Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias
ISSN: 1856-8327
revistaiiaynt@gmail.com
Universidad de Carabobo
Venezuela

Cepeda Valero, Óscar Mauricio; Jiménez Sánchez, Luis Felipe
Modelo de control óptimo para el sistema Producción-Inventarios
Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias, vol. V, núm. 16, junio, 2016, pp. 35 -44
Universidad de Carabobo
Carabobo, Venezuela

Año 9, Vol. V, N° 16
ISSN: 1856-8327

Modelo de control óptimo para el sistema Producción-Inventarios

Model optimal control for Production-Inventory system

Óscar Mauricio Cepeda Valero; Luis Felipe Jiménez Sánchez

Palabras clave: Control óptimo, sistema, producción-inventarios, precio, determinístico.
Key words: Optimal Control, System, Production-inventory, Price, deterministic.

RESUMEN

El presente artículo muestra la construcción de un modelo teórico de control óptimo, aplicado a la administración de inventarios determinísticos y dinámicos. El modelo define el nivel de inventario como variable de estado y el nivel de producción como variable de control. La aplicación del modelo brinda información de cuánto producir y cuánto mantener en el stock. La solución de dicho modelo se hace analíticamente, aplicando el cálculo de variaciones y el principio del máximo de Pontrygain. De igual manera se muestra el efecto directo que tendrá el comportamiento de los precios y el deterioro, sobre el inventario.

ABSTRACT

This article presents the construction of a theoretical model of optimal control, applied to the administration of deterministic and dynamic inventory. The model defines the inventory level as state variable and the production level as a control variable. Applying the model provides information on how to produce and how much to keep in stock. The solution of this model is done analytically, using the calculus of variations and the principle of maximum Pontrygain. Similarly, the direct effect will the behavior of prices and deterioration of the inventory is shown.

INTRODUCCIÓN

En las organizaciones enfocadas a la producción de bienes de consumo, los costos de inventarios afectan en un 25% las utilidades anuales de la empresa (Chavéz, 2009). Controlar los inventarios y lograr una administración efectiva de ellos, puede mejorar notablemente las utilidades del productor. En este artículo, se presenta la construcción de un modelo de inventarios - producción en busca obtener ese control de inventarios.

La minimización de los costos de inventarios, pasan por diferentes metodologías como: investigación de operaciones, formulaciones matemáticas y teorías contables. Parte de esta investigación, muestra los diferentes aportes que se han hecho desde la ingeniería con resultados efectivos. Sin embargo, estas metodologías no incluyen algunas variables que para el caso de estudio podrían dar una nueva perspectiva y conceptualización del

Año 9, Vol. V, N° 16
ISSN: 1856-8327

comportamiento de los inventarios dentro de una empresa. –ver por ejemplo (Al-Khedhairi & Tadj, 2006; Baten & Kamil, 2009; Benhadid, Tadj, & Bounkhel, 2008; Bounkhel, Tadj, & Benhadid, 2005; López Borbón, 2007)

La propuesta de este trabajo es hacer uso de un modelo de inventarios dinámicos (dependientes del tiempo) con inclusión de variables económicas como producción, la demanda del mercado, la influencia de los inventarios en la variación de precios y el deterioro. Es decir, el modelo busca dar respuesta a algunos conceptos que se toman en cuenta en áreas económicas, como: efecto del inventario disponible en el precio del producto, efecto de la producción en los precios, y como a la vez los precios afectan las decisiones de producción e inventarios en la empresa.

Revisión de Literatura

El problema de producción – inventarios, se ha discutido desde diferentes puntos de vista, donde He, Jewkes, & Buzacott, (2002) y Kutzner & Kiesmüller, (2013) han tratado este problema desde procesos de decisión Markovianos, permitiendo la evaluación de diferentes políticas de reemplazamiento. Mientras tanto Zhang, Hua, & Benjaafar, (2012) ha tratado el problema desde programación dinámica estocástica. Por otra parte, se encuentran los modelos básicos basados en la cantidad económica de producción (Salameh & Jaber, 2008; Mukhopadhyay & Goswami, 2014) que parten desde el EOQ con sus diversas variantes (Khan, Jaber, Guiffrida, & Zolfaghari, 2011).

Una herramienta que lleva algún tiempo abordando el problema del sistema inventarios-producción, es la teoría de control óptimo, profundizando en productos con deterioro a lo largo del tiempo (Al-Khedhairi & Tadj, 2006; M. A. Baten & Kamil, 2011). Los planteamientos realizados hasta el momento han permitido incorporar diferentes distribuciones de demanda (Bardey, 2006) y dar soluciones a partir del principio del máximo de Pontrygain, apoyándose en el principio básico de la programación dinámica y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) tal como lo hace Al-Khedhairi & Tadj, (2006) en su estudio.

En el trabajo de Prudnikov, A. P., Brychkov, I. A., & Marichev, (1998) se estudian los inventarios con demanda decreciente, dándole importancia al sistema producción-inventarios en forma estocástica, este modelo es desarrollado a través del principio de programación dinámica y la ecuación de Ricatti. El trabajo incluye una política de revisión continua que responde al modelo de H-J-B en una dimensión. M. A. Baten & Kamil, (2009) estudian los inventarios con demanda decreciente, dándole importancia al sistema producción-inventarios en forma estocástica. De igual manera, el desarrollo del modelo, se apropia del principio de programación dinámica y la ecuación de Ricatti.

Por otra parte, el trabajo de El-Gohary, Tadj, & Al-Rasheedi, (2009) considera un modelo de producción con inventarios en deterioro, se propone una producción esperada con el fin de minimizar el costo asociado al deterioro y al inventario. Se muestra un algoritmo solución evaluando cada uno de los parámetros asociados con su respectivo efecto sobre el costo. Bajo la misma metodología Wilson, MacDonald, y Anderson, (2011) evalúan el parámetro del precio como un modelo Pricing, dándole mayor importancia al efecto económico, al igual que Khmelnitsky y Gerchak, (2002) que incorporan los beneficios obtenidos por producto y los efectos de la demanda.

Finalmente, en el trabajo realizado por Benhadid et al., (2008) se muestra un modelo de inventarios con costos dinámicos y con deterioro en los productos. Se evalúan las políticas periódica y continua. La aplicación del modelo la hacen por medio de diferentes ejemplos llegando a mostrar los diferentes comportamientos de los inventarios y la producción. El estudio de Benhadid et al., (2008) es la base primordial para el desarrollo de nuestra investigación.

METODOLOGÍA

Para el desarrollo del modelo se tomó como base la construcción de Benhadid et al., (2008), en donde existe una ecuación diferencial de movimiento sujeta a restricciones de balance de productos en un diferencial de tiempo. También incluye los costos generados por el deterioro y la demanda esperada. Con esta referencia, se realizó una solución analítica al modelo desarrollado Bardey, (2006). En estos modelos se evidencia la falta de inclusión de funciones económicas en el modelo y como afectan el comportamiento de los inventarios. Para ello, se formularon algunas posibles funciones de precio y demanda que logran relacionar el comportamiento de los inventarios en términos de la cantidad producida y la cantidad vendida. Se trabajó sobre estas funciones hasta encontrar el modelo desarrollado en este artículo.

Dentro del modelo se formula la función objetivo que obedece a la utilidad recibida por el productor en el tiempo, afectada por los ingresos (estos por los precios) y los costos asociados a producir y a mantener el inventario. La maximización de utilidades se encuentra sujeta a la restricción de movimiento del inventario visto como un sistema dinámico. A partir de las ecuaciones (estado y control) se aplican algunas funciones para simular el comportamiento de la demanda, la producción, los precios y el deterioro respecto a los inventarios, concluyendo en un análisis de sensibilidad.

RESULTADOS

Desarrollo del modelo

La notación del modelo desarrollado es: I_0 siendo el nivel de inventario inicial – puede verse como el inventario del periodo anterior-; p_0 siendo el precio inicial con el que ingresa el producto al inventario; $P(t)$ es la producción en el tiempo t ; $D(t)$ es la demanda en el tiempo t; $h(t)$ es el costo de mantener en el tiempo t; K es el costo de producir; $\bar{s}(I(t))$ es el

Año 9, Vol. V, N° 16
ISSN: 1856-8327

precio en función del inventario en el tiempo t; $\theta(t)$ es la función de deterioro del producto en el tiempo t, ρ es la constante de deterioro; $\hat{I}(t)$ es el inventario esperado (representa la política de inventario esperada), puede ser una constante o función en el tiempo; $\hat{P}(t)$ es la producción esperada, puede ser una constante o función en el tiempo; Y son los ingresos operacionales; U es la utilidad total. La utilidad depende del tiempo que afecta la función de la variable de estado y control; C_T es el costo total asociado a mantener inventarios; H es el Hamiltoniano utilizado para solución y T es el horizonte de planeación.

Inicialmente la ecuación de estado obedece al comportamiento (o movimiento) del inventario al inicio del tiempo $\boldsymbol{t}$ visto como un sistema dinámico – balance de entradas y salidas en el tiempo - Adicional incluye una función de deterioro. Esta ecuación de estado (Ecuación 1) es utilizada por Benhadid et al., (2008)

$$\frac{d\boldsymbol{I}}{d\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t}) \qquad (1)$$

En la ecuación (1) se identifica que $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t})$ es la variable de estado y $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$ es la variable de control.

La función de los costos totales se asocia a las penalizaciones por no cumplir las metas de inventario o producción esperadas, así que se representa el alejamiento de las políticas por (2) y (3) que repercuten en los costos presentados en (4):

$$\Delta\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t}) - \hat{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{t})) \qquad (2)$$

$$\Delta\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) - \hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{t})) \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{C_T} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})\Delta^2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}\Delta^2\boldsymbol{P} \qquad (4)$$

La ecuación (5) representa la función de beneficios resultante de la diferencia de los ingresos operacionales y los costos; dentro de éstos últimos se deben incluir los costos de producción y los costos de mantener el inventario. Para determinar los ingresos operacionales se relaciona el precio y el nivel de inventario como unidad de ingreso, multiplicado por la demanda en el tiempo. Allí es donde se encuentra el aporte más importante a la investigación, desglosado en las ecuaciones (5), (6) y (7).

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{C_T} \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{t})\bar{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t})) \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{t})\bar{\boldsymbol{s}}\big(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t})\big) - [\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})\Delta^2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}\Delta^2\boldsymbol{P}] \qquad (7)$$

En el caso del ingreso (6), se plantea el efecto del inventario en el mercado sobre el precio del producto. En este orden de ideas, se asemeja a la función de demanda inversa en la cual según la cantidad existente en el mercado el precio del producto se verá afectado. Es posible tomar diferentes funciones de demanda (Lambertini, 2013)

Con la inclusión de los ingresos la función (7) se convierte en nuestra función objetivo a maximizar y estará sujeta a la ecuación (1) con sus respectivas condiciones iniciales. Con esto se ha formulado un problema de control óptimo que se muestra en las ecuaciones de la (8) a la (11):

$$\underset{MAX}{U} = \int_0^T U(I(t), P(t), t)dt \qquad (8)$$
s.a

$$\frac{dI}{dt} = P(t) - D(t) - \theta(t)I(t) \qquad (9)$$

$$I(0) = I_0 \qquad (10)$$

$$I(T) = I_T \qquad (11)$$

Para el desarrollo y análisis de los modelos de control óptimo ya existe literatura que presenta los diferentes métodos de solución (Pecha Castiblanco, 2012).

Resultados
La solución del problema de control utiliza el principio del máximo de Pontrygain (ecuación 12) para el cálculo de variaciones (Muñoz Ruz, 2014) y los métodos de solución dados por Pecha Castiblanco (2012). – A continuación, se muestra la solución del Hamiltoniano descontado utilizado en esta investigación -

$$H(P(t), I(t), \lambda(t), t) \geq H(P^*(t), I(t), \lambda(t), t) \qquad (12)$$

$$H(P(t), I(t), \lambda(t), t) = U(I(t), P(t), t) + \lambda(t)\frac{dI}{dt} \qquad (13)$$

La ecuación (13) es equivalente al Hamiltoniano, presentado a continuación:

$$H^D = \{D(t)\bar{s}(I(t)) - [h(t)\Delta^2 I + K\Delta^2 P]\} + \lambda[P(t) - D(t) - \theta(t)I(t)] \qquad (14)$$

De la ecuación (14) se obtiene:

$$\frac{\partial H^D}{\partial I(t)} = -\frac{d\lambda}{dt} \qquad (15)$$

$$\frac{\partial H^D}{\partial P(t)} = 0 \qquad (16)$$

$$\frac{\partial H^D}{\partial \lambda(t)} = \frac{dI}{dt} \qquad (17)$$

Con (15) (16) y (17) se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales a solucionar. Cabe mencionar que (17) muestra la verificación de la ecuación de estado, es decir se cumple el principio de Pontrygain (teorema 1) (Bardey, 2006)
La ecuación (15) es equivalente a:

$$D(t) * \frac{\partial[\bar{s}(I(t))]}{\partial I(t)} - 2h(t)\Delta I - \lambda\theta(t) = -\frac{d\lambda}{dt} \qquad (18)$$

De la ecuación (16) se obtiene (19), donde deducimos $P(t)$ (ecuación 20):

$$\lambda = 2K\Delta P(t) \qquad (19)$$

$$P(t) = \frac{\lambda}{2K} + \hat{P}(t) \qquad (20)$$

Reemplazando (20) en (18), se obtiene (21):

$$D(t)\frac{\partial[\bar{s}(I(t)]}{\partial I(t)} - 2h(t)\Delta I - 2K\Delta P\theta(t) = -2K\frac{dP}{dt} + 2K\frac{d\hat{P}}{dt} \qquad (21)$$

Año 9, Vol. V, N° 16
ISSN: 1856-8327

Por medio de diferenciación de la ecuación de estado (1) se obtiene (22):

$$\frac{dP}{dt}=\frac{dD}{dt}-I(t)\frac{d\theta}{dt}-\theta(t)\frac{dI}{dt}-\frac{d^2I}{dt^2} \qquad (22)$$

Reemplazando (22) y (19) en la ecuación (21) se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden (23), con las condiciones iniciales (10) y (11).

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{-D(t)*\frac{\partial[\bar{s}(I(t))]}{\partial I(t)}}{2K}+I(t)\left[\frac{h(t)}{K}+\theta^2(t)-\frac{d\theta}{dt}\right]=\frac{h(t)}{K}\hat{I}(t)-\theta(t)\left[D(t)-\hat{P}(t)\right]+\frac{d\hat{P}}{dt}-\frac{dD}{dt} \qquad (23)$$

A partir de la ecuación de segundo orden (23), es posible encontrar una solución por medio de métodos numéricos. Para ello se desarrolla un ejemplo numérico presentado a continuación.

Ejemplo numérico: Se tomó como referencia el caso de Al-Khedhairi & Tadj, (2006). Para ello se tomó I_0: 5 unidades, con demanda de $D(t)=100(1+sen(t))$, el costo de mantener inventario por fuera de la política $h(t)=1+t$; el costo de producir por fuera de la cantidad esperada $K=3$; la función de deterioro del producto en el tiempo t, $\theta(t)=0{,}001+0{,}001t$ como inventario esperado $\hat{I}(t)=5$ unidades.

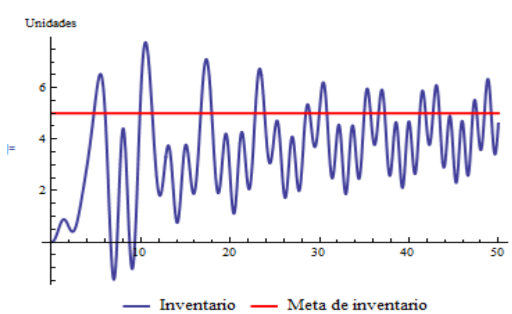
La producción esperada teniendo en cuenta $I(0)=I_0$ y la ecuación de estado (1) nos permite obtener (24), de la misma manera que lo define (Al-Khedhairi & Tadj, 2006)

$$\boldsymbol{\hat{P}(t)=D(t)+\theta(t)I(t)} \qquad (24)$$

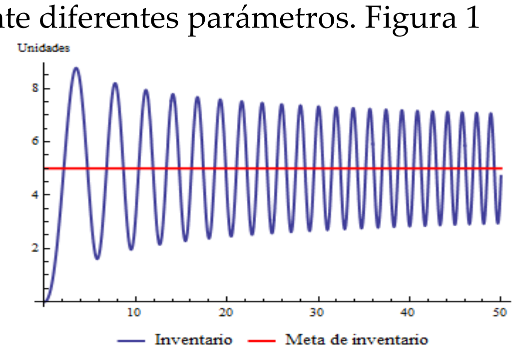
Se tomó una función de precio dependiente de la cantidad de inventario $\bar{s}(I(t))=50-0{,}2I(t)$. Esta función representa la idea de demanda inversa, en la cual el inventario es el producto disponible para vender en el instante. Acorde a esta cantidad existente en el mercado se afectará el precio.

Para futuras investigaciones, la función de precio se puede ajustar, teniendo en cuenta que el producto a ofrecer también se afectaría por la capacidad de producción. Sin embargo, en mercados en los cuales la producción no es inmediata, la ecuación (24) es una adecuada aproximación.

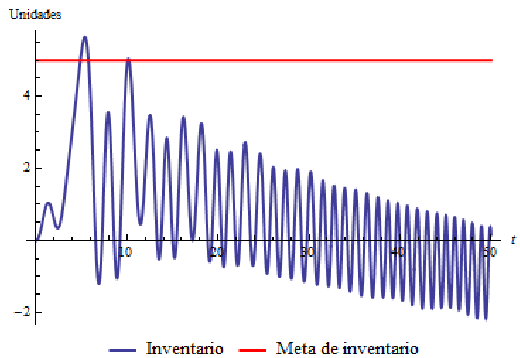
El modelo se corrió en Wolfram Mathematica 9.0, obteniendo las siguientes gráficas de comportamiento de inventario ante diferentes parámetros. Figura 1



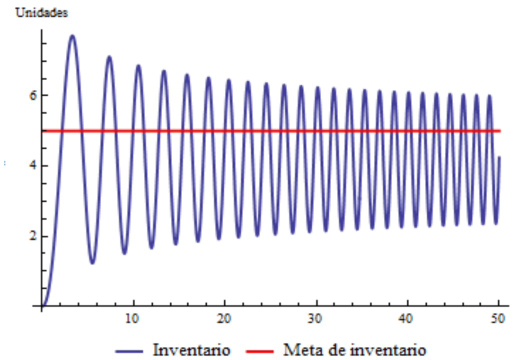
(a)



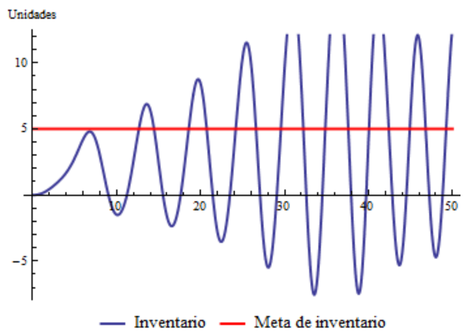
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 1. Análisis de parámetros del modelo en el comportamiento de inventario. (a) caso base. (b) disminución pendiente de la función de precio (0,001) (c) aumento pendiente en función de deterioro (0,1) (d) cambio función de demanda (5t) (e) incremento costo de alejamiento de producción esperada

En la Figura 1(a), se observa el comportamiento del inventario del caso base, donde se presentan dos tendencias, un oscilamiento alrededor de la política de inventario esperada, lo que es propio de un modelo de control, pero adicionalmente se ve el efecto de la función de demanda sinusoidal. A partir de este caso base se evaluaron diferentes parámetros del modelo, encontrando: 1) La relación de cambio del precio con el inventario, representada en la pendiente de la función (ecuación 24) afecta primordialmente la estacionalidad asociada al tipo de demanda (figura 1b). 2) El incremento de la tasa de deterioro del inventario genera alejamientos de la política de inventarios esperados (figura 1c). 3). El comportamiento de la función de demanda es significativa para la estabilidad del inventario, afectando los ciclos de inventario. En el caso de la figura 1d, al quitar el componente cíclico de la demanda se observa una continuidad en los ciclos del inventario. 4) Los costos de alejamiento de la producción esperada, pueden generar una desestabilidad en el control de inventarios, tal como se observa

en la figura 1e, donde un incremento del costo desestabilizó totalmente el control de los inventarios. Sin embargo, en ninguno de los casos evaluados se afectó el tiempo para llegar a un estado de control de inventarios.
Un modelo de este tipo presenta un gran valor al relacionar factores microeconómicos con factores operativos. El modelo representa fácilmente a productos de tipo agrícola, en los cuales es común tomar una decisión de producción en diferentes temporadas, generando una acumulación de productos en el mercado, que finalmente repercutirán en un cambio en los precios.
Para que el modelo sea representativo y mucho más aplicable al sector productivo, requiere el desarrollo de un adecuado análisis de las funciones de producción e inventarios, que permitirían tomar las mejores decisiones de producción a lo largo plazo.

CONCLUSIONES

En este artículo se desarrolló un modelo de control de inventarios con el fin de maximizar los beneficios, utilizando la teoría de control óptimo. Se encontraron relaciones óptimas de inventario y de producción para el caso de estudio. Con ello se logra responder a la pregunta ¿cuánto producir? y ¿cuánto mantener en el stock?, teniendo en cuenta las diferentes variaciones que pueden tener los parámetros en el transcurso del tiempo.
Bajo la estructura propuesta, las diferentes decisiones de nivel de inventario dependiente del nivel de producción tienen un impacto directo sobre los precios y su comportamiento. Este desarrollo es significativo teniendo en cuenta que en los modelos más tradicionales del tipo EOQ no se toman en cuenta los efectos de la existencia del producto en el mercado.
Hasta hace poco se han involucrado en modelos los precios con las existencias en los modelos del tipo inventory – pricing (Wilson et al., 2011), sin embargo, siguen siendo modelos que no evalúan los efectos de cambios en el tiempo. Siendo importante aporte, lo presentado en esta investigación basada en una optimización dinámica.
A través de un ejemplo de aplicación se encontró que el modelo es capaz de analizar la estabilidad en el comportamiento de los inventarios y producción, enfocados en maximizar los beneficios. Es decir, con una selección adecuada de parámetros para el sistema dinámico producción-inventario se podrá llegar más fácilmente a las políticas de inventario deseadas. Como es el caso de una organización que enfrenta unos altos costos por no producir la cantidad requerida, generaran efectos en un descontrol de la cantidad de inventarios.
Se denota que la teoría de control óptimo puede ser utilizada para desarrollar modelos que relacionen distintos tipos de variables. Como se vio en esta investigación, donde, se logró relacionar los costos de inventario con los beneficios

reflejados a través del cumplimiento de la demanda para una empresa manufacturera.

Dentro de las recomendaciones del estudio y para futuros trabajos se pretende incluir las variables en términos estocásticos para evidenciar los comportamientos en términos de datos históricos, lo cual beneficiaría a las organizaciones, que, al tener la trazabilidad necesaria de su producción y demanda, podrán planear un inventario esperado que genere los mayores beneficios. También se espera poder realizar un análisis más profundo sobre el tipo de bienes que se almacenarán en el stock, para mostrar como es el comportamiento acorde al tipo de productos, donde cada uno tendrá diferentes funciones de demanda que afectaran el comportamiento del inventario.

REFERENCIAS

Al-Khedhairi, A., & Tadj, L. (2006). Optimal Control of a Production Inventory System with Weibull Distributed Deterioration. *Applied Mathematical Sciences*, 1–10.

Bardey, D. Y. H. B. (2006). Teoría del control óptimo: ¡Una guía para principiantes! *Universidad Del Rosario*, (87), 20.

Baten, A., & Kamil, A. A. (2009). Analysis of inventory-production systems with Weibull distributed deterioration. *International Journal of Physical Sciences*, *4*(11), 676–682.

Baten, M. A., & Kamil, A. A. (2009). An Optimal Control Approach to Inventory-Production Systems with Weibull Distributed Deterioration. *Journal of Mathematics and Statistics*, *5*(3), 206–214. http://doi.org/10.3844/jmssp.2009.206.214

Baten, M. A., & Kamil, A. A. (2011). Optimal Production Control in Stochastic Manufacturing Systems with Degenerate Demand. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, *1*(1), 89–96. http://doi.org/10.4208/eajam.190609.190510a

Benhadid, Y., Tadj, L., & Bounkhel, M. (2008). Optimal control of production inventory systems with deteriorating items and dynamic costs. *Applied Mathematics E-Notes*, *8*, 194–202. Retrieved from http://www.emis.ams.org/journals/AMEN/2008/070311-2.pdf

Bounkhel, M., Tadj, L., & Benhadid, Y. (2005). Optimal control of a production system with inventory-level-dependent demand. *Applied Mathematics E-Notes*, *5*, 36–43.

Chavéz, J. H. (2009). Una verdad incómoda: el costo de mantener inventarios. *Negocios Globales: Logística, Transporte Y Distribución*, p. 1.

El-Gohary, A., Tadj, L., & Al-Rasheedi, A. F. (2009). Using optimal control to adjust the production rate of a deteriorating inventory system. *Journal of Taibah University for Science*, *2*, 69–77. http://doi.org/10.1016/S1658-3655(12)60009-0

He, Q. M., Jewkes, E. M., & Buzacott, J. (2002). Optimal and near-optimal inventory control policies for a make-to-order inventory-production system. *European Journal of Operational Research*, *141*, 113–132. http://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00257-0

Khan, M., Jaber, M. Y., Guiffrida, a. L., & Zolfaghari, S. (2011). A review of the extensions of a modified EOQ model for imperfect quality items. *International Journal of Production*

Economics, *132*(1), 1–12. http://doi.org/10.1016/j.ijpe.2011.03.009

Khmelnitsky, E., & Gerchak, Y. (2002). Optimal control approach to production systems with inventory-level-dependent demand. … *Control, IEEE Transactions on*, 1–12. Retrieved from http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=983360

Kutzner, S. C., & Kiesmüller, G. P. (2013). Optimal control of an inventory-production system with state-dependent random yield. *European Journal of Operational Research*, *227*(3), 444–452. http://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.01.006

Lambertini, L. (2013). On the Feedback Solutions of Di erential Oligopoly Games with Hyperbolic Demand Curve and Capacity Accumulation. *European Journal of Operational Research*, (236(1)), 272–281.

López Borbón, J. H. (2007). *Control óptimo de sistemas de inventarios con costo promedio*. Universidad de Sonora.

Mukhopadhyay, A., & Goswami, A. (2014). Economic Production Quantity (EPQ) model for three type imperfect items with rework and learning in setup. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, *4*(1), 57–65. http://doi.org/10.11121/ijocta.01.2014.00170

Muñoz Ruz, R. (2014). *El Principio del Máximo de Pontryagin*. Universitat de Barcelona.

Pecha Castiblanco, A. (2012). *Optimización estática y dinámica en economía.* Univ. Nacional de Colombia.

Prudnikov, A. P., Brychkov, I. A., & Marichev, O. I. (1998). (1998). *Integrals and series: special functions* (Vol. (Vol. 2).). CRC Press.

Salameh, M. K., & Jaber, M. Y. (2008). Economic production quantity model for items with imperfect quality subject to learning effects. *International Journal of Production Economics*, *115*, 143–150. http://doi.org/10.1016/j.ijpe.2008.05.007

Wilson, J. G., MacDonald, L., & Anderson, C. (2011). A comparison of different demand models for joint inventory-pricing decisions. *Journal of Revenue and Pricing Management*, *10*(6), 528–544. http://doi.org/10.1057/rpm.2011.32

Zhang, W., Hua, Z., & Benjaafar, S. (2012). Optimal inventory control with dual-sourcing, heterogeneous ordering costs and order size constraints. *Production and Operations Management*, *21*(3), 564–575. http://doi.org/10.1111/j.1937-5956.2011.01294.x

Autores

Óscar Mauricio Cepeda Valero. Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad Central, Bogotá, Colombia.
Email: ocepedav@ucentral.edu.co

Luis Felipe Jiménez Sánchez. Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad Central, Bogotá, Colombia.
Email: ljimenezs2@ucentral.edu.co

Recibido: 11-01-2016 **Aceptado:** 28-05-2016