



Revista de Métodos Cuantitativos para la  
Economía y la Empresa

E-ISSN: 1886-516X

ed\_revmetcuant@upo.es

Universidad Pablo de Olavide  
España

Sukhomlin, Nikolay; Santana Jiménez, Lisette Josefina

Problema de calibración de mercado y estructura implícita del modelo de bonos de Black-Cox

Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, vol. 10, diciembre, 2010, pp. 73-98

Universidad Pablo de Olavide

Sevilla, España

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=233116358005>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto



UNIVERSIDAD  
PABLO DE OLAVIDE  
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA  
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (10). Páginas 73-98.  
Diciembre de 2010. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.  
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art43.pdf>

## Problema de calibración de mercado y estructura implícita del modelo de bonos de Black-Cox

SUKHOMLIN, NIKOLAY

Departamento de Física

Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana)

CEREGMIA, Université des Antilles et de la Guyane (France)

Correo electrónico: [nsukhomlin@gmail.com](mailto:nsukhomlin@gmail.com)

SANTANA JIMÉNEZ, LISETTE JOSEFINA

Grupo de Investigación en Econofísica

Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana)

Correo electrónico: [lj.santana@bancentral.gov.do](mailto:lj.santana@bancentral.gov.do)

### RESUMEN

El principal resultado de este artículo consiste en la resolución del problema inverso del modelo de Black-Cox (1976), usando el método propuesto por Sukhomlin (2007). Se parte del enfoque retrógrado (*backward*) para obtener una expresión exacta de la volatilidad implícita en función de parámetros cuantificables con datos de mercado y de variables conocidas. Se descubre la existencia de dos valores de la volatilidad para un activo subyacente en el modelo referido, lo que indica que las asunciones tradicionales no lo definen de manera unívoca. Se encuentra la causa de que el modelo de Black-Cox contenga dos valores de la volatilidad. Además, se lleva a cabo una simulación, a fin de verificar, numéricamente, que la expresión obtenida para la volatilidad es la inversión de la fórmula que representa la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia antes del tiempo de madurez de la deuda. Finalmente, se resuelve el problema de calibración de mercado desde el punto de vista directo (*forward*), encontrándose una expresión que resulta de mayor utilidad para los agentes de mercado.

**Palabras clave:** modelo de Black-Cox; volatilidad implícita; arbitraje.

**Clasificación JEL:** C65; D53; E44; F37; G12; G15.

**MSC2010:** 35Q80; 91B26; 91G99; 58J35; 35K05.

# Market Calibration Problem and the Implied Structure of the Black-Cox Bond Model

## ABSTRACT

The main result of this paper consists in the resolution of the inverse problem for the Black-Cox (1976) model, using the method proposed by Sukhomlin (2007). Based on the backward approach, we obtain an exact expression of the implied volatility expressed as a function of quantifiable market parameters and known variables. We discover the existence of two values of the volatility for an underlying asset, in the referred model, which means that the model's traditional assumptions do not define it univocally. We find the cause that the Black-Cox model contains two values of the volatility. Besides, we carry out a simulation in order to verify, numerically, that our volatility expression is in fact the inversion of the formula that represents the probability that the firm has not reached the reorganization boundary before the debt expires. Finally, we solve the market calibration problem from the forward approach, finding an expression that is more useful for market agents.

**Keywords:** Black-Cox model; implied volatility; arbitrage.

**JEL classification:** C65; D53; E44; F37; G12; G15.

**MSC2010:** 35Q80; 91B26; 91G99; 58J35; 35K05.



## 1. INTRODUCCIÓN

El modelo de Black-Scholes (1973), para la valoración de opciones, constituye uno de los aportes más significativos en el campo de la teoría y práctica financiera, así como también la base de importantes investigaciones, tales como las de Merton (1974) y Black y Cox (1976), quienes aplican este análisis en sus respectivos trabajos sobre la valoración de deuda corporativa. Este artículo se enmarca en el modelo clásico de Black y Cox, fundamentado en los resultados de Merton.

Tanto el modelo de Merton como el de Black-Cox pertenecen a la familia de los denominados modelos estructurales, que determinan la probabilidad de que una empresa alcance un nivel de insolvencia (antes del tiempo de madurez de la deuda), tomando como referencia el valor de mercado de la misma. Estos modelos establecen un vínculo entre la calidad de crédito de la firma y su condición financiera.

Merton asume que la estructura de capital de una corporación se compone de deuda (bonos cero cupón con determinado tiempo de madurez) y de acciones. Si en el tiempo de expiración de la deuda, el valor total de los activos de la empresa es superior al valor de la deuda, se paga, en primer lugar, a los tenedores de bonos; los accionistas reciben la parte remanente. En el caso contrario, la corporación en cuestión cae en un nivel de insolvencia; los accionistas no reciben beneficios. Así, las acciones funcionan como una opción de compra sobre los activos de la firma, con un precio de ejercicio equivalente al valor facial de la deuda. Al tratar las acciones como opciones europeas de compra, Merton utiliza el enfoque propuesto por Black y Scholes para la valoración de dichos instrumentos.

Black y Cox utilizan un modelo de primer pasaje, extendiendo el enfoque de Merton al caso en que la empresa puede alcanzar un nivel de insolvencia en cualquier momento previo a la fecha de expiración de la deuda.

En la literatura económica existe un gran número de investigaciones basadas en la aplicación empírica de los modelos estructurales. Los resultados muestran que, de manera consistente, se sobrevaloran los precios de los bonos y se subvalúan los márgenes de rendimiento.

En Eom *et al.* (2004), se llevan a cabo pruebas para cinco modelos estructurales de valoración de bonos: Merton (1974); Geske (1977); Longstaff y Schwartz (1995); Leland y Toft (1996); Collin-Dufresne y Goldstein (2001). Los resultados de estas estimaciones reflejan inexactitudes en la predicción de los márgenes de rendimiento. En el caso del modelo de Merton, se encuentra que los márgenes que se predicen con la implementación del mismo son muy bajos.

Wong & Li (2004) consideran que la imprecisión en la implementación del modelo de Merton (1974) puede ser consecuencia de la utilización de variables *proxies* en los estudios empíricos. Estos autores muestran que al utilizar la suma del valor de mercado de las acciones con el valor en libro de la deuda corporativa, como *proxy* del valor de mercado de la firma, se genera un sesgo significativo de sobrevaloración de los activos de la misma. Ellos proponen el método de máxima verosimilitud para estimar el valor de los activos y la volatilidad, en el caso de los modelos estructurales, y muestran que, utilizando esta metodología, los precios de bonos se subvalúan o se sobrevaloran con un mínimo margen de error.

Chen *et al.* (2006) llevan a cabo una comparación entre seis modelos estructurales (entre ellos el de Merton y el de Black-Cox), a fin de analizar su capacidad para predecir la probabilidad de que la firma caiga en una situación de insolvencia. Se demuestra que tanto para la situación en la que el período de predicción es largo, como cuando es corto, el modelo de Merton es el que presenta los peores resultados. Por su parte, el modelo de Black-Cox queda en segundo y en primer lugar, respectivamente, para cada caso mencionado.

Bruche (2006) muestra cómo los datos de precios de bonos pueden ser utilizados conjuntamente con los datos de precios de acciones de la empresa para estimar modelos estructurales utilizando el método de máxima verosimilitud. Se lleva a cabo la estimación de tres modelos estructurales: Merton (1974); Leland (1994); Leland y Toft (1996). Los resultados indican que tanto el modelo de Merton como el de Leland subvalúan los márgenes de rendimiento, mientras que el de Leland y Toft los sobrevalora.

En adición al esfuerzo por lograr una mayor precisión en la implementación de los modelos de valoración de opciones, diversos autores han desarrollado trabajos que constituyen una herramienta para mejorar la comprensión de las relaciones que subyacen en dichos modelos. En este sentido, la literatura económica muestra que la obtención de fórmulas aproximativas de la volatilidad implícita, es decir, un valor de la volatilidad que explique perfectamente el precio de la opción dadas las demás variables y parámetros del modelo, ha sido objeto de varios estudios.

Brenner & Subrahmanyam (1988) proponen una fórmula simple con el fin de aproximar la desviación estándar implícita para *opciones en el dinero* (*at the money options*) en el marco del modelo de Black-Scholes. Este trabajo ha sido objeto de extensiones tales como las de Corrado & Miller (1996), quienes mejoran el rango de validez de la fórmula propuesta por Brenner & Subrahmanyam y Chance (1996), quien introduce un término cuadrático de ajuste a fin de mejorar la precisión de la fórmula referida.

Isenngildina *et al.* (2007) verifican la precisión de diferentes fórmulas aproximativas de la volatilidad implícita para el modelo de Black-Scholes (entre éstas las de Corrado & Miller y la de Brenner & Subrahmayan). Los autores concluyen en que la precisión de las fórmulas evaluadas es sensible al tipo de datos de opciones utilizados (*e.g.* opciones de compra *premium*, promedio del valor de opciones de compra y venta, etc.), ya que en las fórmulas consideradas puede mejorar o empeorar la exactitud de los resultados en función de la muestra usada.

Sukhomlin (2007) es el primero en desarrollar un método que permite resolver el problema inverso del modelo de Black-Scholes y obtener una expresión exacta para la volatilidad implícita de dicho modelo. Este método puede ser generalizado y aplicado a modelos de este tipo, como es el caso del modelo de Black-Cox.

Así, el principal resultado de este artículo consiste en la resolución del problema de calibración de mercado del modelo de Black-Cox, utilizando el método propuesto por Sukhomlin. Se obtiene la volatilidad implícita expresada en función de parámetros cuantificables con datos de mercado (precio del bien subyacente, valor de la opción y el nivel de insolvencia), de variables conocidas (tasa de interés y tiempo de madurez) y de una variable que puede ser calculada fácilmente con dichos datos (la elasticidad de la griega *Delta*). Se descubre la existencia de dos valores de la volatilidad para un solo activo subyacente.

En este artículo se parte del enfoque *retrógrado* o “hacia atrás” (*backward*) para resolver el problema inverso del modelo de Black-Cox. Este resultado no solamente es interesante por el mero hecho de que responde una cuestión de más de 30 años de antigüedad, sino que también muestra que las asunciones tradicionales del modelo no lo definen de manera unívoca. Este hecho cambia totalmente la visión sobre este modelo clásico y sus resultados econométricos, y debe servir de base para explicar las dificultades de su aplicación en la predicción del comportamiento del mercado.

Pese a que en todo el artículo se emplea el enfoque *retrógrado*, comúnmente utilizado en la teoría de valoración de opciones, en una sección se resuelve el problema de calibración de mercado partiendo de la visión *directa* o “hacia el futuro” (*forward*), que resulta de mayor utilidad desde el punto de vista de los agentes del mercado.

A fin de verificar, numéricamente, que la expresión obtenida para la volatilidad implícita constituye la solución al problema inverso del modelo de Black-Cox, se llevó a cabo una simulación. Tomando en cuenta la existencia de dos valores de la volatilidad, se obtuvieron los valores para la expresión que

representa la probabilidad de que la firma no caiga en un nivel de insolvencia (antes del tiempo de madurez de la deuda), con la precisión de  $10^{-9}$  ó de  $10^{-5}$ , dependiendo del caso.

La estructura de este artículo es la siguiente. En la próxima sección se presenta una síntesis de los resultados principales. En la sección 3 se muestra la solución del problema inverso para el modelo de Black-Cox. En la sección 4 se discuten las semejanzas y diferencias entre las volatilidades implícitas de los modelos de Black-Cox y Black-Scholes. En la sección 5 se exponen las implicaciones de que en el modelo de Black-Cox exista más de un valor de la volatilidad, lo que muestra la necesidad de completar las asunciones tradicionales del modelo, a fin de definirlo de manera unívoca. En la sección 6 se presentan los resultados de la simulación realizada para comprobar que la fórmula principal representa realmente la inversión de la fórmula de Black-Cox. En la sección 7 se esgrimen argumentos de por qué en el modelo de Black-Cox existen dos valores de la volatilidad. En la sección 8 se expone la visión *directa* del problema de calibración de mercado, utilizada por los agentes prácticos. En la última sección se presentan las conclusiones de este trabajo.

## 2. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS PRINCIPALES

Aparte del trabajo de Sukhomlin (2007), en la literatura económica no existen publicaciones en las que se construya una expresión exacta de la volatilidad implícita para un bien derivado como una función de variables medibles en el mercado.

En este artículo, usando la metodología propuesta por Sukhomlin, se resuelve el problema inverso para el modelo de Black-Cox (BC), al obtener una expresión de la volatilidad implícita expresada en función de parámetros cuantificables con datos de mercado. Asimismo, se descubren otras características intrínsecas del modelo, que resultan inesperadas y paradójicas, pero que estuvieron presentes desde la creación del mismo. Es importante señalar que los resultados encontrados en torno al modelo en cuestión no constituyen una construcción complementaria, sino una parte desconocida del mismo y por consiguiente inseparable.<sup>7</sup>

En el modelo de BC, así como en el de Black-Scholes y otros similares, el único parámetro desconocido es la volatilidad. Se encuentra que el Teorema de la Función Inversa no se verifica, puesto que, si bien es posible calcular la probabilidad<sup>8</sup> utilizando un solo valor de la volatilidad, resulta imposible obtener la

---

<sup>7</sup> Se debe acotar que los resultados presentados en este artículo no constituyen un nuevo modelo sino, de manera más precisa, se puede señalar que representan nuevos desarrollos en torno a la teoría del modelo de BC.

<sup>8</sup> En el caso del modelo de BC, nos referimos a la probabilidad de que la firma no alcance el nivel de insolvencia, denotada por la fórmula (1) (sección 3).

volatilidad (considerando que es una característica de la dispersión) utilizando un único valor de la variable aleatoria. Así, este estudio prueba que, en el marco del cálculo de Leibniz-Newton, para obtener un valor de la volatilidad implícita de BC se necesitan cuatro valores consecutivos del precio del activo subyacente y cuatro valores correspondientes del bien derivado.

También se encuentra que una de las debilidades del modelo de BC es que, contrariamente al de Black-Scholes, no está construido partiendo del principio de “no arbitraje”, por lo que, al invertir la fórmula principal del mismo, se encuentran dos valores de la volatilidad implícita para un activo y se concluye que las asunciones tradicionales no lo definen de manera unívoca.

Para obtener un solo valor de la volatilidad a partir de la fórmula de BC es necesario completar las asunciones propuestas originalmente por los autores, agregando nuevas condiciones.

Cabe señalar que, aunque en este artículo se resuelve el problema inverso para el modelo de BC utilizando el enfoque *retrógrado*, también se presenta la resolución del problema de calibración de mercado partiendo de la visión *directa*, que resulta importante desde el punto de vista de los agentes de mercado.

Como en el caso del modelo de Black-Scholes, los resultados obtenidos en este artículo están basados en el estudio de la simetría intrínseca del modelo de BC. Para evitar la “matematización” del texto sólo se expone el procedimiento de construcción de la fórmula exacta de la volatilidad implícita haciendo referencia únicamente al artículo de Sukhomlin (2007), en que se estudia dicha simetría.

Apuntamos también que este artículo se limita estrictamente al modelo de BC y, por lo tanto, no se discuten las generalizaciones posteriores como las de Longstaff & Schartz (1995) y Cathcart & El-Jahel (1998), que extendieron el modelo de BC considerando la tasa de interés como una variable estocástica, los de Fujita T. & Ishizaka M. (2002) e Ishizaka & Takaoka (2003) con la amortización de una deuda más realista, diferentes modelos de riesgo de crédito de Brigo & Tarengi (2004), Brigo & Moroni (2006) y Nardon (2005), modelo del comercio con activos con riesgo de Holger Kraft & Mogens Steffensen, (2007), entre otros.

Del mismo modo, es necesario señalar que ningún trabajo que represente un desarrollo del modelo de BC permitió a sus respectivos autores resolver exactamente el problema inverso. Si bien el enfoque presentado en este artículo se puede aplicar a diferentes modelos de este tipo, esto queda fuera del alcance de este estudio.



### 3. PROBLEMA INVERSO DEL MODELO DE BLACK-COX

En el modelo de Black-Cox (1976), la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia (barrera de *default*) antes del tiempo de madurez de la deuda, viene dada por la expresión:

$$V = N(d_+) - (x/B)^{2\beta} N(d_-), \quad (1)$$

$$d_{\pm} = \pm \tau^{-1} \ln(x/B) - \beta \tau, \\ \tau = \sigma \sqrt{T-t}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}, \quad x > B, \quad B = \text{const} > 0, \quad (2)$$

$N(\cdot)$  es la función de distribución normal acumulada.

Tradicionalmente, se interpreta  $x$  como el valor de mercado de la firma en el momento  $t$ ;  $B$  es el nivel de insolvencia<sup>9</sup>;  $\sigma$  es la volatilidad constante;  $T$  es el tiempo de madurez de la deuda y  $r$  es la tasa de interés (constante) libre de riesgo.

Para resolver el problema de calibración de mercado, Sukhomlin (2007) propone un método que consta de cuatro pasos: *construir una relación entre los términos de la fórmula inicial (la que representa la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia antes del tiempo de madurez de la deuda); introducir una característica auxiliar, de manera que se separe el factor exponencial; calcular la elasticidad de dicha característica; y, considerando esta expresión como una ecuación algebraica para la volatilidad, hallar la volatilidad implícita del modelo.*

Partiendo de (1), se obtiene la siguiente igualdad, que representa el primer paso del método:

$$N'(d_+) = N'(d_-)(x/B)^{2\beta}.$$

Como segundo paso, se introduce la función auxiliar:

$$\xi = V_{zz} - 2\beta V_z; \quad V_z := \partial V_{BC} / \partial z, \quad V_{zz} := \partial^2 V / \partial z^2, \quad z := \ln(x/B). \quad (3)$$

Así, se obtiene la expresión:

$$\xi = -\frac{2}{\tau^3} z N'(d_+) \quad (4)$$

---

<sup>9</sup> Aunque Black y Cox asumen un nivel de insolvencia que varía con una tasa fija, para fines de simplificación de fórmulas, en este artículo se supone una tasa cero, por lo que el valor de la barrera es constante. No obstante, en las fórmulas presentadas resulta sencillo introducir esta dependencia de la barrera de *default* con respecto al tiempo.

Por definición, la elasticidad de esta característica auxiliar es:

$$E_{\xi} = \frac{\partial \ln|\xi|}{\partial z}, \quad (5)$$

por lo que, usando la función auxiliar (3), es sencillo calcular:

$$E_{\xi} = \frac{V_{zzz} - 2\beta V_{zz}}{V_{zz} - 2\beta V_z}. \quad (6)$$

Por otra parte, la expresión (4) también permite calcular la misma elasticidad (5), obteniéndose el siguiente resultado:

$$E_{\xi} = \frac{1}{z} - \frac{z}{\tau^2} + \beta. \quad (7)$$

Igualando las expresiones de la elasticidad, obtenemos la fórmula:

$$\frac{V_{zzz} - 2\beta V_{zz}}{V_{zz} - 2\beta V_z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{\tau^2} + \beta. \quad (8)$$

Como último paso, la igualdad (8) se considera como una ecuación algebraica para la volatilidad implícita del modelo de BC, ya que se puede despejar  $\sigma$  a partir de  $\beta$  y de  $\tau$  cuando todas las demás variables están dadas o son medibles en el mercado.

Así, se puede escribir (8) en forma de ecuación cuadrática para el parámetro sin dimensión  $\beta$  (de (2) se obtiene que  $\tau^2 = 2r(T-t)(1-2\beta)^{-1}$ ):

$$2Q\beta^2 + R\beta + P = 0, \quad (9)$$

en donde:

$$Q := 1 + \frac{z}{r(T-t)}, \quad (10)$$

$$R := -(Q+2)E_{\Delta} - 2\left(Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{z}\right), \quad (11)$$

$$P := (E_{\Delta})_z + E_{\Delta}^2 + \left(\frac{1}{2}Q + \frac{3}{2} - \frac{1}{z}\right)E_{\Delta} + \left(\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{z}\right). \quad (12)$$

Los coeficientes  $R$  y  $P$  están expresados en función de la elasticidad de la griega *Delta* ( $\Delta := V_x$ ):

$$E_{\Delta} := \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (13)$$

La solución de la ecuación (9) es:

$$\beta_{1,2} = \frac{-R \mp \sqrt{R^2 - 8QP}}{4Q}. \quad (14)$$

Sustituyendo  $\beta$  (2) en la igualdad (14), se llega a la expresión para la volatilidad implícita del modelo de BC:

$$(\sigma_{BC}^2)_{1,2} = \frac{4Qr}{2Q + R \pm \sqrt{R^2 - 8QP}}. \quad (15)$$

La fórmula (15) revela dos hechos importantes. En primer lugar, se observa que las asunciones tradicionales del modelo de BC admiten dos valores de la volatilidad implícita para un solo activo subyacente (esto se estudia de manera más detallada en las secciones 5 y 7). En segundo lugar, es evidente que si no se completan los supuestos del modelo, los valores de la volatilidad pueden llegar a ser complejos o negativos, dependiendo del signo del denominador de la fórmula (15) y del valor de la expresión bajo la raíz. Al reemplazar los coeficientes  $Q$ ,  $R$ ,  $P$  de (10), (11) y (12), respectivamente, en la expresión (15), se ilustra de manera más explícita la relación existente entre la volatilidad implícita del modelo de BC y las variables de las cuales depende:

$$(\sigma_{BC}^2)_{1,2} = -4r \left[ \frac{\ln(B/x)}{r(T-t)} - 1 \right] \left\{ \left[ \frac{\ln(B/x)}{r(T-t)} - 3 \right] E_{\Delta} + 2 \ln(B/x) - 1 \pm \sqrt{8 \left[ \frac{\ln(B/x)}{r(T-t)} - 1 \right] (E_{\Delta})_z + \left[ (2 \ln(B/x) - 1) - \left( \frac{\ln(B/x)}{r(T-t)} + 1 \right) E_{\Delta} \right]^2} \right\}^{-1} \quad (15a)$$

Se constata que la volatilidad implícita del modelo de BC es una función de cuatro variables: la ratio del nivel de insolvencia sobre el valor de la firma  $B/x$ , que se interpreta como el nivel de endeudamiento de la compañía (*leverage*); la tasa de interés libre de riesgo  $r$ , el tiempo hacia la madurez  $(T-t)$  y la elasticidad de la griega *Delta*  $E_{\Delta}$  (13):

$$\sigma_{BC}^2 = \sigma_{BC}^2(B/x, r, (T-t), E_{\Delta}). \quad (16)$$

Es evidente que la expresión (15a) resulta complicada y, por esta razón, las discusiones posteriores que se harán en torno a la volatilidad implícita del modelo de BC estarán enfocadas en (15). Con la fórmula (15) se obtiene la solución exacta para el problema inverso del modelo de BC, ya que se logra expresar la

volatilidad en función de parámetros cuantificables con datos de mercado y de variables conocidas.<sup>10</sup> En el marco del modelo estudiado, la expresión de la volatilidad (15) es tan válida como la expresión de partida (1), interpretada como la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia antes del tiempo de madurez de la deuda. En la sección 6, se verifica, numéricamente, que la fórmula (15) es la inversión exacta de (1).

#### 4. SIMILITUDES Y DIFERENCIAS ENTRE LAS VOLATILIDADES IMPLÍCITAS DE LOS MODELOS DE BLACK-SCHOLES Y DE BLACK-COX

En la teoría de mercados financieros, el modelo de Black-Scholes (BS) sobre la valoración de opciones constituye el pivote de diversas investigaciones y, particularmente, Black y Cox emplean este enfoque para evaluar la probabilidad de que una firma pueda caer en una situación de insolvencia antes del vencimiento de la deuda. En este sentido, resulta interesante comparar la fórmula de la volatilidad para el modelo de BC (15) con la del modelo de BS, deducida por Sukhomlin (2007), que viene dada por la fórmula:

$$\sigma_{BS}^2 = \frac{\ln(K/S) - r(T-t)}{(T-t) \left( \frac{3}{2} + E_\Gamma \right)}. \quad (17)$$

Al observar las expresiones (15) y (17), se constata que la volatilidad del modelo de Black-Scholes es única y también depende de cuatro variables que son: la ratio  $K/S$  (donde  $K$  es el precio de ejercicio de la opción de compra;  $S$  es el precio del bien subyacente);  $r$  es la tasa de interés libre del riesgo;  $(T-t)$  es el tiempo hacia la madurez de la deuda;  $E_\Gamma$  es la elasticidad de la griega *Gamma* (donde *Gamma*  $\Gamma := \partial^2 V / \partial x^2$ , mide la sensibilidad a los cambios en la característica *Delta*)<sup>11</sup>:

$$\sigma_{BS}^2 = \sigma_{BS}^2(K/S, r, (T-t), E_\Gamma). \quad (18)$$

Las expresiones (16) y (18)<sup>12</sup> muestran las variables de las cuales depende la volatilidad implícita en los modelos de BC y BS, respectivamente. Se advierte que, tanto en el modelo de BC como en el modelo de BS, se hace referencia a la ratio entre una constante (nivel de insolvencia y precio de ejercicio,

<sup>10</sup> Todos los datos, salvo la elasticidad de *Delta*, se obtienen directamente del mercado. Dicha elasticidad se calcula con los datos del mercado por la discretización de la fórmula (13), que no contiene la volatilidad, o utilizando las derivadas de la fórmula (1). Se puede comprobar que los resultados obtenidos por cálculos numéricos son prácticamente los mismos. Para la simulación realizada en la sección 6, se utiliza la primera metodología.

<sup>11</sup> La idea de utilizar en el modelo de BS la elasticidad de la griega *Gamma* en lugar de la elasticidad de la función auxiliar *Ks*, fue propuesta por Philippe Jacquinot y publicada en el artículo Sukhomlin, Jacquinot (2007).

<sup>12</sup> Sukhomlin y Jacquinot (2007) llevaron a cabo una simulación para la fórmula de la volatilidad implícita en el modelo de Black-Scholes (17), obteniendo una precisión de  $10^{-9}$  y siendo los valores seleccionados para los parámetros de (18):  $S_0=95$ ,  $S_{(i+1)}-S_i=0.01$ ,  $K=100$ ,  $r=0.04$ ,  $(T-t)=0.20$ ,  $\sigma=0.20$ .

respectivamente) y la variable aleatoria (precio del bien subyacente). En el contexto del modelo de BC, esta ratio se interpreta como el nivel de endeudamiento de la compañía (*leverage*) y en el modelo de BS se interpreta como *moneyness*<sup>13</sup>.

En ambas fórmulas se mantiene la presencia de una elasticidad, aunque ésta se calcula con respecto a diferentes griegas. La volatilidad implícita del modelo de BC necesita para su definición la elasticidad de la griega *Delta* (la primera derivada del valor de la opción respecto con el precio del bien subyacente), en tanto que la volatilidad implícita del modelo de BS se define por la elasticidad de la griega de orden superior *Gamma* (la segunda derivada del valor de la opción con respecto al precio del bien subyacente). De este hecho se deduce que, en el modelo de BS, la curvatura de la gráfica de  $V$  (1) es de mayor importancia para definir la volatilidad, mientras que en el modelo de BC es más relevante la tendencia del mercado, representada por la griega *Delta*. Es oportuno señalar, que las elasticidades mencionadas no habían sido utilizadas anteriormente en la teoría de estos modelos puesto que, durante más de treinta años, existía un estereotipo de que la volatilidad debía ser expresada directamente en términos del valor de la opción<sup>14</sup>. Por ejemplo, en el caso del modelo de BS se supuso que:

$$V_{BS} = V_{BS}(K/S, r, (T-t), \sigma_{BS}^2) \stackrel{?}{\Rightarrow} \sigma_{BS}^2 = \sigma_{BS}^2(K/S, r, (T-t), V_{BS}).$$

En la literatura económica, varios autores proponen fórmulas aproximativas de la volatilidad implícita expresadas, justamente, en función del valor de la opción (véase, por ejemplo Brenner & Subrahmanyam (1988); Chance (1996); Corrado & Miller (1996); Chambers & Nawalka (2001); Fouque et al. (2004); Kelly (2006); Isengildina-Massa et al. (2007); Minqiang (2008), entre otros)<sup>15</sup>. Esta línea de pensamiento no corresponde al hecho de que la volatilidad, como una característica de la dispersión, no puede ser vinculada a un solo valor de la variable aleatoria, sino que debe ser definida por varios valores consecutivos de la misma.

## 5. INSUFICIENCIA DE LAS ASUNCIONES DEL MODELO DE BLACK-COX

La existencia de dos valores de la volatilidad implícita para un solo activo subyacente es una condición intrínseca al modelo de BC. Pese a que esta propiedad resulta paradójica y contradiga el razonamiento

<sup>13</sup> Existen otras definiciones de la *moneyness* como por ejemplo:  $K/S-1$  y  $\ln(K/S)$ . Todas estas definiciones son válidas únicamente en el momento de expiración cuando  $T = t$ . Para utilizar esta característica en los momentos anteriores a la expiración, ( $t < T$ ), se debe actualizar el precio de ejercicio, entonces la *moneyness* sería:  $Ke^{-r(T-t)}/S$  (véase, por ejemplo, Hull and White, 1990).

<sup>14</sup> Utilizamos  $V_{BS}$  para denotar la fórmula encontrada por Black y Scholes (1973) para calcular el valor de una opción (no debe ser confundida con  $V$  de la fórmula (1)).

<sup>15</sup> Este enfoque convencional lleva a que el problema inverso para todas las fórmulas de este tipo se califique como *mal planteado* (véase, por ejemplo, Hein and Hofmann (2003)).

lógico, es inherente al modelo en cuestión, dados los supuestos y las condiciones complementarias (sección 7) consideradas por sus autores al momento de su creación.

En la sección 3, se señaló que los valores de (15) pueden llegar a ser complejos o negativos, dependiendo del signo del denominador de la fórmula y del valor de la expresión bajo la raíz. Así, a partir de dicha fórmula se observa que los valores complejos de la volatilidad implícita se pueden evitar si:

$$R^2 - 8QP > 0. \quad (19)$$

Usando (11) y (12), se puede escribir (19) en términos de la elasticidad de *Delta* (véase Anexo2):

$$\left( \frac{1}{E_{\Delta}} \right)_z > -\frac{1}{8Q} \left[ (Q-2) + \left( \frac{2}{z} - 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} \right]^2. \quad (20)$$

Conforme a la fórmula (15), los dos valores encontrados (si se verifica (19)) pueden tener signos distintos o el mismo signo (positivo). En el primer caso, se encuentra que el cumplimiento de (20) es automático, a diferencia de la situación en que ambos resultados son positivos.

$$\begin{aligned} \text{Caso 1. } \sigma_1^2 < 0, \sigma_2^2 > 0: \quad & 2Q + R + \sqrt{R^2 - 8QP} > 0 \\ & 2Q + R - \sqrt{R^2 - 8QP} < 0 \end{aligned}$$

Este sistema puede ser escrito como  $0 \leq |2Q + R| < \sqrt{R^2 - 8QP}$  y, sustituyendo las expresiones (11) y (12), el mismo puede ser expresado en términos de la elasticidad de *Delta*:

$$\left( \frac{1}{E_{\Delta}} \right)_z > \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{z} + 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} + 1. \quad (21)$$

Se puede verificar (véase Anexo 3) que (21) implica (20). Se concluye que el cumplimiento de (21) garantiza los signos diferentes de los dos valores de la expresión (15). En este caso, el valor negativo simplemente no se utiliza puesto que, aún si desde el punto de vista matemático las variables cuadráticas negativas están definidas (a partir de las cuales se obtienen raíces complejas), no tienen sentido desde la perspectiva económica.

$$\begin{aligned} \text{Caso 2. } \sigma_1^2 > 0, \sigma_2^2 > 0: \quad & 2Q + R + \sqrt{R^2 - 8QP} > 0, \\ & 2Q + R - \sqrt{R^2 - 8QP} > 0. \end{aligned}$$

Este sistema sobre-definido puede ser expresado como una sola desigualdad, que es inversa de (21):

$$\left(\frac{1}{E_{\Delta}}\right)_z < \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{z}+1\right)\frac{1}{E_{\Delta}}+1. \quad (22)$$

Usando el mismo razonamiento empleado en el Anexo 3, se comprueba que el cumplimiento de (22) no implica (20). En conclusión, al verificarse simultáneamente (20) y (22), los signos de ambas volatilidades serán positivos. En la sección 6 se hace la simulación para este caso.

En esta situación, en que se obtienen dos valores positivos de la volatilidad, no se sabría con certeza cuál de éstos define el comportamiento del activo subyacente en cuestión. Bajo esta circunstancia, se advierte la existencia de un “*espacio escondido*” que representa riesgos ocultos y oportunidades de arbitraje, considerando que se pueden obtener beneficios derivados de la diferencia entre ambos valores de la volatilidad. De forma más explícita, un inversionista puede adquirir un instrumento financiero asumiendo un determinado valor de la volatilidad implícita y, por otra parte, dicho instrumento contiene también otra volatilidad que es inferior a la primera.

Así, se observa que esta debilidad del modelo de BC permite que se lleve a cabo la negociación de un instrumento financiero a un precio superior al que corresponde y que en realidad debería ser el mismo que se establece en función al otro valor de la volatilidad implícita, que es menor. De esta manera, se puede considerar que la existencia de más de una volatilidad está asociada a la presencia de oportunidades de arbitraje.<sup>16</sup> En este sentido, se realizó un ejercicio sencillo que consistió en verificar si para los modelos de BC y BS se comprueban las condiciones de no arbitraje conocidas en la teoría financiera; es decir, que la función que representa el valor de la opción es monótona decreciente y convexa con respecto al precio de ejercicio y no decreciente con respecto al tiempo de madurez (véase, por ejemplo, Laurent & Leiseen, 1998). Se demostró que, para el modelo de BS, se cumplen simultáneamente las condiciones necesarias para que no exista arbitraje, mientras que para el modelo de BC no se comprueban (en el caso del modelo de BC se hizo la prueba para la fórmula (1)). Esta diferencia resulta lógica, considerando que en el modelo de BS la hipótesis de no arbitraje viene dada por la ecuación principal del modelo, mientras que Black y Cox no incorporaron esta restricción como parte de su modelo.

La presencia de riesgos ocultos en el modelo de BC debe servir de base para explicar las dificultades de su aplicación en la predicción del comportamiento del mercado y, asimismo, dicha condición muestra la necesidad de completar las asunciones establecidas durante la elaboración del modelo a fin de definirlo de manera unívoca.

---

<sup>16</sup> Además del modelo de Black-Cox, Sukhomlin (2007) comprobó que en otros modelos también se obtiene más de un valor de la volatilidad, como por ejemplo en el modelo de Cané de Estrada y coautores (2005), que puede contener hasta tres valores de la volatilidad implícita.

## 6. VERIFICACIÓN DE LA EXPRESIÓN DE LA VOLATILIDAD POR SIMULACIÓN

A fin de comprobar numéricamente que (15) representa la inversión exacta de la expresión (1), se llevó a cabo una simulación, eligiendo los siguientes parámetros: los valores del activo subyacente  $x_i$  se eligen en el intervalo  $[98.3, 105.3]$ ,  $\Delta x_i = 0.007$ ,  $i = [1, \dots, 1000]$ , el nivel de insolvencia  $B = 69$ , el tiempo hacia la madurez  $T-t = 0.20$ , la tasa de interés  $r = 0.0225$  y la volatilidad constante  $\sigma_0^2 = 0.04$ .

Con los valores escogidos, se calculan la expresión (1) y sus derivadas<sup>17</sup>. A partir de estos resultados y de los valores de la elasticidad de la griega *Delta* (13), se obtienen los coeficientes  $R$  y  $P$  de (11) y (12). Así, con la fórmula (15) se llega a dos valores positivos de la volatilidad<sup>18</sup>:

$$(\sigma^2)_1 = 0.002 \quad (\sigma^2)_2 = 0.04. \quad (23)$$

Es sencillo comprobar que ambas volatilidades verifican la ecuación (9). Se nota que, el valor de  $\sigma_2^2$  se confunde con una precisión de  $10^{-6}$  con la volatilidad inicialmente escogida de 0.04, lo que respalda la validez de nuestra fórmula.

La particularidad del modelo de BC radica en el hecho de que, además de la volatilidad esperada, en este caso  $\sigma_2^2$ , existe otra diferente que apenas representa un 5% de la volatilidad inicial, pero al igual que la volatilidad esperada es también una solución de la ecuación (9) y constituye una parte del modelo.

La Figura 1 muestra los residuos  $(\varepsilon)_{1,2} = \sigma^2 - (\sigma^2_{calculada})_{1,2}$ . Los subíndices 1 y 2 corresponden, respectivamente, a las volatilidades  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$ . Los valores de la serie  $\varepsilon_2$  se distribuyen entre  $2.3 \times 10^{-6}$  y  $2.4 \times 10^{-6}$ , mientras que los valores de  $\varepsilon_1$  son más imprecisos.

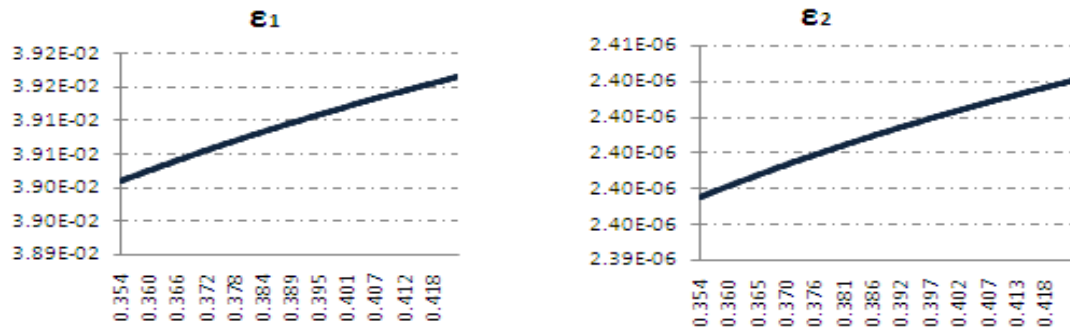


Figura 1. Comportamiento de los residuos  $\varepsilon_1$  y de  $\varepsilon_2$  en función de  $z$ .

<sup>17</sup> Por la discretización de la fórmula (6).

<sup>18</sup> En (23) se muestran los promedios para cada caso.



Para cada una de las volatilidades de (23), se calculan los valores de  $V$  conforme a la fórmula (1). El subíndice 0 corresponde al valor de  $V$  calculado con la volatilidad inicialmente elegida  $\sigma_0^2$ . Se atribuyen los subíndices 1 y 2, respectivamente, según corresponda a  $\sigma_1^2$  ó  $\sigma_2^2$ . Las gráficas para  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  se presentan en la Figura 2.

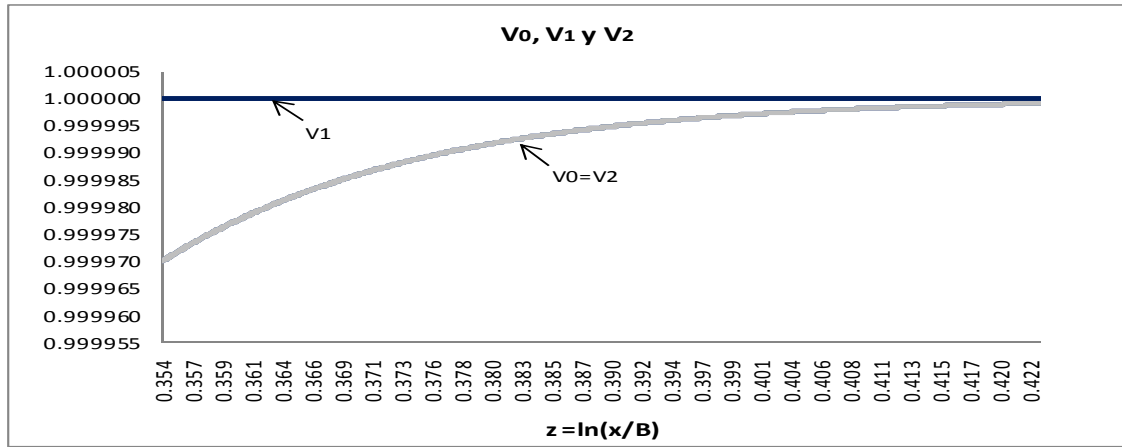


Figura 2. Comportamiento de  $V_0, V_1$  y  $V_2$  en función de  $z$ .

Las gráficas de  $V_0$  y de  $V_2$  se confunden con una precisión de  $10^{-9}$ . Los valores de  $V_1$  muestran una precisión de  $10^{-5}$  con respecto a  $V_0$  y, para todos los valores de  $z$  del intervalo escogido, permanecen constantes e iguales a uno.

Las gráficas de  $V_0$ ,  $V_1$  y  $V_2$  en la Figura 2, se relacionan con el hecho de que la influencia del primer término de la fórmula (1),  $N(d_+)$ , es mayor que la del segundo término,  $(x/B)^{2\beta} N(d_-)$ . A medida que  $z$  crece o el tiempo se acerca a la madurez  $N(d_+) \rightarrow 1$  y el segundo término tiende a cero.

Los resultados de la simulación y la precisión de los valores de  $V_1$  y de  $V_2$  con respecto a  $V_0$  respaldan, numéricamente, el hecho de que la expresión de la volatilidad implícita para el modelo de BC (15) es la inversión de la fórmula que representa la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia antes del tiempo de madurez de la deuda (1). La brecha observada entre  $V_1$  y  $V_0$  puede ser explicada por el intervalo de datos, así como también por la marcada diferencia entre  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$ .

## 7. ¿POR QUÉ EL MODELO DE BLACK-COX CONTIENE DOS VALORES DE LA VOLATILIDAD?

En la sección 4 se discutieron las semejanzas y diferencias entre las volatilidades implícitas de los modelos de BS y BC, pero aún permanece la cuestión de por qué en el segundo modelo se obtienen dos valores de la volatilidad, mientras que en BS se encuentra solamente un valor. Para responder esta pregunta, en primer lugar, se debe señalar que la fórmula (1) es la solución de la ecuación que puede ser llamada *ecuación de Black-Cox*<sup>19</sup>:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

Se constata que la ecuación (24) es prácticamente la misma que la ecuación clásica de BS, salvo que (24) no contiene el término que representa el incremento de la inversión libre de riesgo con tasa de interés fija. Esta diferencia es lógica, en vista de que, como se señala en la sección 5, la ecuación principal del modelo de BS representa la condición de no arbitraje, es decir, la igualdad entre los incrementos de dos inversiones en unidad de tiempo: el de una opción, que es afectada por las fluctuaciones del bien subyacente y otro que es el de la inversión sin riesgo con la tasa de interés fija.

En el caso del modelo de BC se habla del comportamiento de los activos de la firma, que funcionan como una opción (enfoque de Merton), por lo que el cero en la parte derecha de la ecuación (24) significa que no se hace referencia a inversiones sin riesgo. Es oportuno señalar que Black y Cox (1976) dedujeron su fórmula basándose únicamente en el razonamiento lógico de la Teoría de Bonos y, por esta razón, el planteamiento hecho por dichos autores y las aplicaciones posteriores del modelo, no incluyen ni la ecuación (24) ni la condición final correspondiente. Sin embargo, ambas pueden ser construidas usando la fórmula (1). La condición final sería la siguiente:

$$V(t=T, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq B \\ -(x/B)^{2\beta} & \text{si } x < B \end{cases}. \quad (25)$$

Ahora, se puede plantear el problema de búsqueda de la solución para la ecuación (24) definida sobre el cilindro  $\{x, t : x > 0, t \in [0, T]\}$  y sujeta a la condición final (25). Usando el procedimiento similar al del modelo de BS, particularmente, aplicando la transformación regular:  $t' = T - t$ ,  $z = \ln(x/B) - \sigma^2 \beta t'$ ,  $U(z, t') = V(x, t)$ , la ecuación de BC (24) se convierte en la ecuación de difusión

$$\partial U / \partial t' - (\sigma^2 / 2) \partial^2 U / \partial z^2 = 0 \text{ con la condición inicial: } U(z, t' = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ -e^{2\beta z} & \text{si } z < 0 \end{cases}; \quad \beta \text{ está}$$

<sup>19</sup> No se debe confundir esta ecuación con la del modelo de Black-Scholes que contiene el término  $rVt$  en la parte derecha.

definida en (2). Usando la solución fundamental (función de Green) de la ecuación de difusión y evaluando la integral correspondiente, se obtiene la solución del problema en forma (1). Se constata que, en vista de que las ecuaciones correspondientes a los modelos de BC y BS son prácticamente las mismas, la existencia de dos valores de la volatilidad en el modelo de BC no puede ser atribuida a la ecuación (24), que describe la dinámica del modelo. Este argumento también se respalda por el razonamiento siguiente: al resolver la ecuación de Black-Cox (24) con la condición final de Black-Scholes, se obtiene la solución clásica de Black-Scholes no descontada. La inversión de ésta genera un único valor de la volatilidad. De la misma manera, si se resuelve la ecuación de Black-Scholes con la condición final (25) se obtiene la solución (1) descontada, a partir de la cual se encuentran dos valores de la volatilidad.

Por otra parte, se observa que esta particularidad del modelo de BC tampoco puede ser atribuida al procedimiento utilizado para construir la solución del modelo, ya que éste es exactamente el mismo que se emplea para derivar la solución clásica de BS. Así, se puede concluir que la existencia de dos valores de la volatilidad en el modelo de BC es una consecuencia de la condición complementaria correspondiente (25), que contiene una discontinuidad.<sup>20</sup> Por lo tanto, se valora el papel de dicha condición, porque de ésta depende la presencia del riesgo oculto en el modelo estudiado.

## 8. VISIÓN PRÁCTICA DEL PROBLEMA DE LA CALIBRACIÓN DE MERCADO

El enfoque *retrógrado* (*hacia el pasado*) de la resolución del problema inverso para el modelo de BC (expuesto en la sección 3), es comúnmente utilizado en la teoría de valoración de opciones. No obstante, la visión práctica de los agentes de mercados es diferente. Los prácticos prefieren usar la información dada en un instante del tiempo y elaborar su decisión en base al conjunto de los datos actuales. Así, la calibración de mercado se entiende como la evaluación de un parámetro cuando los valores de las demás variables están dados en un momento del tiempo. Este enfoque *directo* (*hacia futuro o de avance*) significa que el precio del activo  $x$  y el tiempo  $t$  se consideran como los parámetros fijos, mientras que el nivel de insolvencia  $B$  y el tiempo de madurez de la deuda  $T$  son variables.

Ambos puntos de vista existen simultáneamente y se manifiestan por el hecho de que, paralelamente a la ecuación de Black-Scholes (ecuación *retrógrada* de Kolmogorov), existe la ecuación *directa* de Kolmogorov (ecuación de difusión o la de Fokker-Planck). Esta última tiene como variables  $B$  y  $T$ . Cabe mencionar que Black y Cox en su trabajo consideraron la expresión (1) como función de  $x$  y  $t$ , lo que corresponde al enfoque *retrógrado* que también fue utilizado por Black y Scholes en su artículo clásico de

---

<sup>20</sup> Sukhomlin demostró que esta propiedad es general, puesto que, si se introduce cualquier discontinuidad en las condiciones finales, por ejemplo en la condición final estándar del modelo de Black-Scholes, en lugar de obtenerse una sola volatilidad como (17), surgen dos valores de la volatilidad para un subyacente.

1973. La expresión de la volatilidad implícita del modelo, desde la visión práctica de la calibración de mercado, se construye fácilmente por la introducción de la función auxiliar siguiente:

$$\Xi = V_{yy} + 2\beta V_y, \text{ en donde } y = \ln(B/x), \quad V_y \equiv \partial V / \partial y.$$

Usando (1), se calcula  $\Xi = \frac{2}{\tau^3} y N'(d_+)$ . Se observa que  $\Xi = \xi$  de (4) pero las variables de las que dependen son diferentes:  $\Xi$  se considera como una función de las variables  $B$  y  $T$ , mientras que  $\xi$  es una función de las variables  $x$  y  $t$ . Según el procedimiento similar al de la sección 3, la elasticidad de esta nueva característica  $\Xi$  sería:

$$E_{\Xi} \equiv \frac{\Xi_y}{\Xi} = \frac{V_{yyy} + 2\beta V_{yy}}{V_{yy} + 2\beta V_y} = \frac{1}{y} - \frac{y}{\tau^2} - \beta.$$

Esta última igualdad se puede escribir en forma de la ecuación cuadrática (9) para el parámetro sin dimensión  $\beta$ , en donde  $Q$  es igual a (10), mientras que los coeficientes  $R$  (11) y  $P$  (12) deben ser expresados en función de las derivadas con respecto a  $B$  y  $T$ , siendo  $t$  y  $x$  fijos:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &:= R(B, T) \Big|_{t, x \text{ fijos}} = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{Q}{2} - \frac{1}{y} \right) + (2 + Q) \frac{V_{yy}}{V_y}, \\ \tilde{P} &:= P(B, T) \Big|_{t, x \text{ fijos}} = \left( \frac{1}{2} - \frac{Q}{2} - \frac{1}{y} \right) \frac{V_{yy}}{V_y} + \frac{V_{yyy}}{V_y}. \end{aligned}$$

Así, se llega a la expresión exacta para la volatilidad implícita del modelo de BC que resuelve el problema de calibración de mercado, puesto que usa exclusivamente la información del mercado dada en un instante del tiempo:

$$\left[ \sigma^2(B, T) \Big|_{t, x \text{ fijos}} \right]_{1,2} = \frac{4rQ}{2Q - \tilde{R} \pm \sqrt{\tilde{R}^2 - 8Q\tilde{P}}}. \quad (26)$$

Obviamente, las fórmulas (15) y (26) proveen los mismos valores de la volatilidad, pero éstos se calculan por diferentes procedimientos. Contrariamente a la fórmula (15), la fórmula (26) expresa la volatilidad implícita del modelo de BC en un momento del tiempo, con un valor fijo del subyacente “ $x$ ”. Como en la sección 3, se llega a dos valores de la volatilidad correspondientes a un activo.

La fórmula (26) indica que para calcular la volatilidad en un instante dado, se necesitan cuatro valores de  $V$  para diferentes valores de la barrera  $B$ . Con este resultado se resuelve exactamente el problema de calibración de mercado del modelo clásico de BC, partiendo del enfoque *directo*.

## 9. CONCLUSIONES

En este artículo, haciendo uso del método propuesto por Sukhomlin (2007), se resuelve el problema inverso del modelo de bonos de Black-Cox, en el cual la firma puede caer en un nivel de insolvencia en cualquier momento previo al vencimiento de la deuda (*modelos de primer pasaje*). Este resultado es importante no solamente porque representa la solución de un problema de más de treinta años sino que, al mismo tiempo, revela que las asunciones del modelo de Black-Cox permiten la existencia de dos valores de la volatilidad para un solo activo subyacente. Este hallazgo cambia totalmente la visión sobre este modelo y debe servir de base para explicar las dificultades de su aplicación en la predicción del comportamiento del mercado, así como también de otros modelos estructurales basados en los resultados de Black y Cox.

Partiendo del enfoque *retrógrado*, se obtiene la fórmula para la volatilidad implícita expresada en función de parámetros medibles con datos de mercado y de variables conocidas. Esta expresión es una función de cuatro variables: la ratio del nivel de insolvencia sobre el valor de mercado de la firma (nivel de endeudamiento), la tasa de interés libre de riesgo, el tiempo de madurez y la elasticidad de la griega *Delta*.

La dependencia de la volatilidad con respecto a las dos primeras variables es lógica, mientras que la utilización de la elasticidad de una griega representa el aporte del método de Sukhomlin. La introducción de esta elasticidad, no solo permite obtener la solución exacta del problema inverso, sino que también rompe el estereotipo de que la volatilidad debería estar expresada directamente en función del valor de la opción.

Matemáticamente, los valores de la volatilidad implícita del modelo de Black-Cox pueden ser complejos y de cualquier signo, dependiendo de los parámetros del modelo, lo que impone limitaciones intrínsecas para los parámetros de este sistema dinámico.

El caso en que ambas volatilidades son reales y tienen el mismo signo positivo no es ordinario, ya que no se sabría cuál de éstas define, de manera más acertada, el comportamiento del activo subyacente en cuestión. En esta situación se advierte la existencia de un *espacio escondido* que representa riesgos ocultos y oportunidades de arbitraje, ya que se pueden obtener ventajas derivadas de la diferencia entre los dos valores de la volatilidad. Este hecho muestra la necesidad de completar los supuestos tradicionales del modelo de Black-Cox a fin de definirlo de manera unívoca y evitar riesgos ocultos en el mismo.

La comparación de la volatilidad implícita para el modelo de Black-Cox con la del modelo de Black-Scholes, deducida por Sukhomlin, revela las similitudes y discrepancias entre las expresiones obtenidas.

La principal diferencia entre ambas fórmulas radica en el hecho de que el modelo de Black-Scholes contiene un único valor de la volatilidad. Asimismo, se observa que la fórmula para la volatilidad del modelo de Black-Cox es más compleja que la del modelo de Black-Scholes.

La volatilidad implícita del modelo de Black-Cox depende de la elasticidad de la griega *Delta*, en tanto que la fórmula de la volatilidad en el modelo de Black-Scholes depende de la elasticidad de una medida de sensibilidad de orden superior *Gamma*. Esto significa que, en el modelo de Black-Cox, la tendencia de mercado es fundamental mientras que, en el modelo de Black-Scholes, la curvatura de la gráfica correspondiente a la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia (antes del tiempo de madurez de la deuda) se manifiesta como la característica más relevante.

Se infiere que la posibilidad de arbitraje está relacionada a la existencia de más de un valor de la volatilidad implícita. En este sentido, se puede verificar que las condiciones necesarias de no arbitraje, generalizadas en la teoría financiera, no se cumplen para la fórmula de Black-Cox y, por consiguiente, este modelo contiene intrínsecamente dicha posibilidad, que se revela a partir de la resolución del problema de calibración de mercado.

Los resultados de la simulación realizada exhiben una precisión de  $10^{-9}$  para la volatilidad que se confunde con la que se escogió inicialmente para dicha simulación.

Pese a que todo el artículo está desarrollado empleando la visión *retrógrada*, en una sección se presenta la solución al problema de calibración de mercado del modelo de Black-Cox partiendo del enfoque *directo*, que resulta interesante desde el punto de vista de los agentes de mercado.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Dr. Franklin Fermín, a la Universidad Autónoma de Santo Domingo, al Prof. Fred Celimene y al laboratorio CEREGMIA de la Universidad de las Antillas-Guyana por el apoyo brindado y a la Prof. Nicole El Karoui por las discusiones útiles. Los autores también expresan su agradecimiento a la redacción de la Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa y, particularmente, al Dr. Eugenio M. Fedriani Martel.

## REFERENCIAS

Black, F., Cox, J. (1976). “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions”, *The Journal of Finance*, 31, pp. 351–367.

- Black, F., Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637–654.
- Brenner, M., Subrahmanyam, M. (1988). "A Simple Formula to Compute the Implied Standard Deviation", *Financial Analysts Journal*, 5, pp. 80–83.
- Brigo, D., Tarengi, M. (2004), "Credit Default Swap Calibration and Equity Swap Valuation under Counterparty Risk with a Tractable Structural Model", in *Proceedings of the FEA*, 2004, Conference at MIT, Cambridge, Massachusetts.
- Brigo, M., Morini, M. (2006), "Credit Default Swap Calibration with tractable structural models under uncertain credit quality", *Risk Magazine*, 2006, April issue.
- Bruche, M. (2006). "Estimating Structural Models of Corporate Bond Prices", *Centro de Estudios Monetarios y Financieros (CEMFI)*, Working Paper, Madrid, n. 0610.
- Cané de Estrada, M, Cortina, E, Ferro Fontan, C, Di Fiori, J.(2005) "Pricing of defaultable bonds with log-normal spread: development of the model and an application to Argentinean and Brazilian bonds during the Argentine crisis", *Review of Derivatives Research* 8(1): 40–60.
- Cathcart, L., El-Jahel, L. (1998), "Valuation of defaultable bonds", *Journal of Fixed Income*, 8 (1), pp. 65–78.
- Chambers, D., Nawalkha, S. (2001). "An improved approach to computing implied volatility", *The Financial Review*, 38, pp. 89–100.
- Chance, D.M. (1996). "A generalized simple formula to compute the implied volatility", *Financial Review* 31(4), pp. 859–867.
- Chen, R., Hu, S., Pan, G. (2006). "Default Prediction of various structural models", Working Paper, Fordham University, NY.
- Corrado, C., Miller, T. (1996). "A Note on a Simple, Accurate Formula to Compute Implied Standard Deviations", *Journal of Banking and Finance*, 20, pp. 595–603.
- Collin-Dufresne, P., Goldstain, R. (2001). "Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios?" *Journal of Finance*, 56, pp.1929–1957.
- Eom, Y., Helwege, J., Huang, J. (2004). "Structural Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis", *The Review of Financial Studies*, 17 (2), pp. 499–544.
- Fouque, J., Papanicolaou, G., Sircar, R., Solna, K. (2004). "Maturity Cycles in Implied Volatility", *Finance & Stochastics*, 8 (4), pp. 451–477.
- Fujita T., Ishizaka M. (2002), "An application of new barrier options (Edokko options) for pricing bonds with credit risk", *Hitotsubashi Journal of Commerce Management*, 37 (1), pp. 17–23.

- Geske, R. (1977). "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options", *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 12, pp. 541–552.
- Hein, T., Hofmann B. (2003) "On the nature of ill-posedness of an inverse problem arising in option pricing", *Inverse Problems*, 19, pp. 1319–1338.
- Hull, J., White, A. (1990). "Pricing interest-rate derivative securities", *The Review of Financial Studies*, 3(4), pp. 573–592 (reprinted in *Options: Recent Developments in Theory and Practice*, v.2, 1992, pp. 160–180).
- Isengildina-Massa, O., Curtis, C., Bridges, W., Nian, M. (2007). "Accuracy of Implied Volatility Approximations Using "Nearest-to-the-Money M" Option Premiums", Paper presented at the Southern Agricultural Economics Association Meetings Mobile, AL, February, 2007.
- Ishizaka, M., Takaoka, K. (2003). "On the pricing of defaultable bonds using the framework of barrier options", *Asia-Pacific Financial Markets*, 10, pp. 151–162.
- Kelly, M.A. (2006). "Faster Implied Volatilities via the Implicit Function Theorem", *The Financial Review*, 41, pp. 589–597.
- Kraft, H., Steffensen, M. (2007). "Bankruptcy, Counterparty Risk, and Contagion". *Review of Finance*, 11(2), pp. 209–252.
- Lauren, J.P., Leissen, D. (1998). "Building a consistent pricing model from observed option prices". Stanford University, Hoover Institution, Working Paper No. B-443.
- Leland, H. (1994). "Corporate Debt Value, Bond Covenants and Optimal Capital Structure", *Journal of Finance*, 49, pp. 1213–1252.
- Leland, H., Toft, K. (1996). "Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy and the Term Structure of Credit Spreads", *Journal of Finance*, 51, pp. 987–1019.
- Longstaff, F., Schwartz, E. (1995). "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt", *The Journal of Finance*, 50, pp. 789–820.
- Merton, R. (1974). "On the pricing of corporate debts: the risk structure of interest rates", *Journal of Finance*, 29, pp. 449–470.
- Minqiang, L. (2008). "Approximate Inversion of the Black-Scholes Formula Using Rational Functions", *European Journal of Operational Research*, 185 (2), pp. 743–759.
- Nardon, M. (2005). "Valuing defaultable bonds: an excursion time approach", Finance 0511015, EconWPA.
- Sukhomlin, N. (2007). "The Black-Scholes type financial models and the arbitrage opportunities", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 14 (1), pp. 1–6.



Sukhomlin, N., Jacquinot, Ph. (2007). “Solution Exacte du Problème Inverse du Valorisation des Options dans le Cadre du Model de Black et Scholes”, Paper published in “*Hyper Articles en Ligne*”. Archives ouvertes. France (hal-00144781, version 1).

Wong, H., Li, K. (2004). “On Bias of Testing Merton’s Model”, Proceeding of *International Association of Science and Technology for Development (IASTED)*, Conference on Financial Engineering and Applications, 9 pp. Alberta, Canada: ACTA Press, 8<sup>th</sup> Nov., 2004.

## ANEXO 1

En la sección 3, se señala que el método propuesto por Sukhomlin (2007) para resolver el problema de calibración de mercado consta de cuatro pasos. Estos pasos se desarrollan a continuación:

### a) Construcción de una relación entre los términos de la fórmula inicial

Partiendo de la función de densidad de probabilidad normal, sustituyendo  $d_+$  y desarrollando términos se obtiene:

$$N'(d_+) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\ln^2(x/B)}{\tau^2} + \beta^2 \tau^2 \right] \right\} (x/B)^\beta.$$

Este mismo procedimiento se aplica para el caso de  $d_-$ :

$$N'(d_-) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\ln^2(x/B)}{\tau^2} + \beta^2 \tau^2 \right] \right\} (x/B)^{-\beta}.$$

Se observa que la parte exponencial en ambos casos es la misma, por lo que se puede establecer que:

$$\frac{N'(d_+)}{(x/B)^\beta} = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\ln^2(x/B)}{\tau^2} + \beta^2 \tau^2 \right] \right\} = \frac{N'(d_-)}{(x/B)^{-\beta}}.$$

Así, se llega a la igualdad:  $N'(d_+) = N'(d_-)(x/B)^{2\beta}.$

### b) Cálculo de la característica auxiliar $\xi$

Para obtener  $\xi$  (3) se calculan las derivadas de primer y segundo orden con respecto a  $z$  ( $z := \ln(x/B)$ ) (se hace uso de la relación del primer paso):

$$\begin{aligned} V_z &= 2\tau^{-1}N'(d_+) - 2\beta(x/B)^{2\beta}; \\ V_{zz} &= 2\tau^{-2}[\beta\tau - d_+]N'(d_+) - (2\beta)^2(x/B)^{2\beta}N(d_-). \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en (3) se llega a la expresión de  $\xi$  (4).

c) Elasticidad de  $\xi$

Partiendo de la expresión de  $\xi$  (4) y usando la definición (5):

$$E_{\xi} = \frac{\partial \ln|\xi|}{\partial z} = \frac{\xi_z}{\xi} = \frac{-2\tau^{-3}[1 - \tau^{-1}d_+z]N'(d_+)}{-2\tau^{-3}zN'(d_+)}.$$

Eliminando términos y sustituyendo  $d_+$ , se deduce la elasticidad de la característica auxiliar  $\xi$  (7). Por otra parte, sabiendo de (3) que  $\xi = V_{zz} - 2\beta V_z$  y utilizando también la definición de elasticidad se calcula

(6):  $E_{\xi} = \frac{V_{zzz} - 2\beta V_{zz}}{V_{zz} - 2\beta V_z}$ . Igualando ambas expresiones de la elasticidad, se obtiene (8).

d) Considerando la igualdad (8) como una ecuación algebraica para la volatilidad, hallar la volatilidad implícita del modelo.

De  $\beta$  (2) y de  $\tau^2 = \sigma^2(T-t)$ , se tiene que  $\tau^2 = 2r(T-t)(1-2\beta)^{-1}$ . Sustituyendo  $\tau^2$  en (8) y desarrollando las operaciones correspondientes, se llega a la expresión (para simplificar hemos denotado  $\varepsilon_1 = V_{zz}/V_z$ ;  $\varepsilon_2 = V_{zzz}/V_z$ ):

$$2\left[\frac{z}{r(T-t)} + 1\right]\beta^2 + \left[\frac{2}{z} - \frac{z}{r(T-t)} - \left(3 + \frac{z}{r(T-t)}\right)\varepsilon_1\right]\beta + \left[\varepsilon_2 + \left(\frac{z}{2r(T-t)} - \frac{1}{z}\right)\varepsilon_1\right] = 0.$$

La ecuación anterior se puede expresar en función de la elasticidad de la griega *Delta* (13), sustituyendo  $\varepsilon_1 = E_{\Delta} + 1$ ;  $\varepsilon_2 = (E_{\Delta})_z + \varepsilon_1^2$  y así se obtienen los coeficientes  $R$ ,  $Q$  y  $P$  de (10), (11) y (12). Esta igualdad se resuelve como una ecuación cuadrática para el parámetro  $\beta$ :

$$\beta_{1,2} = \frac{-R \mp \sqrt{R^2 - 8QP}}{4Q}.$$

Se sustituye  $\beta$  por su definición (2):  $\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma_{1,2}^2} = \frac{-R \mp \sqrt{R^2 - 8QP}}{4Q}$

y se despeja la volatilidad implícita del modelo de Black-Cox (15).

## ANEXO 2

Sustituyendo (11) y (12) en (19), se llega a la expresión siguiente:

$$8Q(E_{\Delta})_z < \left\{ (Q+2)^2 - 8Q \right\} E_{\Delta}^2 + \left\{ 4(Q+2) \left( Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right) - 8Q \left( \frac{1}{2}Q + \frac{3}{2} - \frac{1}{z} \right) \right\} E_{\Delta} + \left\{ 4 \left( Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right)^2 - 8Q \left( \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right) \right\}.$$

Agrupando términos y dividiendo por el cuadrado de la elasticidad de *Delta*, se obtiene:

$$8Q \frac{(E_{\Delta})_z}{E_{\Delta}^2} < (Q-2)^2 + 2(Q-2) \left( \frac{2}{z} - 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} + \left( \frac{2}{z} - 1 \right)^2 \frac{1}{E_{\Delta}^2}.$$

Para obtener (20), se completan cuadrados en la desigualdad anterior:

$$\left( \frac{1}{E_{\Delta}} \right)_z > -\frac{1}{8Q} \left[ (Q-2) + \left( \frac{2}{z} - 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} \right]^2.$$

Así, se expresa (20) en términos de la elasticidad de *Delta*.

### ANEXO 3

Sean las partes derechas de las desigualdades (20) y (21). Considerando que ambas son menores que  $(1/E_{\Delta})_z$ , se puede establecer la relación siguiente:

$$\max \left\{ -\frac{1}{8Q} \left[ (Q-2) + \left( \frac{2}{z} - 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} \right]^2, \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{z} + 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} + 1 \right] \right\} < \left( \frac{1}{E_{\Delta}} \right)_z.$$

Para determinar cuál de las expresiones en la parte izquierda es mayor, se estudia el signo de la diferencia entre ambas:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8Q} \left\{ (Q-2) + \left( \frac{2}{z} - 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} \right\}^2 - \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{2}{z} - 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} + 1 \right\} = \\ & = -\left\{ \frac{Q}{8} \left( \frac{2}{Q} + 1 \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{2}{Q} + 1 \right) \left( \frac{2}{z} - 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} + \frac{1}{8Q} \left( \frac{2}{z} - 1 \right)^2 \frac{1}{E_{\Delta}^2} \right\}. \end{aligned}$$

Se completan cuadrados y se obtiene:

$$-\left\{ \sqrt{\frac{Q}{8}} \left( \frac{2}{Q} + 1 \right) - \sqrt{\frac{1}{8Q}} \left( \frac{2}{z} - 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} \right\}^2.$$

Se observa que la diferencia entre las expresiones es negativa, lo que confirma que la parte derecha de (21) es mayor que la parte derecha de (20). Así, (21) implica (20) y, por lo tanto, esta última desigualdad resulta innecesaria.