Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
E-ISSN: 1886-516X
ed_revmetcuant@upo.es
Universidad Pablo de Olavide
España

Hernández Fernández, Isabel; Mateos Contreras, Consuelo; Núnez Valdés, Juan; Tenorio Villalón, Ángel F.

Algunas aplicaciones de la Teoría de Lie a la Economía y las Finanzas

Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, vol. 6, diciembre, 2008, pp. 74-94
Universidad Pablo de Olavide
Sevilla, España

REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (6). Páginas 74–94.
Diciembre de 2008. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art24.pdf

# Algunas aplicaciones de la Teoría de Lie a la Economía y las Finanzas

Hernández Fernández, Isabel
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Sevilla
Correo electrónico: isaherfer@alum.us.es

Mateos Contreras, Consuelo
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Sevilla
Correo electrónico: conmatcon@gmail.com

Núñez Valdés, Juan
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Sevilla
Correo electrónico: jnvaldes@us.es

Tenorio Villalón, Ángel F.
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Correo electrónico: aftenorio@upo.es

**RESUMEN**

En este artículo, los autores pretenden mostrar y explicar cómo la Teoría de Lie se puede aplicar a la resolución de algunos problemas relativos a la Economía y a las Finanzas. Concretamente, se realiza un análisis de dos de esos problemas y se discuten tanto sus aspectos matemáticos como el acercamiento hecho desde la Teoría de Lie para su resolución. Igualmente, se indican los avances más recientes existentes en esta línea de investigación, mencionando también algunos problemas abiertos que pueden ser tratados en futuros trabajos.

**Palabras clave:** Matemática Financiera; Matemática Económica; progreso técnico; opciones con barrera móvil; grupos de Lie; álgebras de Lie.
**Clasificación JEL:** C02; C60; C65; G13; O30.
**2000MSC:** 91B28; 91B38; 17B99; 17B45; 17B30.

Artículo recibido el 17 de noviembre de 2008 y aceptado el 9 de diciembre de 2008.

# Some Applications of Lie Theory to Economics and Finance

## ABSTRACT

This paper shows and explains two problems in Economics and Finance, both dealt with a Lie Theory approach. So, mathematical aspects for these approaches are put forward and discussed in several economic problems which have been previously considered in the literature. Besides, some advances on this topic are also shown, mentioning some open problems for future research.

**Keywords:** Financial Mathematics; Mathematical Economics; technical progress; moving barrier options; Lie groups; Lie algebras.
**JEL classification:** C02; C60; C65; G13; O30.
**2000MSC:** 91B28; 91B38; 17B99; 17B45; 17B30.

## 1. INTRODUCCIÓN

Es bien conocido el uso que puede hacerse de la Teoría de Lie en la resolución de problemas relativos a diversos campos científicos, todos ellos distintos de las Matemáticas. Habitualmente, dichas aplicaciones se enmarcan en las ciencias técnicas y experimentales (fundamentalmente, Física e Ingeniería). No obstante, la Teoría de Lie es aplicable a ámbitos distintos de los técnicos o de los experimentales, siendo tales aplicaciones unas grandes desconocidas para los investigadores en general. Con el presente artículo se pretende dar a conocer algunas aplicaciones de la Teoría de Lie a la Economía y, más concretamente, a las Finanzas, facilitando al investigador novel la posibilidad de incorporarse a esta prometedora línea de investigación.

En la literatura actual (nos referimos mayoritariamente a artículos de principios del s.XXI) existe la tendencia a estudiar la relación entre la Teoría de Lie y diversos problemas económicos y financieros. Dicha tendencia está proporcionando unas herramientas de estudio interesantes, que están basadas en las propiedades de las álgebras y los grupos de Lie. Teniendo este hecho en cuenta, nos interesaría hacer un breve recorrido histórico previo por algunos de los problemas y tópicos más significativos empleando la Teoría de Lie. Posteriormente analizaremos con más detalle algunos de estos trabajos y conceptos.

En primer lugar, queremos enfatizar el trabajo de Lo y Hui (2001, 2002), quienes estudiaron la valoración de derivados financieros y, más concretamente, de derivados multiactivos introduciendo diversas técnicas basadas en las álgebras de Lie. Previamente, Lo y Hui (2000a, 2000b) ya emplearon la Teoría de Lie para estudiar ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes dependientes del tiempo, modelos CEV (siglas en inglés de *elasticidad constante de varianza*) y opciones con barrera.

Independientemente, y empleando igualmente las álgebras de Lie, Björk y Landén (2002) hicieron un estudio para diversos modelos de tasa de interés, modelos introducidos previamente por el propio Björk (2001). Posteriormente, Polidoro (2003) realizó un estudio sobre un problema financiero correspondiente a la toma de decisiones bajo riesgo por parte de los agentes en el marco de la teoría de las funciones de utilidad[1]. Para su estudio, empleó un tipo especial de grupos de Lie: los denominados *nilpotentes*.

Otra interesantísima aplicación de la Teoría de Lie a la Economía es la introducida por Basov (2004). Este describió algunos métodos basados en las propiedades de los grupos de Lie, para resolver el problema de *screening* multidimensional. También queremos resaltar el estudio realizado por Gaspar (2006), quien obtuvo un modelo general para la estructura de los precios a plazos basándose en la metodología dada por Björk y aplicando las álgebras de Lie. De hecho,

---

[1] El tratamiento del problema económico-financiero estudiado por Polidoro (2003) fue analizado críticamente en Hernández *et al.* (2008).

Björk (2001, 2004) estudió cómo las álgebras de Lie podían emplearse en el tratamiento de problemas referentes a volatilidades constantes y otros conceptos derivados de estas.

También deben reseñarse las aportaciones de Sato (1980, 1981, 1998) a la aplicación de la Teoría de Lie en el estudio de los progresos técnicos y los efectos a escalas. De hecho, Sato llegó a introducir un nuevo concepto, denominado *holoteticidad*, para poder determinar cuándo los efectos a escala podían diferenciarse por completo de los efectos producidos por los progresos técnicos. Es más, también tuvo que definir un nuevo tipo de progresos técnicos, los denominados *de tipo Lie*, consistentes en poseer también una estructura de grupo de Lie uniparamétrico. Para un estudio crítico del trabajo de Sato (tanto en relación a los conceptos como a las técnicas empleadas), recomendamos al lector consultar Fedriani y Tenorio (2006). En dicha referencia también se indicaban algunas incorrecciones o ambigüedades cometidas por Sato y se mostraban algunos de los problemas aún abiertos en relación con la invariancia económica (y en los que puede aplicarse la Teoría de Lie). Para ver un análisis de diversas aplicaciones de los grupos y álgebras de Lie a otros problemas económicos y financieros tratados en la literatura reciente, recomendamos el trabajo de Hernández *et al.* (2008).

El presente artículo persigue completar este último estudio citado y analizar críticamente otras dos aplicaciones de la Teoría de Lie a las Finanzas. Tras la lectura de este artículo, esperamos que la Teoría de Lie pueda ser vista como un recurso metodológico más para la investigación en Economía y Finanzas (en nuestra opinión, sumamente interesante y muy innovadora, pese al desconocimiento de su aplicabilidad). Finalmente, expondremos algunos avances y líneas futuras de investigación en la aplicación de la Teoría de Lie a la Economía y las Finanzas.

## 2. ALGUNAS NOCIONES ECONÓMICAS Y FINANCIERAS

En la presente sección, recordaremos y explicaremos los términos económicos y financieros que aparecen a lo largo del presente texto, para facilitar el seguimiento del mismo al lector poco habituado a ellos.

Se denomina *derivado financiero*[2] a cualquier producto financiero cuyo valor está basado en el precio que posee un determinado activo[3]. Consisten en operaciones hipotéticas cuya liquidación se realiza mediante la diferencia existente entre el precio de mercado del activo y el precio pactado en la operación hipotética. En vista de su definición, el posible catálogo de derivados financieros no está delimitado, ya que cualquier operación financiera podría dar lugar a un derivado financiero.

[2] En algunas referencias aparece con la denominación de *instrumento derivado*.
[3] El activo del que depende el valor del derivado financiero se denomina *activo subyacente*.

En su origen, los derivados financieros tenían como función eliminar o reducir las consecuencias adversas producidas por cambios desfavorables en el activo sobre el que se define el derivado (es decir, eliminar el riesgo en las operaciones financieras). Hoy en día no solo tienen ese uso, sino que también se emplean como un producto financiero basado en la especulación con los precios del activo.

Existen también los denominados *derivados financieros multiactivos*, consistentes en productos financieros cuyo valor se basa en el precio que poseen varios activos (y no solamente uno como ocurría en el caso anterior).

En el presente artículo trataremos concretamente con uno de los más conocidos derivados financieros: las denominadas *opciones*. Se denomina *opción* al derecho a comprar o vender un activo en el futuro a un precio pactado. Debe tenerse en cuenta que, al comprar una opción, el comprador paga una prima por disfrutar del derecho adquirido, mientras que el vendedor cobra dicha prima. Por tanto, se realiza una transacción en el instante de la contratación de la opción[4]. Debe tenerse en cuenta que también pueden considerarse opciones multiactivos, en las que el derecho de compra o venta no se limita a un único activo, sino a varios.

Existen dos tipos de opciones estándar: las opciones de *estilo americano* y las de *estilo europeo*. Las primeras son aquellas en las que puedes ejercer tu derecho de compra-venta en cualquier momento anterior a la fecha de vencimiento del contrato; mientras que en las segundas solo puedes ejercer dicho derecho en la fecha de vencimiento. Cualquier otro tipo de opción se denomina *exótica*. Un caso particular de opciones exóticas son las opciones con barreras. Se denomina *opción con barrera*[5] a toda opción cuya cancelación o activación depende del valor alcanzado durante un período de tiempo determinado por el precio del activo subyacente. Este valor será independiente del valor del activo en la fecha de vencimiento de la opción. Es decir, la activación o cancelación de la opción depende de que el precio del activo alcance unos determinados valores umbrales (de ahí la denominación de opciones con barrera).

Son varios los tipos de opciones con barreras existentes, dependiendo de los umbrales que le pongamos al valor del activo. Seguidamente indicamos los principales tipos y subtipos de opciones con barrera:

1. Opciones con barrera *de entrada* (*knock-in*): la opción pasa a activarse y a ser estándar si el precio del activo subyacente alcanza el valor fijado en la barrera durante el período acordado.

---

[4] Existe otro derivado financiero, denominado *futuro*, en el que solo se realiza un compromiso de compra-venta de un activo pero no se realiza ninguna transacción en el momento de su contratación.
[5] También se las denomina *opción tipo barrera*.

a. Opciones *abajo y de entrada* (*down-in*): la barrera se fija por debajo del precio inicial del activo, activándose la opción cuando el precio llega a ser inferior a la barrera.

b. Opciones *arriba y de entrada* (*up-in*): la barrera se fija por encima del precio inicial del activo, activándose la opción cuando el precio es superior a la barrera.

2. Opciones con barrera *de salida* (*knock-out*): la opción deja de existir o expira sin valor cuando se alcanza el valor fijado en la barrera para el precio del activo.

   a. Opciones *abajo y de salida* (*down-out*): la barrera se fija por debajo del precio inicial del activo, expirando la opción cuando el precio llega a ser inferior a la barrera.

   b. Opciones *arriba y de salida* (*up-out*): la barrera se fija por encima del precio inicial del activo, expirando la opción cuando el precio llega a ser superior a la barrera.

Teniendo en cuenta lo anterior, las opciones con barrera pueden contratarse de tal modo que la barrera sea doble (es decir, que sea arriba y abajo a la vez) e incluso puede establecerse una barrera móvil, que vaya ajustándose durante toda la vida de la opción hasta alcanzar la fecha de vencimiento.

Cualquier producto financiero (incluidas las opciones) presenta la problemática de la fijación de precios. En la fijación de precios, la empresa debe considerar tanto las necesidades del mercado hacia el producto ofertado como el proceso productivo (con sus costes y objetivos de rentabilidad). Es decir, cuando se fijan los precios, la empresa busca obtener el máximo beneficio posible, para lo que debe buscar el equilibrio entre elegir un precio "competitivo" (más fácil de vender) y un precio que permita unos márgenes más amplios. Frecuentemente se busca realizar el mayor número de ventas posibles (para que los ingresos sean apropiados), pero es obvio que no deben establecerse los precios de los productos sin tener en cuenta el coste, ya que este es un dato objetivo e importante del que suele disponer el empresario, mientras que los datos correspondientes a la demanda no son siempre tan fáciles de conocer o determinar y, además, esta facilidad depende del producto, concretamente de su elasticidad. No obstante, los productos financieros no siguen exactamente el mismo proceso que los productos (o servicios) de empresas no financieras y presentan características particulares. Así, por ejemplo, en los productos de renta fija el precio se marca por subasta pública, mientras que en los productos de renta variable el precio lo marca el mercado.

A la hora de determinar los precios de un producto financiero (en nuestro caso, de las opciones), suele considerarse el modelo CEV. Este modelo, introducido por Cox (1975), extiende el de Black-Scholes para la fijación de precios e introduce la posibilidad de considerar una volatilidad estocástica. En el modelo CEV, se supone que el precio $S(t)$ del activo sigue el siguiente proceso de difusión[6] en función del tiempo $t$:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)^{\beta/2}\, dZ(t)\,,$$

donde $\mu(t)$ es el parámetro que indica la tasa de crecimiento[7], $\sigma(t)$ es el parámetro de volatilidad[8], $\beta$ es el parámetro que determina la elasticidad de la función de volatilidad local y $Z(t)$ es un proceso de Wiener[9]. Debe tenerse en cuenta que el parámetro $\beta$ suele elegirse en el intervalo [0,2), porque es en tales casos en los que se puede asegurar alguna significación económica. Más concretamente, en dicho escenario, la volatilidad aumentará a medida que el precio del activo decrezca (Lu y Hsu, 2005). En el caso $\beta = 2$, estaríamos ante un movimiento Browniano estándar y, más concretamente, ante el modelo Black-Scholes.

Al exponer el modelo CEV, hemos nombrado el término *volatilidad*. Este es un término perteneciente al ámbito de los procesos estocásticos, siendo usado en Finanzas para medir el riesgo de un derivado financiero en un determinado período de tiempo. Más concretamente, la volatilidad mide la desviación estándar que presentan los cambios de valor de un determinado derivado financiero en un horizonte temporal específico. La volatilidad suele medirse tomando como periodo temporal un año completo; en caso de considerar un período de tiempo distinto a un año, estamos ante una volatilidad generalizada.

Lo usual es considerar un modelo con volatilidad constante durante toda la vida del derivado considerado. En consecuencia, no influiría ninguno de los cambios existentes en el precio del activo. Es por este motivo que se consideran procesos en los que la volatilidad no es constante, sino que ella misma es un proceso estocástico. Esta opción permite modelizar más correcta y rentablemente los derivados financieros.

A continuación, pasamos a tratar las nociones de efecto a escala y de cambio técnico en una economía dada. Consideramos una economía en la que $K$ y $L$ representan el capital y la mano de obra, respectivamente. Dicha economía se representa mediante una función de

[6] Un proceso de difusión es cualquier solución de una ecuación diferencial estocástica; es decir, un proceso de Markov que depende continuamente del tiempo y con caminos parciales continuos.

[7] Se denomina *coeficiente de tendencia* del proceso de difusión al producto $\mu(t)S(t)$.

[8] Se denomina *coeficiente de difusión* del proceso al producto $\sigma(t)S(t)^{\beta/2}$.

[9] Un *proceso de Wiener* es un proceso estocástico dependiendo continuamente del tiempo. El ejemplo más conocido de proceso de Wiener es el movimiento Browniano. Para una explicación de los procesos de Wiener y su funcionamiento, recomendamos a Karatsas y Shreve (1997).

producción neoclásica[10] $Y = f(K,L)$, que sea continuamente diferenciable y globalmente quasi-cóncava[11]. La función de producción anterior no siempre se mantiene constante, sino que sufre modificaciones a lo largo del tiempo. Dichas modificaciones pueden deberse bien a variaciones en el capital bien a mejoras en la investigación. Los conceptos empleados en Economía para representar estos cambios son el de *cambio técnico* y el más restrictivo de *progreso técnico*.

Por *cambio técnico* entendemos cualquier cambio en la función de producción que altera la relación entre consumos y producciones. El cambio técnico se denomina *progreso técnico* si la producción aumenta para cualquier consumo, con respecto al obtenido antes del cambio. Al introducirse un cambio técnico en una economía, la función de producción $f$ se supone que no varía, pero sí lo hacen los niveles de producción. Por tanto, la función de producción tras el cambio técnico pasaría a expresarse como $\overline{Y} = \bar{f}(K,L,t)$, donde $t$ es el parámetro de progreso técnico e $\overline{Y}$ es la producción para el capital $K$ y la mano de obra $L$ tras el progreso técnico.

Para denotar un progreso técnico con parámetro $t$, suele emplearse la notación:

$$\begin{array}{ll} T_t: & \Re^3 \;\rightarrow\; \Re^2 \\ & (K,L,t) \mapsto \overline{Y} = \bar{f}(K,L,t) \end{array}.$$

En caso de que no haya lugar a confusión con respecto al parámetro, el progreso técnico puede denotarse exclusivamente por $T$.

El progreso técnico puede definirse también como la variación de la economía en las necesidades del capital y de la mano de obra tras dicho progreso. Para ello, se emplea el concepto de *funciones $\phi$ y $\psi$ de progreso técnico* de $K$ y $L$, que combinan los dos factores mediante el parámetro de progreso técnico $t$:

$$T_t : \overline{K} = \phi(K,L,t), \qquad \overline{L} = \psi(K,L,t).$$

Las variables $\overline{K}$ y $\overline{L}$ se denominan *capital efectivo* y *mano de obra efectiva*, respectivamente. Las funciones $\phi$ y $\psi$ deben suponerse analíticas y reales respecto de las tres

---

[10] Una función de producción $Y = f(K,L)$ se dice *neoclásica* si es homogénea de grado 1 (rendimiento a escala constante) y disminuye suavemente respecto de los factores individuales. Recuérdese que $Y = f(K,L)$ se dice que *disminuye suavemente respecto a un factor individual* si al aumentar uno de los factores de la producción, permaneciendo los demás constantes, las ganancias globales decrecen relativamente a partir de un cierto punto.

[11] Sea $f:\Re^2 \rightarrow \Re$ una función diferenciable, al menos, hasta orden 2 y sea $\vec{a} \in Dom(f)$. La función $f$ es quasi-cóncava en $\vec{a}$ si y solo si la matriz hessiana de $f$ en $\vec{a}$, $Hf(\vec{a})$, es semidefinida negativa.

variables (i.e. $K$, $L$ y $t$). Además, las funciones $\phi$ y $\psi$ son independientes respecto de las variables $K$ y $L$; es decir, se verifica la siguiente condición:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial K} & \frac{\partial\phi}{\partial L} \\ \frac{\partial\psi}{\partial K} & \frac{\partial\psi}{\partial L} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Al satisfacerse la condición anterior, puede aplicarse el Teorema de la Función Implícita[12] a la función vectorial $T = (\phi, \psi)$, formada por las dos funciones de progreso técnico, menos la función vectorial constante consistente en $(\overline{K}, \overline{L})$. De este modo, podemos despejar las variables $K$ y $L$ en función de las variables $\overline{K}$ y $\overline{L}$ (pudiendo conocer las necesidades de capital y mano de obra tras el progreso técnico).

Sea la función de producción $f$ y el progreso técnico $T$ definido por $(\phi, \psi)$. Se dice que $f$ es una función *holotética* bajo el progreso técnico $T$ si el efecto total del progreso técnico $T$ sobre $f$ puede ser representado por una función $F$ estrictamente monótona. Esta condición puede expresarse como:

$$\overline{Y} = \bar{f}(K, L, t) = f(\overline{K}, \overline{L}) = f(\phi(K, L, t), \psi(K, L, t)) = g(f(K, L), t) = F_t(Y).$$

Para el estudio de la holoteticidad de una función de producción, es conveniente que el progreso técnico considerado satisfaga las tres propiedades de un grupo de Lie uniparamético:

1. Propiedad GL1: $T_t + T_{t'} = T_{t+t'}$, siendo:

$$T_t : \begin{cases} \overline{K} = \phi(K, L, t) \\ \overline{L} = \psi(K, L, t) \end{cases} \quad T_{t'} : \begin{cases} \overline{K} = \phi(K, L, t') \\ \overline{L} = \psi(K, L, t') \end{cases} \quad T_{t+t'} : \begin{cases} \overline{K} = \phi(K, L, t+t') \\ \overline{L} = \psi(K, L, t+t') \end{cases}$$

2. Propiedad GL2: $T_t^{-1} = T_{-t}$, siendo:

$$T_{-t} : \begin{cases} \overline{K} = \phi(K, L, -t) \\ \overline{L} = \psi(K, L, -t) \end{cases}$$

3. Propiedad GL3: $T_0 : \begin{cases} \overline{K} = \phi(K, L, 0) = K \\ \overline{L} = \psi(K, L, 0) = L \end{cases}$

---

[12] Teorema de la Función Implícita: Sean $f : \Re^{n+m} \to \Re^m$ una función continuamente diferenciable definida como $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$ y un punto $(\vec{a}, \vec{b}) \in \Re^{n+m}$, tal que $f(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Si la matriz $\left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\vec{a}, \vec{b}) \right)_{i,j}$ tiene determinante no nulo, entonces existen un entorno $U$ de $\vec{a}$, otro $V$ de $\vec{b}$ y una única función $g : U \to V$ tal que $\vec{y} = g(\vec{x})$.

Cualquier progreso técnico $T$ que satisfaga las propiedades GL1 a GL3 se denomina *progreso técnico de tipo Lie*. Suponiendo que el parámetro $t$ representa el año en el que ocurre el progreso técnico, el capital efectivo $\overline{K}$ y la mano de obra efectiva $\overline{L}$ corresponden, respectivamente, al capital y mano de obra existentes en ese año. En consecuencia, las propiedades GL1 a GL3 se pueden interpretar como siguen:

- Propiedad GL1: si el capital y la mano de obra disponibles en los años $t$ y $t'$ se expresan con las funciones $\phi$ y $\psi$ dependientes de los valores del capital y la mano de obra del año previo, el capital y la mano de obra existentes en cualquier momento pueden obtenerse mediante sumas del tipo $t+t'$. De este modo, conocida la variación del capital y de la mano de obra en el primer año (i.e. $t=1$), se obtiene la de cualquier año $n$ considerando $n=\sum_{i=1}^{n} 1$.
- Propiedad GL2: el capital y la mano de obra en el momento inicial se obtienen a partir de las funciones de progreso técnico y empleando el parámetro $-t$.
- Propiedad GL3: el capital y la mano de obra iniciales son iguales a los efectivos si no tiene lugar el progreso técnico.

Debe tenerse en cuenta que no es ningún problema el suponer estas tres hipótesis en los progresos técnicos. Sato (1981) observó que todas las funciones de progreso técnico utilizadas en Economía verificaban las tres propiedades anteriores, con lo que tales hipótesis no son restrictivas (véase Fedriani y Tenorio (2006), para una detallada explicación de la aplicación hecha por Sato sobre los grupos uniparamétricos a la Economía y su fundamentación teórica).

De hecho, puede demostrarse que todos los tipos de progreso técnico anteriormente considerados pertenecen a los denominados *progresos técnicos de tipo proyectivo*. Estos últimos progresos técnicos son aquellos que se obtienen mediante la integración de una transformación infinitesimal asociada a un grupo de Lie proyectivo.

En una economía, los *efectos a escala* conllevan que los incrementos debidos a la dotación en la mano de obra y en el capital de la economía llevan a tasas de crecimiento de la productividad más alta o más bajas. Pueden considerarse tres tipos de efectos de escala:

1. *Rendimientos a escala constantes*: el incremento de mano de obra y capital conlleva un incremento proporcional de la productividad.
2. *Rendimientos a escala crecientes*: el incremento de mano de obra y capital conlleva un incremento de la productividad superior al proporcional.

3. *Rendimientos a escala decrecientes:* el incremento de mano de obra y capital conlleva un incremento inferior de la productividad.

Finalizamos la presente sección de preliminares explicando en qué consisten los problemas de *screening*. En un gran número de empresas, los aranceles no suelen ser proporcionales a las cantidades compradas; es decir, los aranceles suelen representarse de manera no lineal. La fijación no lineal de precios se basa en la existencia de información privada por parte de los consumidores; aunque esta información privada podría capturarse, en principio, asumiendo un número finito de tipos o un continuo 1-dimensional de tipos. No obstante, para especificar el pago, suele ser conveniente considerar una función de varias características (i.e. variables). Además, cada uno de los diferentes clientes puede evaluar de manera diferente cada una de estas características. Por tanto, el tipo de los clientes (con sus evaluaciones para cada una de las características) no puede determinarse, por tanto, mediante una característica de dimensión 1. Esta situación es la que hace plantearse los problemas de screening multidimensional

La formulación general de este tipo de problemas se debe a Armstrong (1996) y a Wilson (1993). Estos consideraron un monopolio que producía *n* bienes con una función de costes convexa. Las preferencias de un consumidor sobre los bienes producidos se parametrizaban mediante un vector *m*-dimensional. Los tipos de consumidores existentes se distribuyen siguiendo una función de densidad continuamente diferenciable definida sobre un conjunto convexo y acotado de $\Re^m$, siendo la función de densidad extensible por continuidad a la clausura de su dominio. Al monopolista le interesa maximizar sus beneficios mediante la elección de un arancel, que es una función del conjunto de paquetes de bienes a la recta real. De este modo, el arancel determina cuánto pagará un consumidor por un particular paquete de bienes. La formulación dada por Armstrong consideraba *m* preferencias y *n* bienes, obteniéndose una solución para algunos casos especiales. Para ello, supuso que las preferencias de los consumidores venían determinada por una función de utilidad que va aumentando en todos sus argumentos y que es continua, convexa y homogénea de grado 1. Posteriormente, el propio Armstrong y otros autores han continuado el estudio de la determinación de los aranceles en el ámbito del problema de screening.

## 3. APLICACIONES EMPÍRICAS DE PROGRESOS TÉCNICOS DE TIPO LIE

Como se ha indicado previamente, Sato (1980, 1981) introdujo el concepto de holoteticidad para poder distinguir los efectos a escala de los correspondientes al progreso técnico. Esta distinción de efectos fue un problema bastante importante y ampliamente discutido en la literatura económica, surgido en 1961 ante la discusión entre Solow (1961) y Stigler (1961). Fue Sato quien determinó las condiciones bajo las cuales ambos efectos son distinguibles por separado. Tales condiciones fueron las que Sato modelizó en la definición de holoteticidad y de función de producción holotética bajo un progreso técnico de tipo Lie. Para más detalles sobre todo el planteamiento de Sato y la base matemática subyacente a dichos conceptos, recomendamos la revisión hecha por Fedriani y Tenorio (2006).

En sus trabajos, Sato definió y trató las funciones de progreso técnico de tipo proyectivo. Este tipo de progresos técnicos le permitía trabajar con todos los tipos utilizados habitualmente en la literatura económica. Pero dejó sin aclarar lo que pasaba con otros casos especiales de progresos técnicos proyectivos y cómo podían incorporarse estos a un modelo tradicional sobre el comportamiento del productor.

Mitchell (1987) buscó identificar aquellos casos especiales de progresos técnicos proyectivos (introducidos por Sato) que fuesen grupos uniparamétricos de transformaciones y que, además, pudiesen incorporarse a los modelos estándar de producción para medir cuál era el progreso técnico no absorbido como un efecto escala en la función de producción. Mitchell basó su trabajo en un modelo económico de producción con dos *inputs* y teniendo como resultado la producción de un único bien. Expresó esos factores como un vector real $\vec{x} = (x_1, x_2)$, de coordenadas no negativas, y supuso que el progreso técnico era exógeno. Esta última suposición conllevaba que los efectos del cambio técnico no afectarían a la expresión matemática de la función de producción y que el proceso de producción se produciría tras cualquier alteración en la productividad por parte de los factores productivos.

Si $T$ es el progreso técnico considerado, este viene determinado por sus funciones de progreso técnico[13] $\phi_1$ y $\phi_2$, que representan la transformación de los factores nominales $x_1$ y $x_2$ (i.e. los valores existentes antes del cambio técnico) en los factores efectivos $x_1'$ y $x_2'$, respectivamente. Por tanto, Mitchell expresó matemáticamente el progreso técnico $T$ como sigue:

$$x' = (x_1', x_2') = [\phi_1(\vec{x};\vec{a}), \phi_2(\vec{x};\vec{a})] = \phi(\vec{x};\vec{a}), \qquad \vec{a} \in \Re^r, \qquad (1)$$

teniendo en cuenta que $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_r)$ es un vector real $r$-dimensional que registra los cambios que acontecen bajo la acción de dicho progreso. Precisamente, el vector $\vec{a}$ suele denominarse *vector de parámetros del progreso técnico*, siendo esta la nomenclatura que usa el propio Mitchell.

Para definir el progreso técnico que le interesa utilizar a Mitchell, es necesario que las funciones de progreso técnico satisfagan las propiedades de un grupo de Lie multiparamétrico de transformaciones (en este caso, $r$-paramétrico). Dichas propiedades son las siguientes:

[13] La noción de *funciones del progreso técnico* fue explicada ampliamente en la Sección 2 del presente artículo, aunque solo se consideraba un parámetro de progreso técnico y no un vector de parámetros.

**Propiedad 1 (elemento unidad):** si no hay cambios debidos al progreso técnico, los factores efectivos tras el progreso técnico deben coincidir con los factores nominales. Matemáticamente, implica la existencia del vector $\vec{a}_0 = (0,...,0) \in \Re^r$ y que las funciones de progreso técnico satisfagan la siguiente propiedad:

$$\vec{x}' = \phi(\vec{x};\vec{a}_0) = \vec{x} \qquad \forall \vec{x} \in \Re^+ \times \Re^+$$

**Propiedad 2 (operación composición):** el cálculo de los factores efectivos tras dos progresos técnicos sucesivos puede realizarse calculando los factores efectivos tras un único progreso técnico, cuyo vector de parámetros de progreso técnico es una expresión funcional de los vectores de parámetros correspondientes a los progresos técnicos de partida. Matemáticamente, dados dos vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \Re^r$ de parámetros de progreso técnico, los factores efectivos $\vec{x}''$ (obtenidos tras aplicar consecutivamente los dos progresos técnicos) vendrían dados por la aplicación de un único progreso técnico determinado por un vector de parámetros $\vec{a}_3 \in \Re^r$; es decir, mediante la expresión siguiente:

$$\vec{x}' = \phi(\vec{x};\vec{a}_1) \qquad \text{y} \qquad \vec{x}'' = \phi(\vec{x}';\vec{a}_2) = \phi[\phi(\vec{x};\vec{a}_1);\vec{a}_2] = \phi(\vec{x};\vec{a}_3),$$

donde $\vec{a}_3 \in \Re^r$ es un vector que depende única y exclusivamente de los parámetros $\vec{a}_1$ y de $\vec{a}_2$ (i.e. $\vec{a}_3 = f(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$, con $f : \Re^r \times \Re^r \to \Re^r$ ).

**Propiedad 3 (elemento inverso):** para cada vector de parámetros del progreso técnico $\vec{a}_1 \in \Re^r$, existe un segundo vector de parámetros $\vec{a}_2 \in \Re^r$ tal que los progresos técnicos generados por $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ se compensan recíprocamente uno con el otro; es decir:

$$\phi[\phi(\vec{x};\vec{a}_1);\vec{a}_2] = \vec{x} = \phi[\phi(\vec{x};\vec{a}_2);\vec{a}_1], \qquad \forall \vec{x} \in \Re^+ \times \Re^+$$

Debe tenerse en cuenta que, la existencia del vector $\vec{a}_0$ en la Propiedad 1 y la definición de la función $f$ de la Propiedad 2, implica que $f(\vec{a}_1,\vec{a}_2) = \vec{a}_0$.

Como ya se comentó en la Sección 2, la literatura suele considerar progresos técnicos verificando las tres propiedades anteriores y exigiendo que $r = 1$ (i.e. lo que se denomina matemáticamente un grupo uniparamétrico). Por tanto, el progreso técnico presenta un único parámetro $t$, que representa el instante en que acontece dicho progreso.

En concreto, Mitchell estudia las funciones de progreso técnico denominadas *de tipo proyectivo*, las cuales fueron introducidas y definidas por Sato (1981) y con la expresión siguiente:

$$x_1' = \phi_1(\vec{x}\,;\,t) = \frac{\exp\,(a_3 t)\; x_1 + (a_5 x_2 + a_1)\cdot t}{1-(a_7 x_1 + a_8 x_2)\cdot t}\,;$$
$$x_2' = \phi_2(\vec{x}\,;\,t) = \frac{\exp\,(a_6 t)\; x_2 + (a_4 x_1 + a_2)\cdot t}{1-(a_7 x_1 + a_8 x_2)\cdot t}\,, \qquad (2)$$

donde $a_i \in \Re$ para $i = 1, 2, \ldots, 8$ y $t$ es el único parámetro de progreso técnico. Para aplicaciones empíricas de este modelo, interesaría que la función de progreso técnico $\phi(\vec{x}\,;t)$ satisficiese las propiedades de grupo uniparamétrico y, de este modo, aplicar los resultados de Sato para diferenciar los efectos a escala de los efectos debidos al progreso técnico. Desafortunadamente, la Propiedad 2, referente a la composición de progresos técnicos, no es satisfecha por la expresión de la función de progreso técnico $\phi(\vec{x}\,;t)$, dada en (2).

Pese a esta contrariedad, Mitchell planteó una forma de esquivar el incumplimiento de la Propiedad 2 de grupo uniparamétrico. Supuso que en la ecuación (2) se cambiaba $a_i \cdot t$ por una función $a_i = a_i(t)$ , para $i = 1, ..., 8$ . De este modo, se pasaba a tener un grupo 8-paramétrico en los que los ocho parámetros de progreso técnico formaban un vector $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_8(t))$ . Aunque podrían usarse las técnicas de Eisenhart (1933) para colapsar el número de parámetros de progreso técnico y obtener grupos uniparamétricos $\phi[x\,; a(t)] = \psi(x\,;t)$ , Mitchell abogó por utilizar técnicas que lleven a parametrizaciones triviales en (2) que permitan verificar la Propiedad 2 de grupo uniparamétrico. Es por ello que busca la siguiente solución: consideró qué pasaría si $a_1, ..., a_8$ eran constantes arbitrarias (*a priori*, no nulas) y se imponía que algunas de dichas constantes $a_i$ fuesen iguales a 0.

En primer lugar, Mitchell supuso que solo una constante no se anula, con lo que quedan ocho posibles casos satisfaciendo las propiedades de grupo:

$$x_1' = x_1 + a_1 t, \qquad x_2' = x_2, \qquad (3)$$
$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2 + a_2 t, \qquad (4)$$
$$x_1' = \exp(a_3 t) x_1, \qquad x_2' = x_2, \qquad (5)$$
$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2 + a_4 x_1 t, \qquad (6)$$
$$x_1' = x_1 + a_5 x_2 t, \qquad x_2' = x_2, \qquad (7)$$
$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = \exp(a_6 t) x_2, \qquad (8)$$
$$x_1' = x_1/(1 - a_7 x_1 t), \qquad x_2' = x_2/(1 - a_7 x_1 t), \qquad (9)$$
$$x_1' = x_1/(1 - a_8 x_2 t), \qquad x_2' = x_2/(1 - a_8 x_2 t), \qquad (10)$$

La segunda opción consistía en permitir que dos de las constantes no se anulen. Son once los casos adicionales que se obtienen:

$$x_1' = x_1 + a_1 t, \qquad x_2' = x_2 + a_2 t, \tag{11}$$
$$x_1' = x_1 + (a_5 x_2 + a_1)t, \qquad x_2' = x_2, \tag{12}$$
$$x_1' = x_1 + a_1 t, \qquad x_2' = \exp(a_6 t) x_2, \tag{13}$$
$$x_1' = \exp(a_3 t) x_1, \qquad x_2' = x_2 + a_2 t, \tag{14}$$
$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2 + (a_4 x_1 + a_2)t, \tag{15}$$
$$x_1' = \exp(a_3 t) x_1, \qquad x_2' = \exp(a_6 t) x_2, \tag{16}$$
$$x_1' = \exp(a_3 t) x_1 /(1 - a_8 x_2 t), \qquad x_2' = x_2 /(1 - a_8 x_2 t), \tag{17}$$
$$x_1' = x_1 /(1 - a_7 x_1 t), \qquad x_2' = (x_2 + a_4 x_1 t)/(1 - a_7 x_1 t), \tag{18}$$
$$x_1' = (x_1 + a_5 x_2 t)/(1 - a_8 x_2 t), \qquad x_2' = x_2 /(1 - a_8 x_2 t), \tag{19}$$
$$x_1' = x_1 /(1 - a_7 x_1 t), \qquad x_2' = \exp(a_6 t) x_2 /(1 - a_7 x_1 t), \tag{20}$$
$$x_1' = x_1 /[1 - (a_7 x_1 + a_8 x_2)t], \qquad x_2' = x_2 /[1 - (a_7 x_1 + a_8 x_2)t], \tag{21}$$

Finalmente, Mitchell concluía su artículo con la siguiente afirmación: cualquier investigación empírica sobre las fuentes del progreso técnico debía buscar la identificación de aquellos tipos de progreso técnico que no pueden ser absorbidos por la función de producción mediante efectos a escala. El listado de Mitchell incluye un amplio número de modelos de progreso de tipo Lie (i.e. verificando las propiedades de grupo uniparamétrico), muchos de los cuales no han sido empleados aún en estudios empíricos relativos a la Economía. En cualquier caso, dicho listado no es exhaustivo y creemos que sería de interés obtener un listado completo que permitiese determinar todos los modelos válidos para tratamientos empíricos.

## 4. TEORÍA DE LIE Y FIJACIÓN DE PRECIOS PARA OPCIONES CON BARRERA MÓVIL Y CON PARÁMETROS TEMPORALES

A principios del presente siglo, Lo y Hui (2001, 2002) presentaron una metodología basada en las álgebras de Lie, que permitía fijar el precio de diferente derivados financieros con parámetros dependientes del tiempo. La presente sección muestra el siguiente paso en la investigación de dichos autores, aplicando la metodología anterior al problema de la fijación de precios de las opciones con barrera móvil (Lo y Hui, 2006). La metodología anteriormente indicada aplicaba como fundamentación teórica el Teorema de Wei-Norman (Wei y Norman, 1963) y que nunca se había aplicado al campo de las Finanzas. Lo y Hui ajustan y aplican este modelo basado en las álgebras de Lie al problema de la evaluación de las opciones con barrera móvil y con parámetros dependientes del tiempo. Para realizar dicha evaluación, supusieron que el valor del activo subyacente sigue el siguiente proceso de difusión CEV (puede ser conveniente recordar aquí lo visto en la Sección 2):

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)^{\beta/2}\, dZ(t), \qquad 0 \le \beta < 2 \tag{22}$$

donde $\mu(t)$ es la media del precio de las acciones en el instante $t$, $\sigma(t)\cdot S(t)^{\beta/2}$ es la varianza instantánea de dicho precio, $dZ(t)$ es un proceso de Wiener y $\beta$ es el factor de elasticidad.

Partiendo de la ecuación (22), la varianza instantánea del cambio porcentual en el precio se define como $\sigma(t)^2 / S(t)^{2-\beta}$, siendo además una función inversa directa del precio de las acciones. Lo y Hui usaron sus métodos previos basados en álgebras de Lie y derivaron los núcleos analíticos de las fórmulas de fijación de precios para las opciones con barrera móvil y parámetros dependientes del tiempo: tanto las de tipo *up-and-out* como las de tipo *down-and-out*. De hecho, empleando el principio del máximo para ecuaciones parabólicas en derivadas parciales (dado por Friedman, 1964), la aproximación y metodología propuesta por Lo y Hui podía aplicarse para dar muy estrictamente las cotas superiores e inferiores de los precios exactos de las opciones CEV con barreras fijas. Posteriormente, De Sanctis (2007) presentó una revisión sobre los trabajos relativos a la fijación de precios de derivados financieros con parámetros dependientes del tiempo. En dicha revisión, se explicaba cómo se fijarían los precios empleando tanto la ecuación de Black-Scholes como el modelo CEV[14]. En las conclusiones de su artículo, De Sanctis indica que las soluciones obtenidas por Lo y Hui pertenecen a un subespacio de funciones invariantes bajo la acción del grupo de Lie que está asociado de manera natural al álgebra de Lie que usan Lo y Hui para resolver la ecuación. También comenta la existencia de diversos resultados que permitirían describir algebraicamente dichos subespacios de funciones, con lo que la ecuación en derivadas parciales de partida podría reducirse a un conjunto de ecuaciones algebraicas[15]. Centrándonos en las expresiones y cálculos matemáticos, Lo y Hui (2006) partieron de la ecuación diferencial de operador lineal de primer orden:

$$\frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t) \quad ; \qquad U(0) = 1 \qquad (23)$$

donde $H$ y $U$ eran operadores lineales dependientes del tiempo en un espacio de Banach o uno de dimensión finita. El Teorema de Wei-Norman determina la expresión que tienen las soluciones de la ecuación (23) en un entorno del instante inicial $t = 0$. Dicho Teorema solo exigía como hipótesis que el operador $H$ pudiese escribirse como combinación lineal de los elementos de una base de un álgebra de Lie de dimensión finita; es decir, que pudiese escribirse como sigue:

$$H(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(t) L_n, \qquad (24)$$

[14] Para este último modelo, De Sanctis repite todos los cálculos previamente realizados por Lo y Hui (2006).

[15] No obstante, no se explicitan ni se comentan cuáles son los resultados a los que se hace referencia ni se concreta cómo se pasaría de la ecuación en derivadas parciales al sistema de ecuaciones algebraicas.

siendo $a_n$ funciones escalares dependientes del tiempo y $L_n$ los elementos en una base de un álgebra de Lie resoluble *N*-dimensional o generadores del álgebra de Lie simple real desplegada de dimensión 3. Bajo esta hipótesis, el Teorema de Wei-Norman afirma que el operador $U$ de la expresión (23) es expresable en un entorno de $t=0$ de la siguiente forma:

$$U(t) = \prod_{n=1}^{N} \exp[g_n(t) L_n] \qquad (25)$$

siendo $g_n$ funciones escalares dependientes de la variable $t$ y a determinar *a posteriori*. Lo y Hui dan un ejemplo en el que calculan dichas funciones $g_n$, lo cual hacen sustituyendo la ecuación (25) en la (23) y comparando dicho resultado con la expresión (22), término a término. De este modo, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dg_n(t)}{dt} = \sum_{m=1}^{N} \eta_{nm} a_m(t), \qquad g_n(0) = 0 \qquad (26)$$

donde $\eta_{nm}$ son funciones no lineales de las $g_n$. El procedimiento anterior les permitía a Lo y Hui reducir la ecuación diferencial (22) al conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales dado en (26), cuya resolución es más sencilla.

Si se aplica todo lo anterior a las opciones CEV europeas estándares con parámetros dependientes del tiempo, se escribiría la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial P(S,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma(\tau)^2 S^{\beta} \frac{\partial^2 P(S,\tau)}{\partial S^2} + [r(\tau) - d(\tau)] S \frac{\partial P(S,\tau)}{\partial S} - r(\tau) P(S,\tau) \qquad (27)$$

para $0 \le \beta < 2$. En esta ecuación[16], $P$ es el valor de la opción, $S$ es el precio del activo subyacente, $\tau$ es el tiempo al vencimiento, $\sigma$ es la volatilidad, $r$ es la tasa de interés libre de riesgo y $d$ son los dividendos generados. La ecuación (27) puede reescribirse como sigue, mediante el cambio de variables $x = \sqrt{S^{(2-\beta)}}$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \tau} = \frac{1}{8}\tilde{\sigma}(\tau)^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left[\tilde{\mu}(\tau)x - \frac{(4-\beta)\tilde{\sigma}(\tau)^2}{4(2-\beta)x}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} +$$

$$\left[\frac{(4-\beta)\tilde{\sigma}(\tau)^2}{8(2-\beta)x} - r(\tau) - \frac{\tilde{\mu}(t)}{2}\right] u(x,\tau) \equiv H(\tau) u(x,\tau), \qquad (28)$$

[16] La ecuación (27) es introducida en Cox (1975) y en Cox y Ross (1976).

siendo $\tilde{\sigma}(\tau) = (2-\beta)\sigma(\tau),\ \tilde{\mu}(\tau) = (2-\beta)[r(\tau) - d(\tau)]$ y $u(x,\tau) = xP(S,\tau)$ . Esta nueva forma de expresar la ecuación (27), les permitió a Lo y Hui dar otra fórmula para el operador $H(\tau)$ mediante los generadores de un álgebra de Lie. La expresión a la que hacemos referencia para $H$ es la siguiente:

$$H(\tau) = a_1(\tau)K_+ + a_2(\tau)K_0 + a_3(\tau)K_- + b(\tau), \qquad (29)$$

donde

$$K_- = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{4-\beta}{(2-\beta)x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{4-\beta}{(2-\beta)x^2}\right]$$
$$K_0 = \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2-\beta}\right), \qquad K_+ = \frac{1}{2}x^2$$
$$a_3(\tau) = \frac{1}{4}\tilde{\sigma}(\tau)^2, \qquad a_2(\tau) = \tilde{\mu}(\tau)$$
$$a_1(\tau) = 0, \qquad b(\tau) = -\frac{1-\beta}{2(2-\beta)}\tilde{\mu}(\tau) - r(\tau) \qquad (30)$$

Como se indicó antes, la expresión (29) buscaba escribir el operador $H$ como una combinación de los generadores de un álgebra de Lie. Pues bien, dichos generadores son los operadores $K_+, K_0$ y $K_-$ que aparecen en la ecuación (30). De hecho, los tres operadores anteriores generan el álgebra de Lie simple su(1,1), cuya ley viene dada por los siguientes corchetes no nulos:

$$[K_+, K_-] = -2K_0, \qquad [K_0, K_\pm] = \pm K_\pm \quad .$$

Haciendo uso de las ecuaciones (28) y (29), Lo y Hui definieron el operador de evolución $U(\tau,0)$, como sigue:

$$u(x,\tau) = \exp\left[\int_0^\tau d\tau'\, b(\tau')\right] \cdot U(\tau,0) \cdot u(x,0) \qquad (31)$$

Con lo que, sustituyendo la expresión anterior en (28), obtuvieron la ecuación siguiente, para el operador de evolución:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}U(\tau,0) = H_I(\tau)U(\tau,0), \qquad U(0,0) = 1 \qquad (32)$$

siendo:

$$H_I(\tau) = a_1(\tau)K_+ + a_2(\tau)K_0 + a_3(\tau)K_- \ . \qquad (33)$$

Debido a que el álgebra de Lie su(1,1) es simple y desplegada de dimensión 3, la hipótesis del Teorema de Wei-Norman[17] se satisface y el operador de evolución $U(\tau,0)$ puede ser expresado mediante la siguiente fórmula explícita:

$$U(\tau,0) = \exp[c_1(\tau)K_+] \cdot \exp[c_2(\tau)K_0] \cdot \exp[c_3(\tau)K_-]. \qquad (34)$$

Como se indicó anteriormente, los coeficientes $c_i(\tau)$ para la expresión del operador $U(\tau,0)$, dados por el Teorema de Wei-Norman, se calcularían sustituyendo la ecuación (34) en la (32) y comparando el resultado obtenido con la expresión (33). De este modo, Lo y Hui dieron una fórmula exacta y explícita para el operador $U(\tau,0)$ y, en consecuencia, para la solución $u(x,\tau)$, para la ecuación (28) de fijación de los precios.

La expresión anteriormente obtenida para fijar los precios de las opciones les permitió dar las correspondientes fórmulas para las opciones con barrera móvil. Debe tenerse en cuenta que, para ello, tuvieron que añadir a los cálculos una función auxiliar que recogiese la información de la barrera. El resultado final fue el que mostramos a continuación:

$$\tilde{u}(x,\tau) \equiv \exp[\gamma \cdot K_+] \cdot u(x,\tau) = \exp\left[\int_0^\tau d\tau' b(\tau')\right] \cdot \exp[\gamma K_+] \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma \exp[c_2(\tau)]}{1+\gamma c_3(\tau)} K_+\right\} \times$$
$$\exp\{[c_2(\tau) - 2\ln|1+\gamma c_3(\tau)|]K_0\} \times \exp\left[\frac{c_3(\tau)}{1+\gamma c_3(\tau)} K_-\right] \cdot \tilde{u}(x,0). \qquad (35)$$

En concreto, Lo y Hui usaron todos los cálculos anteriores con el fin de calcular las opciones con barrera móvil tanto de tipo *up-and-out* como las de tipo *down-and-out*. Obviamente, las expresiones obtenidas requerían ser escritas como funciones exponenciales e integrales en las que intervienen integrales de Fourier-Bessel, funciones de Bessel e incluso la transformada de Weber.

De este modo, Lo y Hui obtuvieron las formulas de fijación de precio para las opciones con barrera móvil, usando técnicas basadas en la aplicación de las álgebras de Lie y dentro del modelo CEV.

Igualmente, abrieron una línea de trabajo que permite realizar comparaciones eficientes de fijaciones de precios, suministrando herramientas con las que precisar la gestión de riesgos en derivados equitativos con barrera. De hecho, tales herramientas solo requerirían considerar la tasa de interés, la volatilidad y los dividendos en el modelo de valoración de la opción CEV.

---

[17] Recuérdese que la hipótesis del Teorema de Norman-Wei aparece en la expresión (24) y que se corresponde a la expresión (33) para la ecuación diferencial (32), correspondiente al problema de las opciones CEV europeas.

## 5. CONCLUSIONES

Queremos concluir el presente artículo enfatizando las muchas posibilidades que presenta la aplicación de la Teoría de Lie al ámbito de la Economía y las Finanzas. Aunque en estas páginas solo se muestran explícitamente dos posibles usos de esta Teoría, son muchas más las referencias existentes, las cuales permiten vislumbrar otros muchos temas que podrían abordarse desde la perspectiva de la Teoría de Lie.


## AGRADECIMIENTOS

Los autores quisiéramos agradecer a los revisores y a los editores todas las sugerencias y comentarios realizados, los cuales han resultado sumamente valiosos para mejorar la calidad del presente artículo.


## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


M. Armstrong (1996): Multiproduct Nonlinear Pricing. *Econometrica* **64**, pp. 51–75.

S. Basov (2004): Lie groups of partial differential equations and their application to the multidimensional screening problems. *Econometric Society 2004 Australasian Meetings* **44**.

T. Björk (2001): A geometric view of interest rate theory. En: E. Jouni, J. Cvitanic and M. Musuela (eds.): *Option pricing, Interest Rates and Risk Management*, Cambridge University Press, pp. 241–277.

T. Björk (2004): On the Geometry of Interest Rate Models. En: R.A. Carmona, E.C. Çinlar, I. Ekeland, E. Jouini, J. A. Scheinkman and N. Touzi (eds.): *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2003*, Springer-Verlag, pp. 133–216.

T. Björk and C. Landén (2002): On the construction of finite dimensional realizations for nonlinear forward rate models. *Fin. Stoch.* **6**, pp. 303–331.

J. Cox (1975): Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions. *Working Paper*, Stanford University.

J.C. Cox and S.A. Ross (1976): The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics* **3,** pp. 145–166.

A. De Sanctis (2007): Lie Theory to Value Financial Derivatives with Time Dependent Parameters. *Int. Math. Forum* **2**:10, pp. 499–503.

L.P. Eisenhart (1933): *Continuous groups of transformations*, Princeton University Press.

E.M. Fedriani y Á.F. Tenorio (2006): Progreso técnico: una aproximación desde la Teoría de Grupos de Transformaciones de Lie. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa* **1**, pp. 5–24.

A. Friedman (1964): *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall.

R.M. Gaspar (2006): Finite Dimensional Markovian Realizations for Forward Price Term Structure Models. En: A.N. Shiryaev, M.R. Grossinho, P.E. Oliveira and M.L. Esquível (eds.): *Stochastic Finance*, Springer, pp. 265–320.

I. Hernández, C. Mateos, J. Núñez and Á.F. Tenorio (2008): Lie Theory: Applications to Problems in Mathematical Finance and Economics. *Applied Mathematics and Computation*. To appear.

I. Karatsas and S. Shreve (1997): *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag.

C.F. Lo, C.H. Hui and P.H. Yuen (2000a): Constant elasticity of variance option pricing model with time-dependent parameters. *Int. J. Theor. Appl. Fin.* **3**:4, pp. 661–674.

C.F. Lo, C.H. Hui and P.H. Yuen (2000b): Option risk measurement with time-dependent parameters. *Int. J. Theor. Appl. Fin.* **3**:3, pp. 581–589.

C.F. Lo and C.H. Hui (2001): Valuation of financial derivatives with time-dependent parameters. *Quantitative Finance* **1**, pp. 73–78.

C.F. Lo and C.H. Lui (2002): Pricing multi-asset financial derivatives with time-dependent parameters-Lie algebraic approach. *Int. J. Math. Math. Sci.* **32**:7, pp. 401–410.

C.F. Lo and C.H. Lui (2006): Lie algebraic approach for pricing moving barrier options with time-dependent parameters, *J. Math. Ann. Appl.* **323**:2, pp. 1455–1464.

R. Lu and Y.-H. Hsu (2005): Valuation of Standard Options under the Constant Elasticity of Variance Model, *Int. J. Bus. Econ.* **4**:2, pp. 157–165.

T.M. Mitchell (1987): Toward empirical applications of Lie-group technical progress functions, *Economics Letters* **25**, pp. 111–116.

S. Polidoro (2003): A Nonlinear PDE in Mathematical Finance. En: F. Brezzi, A. Buffa, S. Corsaro and A. Murli (eds.): *Numerical Mathematics and Advanced Application*, Springer, pp. 429–433.

R. Sato (1980): The impact of technical change on the holotheticity of production functions. *Economic Studies* **47**, pp. 767–776.

R. Sato (1981): *Theory of technical change and economic invariance. Application of Lie groups*, Academic Press.

R. Sato and R.V. Ramachandran (1998): *Symmetry and Economic Invariance: an introduction*, Kluwer.

R.M. Solow (1961): Comment on Stigler. En: *Output, Input and Productivity Measurement*, Princeton University Press, pp. 64–68.

G.J. Stigler (1961): Economic problems in measuring changes in productivity. En: *Output, Input and Productivity Measurement*, Princeton University Press, pp. 47–63.

J. Wei and E. Norman (1963): Lie algebraic solution of linear differential equations. *Journal of Mathematical Physics* **4**, pp. 575–581.

R. Wilson (1993): *Non Linear Pricing*, Oxford University Press.