



Revista de Administração - RAUSP
ISSN: 0080-2107
rausp@edu.usp.br
Universidade de São Paulo
Brasil

de Oliveira, Mauri Aparecido; de Ávila Montini, Alessandra; Mendes-Da-Silva, Wesley; Reed Bergmann, Daniel
Estabilidade de preços de ações no mercado de capitais brasileiro: um estudo aplicando redes neurais e expoentes de Lyapunov
Revista de Administração - RAUSP, vol. 46, núm. 2, abril-junio, 2011, pp. 161-177
Universidade de São Paulo
São Paulo, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=223421738005>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

Estabilidade de preços de ações no mercado de capitais brasileiro: um estudo aplicando redes neurais e expoentes de Lyapunov

RESUMO

Neste artigo é apresentado um estudo sobre a estabilidade dos preços de mercado de ações para duas categorias de empresas, denominadas industrial (IND) e outros setores (OSE), no período de 2 de janeiro de 1995 a 2 de janeiro de 2008. Em outras palavras, é analisada a estabilidade dos preços de mercado para o período anterior à crise de 2008, iniciada com os títulos *subprime* dos Estados Unidos. São analisadas as implicações da estabilidade do processo de geração de retorno por paradigmas de racionalidade. A verificação da estabilidade foi feita por meio da aplicação de expoentes de Lyapunov. São apresentados resultados sobre a estabilidade dos preços para as duas categorias de empresas: as indústrias formadas por Acesita, Ambev, Aracruz, Braskem, Duratex, Fosfertil, Gerdau, Klabin, Randon, Sadia, Sid Nacional, Souza Cruz, Unipar, Usiminas e VCP; e as empresas da categoria outros setores, formadas por Ampla Energia, Bradesco, Brasil Telecom, Cemig, Eletrobrás, Itaubanco, Itausa, JB Duarte, Pronor, Besc, Alfa Financeira e Inepar. Um diagrama de dispersão do logaritmo dos preços sem tendência *versus* os retornos dessas duas categorias (ou *portfolios*) mostrou um padrão caótico nos preços das ações, indicando a presença de não linearidade. No entanto, calculando-se os expoentes de Lyapunov, foram obtidos valores negativos. Isso indica que as flutuações das 30 empresas analisadas resultam de processos de difusão em vez de dinâmicas não lineares. A racionalidade do comportamento dos preços é estudada por meio da verificação dos resíduos gerados a partir de previsões de modelos ARMA, NAIVE e de redes neurais *feedforward*.

Palavras-chave: mercado de capitais brasileiro, finanças comportamentais, redes neurais, expoentes de Lyapunov.

Mauri Aparecido de Oliveira
Alessandra de Ávila Montini
Wesley Mendes-Da-Silva
Daniel Reed Bergmann

Recebido em 29/abril/2009
Aprovado em 15/dezembro/2010

Sistema de Avaliação: *Double Blind Review*
Editor Científico: Nicolau Reinhard

DOI: 10.5700/rausp1005

Mauri Aparecido de Oliveira, Engenheiro Mecatrônico pela Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, Mestre e Doutor em Administração pela Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, é Pós-Doutorando em Estatística Aplicada no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo e Professor na Universidade Nove de Julho (CEP 01504-000 – São Paulo/SP, Brasil).
E-mail: mauriao@usp.br

Endereço:
Universidade Nove de Julho
Departamento de Ciências Gerenciais
Rua Vergueiro, 235
01504-000 – São Paulo – SP

Alessandra de Ávila Montini, Bacharel e Mestre em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Doutora em Administração de Empresas na Área de Métodos Quantitativos pela Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, é Professora de Métodos Quantitativos na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo (CEP 05508-010 – São Paulo/SP, Brasil).
E-mail: amontini@usp.br

Wesley Mendes-Da-Silva, Doutor em Administração na área de Finanças pela Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, é Professor do Departamento de Contabilidade, Finanças e Controle da Escola de Administração de Empresas de São Paulo da Fundação Getulio Vargas (CEP 01332-000 – São Paulo/SP, Brasil).
E-mail: mr.mendesdasilva@gmail.com

Daniel Reed Bergmann, Bacharel e Mestre em Ciências Contábeis pela Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, é Doutorando em Administração na área de Finanças na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo (CEP 05508-010 – São Paulo/SP, Brasil) e Professor em cursos das instituições Fundação Instituto de Administração, Saint Paul Escola de Negócios, Fundação Instituto de Pesquisas Contábeis, Atuariais e Financeiras, e Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado.
E-mail: danielrb@usp.br

1. INTRODUÇÃO

O objetivo neste trabalho é mostrar como a estabilidade de um sistema dinâmico estocástico, o mercado de ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), é medida usando os expoentes de Lyapunov. Especificamente, foi utilizada uma rede neural *feedforward* para estimar os expoentes, sendo um expoente positivo uma definição operacional de caos. Além disso, a racionalidade das previsões é avaliada a partir dos erros de previsão gerados por modelos: que consideram somente a informação do último instante (NAIVE), modelos autorregressivos de média móvel (ARMA) e redes neurais artificiais (RNA).

Os conceitos de racionalidade, estabilidade e comportamento caótico são importantes em diversas áreas incluindo economia e finanças, principalmente porque oferecem formas alternativas de explicações para as variáveis econômicas e financeiras. Os resultados foram obtidos a partir de duas categorias de empresas que possuem ações negociadas em bolsa de valores. A escolha das empresas não seguiu um padrão predeterminado, basicamente foi guiada pela disponibilidade de dados que pudessem compor um conjunto de 30 empresas divididas em dois grupos de 15, chamados de indústrias (IND) e outros setores (OSE).

Com relação ao período de escolha, ele foi determinado levando-se em conta o objetivo de realizar um estudo do mercado de ações anterior ao que se está convencionando chamar de crise financeira de 2008. Em outras palavras, este estudo contempla uma próxima etapa na qual a estabilidade dos preços de mercado será analisada para o período da crise de 2008, iniciada com os títulos *subprime* dos Estados Unidos. Após a formação das categorias, cada uma delas foi dividida em três grupos (LOW, MID e HIG), de acordo com seu valor de mercado. Ou seja, a divisão (LOW, MID e HIG) foi realizada de acordo com a média dos valores negociados no período analisado, sendo cada grupo composto por um número de cinco empresas. As empresas classificadas no grupo LOW têm as menores médias de valores de preços de fechamento. No grupo HIG têm-se as empresas com os maiores preços de fechamento e no grupo MID concentram-se as empresas com preços de fechamento intermediários a LOW e HIG.

O resultado é um total de seis *portfolios*: três industriais (IND_LOW, IND_MID e IND_HIG) e três dos outros setores (OSE_LOW, OSE_MID e OSE_HIG).

A estabilidade e a natureza dos caminhos seguidos pelos preços das ações são avaliadas pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov. Com esse método é possível estabelecer a presença de não linearidade na série de retornos (WILKENS, THOMAS e FOFANA, 2004). Além disso, o cálculo de expoentes de Lyapunov é uma alternativa para a verificação da presença de raiz unitária na série temporal (WOLF *et al.*, 1985; HSIEH, 1989; HSIEH, 1991).

O trabalho inicia-se com uma revisão dos conceitos de não linearidade, em que um dos principais testes empregados é o

BDS, e de agentes heterogêneos que caracterizam o comportamento do mercado financeiro. As finanças comportamentais utilizam modelos nos quais alguns agentes não são completamente racionais, em função disso é realizada uma discussão sobre o assunto de forma a preparar para o teste de racionalidade utilizado na análise de resultados. A seguir há uma breve discussão conceitual sobre expoentes de Lyapunov e redes neurais do tipo *feedforward*. Na seção dados e metodologia, são apresentadas as empresas escolhidas para a realização dos testes e a caracterização do trabalho como estudo quantitativo. São apresentadas as análises, os resultados obtidos e, por fim, tem-se a conclusão do trabalho.

2. REVISÃO TEÓRICA

2.1. Não linearidade

Sistemas não lineares podem ser estocásticos ou caóticos. Enquanto séries temporais não caóticas são dominadas por elementos estocásticos, sistemas caóticos são sistemas determinísticos que podem ser semelhantes a ruídos brancos. Existem poucas evidências de caos em mercados financeiros, as ferramentas adquiridas ao longo dos últimos anos (por exemplo, modelos ARCH e suas extensões) ainda são úteis para analisar dados financeiros, enquanto novos modelos de aprendizagem dinâmica estão sendo desenvolvidos.

Uma das tecnologias mais utilizadas em sistemas que envolvem aprendizagem são as redes neurais artificiais (RNA). Outros sistemas com capacidade de aprendizagem incluem algoritmos genéticos e sistemas *fuzzy*.

As RNA têm sido utilizadas para detectar não linearidades em dados do mercado financeiro (LEE, WHITE e GRANGER, 1993), bem como aproximar funções não lineares (KUAN e LIU, 1995). O teste BDS, desenvolvido por Brock (1996), é utilizado para verificar se a série dos log-retornos de ações é formada por observações independentes e identicamente distribuídas (IID). O teste BDS é um teste *portmanteau* relacionado à dependência em séries de tempo. Conforme Fernandes e Preumont (2003, p.4), o BDS apresenta um alto poder contra uma variedade de modelos lineares, não lineares e não estacionários.

2.2. Agentes heterogêneos

Finanças computacionais baseadas em agentes são uma área que envolve o desenvolvimento de modelos econômicos baseados na interação de muitos agentes heterogêneos. Algumas das ferramentas utilizadas em finanças baseadas em agentes incluem redes neurais e expoentes de Lyapunov. Para um sistema dinâmico com duas trajetórias a partir de condições iniciais diferentes, um expoente de Lyapunov positivo (negativo) diz o quanto rápido a trajetória irá divergir (convergir). Dado o expoente de Lyapunov λ e a diferença nas duas condições iniciais ϵ , pode-se encontrar o número de períodos n , no qual

as duas trajetórias irão divergir por uma amplitude R . Em outras palavras, $n = \ln(R/e)/\lambda$. Normalmente, a presença de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo indica a presença de caos. Gencay e Dechert (1992) encontraram expoentes de Lyapunov próximos de zero e interpretaram os resultados como evidência de raiz unitária em dados financeiros.

Nesse ponto é importante salientar que a teoria do caos é definida como o estudo de sistemas dinâmicos não lineares complexos – por complexo, entenda-se como uma grande quantidade de interações entre diversos agentes e não linearidade como a necessidade de recursão por meio de algoritmos matemáticos e dinâmicos, implicando não constante e não periódico. Quanto a sistema, é uma definição estudada desde cedo nos cursos de graduação em Administração, como pode ser visto em Maximiano (1997, p.238). Assim, a teoria do caos é, de forma bem geral, o estudo das mudanças em sistemas complexos por meio do uso de modelos matemáticos.

Considere-se um mercado financeiro em que exista um grupo de investidores heterogêneos, ou seja, cada um segue uma estratégia diferente para obter retornos superiores. A questão em aberto é especificar quais agentes sobreviverão ao longo do tempo e como a interação dos agentes afeta os retornos de mercado. Normalmente, as interações são não cooperativas e a heterogeneidade dos agentes está ligada à probabilidade de fracasso (ou sucesso) em seus processos de tomada de decisão. Os agentes decidem, período após período, qual fração de suas riquezas investir em ativos financeiros. Suas decisões de investimento são modeladas, de forma geral, como funções suaves das realizações passadas de preços e dividendos. Focando a dinâmica do preço do ativo em um mercado com agentes heterogêneos, algumas ferramentas como os Modelos de Agentes Heterogêneos (*Heterogeneous Agent Models* – HAM) têm sido desenvolvidas (HOMMES, 2006; ANUFRIEV e DINDO, 2007).

Brock e Hommes (1997, p.1070) propõem o conceito de equilíbrio racional adaptativo (ARE), segundo o qual a instabilidade local pode resultar de conflitos na escolha entre um conjunto de preditores ou funções esperanças:

- “Quando todos os agentes utilizam o preditor menos custoso, ‘regra de bolso habitual’, o equilíbrio do estado estacionário é instável. As variáveis endógenas começam flutuando e os erros de predição a partir do preditor menos custoso aumentam. Quando os agentes utilizam preditores mais custosos e sofisticados (tal como expectativas racionais, crenças fundamentalistas, ou aprendizagem por mínimos quadrados), as variáveis endógenas convergem para seu (único) equilíbrio de estado estacionário”.

Brock e Hommes (1997) e Grandmont (1998) consideram sistemas dinâmicos estocásticos e analisam a sequência do equilíbrio temporário de sua estrutura determinística.

Muitos modelos do tipo HAM (BROCK e HOMMES, 1998; GAUNERSDORFER, 2000; BROCK, HOMMES e WAGENER, 2005) consideram que as demandas dos agentes

não mudam com a riqueza, ou seja, exibem um padrão constante de aversão absoluta ao risco (CARA). A utilidade CARA é uma classe de funções de utilidade, também chamada de utilidade exponencial. Para alguma constante a positiva, tem a forma:

$$U(c) = -\frac{e^{-ac}}{a} \quad [1]$$

Porém, essa hipótese pode ser alterada assumindo que a demanda aumenta linearmente com a riqueza dos agentes, o que corresponde à chamada aversão ao risco relativa constante (CRRA). Se for realizada a suposição de que as preferências de um agente são dadas pela função de utilidade CRRA, tem-se:

$$U(c) = \frac{c^{1-a}}{1-a}, \quad a > 0 \quad [2]$$

em que o coeficiente a é o coeficiente de aversão ao risco relativo. Nesse caso, é fácil mostrar que a fração da riqueza investida em uma ação é constante ao longo dos níveis de riqueza.

2.3. Finanças comportamentais e eficiência de mercado

Apreçamento de ativos é um paradigma tradicional que assume que os investidores são completamente racionais. Finanças comportamentais consideram uma abordagem psicológica para o apreçamento de ativos. Existe uma ampla variedade de campos e áreas de pesquisa e aplicação oferecendo modelos alternativos ao apreçamento de ativos que consideram que nem todos os investidores são totalmente racionais. Hirshleifer (2001) fornece uma excelente revisão da literatura para isso.

Finanças comportamentais utilizam modelos nos quais alguns agentes não são completamente racionais, ou por causa das preferências ou devido a crenças erradas. Um dos principais alicerces em finanças é a hipótese de mercado eficiente (*Efficient Markets Hypothesis* – EMH). A EMH considera que a concorrência entre os investidores que buscam lucros anormais guia os preços a seu valor **correto**.

Essa hipótese não assume que todos os investidores sejam racionais, mas assume que os mercados sejam racionais. A EMH não assume que os mercados podem prever o futuro, mas assume que mercados façam previsões não viesadas do futuro. Em contraste, as finanças comportamentais assumem que, em algumas circunstâncias, mercados financeiros são informacionalmente inefficientes.

As finanças comportamentais alegam que algumas características dos preços dos ativos são mais plausivelmente interpretadas como desvios do **valor fundamental**, e que esses desvios ocorrem devido à presença dos *traders*, os quais não são completamente racionais. A teoria da arbitragem limitada sustenta que *traders* irracionais causam desvios do valor fundamental, e os *traders* racionais frequentemente são ineficazes para mudar tal situação.

Para conseguir extrair mais da estrutura desses desvios, os modelos comportamentais frequentemente assumem uma

forma específica de irracionalidade. Para auxiliar nessa tarefa, os analistas utilizam evidências experimentais extensivas compiladas por meio de psicologia cognitiva sobre os vieses sistemáticos ocasionados pelas crenças e preferências das pessoas. Para auxiliar no entendimento desse assunto, pode-se consultar Camerer (1995), Rabin (1998), Kahneman e Tversky (2000) e Gilovich, Griffin e Kahneman (2002).

Um componente importante para qualquer modelo de mercado financeiro é a especificação de como os agentes formam suas expectativas. Evidências a partir de estudos de psicologistas (RABIN, 1998) mostram que as pessoas possuem excesso de confiança e otimismo em seus julgamentos, ou seja, têm visão não realista de suas habilidades e perspectivas. Kahneman e Tversky (1974) mostram que, quando as pessoas tentam determinar a probabilidade de que um conjunto de dados A tenha sido gerado por um modelo B, ou que um objeto A pertence a uma classe B, frequentemente utilizam a heurística da representatividade. Isso significa que elas avaliam a probabilidade a partir do grau em que A reflete as características essenciais de B. Muitas vezes, a heurística da representatividade é útil, mas ela pode gerar alguns vieses perigosos.

O paradigma atual do comportamento individual em teoria de finanças está baseado na maximização da utilidade esperada e aversão ao risco, o qual tem estado sob ataque em anos recentes devido a sua imprecisão descritiva. O paradigma clássico implica analisar como os indivíduos estão tipicamente sujeitos a determinadas tendências. Psicologistas experimentais têm demonstrado que as pessoas desviam-se sistematicamente das previsões escolhidas e analisam como esse comportamento influencia o mercado (POMPIAN, 2006; FORBES, 2009; TABAK, FERNANDES e PEÑA, 2009).

2.4. Exponentes de Lyapunov

Os exponentes de Lyapunov podem ser utilizados na determinação da estabilidade de um sistema estocástico dinâmico. Especificamente, assumindo que o sistema estocástico dinâmico $f: R^n \rightarrow R^n$ gera, por exemplo, retornos de ativos

$$R_{t+1} = f(R_t) + \varepsilon_{t+1}^s \quad [3]$$

em que R_t e ε_t^s representam o estado do sistema e um choque no sistema, respectivamente, ambos no tempo $t \in [1, 2, \dots, \infty]$ (BASK, LIU e WIDERBERG, 2006).

Para um sistema n -dimensional, como mostrado na equação [3], existem n exponentes de Lyapunov, classificados do maior para o menor expoente $-\lambda_1 \geq -\lambda_2 \geq \dots \geq -\lambda_n$, que fornecem informação sobre as propriedades de estabilidade do sistema dinâmico f em [3]. Considere-se que o sistema amplifica uma pequena diferença entre os estados iniciais R_0 e R'_0 , ou seja:

$$R_t - R'_t = f^j(R_0) - f^j(R'_0) \cong Jf^j(R_0)(R_0 - R'_0) \quad [4]$$

em que $f^j(R_0) = f(\dots f(R_0))$ denota j sucessivas iterações do sistema dinâmico começando no estado R_0 , e Jf é o jacobiano do sistema

$$Jf^j(R_0) = Jf(R_{j-1}) Jf(R_{j-2}) \dots Jf(R_0) \quad [5]$$

Então, associados a cada expoente de Lyapunov, λ_i , $[i \in [1, 2, \dots, n]]$, existem subespaços aninhados $U^i \subset R^n$ de dimensão $n + 1 - i$ com a propriedade que

$$\lambda_i \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \|Jf^j(R_0)\|}{j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} \ln \|Jf(R_k)\| \quad [6]$$

para todo $R_0 \in U^i - U^{i+1}$ (BASK, LIU e WIDERBERG, 2006).

O ponto importante é que os expoentes de Lyapunov fornecem a base matemática para a análise da estabilidade de um sistema dinâmico não linear.

2.5. Redes neurais

Uma rede neural pode ser considerada como uma técnica de processamento de dados que mapeia, ou relaciona, algum tipo de entrada de informação a uma saída de dados. Por exemplo, a entrada pode estar na forma de uma imagem bidimensional com alguma parte faltante ou segmento distorcido e o processamento da saída pode produzir uma imagem corrigida. Nas aplicações em séries temporais, a entrada pode ser uma série temporal unidimensional e a saída a melhor estimativa para o próximo valor da série (AZOFF, 1994). Em geral, a tarefa executada pela rede neural pode ser dividida em quatro tipos distintos de aplicação (DUDA e HART, 1993):

- classificação – trata-se de decidir em qual categoria uma determinada entrada deverá ser inserida;
- associação – atua como uma memória de conteúdo endereçável que recorda uma saída, dada alguma parte desta na forma de uma entrada;
- codificação – comprime e codifica uma entrada por meio da produção de uma saída com dimensão reduzida. Também pode ser realizada a operação inversa, ou seja, uma decodificação;
- simulação – cria uma saída para uma entrada que atua como um estímulo, no caso da rede ter sido exposta a uma amostra de estímulo possível.

Qualquer tarefa particular pode envolver certo número das funções descritas acima. Por exemplo, a previsão de séries temporais por um *perceptron* pode envolver um elemento de compressão dos dados de entrada (codificação), outro de redução de ruído (associação), a capacidade de determinar padrões recorrentes que levem a comportamento pretidível (classificação) e a previsão de um único evento (simulação).

Algumas tarefas de processamento desempenhadas pela rede neural podem também ser realizadas por técnicas tradi-

cionais, tal como a análise de regressão (AZOFF, 1994). No entanto, nenhuma compartilha das capacidades únicas da rede neural, que podem ser sumarizadas como:

- generalização – a rede neural é inicialmente estabelecida a partir de uma fase de treinamento, em que entradas de exemplo são apresentadas à rede, que é treinada para extrair informações relevantes desses padrões. Subsequentemente, a rede tem a capacidade de generalizar, ou seja, uma entrada ainda não vista e não utilizada também poderá ser processada;
- flexibilidade – o limite de tarefas para as quais uma rede neural pode ser aplicada excede qualquer uma das técnicas tradicionais;
- modelagem não linear – o processo de mapeamento da rede neural envolve funções não lineares que podem consequentemente cobrir um limite maior da complexidade do problema. Embora existam outras técnicas não lineares, a rede neural é superior em sua generalidade e de fácil implementação prática.

A principal razão para o uso de redes neurais nas empresas é a capacidade de realizar previsão de um dado valor desejado ou variável de saída y , a partir de um conjunto de entrada de variáveis observadas x . Em séries temporais, o conjunto de variáveis de entrada x pode incluir variáveis defasadas no tempo das variáveis atuais de x , bem como valores defasados de y . O estudo de previsão inicia-se, usualmente, com um modelo de regressão dado pela seguinte equação:

$$y_t = \sum_{k=1}^K \beta_k x_{k,t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \text{ IID} \quad [7]$$

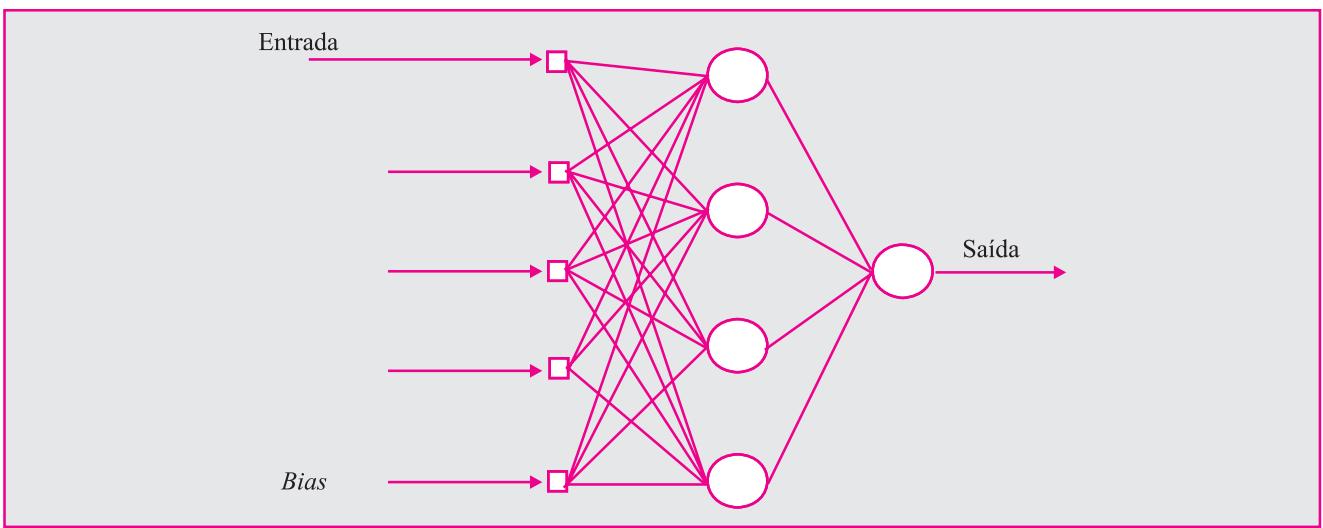
em que a variável ε_t é considerada um distúrbio aleatório, assumida como sendo normalmente distribuída, com média zero e variância σ^2 e $\{\beta^k\}$ representam os parâmetros a serem estimados. O conjunto de estimadores dos parâmetros é denotado por $\{\hat{\beta}^k\}$,

enquanto o conjunto de previsões de y geradas pelo modelo com o conjunto de coeficientes $\{\hat{\beta}^k\}$ é denotado por $\{\hat{y}_t\}$. O objetivo é selecionar $\{\hat{\beta}^k\}$ de tal forma que seja minimizada a soma das diferenças quadráticas entre as observações atuais y e as observações preditas pelo modelo linear, \hat{y} .

O modelo linear possui a propriedade útil de ter uma solução de forma fechada para resolver o problema de regressão, ou seja, de minimizar a diferença quadrática entre y e \hat{y} . Desse modo, o método de regressão linear (ou autorregressão linear) é rápido. Para a previsão de um período curto, o modelo linear é um ponto de partida razoável, ou *benchmark*, visto que, em muitos mercados, observam-se apenas pequenas mudanças simétricas na variável a ser predita, ao longo de uma tendência de longo prazo. No entanto, isso pode não ser preciso o bastante para mercados financeiros voláteis em que pode haver um processo não linear dos dados. Movimentos lentos no aumento dos preços dos ativos, seguidos por colapsos repentinos conhecidos como **bolhas**, são comuns. Dessa forma, o modelo linear pode falhar em capturar ou prever pontos de mudança acentuada nos dados. Por essa razão é que são utilizadas técnicas não lineares de previsão.

A rede neural é uma alternativa aos modelos lineares e a algumas abordagens não paramétricas para a aproximação de sistemas não lineares. A razão para o uso de uma rede neural é simples e direta. O objetivo é encontrar uma abordagem ou método o qual realize bem previsões para dados gerados por processos que frequentemente são desconhecidos e altamente não lineares, com uma quantidade pequena de parâmetros e o qual seja mais fácil de estimar que os modelos não lineares paramétricos.

Neste trabalho foram utilizadas RNA do tipo alimentadas adiante (*ou feedforward*), que incluem entradas, uma camada intermediária e uma camada de saída para realizar a previsão de um passo à frente. A figura a seguir ilustra esse tipo de RNA.



3. DADOS E METODOLOGIA

Nesta seção é apresentado o procedimento de coleta e preparação dos dados das ações das categorias IND e OSE, bem como a característica metodológica do trabalho.

3.1. Empresas selecionadas

A partir do conjunto de empresas que têm ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), foram selecionadas 30 empresas, com base no critério de que deveriam ter ações negociadas no período de 2 de janeiro de 1995 até 2 de janeiro de 2008. O período escolhido não possui motivo específico algum, procurou-se construir uma base de dados que contivesse informações com início no primeiro mandato do governo de Fernando Henrique Cardoso até o começo de 2008 (período em que a economia mundial não sofria ainda os malefícios da crise). Dessa forma, a base de dados contém 2.847 valores de preços de fechamento para cada empresa. As 30 empresas foram divididas em dois *portfolios* principais, ou categorias, uma denominada de Indústria (IND) e a outra chamada de Outros Setores (OSE) contemplando empresas dos setores de energia, financeiro e varejo, principalmente. No quadro a seguir, apresentam-se as duas categorias ou *portfolios* principais.

Depois de construídas as categorias, realizou-se a divisão de IND e OSE em três grupos (LOW, MID e HIG) de acordo

com a média dos valores negociados no período analisado, sendo cada grupo composto por um número de cinco empresas. Dessa forma, o resultado é um total de seis *portfolios*. O gráfico 1 apresenta as curvas de valores médios dos seis *portfolios* ao longo do tempo considerado. No gráfico 1, o eixo das ordenadas representa o valor médio do preço de fechamento das empresas consideradas, IND_LOW corresponde à série de preço médio das cinco empresas com menores médias de valores de fechamento dentro da categoria IND. A mesma ideia é usada para formar IND_MID e IND_HIG (que considera as cinco empresas com as maiores médias de preços de fechamento). Dessa forma, esse conceito estende-se para a formação das séries OSE_LOW, OSE_MID e OSE_HIG.

As análises posteriores a ser realizadas consideram os seis *portfolios* gerados a partir das categorias IND e OSE. Em outras palavras, a categoria IND é representada pelas seis séries temporais criadas a partir do valor médio do preço de fechamento das empresas consideradas para o setor industrial. O mesmo acontece para a categoria OSE, que representa as empresas dos outros setores da economia.

3.2. Característica metodológica

Este trabalho está baseado em teorias quantitativas de análise, sendo assim os modelos matemáticos e estatísticos são utilizados a fim de atender o objetivo da pesquisa. Os estudos quantitativos são aqueles em que os pesquisadores

Empresas por Categoria de Indústria e de Outros Setores

Empresas Divididas nas Categorias: Indústria e Outros Setores	
Empresas da Categoria Indústria	Empresas da Categoria Outros Setores
Unipar PNB	Ampla Energ ON
Klabin PN	JB Duarte PN
Sadia PN	Alfa Fin PN
Randon Part PN	Pronor PN
Aracruz PNB	Lojas Amer PN
Braskem PNA	Itausa PN
Gerdau PN	Eleva ON
Duratex PN	Brasil ON
Fostertil PN	Brasil Telec PN
Souza Cruz ON	Besc PNB
Uniminas PNA	Itaubanco PN
VCP PN	Bradesco PN
Sid Nacional ON	Cemig PN
Acesita PN	Eletrobrás ON
Ambev PN	Light ON

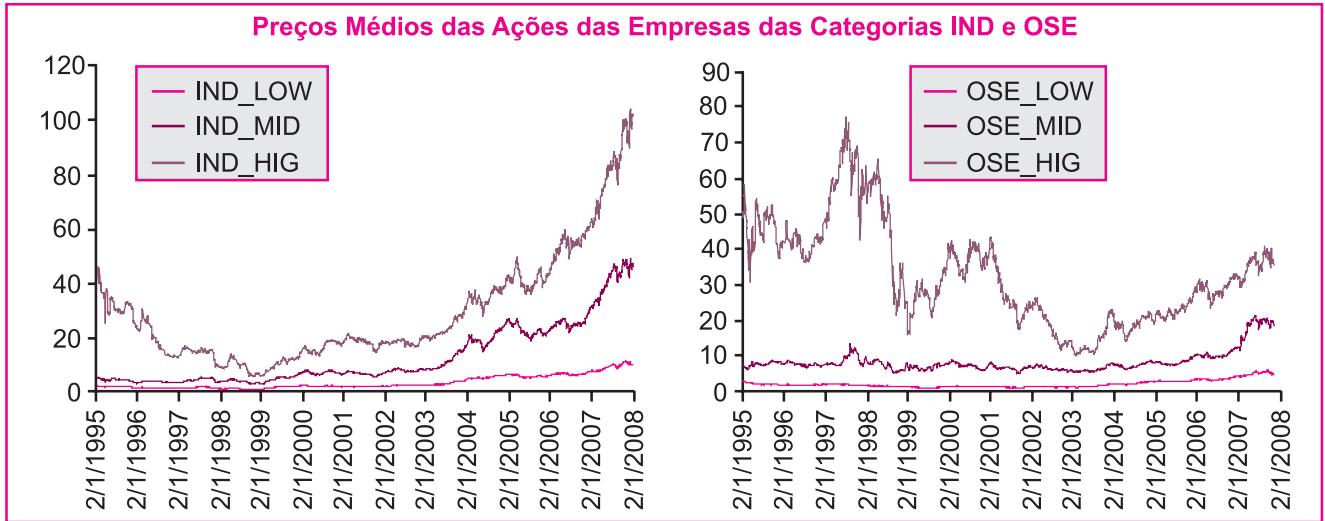


Gráfico 1: Série dos Seis Portfolios Conforme Preço Médio de Fechamento

estabelecem hipóteses e as testam por meio da mensuração de variáveis operacionais definidas, quantificando o resultado com o uso de variados métodos matemáticos e estatísticos. É um tipo de pesquisa tradicionalmente aceito como tendo confiabilidade, fidedignidade e validade, desde que realizada seguindo uma metodologia rigorosa. A validação dá-se pelo nível de significância adotado nos testes estatísticos (MARCONI e LAKATOS, 2007). O nível de significância será chamado aqui de *p*-valor.

4. TRATAMENTO DOS DADOS PARA ANÁLISE

4.1. Verificação da hipótese IID

Foi utilizado o teste BDS, desenvolvido por Brock (1996), a fim de verificar se as séries são IID. O teste BDS é realizado obtendo-se inicialmente a primeira diferença do logaritmo da série original contendo N observações. Depois disso, é selecionado o valor da dimensão (m) em que são inseridos vetores m -dimensionais, isso converte a série de escalares em uma série de vetores com entradas sobrepostas.

$$x^m_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \quad [8]$$

$$x^m_2 = (x_2, x_3, x_4, \dots, x_{m+1}) \quad [9]$$

$$x^m_{N-m} = (x_{N-m}, x_{N-m+1}, \dots, x_N) \quad [10]$$

Calcula-se a correlação integral, que mede a correlação espacial entre os pontos, adicionando o número de pares de pontos (i, j) , em que $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq j \leq N$, de tal forma que os pontos tenham um raio (tolerância) ε um do outro.

$$C_{\varepsilon,m} = \frac{1}{N_m(N_m-1)} \sum_{i \neq j} I_{i,j;\varepsilon} \quad [11]$$

em que

$$I_{i,j;\varepsilon} = \begin{cases} 1, & \text{se } \|x_i^m - x_j^m\| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad [12]$$

Brock, Dechert e Scheinkman (1987) mostraram que se a série é IID, então $C_{\varepsilon,m} \approx [C_{\varepsilon,1}]^m$.

A estatística de teste BDS pode ser escrita como:

$$BDS_{\varepsilon,m} = \frac{\sqrt{N} [C_{\varepsilon,m} - (C_{\varepsilon,1})^m]}{\sqrt{V_{\varepsilon,m}}} \quad [13]$$

O BDS é um teste bicaudal, rejeita-se a hipótese nula se a estatística de teste BDS é maior que ou menor que os valores críticos (ou seja, se $\alpha = 0,05$, tem-se valor crítico $= \pm 1,96$). O teste BDS foi executado da segunda até a sexta dimensão, portanto, determinada série temporal dos preços diárias de ações rejeitará a hipótese nula se, e somente se, pelo menos um dos cinco níveis descritivos do teste (*p*-valor) for menor do que o nível de significância de 5%.

Em vista dos resultados obtidos nas tabelas 1 e 2, verifica-se que nenhuma das séries pode ser considerada IID ao nível de 5%.

4.2. Análise de estabilidade das séries

Para que os seis *portfolios* pudessem ser analisados pelas diferentes técnicas de previsão NAIVE, ARMA e RNA, foi realizada uma transformação nos dados para remover a tendê-

Tabela 1

Resultados Obtidos pelo Teste BDS nas Respectivas Dimensões: Portfolios IND

Série	Dimensão 2	Dimensão 3	Dimensão 4	Dimensão 5	Dimensão 6
IND_LOW	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
IND_MID	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
IND_HIG	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 2

Resultados Obtidos pelo Teste BDS nas Respectivas Dimensões: Portfolios OSE

Série	Dimensão 2	Dimensão 3	Dimensão 4	Dimensão 5	Dimensão 6
OSE_LOW	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
OSE_MID	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
OSE_HIG	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

cia por meio do log dos preços das ações e, depois disso, obtidas as séries de diferenças dos seis *portfólios* conforme pode ser visto no gráfico 2. Ou seja, foram criadas as séries das diferenças dos logaritmos dos preços sem a tendência determinística. Para remover a tendência, foi utilizado o comando *detrend* do MATLAB® versão 6.5. A diferença da série é realizada para

tornar as séries estacionárias e permitir que os modelos não sejam afetados pela volatilidade ao longo do período analisado. As séries das diferenças dos logaritmos dos preços sem a tendência determinística são denominadas de DIF_DETREND_LN_SÉRIE e são apresentadas conjuntamente no gráfico 3, tanto para as categorias das empresas IND como para as das OSE.

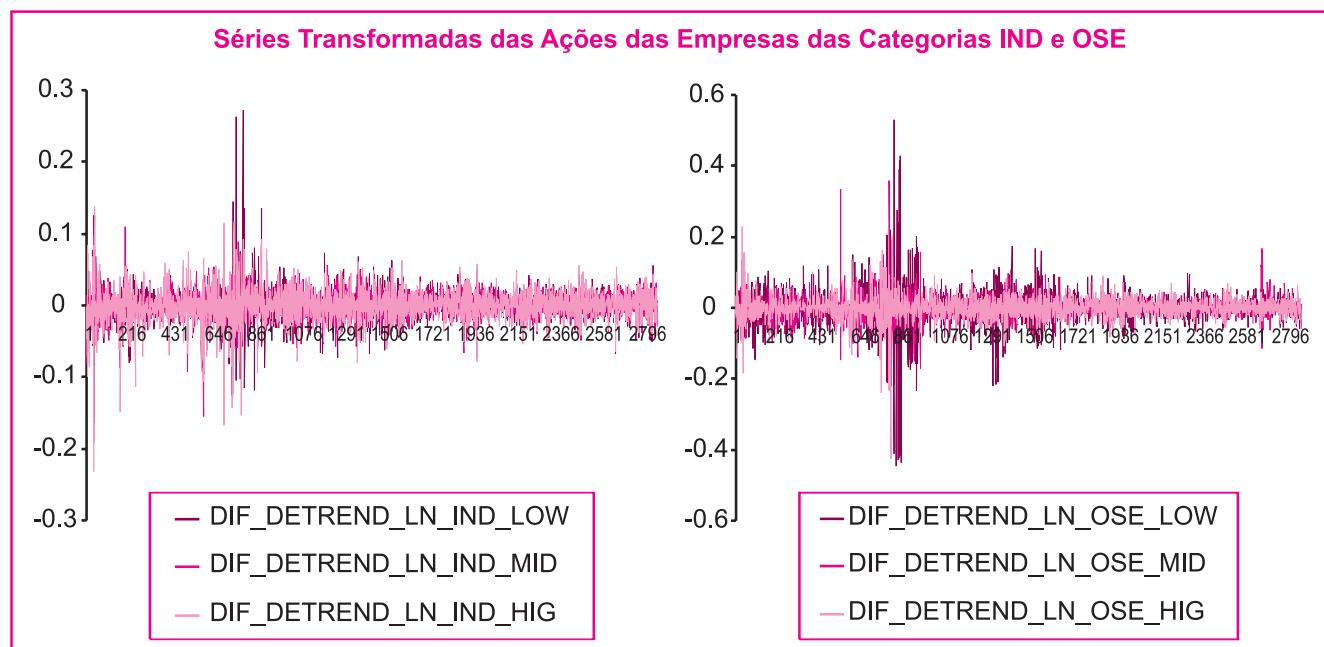


Gráfico 2: Séries Transformadas dos Seis Portfolios Utilizadas para as Análises

Para verificar a hipótese de que as séries transformadas apresentam comportamento de séries estacionárias, foi realizado o teste de raiz unitária (RU). Para testar se a série possui raiz unitária, foram aplicados os testes Dickey-Fuller aumentado (ADF) e Phillips-Perron (PP). A tabela 3 apresenta, para a categoria IND, os resultados dos testes ADF e PP para as séries do log do preço sem tendência, denominadas por $\ln(P) - \mu_t$, e da primeira diferença da série, $d[\ln(P) - \mu_t]$.

A tabela 4 apresenta os resultados dos testes ADF e PP para a categoria OSE. Verifica-se, facilmente, que tanto no caso das séries do *portfolio* IND quanto no das do OSE, a hipótese de

RU é rejeitada para os níveis de 1%, 5% e 10% para todas as séries $d[\ln(P) - \mu_t]$.

O gráfico 3 apresenta um *scatter plot* para cada um dos seis *portfolios*. No eixo horizontal tem-se o logaritmo dos preços sem tendência, enquanto o eixo vertical apresenta os retornos. Nesse gráfico, pode-se verificar que os preços de mercado de IND e OSE movem-se em torno de pontos de equilíbrio de maneira aleatória. Isso representa a possibilidade da existência de uma dinâmica caótica no mercado de preços de ações. No entanto, calculando-se os expoentes de Lyapunov, encontram-se valores negativos. Isso implica que os preços de mercado das

Tabela 3

Tabela Conjunta dos Resultados dos Testes ADF e PP para RU para o Portfolio IND

Estatísticas do Teste ADF para as Séries $\ln(P) - \mu_t$ e para $d[\ln(P) - \mu_t]$			
	IND_LOW	IND_MID	IND_HIG
$\ln(P) - \mu_t$	-3,088169	-2,965185	-2,783717
$d[\ln(P) - \mu_t]$	-54,50694	-48,99607	-48,39855
Valores Críticos 1%		Valores Críticos 5%	
-3,4357		-2,8631	
Estatísticas do Teste PP para as Séries $\ln(P) - \mu_t$ e para $d[\ln(P) - \mu_t]$			
	IND_LOW	IND_MID	IND_HIG
$\ln(P) - \mu_t$	-3,106735	-3,367188	-3,219470
$d[\ln(P) - \mu_t]$	-54,50095	-49,27730	-48,32318
Valores Críticos 1%		Valores Críticos 5%	
-3,4325		-2,8624	
-2,5676		-2,5673	

Tabela 4

Tabela Conjunta dos Resultados dos Testes ADF e PP para RU para o Portfolio OSE

Estatísticas do Teste ADF para as Séries $\ln(P) - \mu_t$ e para $d[\ln(P) - \mu_t]$			
	OSE_LOW	OSE_MID	OSE_HIG
$\ln(P) - \mu_t$	-0,210505	-1,326683	-1,988611
$d[\ln(P) - \mu_t]$	-15,26855	-54,32053	-50,10002
Valores Críticos 1%		Valores Críticos 5%	
-3,4357		-2,8631	
-2,5676		-2,5673	
Estatísticas do Teste PP para as Séries $\ln(P) - \mu_t$ e para $d[\ln(P) - \mu_t]$			
	OSE_LOW	OSE_MID	OSE_HIG
$\ln(P) - \mu_t$	-0,751931	-0,975846	-1,853958
$d[\ln(P) - \mu_t]$	-93,64150	-54,81179	-50,00763
Valores Críticos 1%		Valores Críticos 5%	
-3,4325		-2,8624	
-2,5673		-2,5673	

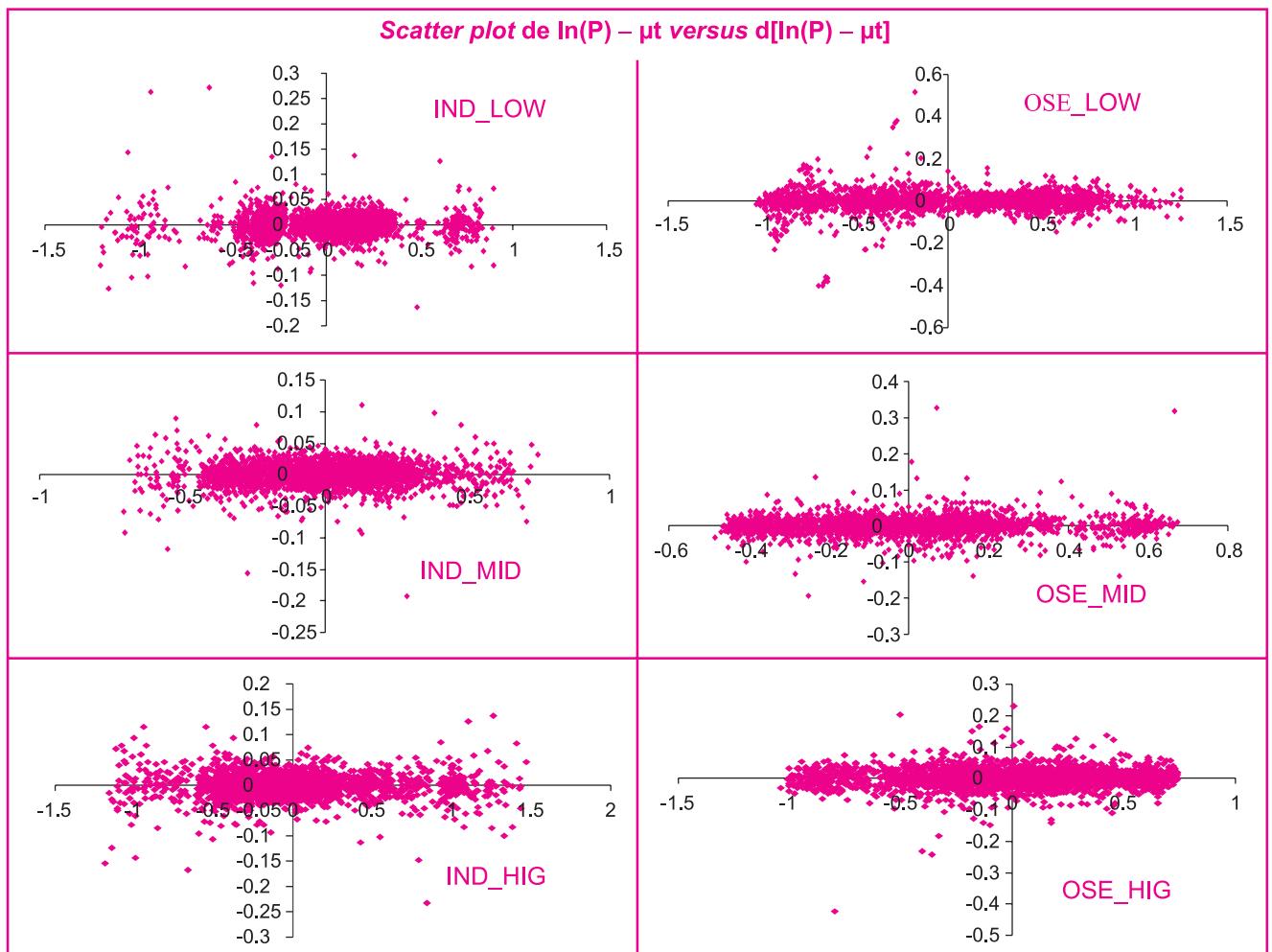


Gráfico 3: Scatter Plot para Cada Um dos Seis Portfolios

ações não podem ser caóticos, mas, em vez disso, ser caracterizados por um processo de difusão. Não será utilizado aqui o jargão e o tratamento do cálculo estocástico para essa questão, o leitor pode encontrar em Duffie (2001, p.87), em Campbell, Lo e Mackinlay (1997, p.356) uma introdução simples ao assunto; uma leitura mais avançada de como trabalhar com processos de difusão pode ser obtida em Steele (2000, p.169) e em Di Nunno, Oksendal e Proske (2009, p.17).

4.3. Resultados das redes neurais e expoentes de Lyapunov

Para analisar a estabilidade das ações dos *portfolios*, são utilizadas redes neurais artificiais alimentadas adiante (*feed-forward*) com o algoritmo de Gencay e Dechert (1992) para calcular os expoentes de Lyapunov. A obtenção dos expoentes de Lyapunov foi realizada utilizando-se o software NETLE, que funciona na plataforma MS-DOS, foi desenvolvido por Kuan, Liu e Gencay (1997) e utiliza redes neurais *feedforward*.

A camada de entrada (*inputs*) da rede neural consiste da variável a ser modelada com um instante de atraso (defasagem) e uma defasagem do Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa) para todos os seis *portfolios*.

Antes de definir as variáveis de entrada, houve necessidade de escolher um fator que explicasse e estivesse correlacionado com os retornos das ações, ou seja, definir a variável que serviria de *proxy* de mercado para os dados econômicos (WOOLDRIDGE, 2003). Optou-se pelo uso do Ibovespa. Portanto, sem focar de maneira excessiva na melhor rede neural, a entrada foi definida como sendo formada por uma defasagem na variável (IND ou OSE) e uma defasagem do Ibovespa para todos os seis *portfolios* analisados.

A escolha da melhor RNA foi obtida por meio de uma variação do número de neurônios da camada intermediária de 4 a 7, sendo utilizado como critério o menor valor de erro quadrático médio (*mean squared error* – MSE). As tabelas 6 e 7 fornecem os valores de MSE das previsões das RNA, o critério

de informação de Schwarz (SIC) e os expoentes de Lyapunov. Esses expoentes, obtidos para as séries $\ln(P) - \mu_t$ (tabela 5), estão todos próximos de zero, o que indica a presença de uma raiz unitária. Realizando a primeira diferença da série, ou seja, obtendo uma série do tipo DIF_DETREND_LN_SÉRIE, remove-se a não estacionariedade e os expoentes de Lyapunov, na tabela 7, são negativos, indicando processos não caóticos e estáveis. Em outras palavras, não é considerada a existência de uma dinâmica instável (caótica) nas séries temporais, uma vez que todas as estimativas dos maiores expoentes de Lyapunov são negativos.

Modelos em destaque foram escolhidos com base nos menores valores de MSE. Nesse ponto, vale lembrar que o MSE e o SIC são respectivamente dados por:

$$MSE = \sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{h} \quad [14]$$

Quanto menor a raiz quadrada do MSE (RMSE), menor o erro obtido pelo modelo utilizado para realizar a previsão. Quando um modelo é ajustado para uma dada série temporal, é necessário verificar se ele apresenta uma adequada descrição dos dados. Um dos critérios frequentemente usados e que refletem a qualidade do ajuste e o número de parâmetros estimado é o critério de informação bayesiano de Schwartz (SIC). Se k é o número total de parâmetros estimado, tem-se que:

$$SIC(k) = n \log \hat{\sigma}^2 + k \log n \quad [15]$$

em que n é o tamanho da amostra. Se $RSS = \sum \hat{e}_t^2$ é a soma dos resíduos quadrados, então $\hat{\sigma}^2 = RSS/(n - k)$. Portanto, utilizando os critérios mencionados, nas tabelas 5 e 6, têm-se as melhores redes neurais selecionadas e os respectivos valores de expoentes de Lyapunov calculados por essas RNA. A estimativa de expoentes de Lyapunov usando redes neurais *feedforward*

Tabela 5

Resultados Obtidos pelo NETLE para $\ln(P) - \mu_t$ de Todos os Seis Grupos de Portfolios

Resultados do NETLE para $\ln(P) - \mu_t$									
Resultados para IND_LOW versus Ibovespa					Resultados para OSE_LOW versus Ibovespa				
Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov		Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov	
Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)	Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,405E-03	-7,7649	0,0110	-4,4587	4	0,356E-03	-7,8135	0,0096	-3,9124
5	0,391E-03	-7,7894	0,0144	-3,6009	5	0,343E-03	-7,8321	0,0103	-3,7643
6	0,384E-03	-7,7947	0,0117	-5,0551	6	0,321E-03	-7,8411	0,0112	-4,3956
7	0,380E-03	-7,7951	0,0127	-3,7351	7	0,301E-03	-7,8371	0,0104	-4,5373
Resultados para IND_MID versus Ibovespa					Resultados para OSE_MID versus Ibovespa				
Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov		Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov	
Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)	Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,654E-03	-7,2341	0,0132	-5,1328	4	0,433E-03	-7,6673	0,0121	-4,9453
5	0,621E-03	-7,2300	0,0127	-4,3193	5	0,432E-03	-7,6543	0,0134	-4,8897
6	0,646E-03	-7,2043	0,0115	-4,5791	6	0,429E-03	-7,6129	0,0128	-5,0128
7	0,637E-03	-7,1857	0,0120	-5,0432	7	0,418E-03	-7,6494	0,0118	-5,1452
Resultados para IND_HIG versus Ibovespa					Resultados para OSE_HIG versus Ibovespa				
Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov		Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov	
Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)	Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,521E-03	-7,5101	0,0135	-4,7785	4	0,297E-03	-8,0768	0,0133	-4,9965
5	0,518E-03	-7,4973	0,0121	-5,7698	5	0,277E-03	-8,0921	0,0125	-5,1503
6	0,509E-03	-7,4832	0,0108	-4,9548	6	0,286E-03	-8,0442	0,0141	-5,6542
7	0,514E-03	-7,4778	0,0111	-6,2831	7	0,287E-03	-8,0813	0,0127	-6,0035

pode ser encontrada em outros estudos, tais como McCaffrey *et al.* (1992), Nychka *et al.* (1992), Gencay e Dechert (1996) e Dechert e Gencay (2000).

Na tabela 6 também vale o fato de que os modelos em destaque foram escolhidos com base nos menores valores de MSE.

4.4. Racionalidade e desempenho de previsão

Enquanto expectativas adaptativas são baseadas em preços passados, expectativas racionais são formadas com base em toda a informação disponível e, portanto, mais difíceis de ser modeladas. Neste trabalho, definem-se as previsões racionais simplesmente como aquelas que não apresentam erros sistemáticos de previsão: o erro médio é indistinguível de possuir valor zero e os erros não apresentam padrão consistente ao longo do tempo. De acordo com esse critério, pode-se verificar na tabela 7, para o caso do *portfolio* de empresas da indústria, que os

modelos de RNA e os modelos ARMA(1,1) para IND_LOW e IND_HIG são racionais. Continuando, tendo como base os resultados da tabela 7, pode-se verificar que, para o modelo ARMA(1,1) para IND_MID e os três modelos NAIVE, exibem padrão de autocorrelação dos resíduos. Nesses casos, em termos econometrícios, diz-se que esses modelos estão mal-especificados e poderiam ser mais bem descritos por modelos ARMA(p, q) de diferentes ordens.

Foram aplicados o mesmo conceito e a mesma técnica para as empresas do *portfolio* OSE, e os resultados são apresentados na tabela 8 de forma mais resumida, sem os correlogramas. Para o *portfolio* OSE_LOW, os modelos de redes neurais e ARMA(1,1) desempenharam padrão racional, enquanto os modelos ARMA(1,1) para OSE_MID e OSE_HIG e NAIIVE geraram erros de previsão sistemáticos.

Considere-se y como uma variável econômica ou financeira a qual os agentes desejam prever, e seja $y_{t,t+n}$ a esperança para

Tabela 6

Resultados Obtidos pelo NETLE para $d[\ln(P) - \mu_t]$ de Todos os Seis Grupos de Portfolios

Resultados do NETLE para $d[\ln(P) - \mu_t]$									
Resultados para IND_LOW versus Ibovespa					Resultados para OSE_LOW versus Ibovespa				
Camada Oculta	MSE	SIC	Exponentes de Lyapunov		Camada Oculta	MSE	SIC	Exponentes de Lyapunov	
			Lambda (1)	Lambda (2)				Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,439E-03	-7,6835	-2,2589	-2,7081	4	0,465E-03	-8,1432	-2,7249	-2,9433
5	0,437E-03	-7,6759	-2,0727	-2,5415	5	0,457E-03	-8,1326	-2,3890	-2,8763
6	0,428E-03	-7,6859	-1,7971	-2,0562	6	0,453E-03	-8,1508	-2,7413	-1,2974
7	0,429E-03	-7,6737	-2,3896	-2,7417	7	0,449E-03	-8,1445	-2,9421	-2,3882
Resultados para IND_MID versus Ibovespa					Resultados para OSE_MID versus Ibovespa				
Camada Oculta	MSE	SIC	Exponentes de Lyapunov		Camada Oculta	MSE	SIC	Exponentes de Lyapunov	
			Lambda (1)	Lambda (2)				Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,674E-03	-7,265	-1,3451	-2,8732	4	0,532E-03	-7,8763	-2,8424	-1,4047
5	0,692E-03	-7,259	-2,0987	-2,7651	5	0,526E-03	-7,8546	-2,3667	-2,4803
6	0,676E-03	-7,241	-2,0672	-2,8091	6	0,521E-03	-7,8394	-2,5235	-2,7142
7	0,684E-03	-7,237	-2,4311	-2,7984	7	0,531E-03	-7,8622	-2,8106	-2,1960
Resultados para IND_HIG versus Ibovespa					Resultados para OSE_HIG versus Ibovespa				
Camada Oculta	MSE	SIC	Exponentes de Lyapunov		Camada Oculta	MSE	SIC	Exponentes de Lyapunov	
			Lambda (1)	Lambda (2)				Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,567E-03	-7,541	-2,0041	-2,3459	4	0,245E-03	-8,3679	-2,3267	-2,5008
5	0,559E-03	-7,531	-2,0123	-2,4218	5	0,236E-03	-8,3554	-2,9706	-1,8331
6	0,538E-03	-7,518	-1,8761	-2,4783	6	0,227E-03	-8,3623	-2,7696	-2,8444
7	0,541E-03	-7,504	-1,996	-2,3965	7	0,233E-03	-8,3644	-2,9817	-2,6514

Tabela 7

Resultados do Teste de Racionalidade para o Portfolio IND

ARMA																	
		IND_LOW					IND_MID					IND_HIG					
Desvio Padrão		1,74E-06					2,37932E-05					5,66 E-07					
Média		0,049649					0,004359338					0,004717					
IND_LOW																	
Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.083	0.083	1.1098	0.29...		1	0.466	0.466	35.407	0.000		1	0.021	0.021	0.0705	0.791	
2	0.249	0.243	11.252	0.004		2	0.184	-0.042	40.978	0.000		2	0.253	0.253	10.585	0.005	
3	0.185	0.160	16.905	0.001		3	0.093	0.030	42.417	0.000		3	-0.152	-0.172	14.384	0.002	
4	0.227	0.167	25.503	0.000		4	0.030	-0.024	42.565	0.000		4	0.154	0.112	18.322	0.001	
5	0.069	-0.021	26.295	0.000		5	0.018	0.016	42.618	0.000		5	-0.000	0.072	18.322	0.003	
6	0.174	0.067	31.396	0.000		6	0.002	-0.014	42.618	0.000		6	0.115	0.023	20.554	0.002	
7	0.064	-0.013	32.098	0.000		7	0.002	0.008	42.619	0.000		7	0.007	0.029	20.563	0.004	
8	0.025	-0.075	32.201	0.000		8	-0.002	-0.006	42.619	0.000		8	0.064	0.027	21.260	0.006	
9	0.044	-0.011	32.534	0.000		9	-0.001	0.003	42.619	0.000		9	0.047	0.053	21.631	0.010	
10	0.140	0.113	35.900	0.000		10	-0.002	-0.004	42.620	0.000		10	0.061	0.028	22.680	0.014	
11	-0.007	-0.019	35.910	0.000		11	-0.002	0.001	42.621	0.000		11	0.044	0.023	22.622	0.020	
12	0.035	-0.019	36.126	0.000		12	-0.002	-0.002	42.622	0.000		12	0.010	-0.012	22.639	0.031	
13	0.016	-0.021	36.170	0.001		13	-0.002	0.001	42.622	0.000		13	0.034	0.019	22.847	0.044	
14	-0.050	-0.093	36.620	0.001		14	-0.003	-0.003	42.624	0.000		14	-0.068	-0.085	23.659	0.050	
15	0.012	0.016	36.647	0.001		15	-0.003	0.000	42.626	0.000		15	0.092	0.080	25.159	0.048	
Rede Neural																	
		IND_LOW					IND_MID					IND_HIG					
Desvio Padrão		0,041555					0,004326999					0,00360005					
Média		-0,000907					-8,33269E-05					-0,000315036					
IND_LOW																	
Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.045	0.045	0.3288	0.566		1	-0.047	-0.047	0.3649	0.546		1	0.012	0.012	0.0224	0.881	
2	0.031	0.029	0.4847	0.785		2	0.114	0.112	2.5143	0.284		2	-0.071	-0.071	0.8462	0.655	
3	-0.038	-0.040	0.7178	0.869		3	0.081	0.093	3.6099	0.307		3	0.026	0.024	0.9442	0.815	
4	-0.066	-0.063	1.4342	0.838		4	-0.188	-0.197	9.4921	0.050		4	-0.015	-0.009	0.9590	0.916	
5	-0.053	-0.046	1.9128	0.861		5	-0.181	-0.125	10.591	0.060		5	-0.066	-0.070	1.7680	0.880	
6	-0.047	-0.041	2.2821	0.892		6	0.020	0.056	10.656	0.100		6	-0.047	-0.048	2.1215	0.908	
7	-0.014	-0.009	2.3008	0.941		7	-0.051	0.022	11.094	0.135		7	0.015	0.022	2.2055	0.948	
8	0.024	0.020	2.4001	0.966		8	0.105	0.077	12.962	0.113		8	0.061	0.064	2.9096	0.940	
9	0.042	0.032	2.7039	0.975		9	-0.080	-0.121	14.049	0.121		9	-0.010	-0.011	2.9302	0.967	
10	0.054	0.042	3.1995	0.976		10	-0.118	-0.163	16.444	0.088		10	-0.035	-0.037	3.1643	0.977	
11	-0.026	-0.036	3.3159	0.986		11	-0.001	-0.002	16.444	0.125		11	0.104	0.093	4.6626	0.946	
12	-0.081	-0.080	4.4660	0.973		12	-0.043	0.057	16.768	0.159		12	0.001	0.001	4.6629	0.968	
13	0.043	0.061	4.7913	0.980		13	0.019	0.039	16.834	0.207		13	-0.011	-0.010	4.6792	0.982	
14	-0.048	-0.039	5.1973	0.983		14	0.008	-0.081	16.846	0.264		14	-0.052	-0.059	5.3060	0.981	
15	0.027	0.027	5.3312	0.989		15	-0.004	-0.057	16.848	0.328		15	-0.053	-0.039	5.5821	0.986	
NAVE																	
		IND_LOW					IND_MID					IND_HIG					
Desvio Padrão		0,057580986					0,006148003					0,00508067					
Média		4,64304E-05					-4,04939E-05					-1,93483E-05					
IND_LOW																	
Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.495	-0.495	39.906	0.000		1	-0.574	-0.574	53.641	0.000		1	-0.467	-0.467	35.522	0.000	
2	0.032	-0.282	40.069	0.000		2	0.106	-0.333	55.468	0.000		2	-0.074	-0.373	36.422	0.000	
3	-0.021	-0.203	40.043	0.000		3	0.099	-0.018	57.101	0.000		3	0.064	-0.235	37.089	0.000	
4	-0.018	-0.179	40.194	0.000		4	-0.162	-0.099	61.437	0.000		4	0.012	-0.142	37.113	0.000	
5	0.001	-0.156	40.195	0.000		5	-0.015	-0.251	61.474	0.000		5	-0.044	-0.142	37.437	0.000	
6	-0.016	-0.160	40.236	0.000		6	0.082	-0.162	62.611	0.000		6	-0.025	-0.179	37.539	0.000	
7	0.001	-0.159	40.237	0.000		7	-0.104	-0.175	64.434	0.000		7	0.013	-0.190	37.568	0.000	
8	0.010	-0.140	40.255	0.000		8	0.162	0.047	68.919	0.000		8	0.053	-0.107	38.042	0.000	
9	0.002	-0.126	40.256	0.000		9	-0.069	0.060	69.735	0.000		9	-0.019	-0.070	38.103	0.000	
10	0.063	-0.099	40.949	0.000		10	-0.067	-0.111	70.508	0.000		10	0.024	-0.008	38.205	0.000	
11	-0.032	-0.019	41.127	0.000		11	0.072	-0.132	71.414	0.000		11	-0.096	-0.122	39.813	0.000	
12	-0.077	-0.097	42.156	0.000		12	-0.034	-0.145	71.612	0.000		12	0.066	-0.097	40.567	0.000	
13	0.107	-0.020	44.185	0.000		13	0.039	0.121	71.881	0.000		13	0.015	-0.059	40.609	0.000	
14	-0.088	-0.038	45.567	0.000		14	-0.014	0.070	71.918	0.000		14	-0.059	-0.102	41.233	0.000	
15	0.035	-0.029	45.788	0.000		15	0.016	0.021	71.966	0.000		15	0.074	-0.008	42.201	0.000	

y no tempo $t + n$, formada no tempo t usando informação até o tempo t . Então, se as expectativas são racionais, no sentido de Muth (1961) tem-se:

$$Y_{t,t+n} = E[y_{t+n} | I_t] \quad [16]$$

em que I_t é o conjunto de informações no tempo t , e $E[\cdot | I_t]$ é o operador de esperança matemática condicionado a I_t . Tem-se que y_{t+n} pode ser escrita como a soma de seu valor esperado mais um erro de previsão da expectativa racional, chamado aqui de ε_{t+n} , assim:

$$y_{t+n} = Y_{t,t+n} + \varepsilon_{t+n} \quad [17]$$

Tomando a esperança condicional da equação anterior condicionada a I_t , tem-se:

$$E[\varepsilon_{t+n} | I_t] = 0 \quad [18]$$

Essa esperança [18] é uma propriedade fundamental da expectativa racional, e algumas vezes é chamada de condição de ortogonalidade (TAYLOR, 1987). As tabelas 7 e 8 apresentam os valores das médias dos resíduos das previsões para cada uma das variáveis analisadas; além disso também são apresentados os valores de autocorrelações para permitir a conclusão acerca da racionalidade.

O modelo NAIVE representa expectativas adaptativas, utilizando somente a informação passada. As redes neurais

estão mais próximas das expectativas racionais, uma vez que incorporam maior quantidade de informação, e os modelos ARMA falham em algum momento, gerando três modelos com características racionais e três modelos irracionais.

Foi considerado o modelo ARMA(1,1) para todos os seis *portfolios*, o que possibilitou determinar três modelos como possivelmente irracionais, ou seja, aqueles com erros sistemáticos de previsão. Os resultados das previsões obtidas pelos modelos de RNA, ARMA e NAIVE são mostrados na tabela 9. Como critérios de avaliação da melhor previsão, são utilizados o RMSE (*Root Mean Square Error*) e o TIC (*Theil Inequality Coefficient*), dados respectivamente por:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{h}} \quad [19]$$

$$TIC = \frac{\sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{h}}}{\sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{\hat{y}_t^2}{h}} + \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{y_t^2}{h}}} \quad [20]$$

O TIC varia entre zero e um, zero indicando ajuste perfeito. Quanto menor o RMSE, menor o erro obtido pelo modelo utilizado para realizar a previsão.

Tabela 8

Resultados do Teste de Racionalidade para o Portfolio OSE

ARMA			
	OSE_LOW	OSE_MID	OSE_HIG
Desvio Padrão	1,352E-05	3,746E-05	3,912E-06
Média	0,007381	0,006548	0,005182
Autocorrelação	0,0326	-0,4326	-0,5104
Rede Neural			
	OSE_LOW	OSE_MID	OSE_HIG
Desvio Padrão	0,007651	0,0033176	0,002553
Média	-0,000214	-4,66422E-06	-0,00021145
Autocorrelação	0,0133	0,1142	-0,09541
NAIVE			
	OSE_LOW	OSE_MID	OSE_HIG
Desvio Padrão	0,063421	0,007223517	0,00600987
Média	7,322145E-05	-6,83271E-05	-3,76124E-05
Autocorrelação	0,4462	0,3971	0,5035

Tabela 9

RMSE e TIC para Previsões dos Portfolios IND e OSE

Desempenho de Previsão dos Modelos						
	RMSE					
	IND_LOW	IND_MID	IND_HIG	OSE_LOW	OSE_MID	OSE_HIG
ARMA	0,041608	0,004279	0,003611	0,033218	0,003967	0,004692
Rede Neural	0,041435	0,004314	0,003603	0,024516	0,003843	0,004561
NAIVE	0,057401	0,006129	0,005065	0,060131	0,007442	0,006283
TIC						
	IND_LOW	IND_MID	IND_HIG	OSE_LOW	OSE_MID	OSE_HIG
ARMA	0,055349	0,002200	0,001859	0,045772	0,002432	0,002139
Rede Neural	0,055134	0,002219	0,001855	0,045986	0,002428	0,002099
NAIVE	0,076060	0,003152	0,002607	0,069910	0,003734	0,003205

Avaliando os resultados de RMSE e TIC para as previsões obtidas pelos métodos de redes neurais, autorregressivo de média móvel e NAIVE, verificou-se que as RNA apresentaram os melhores resultados, excetuando-se os casos IND_MID e OSE_LOW, em que os modelos ARMA obtiveram menor RMSE e TIC, respectivamente.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado um método de determinação de estabilidade no preço de ações do mercado brasileiro. O trabalho abrangeu um período anterior à crise financeira global de 2008, que teve como principal fator a crise do *subprime* (ou hipotecas de risco) nos Estados Unidos.

Foram analisadas 30 empresas, divididas em dois *portfolios*, ou categorias, uma denominada de Indústria (IND) e a outra chamada de Outros Setores (OSE), contemplando empresas dos setores de energia, financeiro e varejo. Foram encontradas evidências de não estacionariedade nos dados, o que levou a ter de transformar os dados para não incorrer em problemas de previsão devido à variância crescente. Verificou-se também não linearidade nos dados, mas com evidências insuficientes de padrões determinísticos que possibilitassem concluir sobre a estabilidade dos preços das ações.

Pode-se concluir que, após as transformações necessárias, os modelos de previsão que utilizam redes neurais mostraram-se um pouco melhores do ponto de vista de racionalidade.

A sofisticação de um modelo pode inicialmente ser definida em termos da precisão *ex post* (por exemplo, o RMSE), mas, além disso, pode-se também considerar a compreensão do conjunto de informação. O modelo NAIVE é baseado na quantidade mínima de informação e tem a menor taxa de precisão entre as três classes de modelos considerados. A rede neural possui a maior compreensão do conjunto de informação porque inclui vários valores de retornos passados, bem como os retornos defasados do Ibovespa. Dessa forma, a rede neural é em média 37% mais precisa que as previsões NAIVE em termos do RMSE. Os modelos ARMA variam com respeito à precisão, verificando-se que em média as RNA são 5% mais precisas que as previsões geradas pelos modelos ARMA.

Os testes de racionalidade foram realizados considerando-se modelos ARMA, porém, dadas as características de as séries financeiras apresentarem heterocedasticidade condicional, podem ser estendidos por meio do uso de modelos ARIMA-GARCH. Da mesma forma, outras topologias de redes neurais treinadas com diferentes algoritmos (por exemplo, usando filtro de Kalman) também podem oferecer novos resultados e novas discussões. ♦

REFERÊNCIAS

- ANUFRIEV, M.; DINDO, P. *Wealth selection in a financial market with heterogeneous agents*. CeNDEF Working Papers 07-10, Universiteit van Amsterdam, Center for Nonlinear Dynamics in Economics and Finance, 2007.
- AZOFF, E.M. *Neural network time series forecasting of financial markets*. Chichester: John Wiley & Sons, 1994.
- BASK, M.; LIU, T.; WIDERBERG, A. *The stability of electricity prices: estimation and inference of the Lyapunov exponents*. Research Discussion Papers 9/2006, Bank of Finland, 2006.
- BROCK, W.A. A test for independence based on the correlation dimension. *Econometric Reviews*, Madison Wisconsin, v.15, n.3, p.197-235, 1996.
- BROCK,W.A.;DECHERT;SCHEINKMAN,A. *Test for independence based on the correlation dimension*. University of Wisconsin at Madison, Department of Economics Working Paper, 1987.

REFERÊNCIAS

- BROCK, W.; HOMMES, C. A rational route to randomness. *Econometrica*, Hoboken, New Jersey, v.65, n.5, p.1059-1095, Sept. 1997.
- BROCK, W.; HOMMES, C. Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Madison Wisconsin, v.22, n.1, p.1235-1274, Oct. 1998.
- BROCK, W.; HOMMES, C.; WAGENER, F. Evolutionary dynamics in markets with many trader types. *Journal of Mathematical Economics*, Amsterdam, v.41, n.1, p.7-42, Feb. 2005.
- CAMERER, C. Individual decision making. In: KAGEL, J.H.; ROTH, A.E. (Ed.). *Handbook of experimental economics*. Princeton: Princeton University Press, 1995.
- CAMPBELL, J.Y.; LO, A.W.; MACKINLAY, A.C. *The econometrics of financial markets*. Princeton: Princeton University Press, 1997.
- DECHERT, W.D.; GENCAY, R. Is the largest Lyapunov exponent preserved in embedded dynamics? *Physics Letters A*, v.276, Issues 1-4, p.59-64, Oct. 2000.
- DI NUNNO, G.; OKSENDAL, B.; PROSKE, F. *Malliavin calculus for Levy processes with applications to finance*. Berlin: Springer, 2009. [Doi:10.1007/978-3-540-78572-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78572-9).
- DUDA, R.; HART, P. *Pattern classification and scene analysis*. 2nded. New York: John Wiley, 1993.
- DUFFIE, D. *Dynamic asset pricing*. Princeton: Princeton University Press, 2001.
- FERNANDES, M.; PREUMONT, Y.P. *The finite-sample size of the BDS test for GARCH standardized residuals*. Working Paper. Department of Economics, Queen Mary, University of London, 2003.
- FORBES, W. *Behavioural finance*. West Sussex, United Kingdom: John Wiley & Sons, 2009.
- GAUNERSDORFER, A. Endogenous fluctuations in a simple asset pricing model with heterogeneous agents. *Journal of Economic Dynamics and Control*, New York, v.24, n.5, p.799-831, June 2000.
- GENCAY, R.; DECHERT, W.D. An algorithm for n Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown system. *Physica D*, New York, v.59, n.1, p.142-157, Oct. 1992.
- GENCAY, R.; DECHERT, W.D. The identification of spurious Lyapunov exponents in Jacobian algorithms. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Berkeley, v.1, n.3, p.33-54, Oct. 1996.
- GILOVICH, T.; GRIFFIN, D.; KAHNEMAN, D. *Heuristics and biases: the psychology of intuitive judgment*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- GRANDMONT, J.M. Expectations formation and stability of large socioeconomic systems, *Econometrica*, Hoboken, New Jersey, v.66, n.4, p.741-781, Oct. 1998.
- HIRSHLEIFER, D. Investor psychology and asset pricing. *Journal of Finance*, Berkeley, California, v.56, n.45, p.1533-1597, Aug. 2001.
- HOMMES, C. Heterogeneous agent models in economics and finance. In: TESFATSION, L.; JUDD, K. (Ed.). *Handbook of computational economics*. New York: Elsevier, 2006. v.2.
- HSIEH, D. Testing for nonlinear dependence in daily foreign exchange rates. *Journal of Business*, New York, v.62, n.3, p.339-368, Mar. 1989.
- HSIEH, D. Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets. *Journal of Business*, New York, v.62, n.5, p.1839-1877, May 1991.
- KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Judgment under uncertainty: heuristics and biases. *Science* 185, New York, v.185, n.4157, p.1124-1131, Sept. 1974.
- KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. *Choices, values and frames*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- KUAN, C.; LIU, T. Forecasting exchange rates using feedforward and recurrent neural networks. *Journal of Applied Econometrics*, Hoboken, New Jersey, v.10, n.4, p.347-364, Dec. 1995.
- KUAN, C.; LIU, T.; GENCAY, R. *Netle*: feedforward neural networks and Lyapunov exponents estimation. Working Paper, Department of Economics, University Drive, British Columbia, Canada, 1997.
- LEE, T.H.; WHITE H.; GRANGER, W.J. Testing for neglected nonlinearity in time series models. *Journal of Econometrics*, New York, v.56, n.3, p.269-290, Apr. 1993.
- MARCONI, M.A.; LAKATOS, E.M. *Metodologia científica*. São Paulo: Atlas, 2007.
- MAXIMIANO, A.C.A. *Teoria geral da administração: da escola científica à competitividade em economia globalizada*. São Paulo: Atlas, 1997.
- MCCAFFREY, D.; ELLNER, S.; GALLANT, A.R.; NYCHKA, D. Estimating the Lyapunov exponent of a chaotic system with nonparametric regression. *Journal of the American Statistical Association*, North Washington Street, Boston, v.87, n.1, p.682-695, Mar. 1992.
- MUTH, J.F. Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica*, Hoboken, New Jersey, v.29, n.3, p.315-335, May 1961.
- NYCHKA, D.; ELLNER, S.; GALLANT, A.R.; MCCAFFREY, D. Finding chaos in noisy systems. *Journal of the Royal Statistical Society*, Londres, United Kingdom, v.B54, n.3, p.399-426, June 1992.
- POMPIAN, M.M. *Behavioral finance and wealth management*: how to build optimal portfolios that account for investor biases. Hoboken, New Jersey: Wiley Finance, 2006.
- RABIN, M. Psychology and economics. *Journal of Economic Literature*, Nashville, Tennessee, v.36, n.1, p.11-46, Mar. 1998.

REFERÊNCIAS

ABSTRACT

RESUMEN

- STEELE, M. *Stochastic calculus and financial applications*. New York: Springer-Verlag, 2000.
- TABAK, B.M.; FERNANDES, J.L.B.; PEÑA, J.I. *Behavior finance and estimation risk in stochastic portfolio optimization*. BCB-Working Paper Series 184, Brasilia, Brasil: Edited by Research Department (Depep), Apr. 2009.
- TAYLOR, M.P. Learning and rationality: an empirical study of investment manager's stock market predictions. *Annales D'Economie et de Statistique*, n.8, 1987.
- WILKENS, K.; THOMAS, N.D.; FOFANA, M.S. Stability of technology stock prices: evidence of rational expectations or irrational sentiment? *Managerial Finance*, Bradford, United Kingdom, v.30, n.12, p.33-54, Dec. 2004.
- WOLF, A.; SWIFT, J.; SWINNEY, H.; VASTANDO, J. Determining Lyapunov exponent from a time series. *Physica D*, New York, v.13, n.3, p.285-317, Nov. 1985.
- WOOLDRIDGE, J.M. *Introductory econometrics: a modern approach*. 2nd ed. Mason, Ohio: Thomson, South-Western, 2003.

Stability of stock prices in the Brazilian capital market: a study applying neural networks and the Lyapunov exponent

In this article, we study the stability of the market price of stocks for two categories of companies, referred to as industrial (IND) and other sectors (OSE), from January 2, 1995 to January 2, 2008. In other words, we examine the stability of market prices for the period before the 2008 crisis, triggered by the US subprime securities. We analyze the implications of the stability of the process of generating a return through rationality paradigms. The verification of stability was conducted using Lyapunov exponents. Results are presented on the stability of prices for two categories of companies: industrial concerns, comprising Acesita, Ambev, Aracruz, Braskem, Duratex, Fosfertil, Gerdau, Klabin, Randon, Sadia, Sid Nacional, Souza Cruz, Unipar, Usiminas and VCP, and enterprises in the other sectors category, comprising Ampla Energy, Bradesco, Brasil Telecom, Cemig, Eletrobras, Eletrobrás, Itaubanco, Itáusua, JB Duarte, Pronor, Besc, Alpha Financeira and Inepar. A dispersion diagram of the logarithm of prices without trends vs. the returns of these two categories (or portfolios) showed a chaotic pattern of stock prices, indicating the presence of nonlinearity. However, the calculation of the Lyapunov exponents resulted in negative values. This indicates that the fluctuations of the 30 companies analyzed result from diffusion processes rather than from nonlinear dynamics. The rationality of the behavior of prices is studied by checking the residues generated from estimates of ARMA and NAIVE models and feedforward neural networks.

Keywords: Brazilian capital market, behavioral finance, neural networks, Lyapunov exponent.

Estabilidad de precios de acciones en el mercado de capitales brasileño: un estudio en que se aplican redes neuronales y exponentes de Lyapunov

En este trabajo se estudia la estabilidad de los precios de mercado de acciones para dos categorías de empresas: industrial y otros sectores, en el período comprendido entre el 2 de enero de 1995 y el 2 de enero de 2008. Es decir, se analiza la estabilidad de los precios de mercado para el período anterior a la crisis de 2008, que comenzó con los títulos *subprime* de Estados Unidos. Se analizan las implicaciones de la estabilidad del proceso de generación de retorno por paradigmas de racionalidad. La verificación de la estabilidad se realizó por medio de la aplicación de exponentes de Lyapunov. Se presentan los resultados sobre la estabilidad de los precios para las dos categorías de empresas: las industrias, formadas por Acesita, Ambev, Aracruz, Braskem, Duratex, Fosfertil, Gerdau, Klabin, Randon, Sadia, Sid Nacional, Souza Cruz, Unipar, Usiminas, y VCP; y las empresas de la categoría otros sectores, formadas por Ampla Energía, Bradesco, Brasil Telecom, Cemig, Eletrobras, Itaubanco, Itausua, JB Duarte, Pronor, Besc, Alfa Financeira e Inepar. Un diagrama de dispersión del logaritmo de los precios de registro sin tendencia frente a los retornos de las dos categorías (o carteras) mostró un patrón caótico en los precios de las acciones, lo que indica la presencia de no linealidad. Sin embargo, en el cálculo de los exponentes de Lyapunov, se obtuvieron valores negativos. Esto indica que las fluctuaciones de las treinta empresas analizadas resultan de procesos de difusión en lugar de dinámicas no lineales. Se estudia la racionalidad del comportamiento de los precios por medio de la verificación de los residuos generados a partir de las estimaciones de los modelos ARMA, NAIVE y de redes neuronales *feedforward*.

Palabras clave: mercado de capitales brasileño, finanzas conductuales, redes neuronales, exponentes de Lyapunov.