comprensibles sin la ayuda de un conocimiento conjuntista previo. La crítica es, en este sentido, de carácter epistemológico.

El problema de existencia matemática (*The home address problem*)

Un problema ligado a la pregunta de la autonomía es el de la existencia matemática: ¿De dónde vienen y dónde viven las categorías matemáticas? Los axiomas de TCat incorporan juicios de existencia. Estos axiomas definen condiciones formales para identificar a qué clase corresponde una estructura, pero no aseguran verdades basadas en el significado atribuido a los términos primitivos, pues ellos son esquemáticos. Al contrario, los axiomas de la Teoría de Conjuntos, no son interpretados estructuralmente sino como verdades totalmente relativas a una "realidad conjuntista". En ese sentido, estos configuran una teoría de existencia matemática.

> Surely category theorists do not intend their first-order axioms for categories or topoi to be read in any such fashion. It is not as if the category theorist thinks there is a specific "real-world topos" that is being described by these axioms! The algebraic-structuralist perspective precludes this. But then, just as in the cases of more familiar algebraic theories, the question about mathematical existence can be put: what categories or topoi exist? Or, more formally, what axioms govern the existence of categories or topoi? On the assumption of autonomy, we're in the situation of the Walrus and the Carpenter, after the oysters were gone: "...but answer there came none..." (Hellman, 2003, p.10)

La metalógica sería el recurso más inmediato para responder estas cuestiones, pero el lugar natural de ésta es la Teoría de Modelos, y por tanto se está de nuevo en el marco de la Teoría de Conjuntos. Los axiomas de primer orden de teoría de topos no pueden dar cuenta de una metalógica categórica, en la medida en que tales axiomas sólo definen un tipo de categoría. Es decir, ellos solo apoyan condiciones para reconocer invariantes en estructuras que satisfacen dichos axiomas. Por tanto, para Hellmann no son condiciones categóricas en el sentido usual, sino más bien generalizaciones hipotéticas, lo cual lo conduce a juzgarla como una modalidad de *if-then-ism*[13]. Otro problema con la metalógica es que los modelos que pueden tomarse como garantes de completitud pueden ser no-estándar.

Ahora bien, desde el punto de vista de las matemáticas puras, estos no son problemas para TCat. Pero, si existe la pretensión de ofrecer un marco fundacional para las matemáticas, el matemático que trabaja en TCat debe preocuparse por estos problemas de existencia. Dice Hellman que puede ser una virtud matemática no dejarse implicar por estos problemas, pero no es una virtud metamatemática. La necesidad de una teoría externa de relaciones y de unos axiomas de existencia, constituye una exigencia siempre y cuando no haya un marco alternativo a la Teoría de Conjuntos.

Teoría de Categorías como fundamento "local"

Por su parte Awodey asume que TCat no ofrece el tipo de fundamentación que Hellman, como representante de la tradición atomista-conjuntista, concibe. Los axiomas de TCat cumplen roles muy diferentes. Esta idea se expresa claramente cuando afirma que "…we may say that the point of view that we are going to described emphasizes form over content; descriptions over constructions; specification of assumptions over deductive foundations; characterization of essential properties over constitution of objects having those properties". (Awodey, 2004, p. 55). TCat no busca construir objetos matemáticos específicos en el interior de un sistema fundacional particular, no presupone la existencia de un dominio de objetos como referentes de una clase de números, ni que existen reglas y axiomas suficientes que garantizan todas las inferencias hechas sobre estos objetos. En contraste con

[13] Si TCat construye su propia metalógica acecha el problema del *if-then-ism*: Cualquier cosa que sea probada a partir de tales axiomas solo establece la conclusión válida para cualquier posible estructura que satisfaga los axiomas como una afirmación condicional generalizada y no una afirmación categórica. La verdad de tales enunciados dependerá de la existencia de las estructuras de las cuales estamos indagando. Awodey acepta que sus axiomas no son asertóricos sino hipotéticos, pero, como se verá más adelante, él explica por qué no son hipotéticos en el sentido del *if-then-ism*.

la perspectiva conjuntista, la cual él llama también “fundacional global”, Awodey defiende la perspectiva categórica, la cual busca especificar lo estructuralmente esencial en el marco de un teorema o una teoría, obviando cualquier especificación o determinación de los objetos implicados. En este sentido, la perspectiva estructuralista categórica es *local* y, por consecuencia, los axiomas y reglas que determinan una cierta porción de las matemáticas obedecen a condiciones específicas que pueden variar con respecto a otra porción de las matemáticas:

> Thus according to our view, there is neither a once-and-for-all universe of all mathematical objects, nor a once-and-for-all system of all mathematical inferences. Are there, then, various and changing universes and systems? How are they determined, and how are they related? Here I would rather say that there are *no* such universes or systems; or rather, that the questions itself is still based, on a ‘foundationalist’ preconception about the nature of mathematical statements (Awodey, 2004, p. 56).

Se puede inferir que Awodey considera legítimo presuponer nociones, tomarlas como primitivas, sin dar una determinación formal de ellas. Él no cree que exista tal cosa como una fundamentación a partir de unas nociones primitivas y un conjunto de axiomas que pueda dar cuenta de todas las matemáticas como un universo fijo de objetos específicos. Por esta razón, su planteamiento no apunta a postular una mejor fundamentación para las matemáticas, en el sentido de los fundacionalistas clásicos. La pregunta de Awodey parece ser entonces ¿qué significa fundamentar las matemáticas? Según él, el programa conjuntista se apoya en una preconcepción de la naturaleza de los enunciados matemáticos que riñe con la práctica matemática. Por ejemplo, para el fundacionalista la expresión “cualquier anillo” trata de una cuantificación universal sobre un rango específico, fijo y dado, de objetos. Para el categórico, tal expresión es la forma *esquemática* de aludir a la estructura de anillos, y sus modelos o instancias; no alude a todos los anillos en un universo fijo.

Este carácter esquemático permite a Awodey ofrecer una interpretación distinta de la fundacionalista respecto del rol de los teoremas de las matemáticas. La forma estándar de un teorema ha permitido una interpretación solidaria con la perspectiva fundacionalista, pues su forma es la de un condicional. Según la tesis fundacionalista lo que se afirma compromete un universo de cosas de modo que, si una “cosa” tiene ciertas propiedades, entonces a partir de ciertos métodos de razonamiento se muestra que posee otras. Para Awodey los teoremas se refieren a estructuras, ellos afirman, de manera hipotética, relaciones, propiedades, conexiones entre estructuras[14]. En efecto hay unos *relatas,* estructuras y lugares en las estructuras, a los cuales se asignan tales relaciones o propiedades. El punto de Awodey es que en la prueba interviene la estructura correspondiente en cada caso y algunos principios generales, sean lógicos o conjuntistas, pero los teoremas no dan cuenta de nada que tenga que ver con la naturaleza intrínseca de aquellos *relatas*. El nivel de especificidad y de análisis que alcanza una prueba no va más allá de suponer los elementos de un dominio en un nivel de indeterminación, por ejemplo, los puntos del espacio. Para Awodey esta indeterminación es el rasgo característico de las matemáticas y no como lo supone la tradición fundacionalista.

Según él, el carácter esquemático de los teoremas y sus demostraciones no es una cualidad que pueda ser capturada a través de una cuantificación universal, en el marco de un dominio fijo que restringe el rango de variables[15]. Se trata para él de establecer una diferencia sustancial entre los dos enfoques, el categórico y el fundacionalista-conjuntista, en términos de lo que se juzga verdadero para todos los valores de un rango fijo, y aquello que puede ser probado para un valor indeterminado (Awodey, 2004, p. 59).

Bajo estas condiciones quedan expuestas las razones por las cuales la perspectiva de TCat desvirtúa las críticas lanzadas por Hellman, Feferman y otros, es decir desde la orilla fundacionalista. Para Awodey se trata de una falta de comprensión del enfoque de TCat.

La respuesta de Awodey

Awodey está ahora en condiciones de refutar la crítica relativa a las nociones de operación, relación y función como nociones primitivas en el contexto de TCat. Su argumento, como se ha notado, es que estas nociones

[14] Awodey debe hacer la distinción entre su enfoque y la vieja concepción fundacionalista del *if-thenism* la cual comporta el siguiente presupuesto: "*if the laws, axioms, and rules of the system are true and correct, then if A, then B" ...But in our case, the conditions are rather of the kind "if G is a finitely generated abelian group", not "if the axioms of ZFC are true*" (Awodey 2004, p. 60). La debilidad de este último enfoque es que las condiciones del antecedente permanecen en duda. Sin embargo, el carácter hipotético de los teoremas, según TCat funciona diferente, pues no se trata de establecer si tales condiciones son satisfechas, la verdad del consecuente no depende de una condición antecedente desconocida.

[15] A manera de ejemplo, Awodey plantea la distinción entre un enunciado general sobre un número real y un enunciado acerca de una indeterminada x en el anillo $\mathbb{R}[x]$ de polinomios con coeficientes reales. En el universo de los números reales para cualquier real x, el número $x^2 + 1$ tiene una raíz cuadrada. Pero no hay ningún polinomio $p(x)$ tal que $p(x)^2 = x^2 + 1$. Con este ejemplo, Awodey quiere mostrar que el primer caso se trata de un enunciado cuantificado que se juzga verdadero para un número real arbitrario; en el segundo caso se trata de mostrar aquello que es invariable para un número en un anillo arbitrario sobre (Awodey, 2004, p. 59).

pueden aparecer en uno u otro caso particular como presupuestas, pero ninguna de ellas es fundante, no son nociones primitivas toda vez que ellas están subsumidas en una noción más englobante, la de morfismo. Esta es la noción primitiva de TCat. Toda ocurrencia de cualquiera de las nociones anteriores (operación, relación y función) puede ser expresada como un morfismo; esta noción provee una manera uniforme de caracterizar distintos fenómenos en este lenguaje.

Ahora, en relación a la pregunta ¿dónde viven las categorías? Awodey afirma que los fundacionalistas conciben un procedimiento ascendente (*bottom up*) en el marco de una cierta jerarquía dada y, por tanto, presuponen unas condiciones fijas de existencia. La interpretación desde TCat es en sentido inverso, descendente. La idea es que, para caracterizar mejor una cierta estructura, una categoría ***C***, se busca especificar un "entorno estructural", no como el lugar donde ella "habita", sino como el esquema formal que permite definir mejor las condiciones de dicha estructura.

Para Awodey, el lenguaje y los métodos de TCat no dejan ambigüedades en el tratamiento de *estructuras* que tienen instancias diferentes. La noción de enunciado *esquemático* en el contexto de este tipo de estructuras aplica en el sentido ya explicado anteriormente: los objetos matemáticos son "estructuras" y los enunciados sobre ellas son "esquemáticos" en dicho sentido. Esto se entiende de la misma manera para las estructuras que son definidas, salvo isomorfismos, por propiedades universales, como por ejemplo la estructura de los números naturales. A diferencia de otras estructuras, esta estructura goza de una autonomía tal que los enunciados acerca de ella son independientes, no son hipotéticos, pues aluden de forma específica a una estructura. De estas estructuras también se dice que tienen varias ocurrencias, en el sentido de que, a través de su propiedad universal, ella puede ser reconocida en diferentes categorías. En efecto, una categoría en la cual se pueda identificar el *objeto número natural*, va a verificar los axiomas de Peano. Sin embargo, en cada ocurrencia pueden presentarse diferencias con respecto a otras propiedades. Esto significa que la condición de verificar la propiedad universal no es suficiente para afirmar la identidad entre ellas. Por tanto, las diferentes ocurrencias de una "misma" estructura en TCat no plantea el problema ontológico del estructuralismo conjuntista, conocido como el problema de las múltiples reducciones.

Comentarios finales

El debate Hellman-Awodey muestra que el estructuralismo filosófico no constituye una unidad de pensamiento; al contrario, parece evidente que el término estructuralismo alude a una diversidad de enfoques. Hellman, quien defiende una interpretación estructuralista modal de las matemáticas, en el marco de esta discusión no se centra en la reivindicación de su postura filosófica, su crítica va dirigida a la consistencia del estructuralismo categórico como marco fundacional para las matemáticas: en la medida que TCat no logra una *autonomía fuerte*, pues no supera a la Teoría de Conjuntos. La ausencia de unas nociones primitivas no conjuntistas, y de unos axiomas de existencia, son limitaciones que avalan la imposibilidad de una independencia absoluta de TCat con respecto a la Teoría de Conjuntos. En el ámbito de la filosofía de las matemáticas tradicional, dicha independencia sería la primera condición que debe satisfacer una teoría fundacional de las matemáticas que se erija como alternativa a la Teoría de Conjuntos ZF.

Ahora, un punto central del debate es si las exigencias de Hellman a TCat son razonables. Una consideración importante en este sentido es que Awodey ubica TCat en el marco de un proyecto filosófico distinto respecto a la tradición dominante en la filosofía de las matemáticas. Históricamente se ha priorizado un carácter ontológico en la fundamentación matemática, condición a la cual se ha ajustado muy bien la Teoría de Conjuntos. Las nociones de objetos y existencia han estado siempre en el centro de la discusión fundacionalista. Para Awodey, TCat representa un cambio radical en el planteamiento del problema, él otorga un sentido diferente al proyecto de fundamentar las matemáticas. TCat no precisa de un universo de objetos que ponga las matemáticas en correlación con el "mundo real", sólo hay esquemas que responden a la necesidad interna de caracterizar formas, estructuras, estructuras de estructuras, etc., como dotadas de sentido en sí mismas. En TCat, la noción de objeto *n'est qu'une façon de parler*. Así, la distancia entre los enfoques de Hellman y Awodey está determinada por las exigencias que cada uno plantea, a las matemáticas, con relación al mundo exterior. Teoría de Conjuntos fundamenta las matemáticas como parte constitutiva de una realidad englobante, TCat por su parte busca fundamentar las matemáticas como una realidad en sí misma.

Referencias bibliográficas

Awodey, S. (1996): "Structure in Mathematics and Logic: A categorical Perspective", *Philosophia Mathematica*, 4, pp. 209-237.

Awodey, S. (2004): "An Answer to Hellman's Question: 'Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?'", *Philosophia Mathematica*, 12 (1), pp. 54-64.

Benacerraf, P. (1965): "What Numbers Could Not Be". *The Philosophical Review*, 74 (1), pp. 47-73.

Bourbaki, N. (1950): "The Architecture of Mathematics". *The American Mathematical Monthly*, 57, (4), pp. 221-232.

Bourbaki, N. (1968): *Theory of Sets*. English translation of volumen 1 of *Élements de Mathématiques.* 10 vols. Paris: Hermann.

Caramello, O. (2010): "The unification of Mathematics via Topos Theory". En *arXiv:1006.3930v1*.

Feferman, S. (1969): "Set-theoretical Foundations of Category Theory", in M. Barr, et a., eds., *Reports of the Midwest Category Seminar III, Lecture Notes in Mathematics* 106, American Mathematical Society, 201-247.

Hellman, G. (1989). *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*. UK: Oxford University Press.

Hellman, G. (2003): "Does category theory provide a framework for mathematical structuralism?", *Philosophia Mathematica*, 11 (2), pp. 129-157.

Leinster, T. (2014): *Basic Category Theory*. UK: Cambridge University Press.

Mac Lane, S. and Moerdijk, I. (1992): *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, New York: Springer-Verlag.

Shapiro, S. (1997): *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford university Press.

Zalamea, F. (2009): *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.